

Львівський національний університет імені Івана Франка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Яджак Наталія Степанівна

УДК 517.958:539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

**РОЗРОБЛЕННЯ МОДЕЛЕЙ РОСТУ КОРОТКИХ ТРИЩИН
У МЕТАЛЕВИХ МАТЕРІАЛАХ ЗА ТРИВАЛИХ НАВАНТАЖЕНЬ
ТА ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ СЕРЕДОВИЩ**

113 «Прикладна математика»

11 «Математика та статистика»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Н. С. Яджак

Наукові керівники (консультанти):

Андрейків Олександр Євгенович, д-р техн. наук, проф., чл.-кор. НАН України;
Лапуста Юрі, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Львів – 2021

АНОТАЦІЯ

Яджак Н.С. Розроблення моделей росту коротких тріщин у металевих матеріалах за тривалих навантажень та експлуатаційних середовищ. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика». – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2021.

Дисертація присвячена дослідженню поширення коротких втомних тріщин у металевих матеріалах та математичному моделюванню їх росту. Метою дисертаційної роботи є розроблення моделей, а саме диференціальних рівнянь з відповідними початковими та кінцевими умовами, для опису кінетики поширення коротких та малих втомних тріщин. Необхідність таких моделей зумовлена тим, що поведінка коротких і довгих тріщин відрізняється одна від одної, а підходи до дослідження довгих тріщин на основі таких параметрів як коефіцієнти інтенсивності напружень, не можуть коректно описати поширення коротких тріщин. З іншого боку, врахування коротких тріщин при визначенні довговічності елементів конструкцій сприяє отриманню більш коректних результатів.

Для представлення теми поширення коротких втомних тріщин і відповідних підходів до їх моделювання, у першому розділі звернуто увагу на деякі основні аспекти в області механіки руйнування і поширення коротких тріщин. По-перше, подано огляди критеріїв механіки руйнування за статичного навантаження, включаючи енергетичні критерії Гріффітса, Орована, Черепанова та Райса, силовий критерій Ірвіна, а також деформаційні критерії та пов'язані з ними критерій критичного розкриття вершини тріщини й δ_c -модель Леонова-Панасюка. По-друге, викладено принципи поширення втомних тріщин та основні підходи до їх моделювання. По-третє, розглянуто фундаментальні аспекти поширення коротких тріщин та моделі, що описують кінетику їх росту.

Другий розділ містить результати дослідження росту коротких тріщин у пластинах за нормального відриву з урахуванням та без урахування впливу корозивного середовища. Для побудови математичної моделі поширення короткої втомної тріщини в тонкій пластині, підданій циклічному розтягу, застосовано оснований на першому законі термодинаміки енергетичний підхід. Враховуючи, що коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) не використовується для опису поширення коротких тріщин, модель побудовано в параметрах розкриття у вершині тріщини (РВТ). У зв'язку з цим запропоновано формулу для визначення РВТ, яка враховує відносний рівень навантаження пластини. На основі запропонованої формули визначено довговічність пластини з тріщиною та проведено порівняння з відповідною довговічністю, отриманою за допомогою моделі у параметрах КІН. На підставі цих даних встановлено, що модель на основі коефіцієнта інтенсивності напружень дає завищені результати, особливо при малій відносній довжині тріщини, що сприяє ризику непередбаченого руйнування, а не запасу міцності.

Запропоновану модель адаптовано для врахування впливу корозивного середовища на поширення коротких втомних тріщин.

Загальну довговічність елемента конструкцій зазвичай поділяють на період зародження та період докритичного росту тріщини, причому період зародження тріщини займає значну частину довговічності. У зв'язку з цим для визначення довговічності тонких пластин з тріщинами, що зароджуються у вершинах концентраторів напружень, запропоновано відповідну модель у деформаційних параметрах, яка дозволяє визначити обидва періоди. При порівнянні результатів, отриманих за допомогою моделі, з опублікованими експериментальними даними для задачі про розтяг пластини з двома боковими концентраторами напружень отримано добру збіжність.

У третьому розділі розглянуто поширення малих втомних тріщин у товстих пластинах за дії поперечного та повздовжнього зсувів. У цьому випадку до пластини прикладено три види навантажень, що викликають відповідні напружені стани. Для кожного режиму навантаження здійснено постановку

задачі в параметрах напружень та переміщень. Використовуючи інтегральне перетворення Фур'є та визначення напружень і переміщень через гармонічні функції, постановки задач переформульовано із використанням гармонічних функцій. Порівняння цих постановок задач показало, що застосування гармонічних функцій дозволило звести задачі поперечного та повздожнього зсувів до задачі нормального відриву з точністю до сталих множників. Крім того, для задач поперечного та повздожнього зсувів виведено відповідні формули для визначення розкриття тріщини біля контуру з використанням методу еквівалентних напружених станів, чисельного та математичного аналізу.

На основі еквівалентності задач нормального відриву, поперечного й повздожнього зсувів та застосування енергетичного підходу, розроблено математичну модель у параметрах розкриття тріщини біля контуру для опису поширення малої втомної тріщини за дії поперечного та повздожнього зсувів. Використовуючи ці моделі, побудовано графічні залежності довговічності від початкової довжини тріщини для обох режимів навантаження. Як і у випадку тонкої пластини, довговічність, розрахована з використанням параметрів КІН, більша від довговічності за параметрами розкриття тріщини.

Розглянуто задачу поширення малої втомної тріщини у товстих пластинах за сумісної дії поперечного та повздожнього зсувів. На основі енергетичного підходу, формул для визначення розкриття тріщини біля контуру та існуючих досліджень про еквівалентність механізмів росту втомних тріщин за поперечного та повздожнього зсувів, отримано математичну модель для визначення довговічності товстих пластин з тріщинами за одночасного впливу навантажень II та III типу. Крім того, досліджено вплив різних комбінацій значень навантажень поперечного та повздожнього зсувів на довговічність.

У четвертому розділі представлено результати дослідження поширення малих плоских втомних тріщин опуклого контуру в тривимірних тілах. Для розв'язання таких задач, крім енергетичного підходу, використано узагальнений метод еквівалентних площ. Згідно з цим методом, поверхневу тріщину довільного опуклого контуру можна замінити круговою тріщиною тієї ж

початкової площі. У цьому випадку запропоновано відповідну формулу для визначення розкриття тріщини біля контуру і математичну модель, що описує поширення тріщини. Отриману модель апробовано на задачі розтягу тривимірного тіла з поверхневою еліптичною тріщиною. Задачу розв'язано аналітично з використанням узагальненого методу еквівалентних площ та чисельно методом Рунге-Кутта. Порівняння отриманих результатів свідчить про високу точність запропонованого аналітичного розв'язку.

Також розглянуто комплексну задачу поперечного та повздовжнього зсувів для тривимірного тіла з тріщиною, яка полягає в поширенні однієї частини контуру тріщини за механізмом поперечного зсуву, а іншої – за механізмом повздовжнього зсуву. Для цього розглянуто задачу кручення торсіону з малою еліптичною тріщиною, яку у два етапи наближено зведено до задачі розтягу простору з еліптичною тріщиною. Довговічність тіла знайдено шляхом чисельного розв'язання системи диференціальних рівнянь, що описують поширення тріщини у напрямі кожної з її головних пів осей.

У дисертації розглянуто й неінваріантність підходу на основі коефіцієнтів інтенсивності напружень, пов'язану із застосуванням КІН як основного параметра при моделюванні поширення коротких втомних тріщин. Для подальшого вивчення цієї проблеми проведено числовий експеримент. З цією метою до пластини прикладали зростаюче навантаження та щоразу покроково збільшували довжину тріщини. Отримана залежність між параметрами КІН K і швидкістю росту тріщини V показує, що одне значення коефіцієнта інтенсивності напружень відповідає декільком різним значенням швидкості росту тріщини, розташованим на паралельних кривих залежно від рівня прикладеного навантаження. Далі досліджено зміну характеру залежності $V \sim K$ під час використання параметра розкриття у вершині тріщини замість коефіцієнта інтенсивності напружень δ_t . Використовуючи запропоновану модель, співвідношення $V \sim K$ перетворено на співвідношення $V \sim \delta_t$. На отриманій кривій існує однозначна відповідність між розкриттям вершини

тріщини δ_i і швидкістю її росту V , що пояснюється врахуванням рівня навантаження в процесі визначення РВТ.

Такі числові експерименти проведено для задач поширення тріщин у товстих пластинах за поперечного та повздовжнього зсувів, втомних та корозійно-втомних тріщин нормального відриву в тонких пластинах та плоских поверхневих тріщин у тривимірних тілах за нормального відриву. У всіх розглянутих випадках отримано аналогічні результати: важливість врахування рівня навантаження при моделюванні поширення малих втомних тріщин і, відповідно, коректність застосування підходу через розкриття вершини тріщини.

Таким чином, наукова новизна дисертації полягає в розроблених коректних математичних моделях поширення коротких втомних тріщин у деформаційних параметрах розкриття у вершині тріщини і запропонованих формулах для наближеного їх визначення. До нових результатів відноситься також й адаптація цієї моделі на випадок дії корозивного середовища, а також сформульовані математичні моделі для визначення періодів зародження і докритичного росту тріщин у вершинах концентраторів напружень у пластинах. Крім того, вагомим внеском дослідження є розв'язання пружних задач поперечного та повздовжнього зсувів шляхом їх зведення до задачі нормального відриву з використанням постановки задачі в гармонічних функціях. Один із нових результатів дисертації полягає в адаптації згаданих раніше двовимірних моделей до випадку тривимірних елементів конструкцій для дослідження поширення малих втомних тріщин нормального відриву, поперечного та повздовжнього зсувів та визначення довговічності цих елементів. У результаті, низку актуальних інженерних задач розв'язано із застосуванням запропонованої теорії, що становить практичну цінність отриманих теоретичних результатів.

Ключові слова: втома, довговічність, коефіцієнт інтенсивності напружень, корозивне середовище, короткі тріщини, малі тріщини, математична модель, металеві матеріали, механіка руйнування, нормальний відрив, повздовжній зсув, поперечний зсув, поширення тріщин, розкриття тріщини у вершині, циклічне навантаження.

Список публікацій здобувачки

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. **N. Yadzhak**, “Generalization of the equivalent area method for the case of short fatigue cracks in a three-dimensional body,” *Visnyk of the Lviv University*, no. 89, Series Mech. Math., pp. 106-122, 2020.
2. O. Andreykiv, O. Hembara, I. Dolinska, Y. Sapuzhak, and **N. Yadzhak**, “Prediction of residual service life of oil pipeline under non-stationary oil flow taking into account steel degradation,” in *Degradation Assessment and Failure Prevention of Pipeline Systems. Lecture Notes in Civil Engineering*, G. Bolzon, G. Gabetta, and H. Nykyforchyn, Eds. Cham: Springer, 2020, pp. 203-216.
3. Y. Lapusta, O. Andreikiv, and **N. Yadzhak**, “Short crack problem in delayed fracture mechanics,” *Procedia Structural Integrity*, vol. 16, pp. 105-112, 2019.
4. O. E. Andreikiv and **N. S. Shtayura**, “Computational models of fatigue cracks growth in metallic materials under the action of force and physicochemical factors,” *Materials Science*, vol. 54, no. 4, pp. 465-476, 2019.
5. O. E. Andreikiv, A. R. Lysyk, **N. S. Shtayura**, and A. V. Babii, “Evaluation of the residual service life of thin-walled structural elements with short corrosion-fatigue cracks,” *Materials Science*, vol. 53, no. 4, pp. 514-521, 2018.
6. O. Andreykiv, **N. Shtayura**, and R. Yarema, “Energy-based approach to evaluation of short fatigue crack growth rate in plates,” *Strength of Materials*, vol. 49, no. 6, pp. 778-787, 2017.
7. С. Штаюра та **Н. Штаюра**, «Аналіз впливу водню на механічні характеристики середньокарбоневих сталей,» *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск «Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів»*, № 12, С. 58-63, 2018.
8. С. Штаюра, Р. Костів, І. Вергун, та **Н. Штаюра**, «Вплив водню за непропорційного двовісного навантаження на деформування та міцність сталі 20,» *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск*

«Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів», № 11, С. 76-81, 2016.

9. С. Штаюра, Р. Костів, І. Вергун, та **Н. Штаюра**, «Побудова діаграм руйнування сталі 20 за двовісного навантаження циліндричних порожнинних зразків і дії водню,» *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск «Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів»*, № 10, С. 170-175, 2014.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

10. О. Є. Андрейків, Ю. М. Лапуста, та **Н. С. Яджак**, «Визначення залишкового ресурсу тонкостінних елементів конструкцій з короткими тріщинами,» *VI Міжнародна науково-технічна конференція «Пошкодження матеріалів під час експлуатації, методи його діагностування і прогнозування»*, Тернопіль, 24-27 вересня 2019, С. 139-142.
11. Ю. Лапуста, О. Андрейків, та **Н. Штаюра**, «Оцінка залишкового ресурсу елементів конструкцій з механічно малими тріщинами за дії силових і фізико-хімічних факторів,» *Сучасні проблеми механіки і математики*, Львів, 22-25 травня 2018, том 2, С. 223-224.
12. **Н. С. Штаюра**, «Визначення залишкової міцності тонкостінних елементів конструкцій з короткими тріщинами,» *Наукові нотатки*, том 57, С. 187-189, 2017.
13. I. Panko, S. Shtayura, O. Panko, and **N. Shtayura**, «Biaxial tension of the plate softened by the Griffith crack» *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*, no. 4, pp. 88-96, 2017.

ABSTRACT

Yadzhak N.S. Development of the models for short crack growth in metallic materials under long-term loading and operating environments. – Manuscript. The thesis for the Degree of Doctor of Philosophy, speciality 113 “Applied Mathematics”. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2021.

The thesis is devoted to short fatigue crack propagation in metallic materials and mathematical modelling of their growth. Thus, this thesis intends to develop models, namely differential equations with corresponding initial and final conditions, that can describe the kinetics of short and small fatigue crack propagation. The need for these models arises from the fact that the short and long crack behaviour differ from each other, and the approaches used for the investigation of long cracks that are based on the parameters of stress intensity factors fail to correctly describe the short crack propagation. On the other hand, consideration of short cracks while determining the lifetime of structural elements contributes to more correct results.

In order to introduce the subject of short fatigue crack propagation and the corresponding modelling approaches, the first chapter addresses some main aspects in the domain of fracture mechanics and short crack propagation. Firstly, the fracture mechanics criteria under static loading are reviewed, including the energy criteria by Griffith, Orowan, Cherepanov and Rice, Irwin’s force criterion, as well as the deformation criteria, the associated critical crack tip opening criterion and Leonov-Panasiuk’s δ_c -model. Secondly, the principles of fatigue crack propagation and the main approaches to its modelling are considered. Thirdly, the fundamental aspects of short crack propagation and the models that describe the kinetics of their growth are addressed.

The second chapter is concerned with short crack growth in plates under mode I with and without the influence of a corrosive environment. To start with, the energy approach based on the first law of thermodynamics is applied to build a mathematical model for short fatigue crack propagation in a thin plate subjected to fatigue tension.

Considering that the stress intensity factor (SIF) is inapplicable to the description of short crack propagation, the model is formulated in parameters of crack tip opening displacement (CTOD). Subsequently, a formula is proposed for the CTOD determination that takes into account the relative load level of the plate. Using the proposed formula, the lifetime of the cracked plate has been determined and compared to the corresponding lifetime obtained by the model in SIF parameters. Based on these data, it has been established that the SIF-based model gives overestimated results, especially at small relative crack length, that contributes to the risk of an unforeseen failure and not to the strength reserve.

Considering the action of a corrosive environment, the proposed model has been adapted to account for the effect of a corrosion medium on short fatigue crack propagation.

The total lifetime of a structural element is generally divided into the period of initiation and subcritical crack growth, while the crack initiation period occupies a substantial part of the lifetime. Therefore, the corresponding model in deformational parameters is proposed for the lifetime determination of thin plates with cracks arising at the tips of stress risers, which allows us to determine both periods. A good correlation has been obtained by comparison of the results by the model to the published experimental data for a tension problem of a plate with two edge stress risers.

The small fatigue crack propagation in thick plates under mode II and mode III loading is considered in the third chapter. In this case, the three types of loading are applied to the plate causing the corresponding loading modes. For each loading mode, the problem was formulated separately in the parameters of stress and displacements. Further, using the integral Fourier transform and the determination of stresses and displacements via harmonic functions, the three problem statements were reformulated through harmonic functions. The comparison of these problem statements has shown that the use of harmonic functions allowed us to reduce the mode II and the mode III problems to the mode I problem within the accuracy of the constant factors. Moreover, the corresponding formulas for CTOD determination have been derived for the mode II

and mode III problems using the method of equivalent stressed states, numerical and mathematical analysis.

Based on the equivalence of the mode I, mode II and mode III problems, as well as on the energy approach, the mathematical models in CTOD parameters are developed to describe the small fatigue crack growth under mode II and mode III loading. Using these models, the graphical relations are plotted between the lifetime and the initial crack length for both of these loading modes. As for the case of a thin plate, the lifetime calculated using the SIF-parameters is larger than the lifetime in the CTOD-parameters.

Furthermore, the problem of small fatigue crack propagation in thick plates under mixed-mode II+III has been considered. The application of the energy approach, the CTOD determination formulas and the existing studies on the equivalence of the mode II and mode III fatigue crack growth mechanisms resulted in the mathematical model for the lifetime determination of thick cracked plates under the simultaneous action of mode II and mode III loadings. In addition, the effect of various combinations of the mode II and mode III loading values on the lifetime has been studied.

The fourth chapter presents the research findings on the propagation of small surface fatigue cracks of convex contour in three-dimensional bodies. To solve this type of problem, the generalized equivalent area method is employed in addition to the energy approach. According to this method, a surface crack of an arbitrary convex contour can be replaced by a circular crack of the same initial area. In this case, the corresponding formula for the CTOD determination and the mathematical model describing crack propagation are proposed. The obtained model has been validated on the tension problem of a three-dimensional body with an elliptical surface crack. The problem was solved analytically using the generalized equivalent area method and numerically by the Runge-Kutta method. The comparison of these results indicates a good accuracy of the proposed analytical solution.

Furthermore, a complex mode II and mode III problem of a cracked three-dimensional body was addressed and consisted in the propagation of one part of the crack contour by the mode II mechanism and another part – by the mode III

mechanism. For this purpose, a twisting problem of a torsion bar with a small elliptical crack was considered. The problem was approximately reduced in two steps to the tension problem of a space with an elliptical crack. The lifetime of the solid was sought by the numerical solution of the system of differential equations describing the crack propagation on each of its major semi-axes.

Moreover, the thesis considers the non-invariance of the SIF-based approach, related to the application of the SIF as the main parameter in modelling the small fatigue crack propagation. In order to further investigate this problem, a numerical simulation has been conducted. For simulation purposes, loading of increasing level is applied to the plate and the crack length is augmented step-wise every time. The obtained relation between the SIF K and the crack growth rate V shows that one value of stress intensity factor relates to multiple different values of crack growth rate located on parallel curves depending on the level of the applied loading. Further, the change in the relation pattern was investigated under employment of the crack tip opening displacement parameter δ_t instead of the stress intensity factor. Therefore, the relation $V \sim K$ is transformed into the relation $V \sim \delta_t$ using the proposed model. On the obtained curve, a one-to-one correspondence exists between the crack tip opening displacement δ_t and its growth rate V , which can be explained by the consideration of the load level in the process of the CTOD determination.

These numerical experiments are conducted for the problems of mode II and mode III cracks in thick plates, mode I fatigue and corrosion-fatigue cracks in thin plates, as well as mode I flat surface cracks in three-dimensional bodies. All the considered cases indicated similar results: the importance of load level consideration while modelling small fatigue crack propagation and, correspondingly, the credibility of the crack tip opening displacement approach.

To summarise, the research contribution of the thesis consists in the developed mathematical models for short fatigue crack propagation in deformation parameters of crack tip opening displacement and the proposed formulas for the approximate CTOD determination. The adaptation of this model for the action of a corrosive environment

as well as formulation of mathematical models for determination of the initiation and subcritical crack growth periods at stress risers in plates belong to the novel results too. The research contribution includes also the solutions of the elastic mode II and mode III problems by reduction to the mode I problem using the problem statement in harmonic functions. One of the novel findings of the thesis consists in the adaptation of the mentioned earlier two-dimensional models to the case of three-dimensional structural elements to investigate the propagation of small fatigue mode I, mode II and mode III cracks and determination of the lifetime of these elements. Finally, a number of relevant engineering problems were solved by applying the proposed theory, which constitutes the practical value of the obtained theoretical results.

Keywords: corrosive environment, crack propagation, crack tip opening displacement, cyclic loading, fatigue, fracture mechanics, lifetime, mathematical model, metallic material, mode I, mode II, mode III, short crack, small crack, stress intensity factor.

Publication list of the PhD candidate

Publications containing the principal findings of the thesis:

1. N. **Yadzhak**, “Generalization of the equivalent area method for the case of short fatigue cracks in a three-dimensional body,” *Visnyk of the Lviv University*, no. 89, Series Mech. Math., pp. 106-122, 2020.
2. O. Andreykiv, O. Hembara, I. Dolinska, Y. Sapuzhak, and N. **Yadzhak**, “Prediction of residual service life of oil pipeline under non-stationary oil flow taking into account steel degradation,” in *Degradation Assessment and Failure Prevention of Pipeline Systems. Lecture Notes in Civil Engineering*, G. Bolzon, G. Gabetta, and H. Nykyforchyn, Eds. Cham: Springer, 2020, pp. 203-216.
3. Y. Lapusta, O. Andreikiv, and N. **Yadzhak**, “Short crack problem in delayed fracture mechanics,” *Procedia Structural Integrity*, vol. 16, pp. 105-112, 2019.
4. O. E. Andreikiv and N. S. **Shtayura**, “Computational models of fatigue cracks growth in metallic materials under the action of force and physicochemical factors,” *Materials Science*, vol. 54, no. 4, pp. 465-476, 2019.
5. O. E. Andreikiv, A. R. Lysyk, N. S. **Shtayura**, and A. V. Babii, “Evaluation of the residual service life of thin-walled structural elements with short corrosion-fatigue cracks,” *Materials Science*, vol. 53, no. 4, pp. 514-521, 2018.
6. O. Andreykiv, N. **Shtayura**, and R. Yarema, “Energy-based approach to evaluation of short fatigue crack growth rate in plates,” *Strength of Materials*, vol. 49, no. 6, pp. 778-787, 2017.
7. S. Shtayura and N. **Shtayura**, “Analiz vplyvu vodniu na mekhanichni kharakterystyky serednokarbonovykh stalei” [Analysis of hydrogen influence on mechanical characteristics of middle carbon steel], (in Ukrainian), *Physico-chemical Mechanics of Materials. Special Issue “Problems of Corrosion and Corrosion Protection of Materials”*, no. 12, pp. 58-63, 2018.
8. S. Shtayura, R. Kostiv, I. Verhun, and N. **Shtayura**, “Vplyv vodniu za neproportsiinoho dvovisnogo navantazhennia na deformuvannia ta mitsnist stali 20,” [Hydrogen influence on deformation and strength of steel 20 under

unproportional biaxial loading], (in Ukrainian), *Physico-chemical Mechanics of Materials. Special Issue "Problems of Corrosion and Corrosion Protection of Materials"*, no. 11, pp. 76-81, 2016.

9. S. Shtayura, R. Kostiv, I. Vergun, and **N. Shtayura**, "Pobudova diahram ruinuvannia stali 20 za dvovisnoho navantazhennia tsylindrychnykh porozhnynnykh zrazkiv i dii vodniu," [Charting fracture of steel 20 under biaxial load hollow cylindrical samples and hydrogen action], (in Ukrainian), *Physico-chemical Mechanics of Materials. Special Issue "Problems of Corrosion and Corrosion Protection of Materials"*, no. 10, pp. 170-175, 2014.

Publications certifying approval of the thesis contribution:

10. O. Andreykiv, Y. Lapusta, and **N. Yadzhak**, "Vyznachennia zalyshkovoho resursu tonkostinnykh elementiv konstruktsii z korotkymy trishchynamy," [Determination of residual resource of thin-walled structural elements with short cracks], (in Ukrainian), in *6-th International Scientific and Technical Conference "In-Service Damage of Materials, its Diagnostics and Prediction"*, Ternopil, 24-27.09.2019, pp. 139-142.
11. Y. Lapusta, O. Andreykiv, and **N. Shtayura**, "Otsinka zalyshkovoho resursu elementiv konstruktsii z mekhanichno malymy trishchynamy za dii sylovykh i fizyko-khimichnykh faktoriv," [Residual lifetime evaluation of structural elements with mechanical small cracks under loading and physicochemical factors], (in Ukrainian), in *Modern Problems of Mechanics and Mathematics*, Lviv, 22-25.05.2018, vol. 2, pp. 223-224.
12. **N. Shtayura**, "Vyznachennia zalyshkovoї mitsnosti tonkostinnykh elementiv konstruktsii z korotkymy trishchynamy," [Residual strength determination of thin-walled structural elements with the short cracks], (in Ukrainian), *Scientific Notes*, vol. 57, pp. 184-189, 2017.
13. I. Panko, S. Shtayura, O. Panko, and **N. Shtayura**, "Biaxial tension of the plate softened by the Griffith crack," *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*, no. 4, pp. 88-96, 2017.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	20
ВСТУП.....	26
РОЗДІЛ 1. ДЕЯКІ ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕХАНІКИ РУЙНУ-	
ВАННЯ І ПОШИРЕННЯ КОРОТКИХ ТРІЩИН.....	35
1.1. Критерії механіки руйнування за статичного навантаження	36
1.1.1. Енергетичні критерії.....	36
1.1.2. Основні механізми поширення тріщин	40
1.1.3. Силовий підхід	42
1.1.4. Деформаційні критерії.....	43
1.2. Втомне поширення тріщин	45
1.2.1. Поняття втоми та стадій втомного руйнування.....	46
1.2.2. Кінетичні діаграми втомного руйнування	48
1.2.3. Математичні моделі для опису поширення тріщин	51
1.3. Моделі та принципи дослідження росту коротких втомних тріщин.....	54
1.3.1. Основні означення та принципи.....	55
1.3.1.1. Класифікація коротких тріщин	55
1.3.1.2. Основні відмінності між короткими та довгими тріщи-	
нами	57
1.3.1.3. Діаграма Кітагава-Такагаші	58
1.3.2. Особливості та моделювання зародження коротких тріщин	60
1.3.2.1. Фактори впливу на зародження тріщин	60
1.3.2.2. Вплив мікроструктури на зародження тріщин	62
1.3.2.3. Моделювання зародження коротких тріщин	63
1.3.3. Моделювання поширення коротких втомних тріщин.....	66
1.3.3.1. Мікроструктурно та механічно короткі тріщини	66
1.3.3.2. Фізично короткі та довгі тріщини	68
1.3.4. Моделі росту коротких тріщин за дії корозивного середовища	70

1.3.5. Узагальнені моделі коротких та довгих тріщин	74
Висновки до розділу 1	77
РОЗДІЛ 2. ПОШИРЕННЯ КОРОТКИХ ВТОМНИХ ТРІЩИН У ПЛАСТИНАХ	78
2.1. Математична модель поширення втомних тріщин у пружно-пластичних пластинах	79
2.1.1. Енергетичний підхід для дослідження поширення тріщин у пластинах	79
2.1.2. Визначення розкриття у вершині короткої втомної тріщини	83
2.1.3. Визначення розкриття у вершинах тріщин за розтягу пластини з двома боковими тріщинами	87
2.2. Швидкість поширення коротких втомних тріщин у пластинах та їх довговічність.....	89
2.2.1. Визначення швидкості поширення тріщини у пластині та її довговічності	89
2.2.2. Швидкість поширення тріщини за кругового згину циліндричного зразка	93
2.3. Дослідження періоду зародження та докритичного росту коротких тріщин у вершинах концентраторів	95
2.3.1. Розроблення математичної моделі зародження втомної тріщини... ..	95
2.3.2. Математична модель для визначення довговічності пластини з гладким концентратором	102
2.4. Визначення залишкової довговічності елементів конструкцій з короткими втомними тріщинами за дії корозії.....	105
2.4.1. Побудова математичної моделі для визначення поширення корозійно-втомних тріщин.....	105
2.4.2. Визначення швидкості поширення коротких корозійно-втомних тріщин у пластинах.....	107

2.4.3. Визначення залишкової довговічності тонкостінних елементів конструкцій з короткими корозійно-втомними тріщинами	110
Висновки до розділу 2	112
РОЗДІЛ 3. РОЗРОБЛЕННЯ ТЕОРІЇ ДЛЯ ОЦІНКИ ДОВГОВІЧНОСТІ ПЛАСТИН З МАЛИМИ ТРІЩИНАМИ ПОПЕРЕЧНОГО І ПОВЗДОВЖНЬОГО ЗСУВІВ	114
3.1. Математична модель поширення малих тріщин за поперечного та повздовжнього зсувів.....	115
3.2. Знаходження розкриття біля контуру тріщини за допомогою методу порівняння еквівалентних напружених станів нормального відриву, поперечного та повздовжнього зсувів	119
3.2.1. Постановка задачі в інтегральній формі за нормального відриву .	120
3.2.2. Визначення розкриття біля контуру тріщини за поперечного зсуву	125
3.2.3. Визначення розкриття біля контуру тріщини за повздовжнього зсуву	130
3.3. Визначення довговічності пластини з тріщиною за поперечного та повздовжнього зсувів	134
3.3.1. Знаходження довговічності пластини через розкриття біля контуру тріщини	134
3.3.2. Знаходження довговічності пластини з тріщиною через КІН.....	138
3.3.3. Порівняння підходів до визначення довговічності пластини з тріщиною через РКТ та КІН	139
3.4. Поширення малих тріщин за сумісної дії поперечного та повздовжнього зсувів.....	143
Висновки до розділу 3	149

РОЗДІЛ 4. ОЦІНКА ДОВГОВІЧНОСТІ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ З МАЛИМИ ТРІЩИНАМИ ПОПЕРЕЧНОГО І ПОВЗДОВЖНЬОГО ЗСУВІВ ТА НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ	151
4.1. Дослідження поширення малих втомних тріщин з опуклим контуром..	152
4.1.1. Енергетичний підхід для поширення тріщин у тривимірних тілах	152
4.1.2. Узагальнення методу еквівалентних площ на випадок малих тріщин	155
4.1.3. Оцінка розкриття біля контуру малої кругової тріщини	157
4.1.4. Визначення довговічності тривимірного тіла з малою тріщиною.	161
4.2. Розв’язання задачі розтягу тіла з малою еліптичною тріщиною	163
4.2.1. Формулювання задачі та її розв’язання з використанням методу еквівалентних площ	163
4.2.2. Визначення довговічності тіла з еліптичною тріщиною за допомогою методу Рунге-Кутта	165
4.3. Розв’язання комплексної задачі поширення частин контуру тріщини за механізмами поперечного та повздовжнього зсувів	170
4.3.1. Математична модель поширення малої тріщини у торсіоні	170
4.3.2. Визначення довговічності торсіона з малою тріщиною	176
Висновки до розділу 4	180
ВИСНОВКИ.....	182
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	185
ДОДАТОК А.....	202

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Перелік основних умовних позначень, що використовуються у розділах 2 – 4 дисертаційної роботи, наведено нижче.

Нижній індекс i , що використовується у ряді позначень, позначає відповідний тип навантаження і може набувати наступних значень:

- $i = I$ – для нормального відриву (I тип навантаження);
- $i = II$ – для поперечного зсуву (II тип навантаження);
- $i = III$ – для повздовжнього зсуву (III тип навантаження);
- $i = II + III$ – для сумісної дії поперечного та повздовжнього зсувів;
- $i = II / III$ – для поперечного або повздовжнього зсуву при близьких значеннях відповідної величини за обох типів навантаження.

- $A_i(\xi)$ – гармонічна функція за відповідного типу навантаження;
- A_i – робота зовнішніх сил за відповідного типу навантаження;
- A_0 – коефіцієнт концентрації напружень;
- E – модуль Юнга;
- $E(k)$ – повний еліптичний інтеграл другого роду;
- $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – напрямні одиничні вектори декартової системи $Oxyz$;
- $J_1(\alpha)$ – циліндрична функція;
- J_p – полярний момент інерції;
- K_i – коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) за відповідного типу навантаження;
- K_{ifc} – критичне значення КІН за відповідного типу навантаження;
- K_{Ifcc} – критичне значення КІН за дії корозивного середовища за нормального відриву;
- $K_{i\max}$ – максимальне значення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_i за цикл за відповідного типу навантаження;
- $K_{i\min}$ – мінімальне значення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_i за цикл за відповідного типу навантаження;

- K_{Isc} – нижнє порогове значення КІН за дії корозивного середовища за нормального відриву;
- K_{ith} – порогове значення КІН, за якого тріщина не поширюється, за відповідного типу навантаження;
- $K_{ith\ max}$ – максимальне значення порогових коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{ith} за відповідного типу навантаження;
- $K_{ith\ min}$ – мінімальне значення порогових коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{ith} за відповідного типу навантаження;
- K_{II} – коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершин тріщини для аналогу задачі Гріффітса за нормального відриву;
- $K(k)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду;
- ΔK_i – розмах коефіцієнта інтенсивності напружень за відповідного типу навантаження;
- ΔK_{ifc} – розмах критичного коефіцієнта інтенсивності напружень за відповідного типу навантаження;
- ΔK_{ith} – розмах порогового коефіцієнта інтенсивності напружень за відповідного типу навантаження;
- k – геометричний параметр у еліптичному інтегралі, $\sqrt{1 - b^2/a^2}$;
- k' – геометричний параметр у еліптичному інтегралі, b/a ;
- L – для задачі тривимірного тіла з тріщиною: контур тріщини;
- l – пів довжина тріщини;
- l_{i0} – пів довжина початкової тріщини за відповідного типу навантаження;
- l_{i*} – критичне значення пів довжини тріщини за відповідного типу навантаження;
- l_{Ifp} – довжина стрибка тріщини при її втомному поширенні за нормального відриву;
- l_{Iin} – довжина зародженої тріщини за нормального відриву;
- l_{iK*} – критичний розмір тріщини, отриманий на основі силового підходу за відповідного типу навантаження;
- l_{ip} – пів довжина тріщини разом з пластичною зоною за відповідного типу навантаження;
- $l_{i\delta*}$ – критичний розмір тріщини, отриманий на основі деформаційного підходу за відповідного типу навантаження;
- ΔL_c – довжина стрибка тріщини;

- M – крутний момент;
 N_i – довговічність, або кількість циклів навантаження;
 N_{i*} – критичне значення кількості циклів навантаження (довговічність) за відповідного типу навантаження;
 N_{in} – період зародження тріщини;
 N_{iK*} – залишкова довговічність пластини з тріщиною, отримана на основі силового підходу за відповідного типу навантаження;
 N_{subcr} – період докритичного росту зародженої тріщини;
 $N_{i\delta*}$ – залишкова довговічність пластини з тріщиною, отримана на основі деформаційного підходу;
 ΔN_c – кількість циклів навантаження, що відповідає величині стрибка тріщини;
 P – циклічне навантаження нормального відриву;
 p_* – критичне значення навантаження нормального відриву;
 R – коефіцієнт асиметрії циклу;
 R_{iK} – коефіцієнт асиметрії циклу в параметрах КІН за відповідного типу навантаження;
 $R_{i\delta}$ – коефіцієнт асиметрії циклу в параметрах розкриття біля контуру тріщини за відповідного типу навантаження;
 S – площа тріщини;
 S_{I0} – початкова площа тріщини за нормального відриву;
 $S_{I0}^{(c)}$ – початкова площа кругової тріщини за нормального відриву;
 $S_{I0}^{(e)}$ – початкова площа еліптичної тріщини за нормального відриву;
 S_{I*} – критична площа тріщини за нормального відриву;
 ΔS_c – площа стрибка тріщини;
 T – період циклу навантаження;
 t – час;
 \vec{u} – вектор переміщень;
 u_x, u_y, u_z – компоненти вектора переміщень;
 V – швидкість поширення тріщини;
 W_i – енергія деформації за відповідного типу навантаження;

- W_{is} – пружна складова енергії деформації за відповідного типу навантаження;
- $W_{i0}^{(2)}$ – найбільше значення величини енергії за цикл, що не викликає втомного руйнування за відповідного типу навантаження;
- $W_{ip}^{(1)}(l)$ – частина роботи пластичних деформацій за активного навантаження в циклі, що залежить лише від довжини тріщини, за відповідного типу навантаження;
- $W_{ip}^{(1)}(S)$ – частина роботи пластичних деформацій за активного навантаження в циклі, що залежить лише від площі тріщини, за відповідного типу навантаження;
- $W_{ip}^{(2)}(t)$ – частина роботи пластичних деформацій в циклі під час розвантаження тіла і стиску зони передруйнування, що генерується тілом та залежить лише від часу, за відповідного типу навантаження;
- α_{i0} – експериментальна константа за відповідного типу навантаження;
- Γ_i – енергія руйнування тіла при зміні довжини тріщини за відповідного типу навантаження;
- γ_{ifc} – питома енергія руйнування в зоні передруйнування в процесі поширення втомної тріщини за відповідного типу навантаження;
- γ_{ifcc} – питома енергія руйнування в зоні передруйнування в процесі поширення втомної тріщини із врахуванням дії корозивного середовища за нормального відриву;
- γ_{it} – питома робота пластичних деформацій в зоні передруйнування в процесі поширення втомної тріщини за відповідного типу навантаження;
- δ_{ifc} – критичне розкриття у вершині тріщини за відповідного типу навантаження;
- δ_{ifcc} – критичне значення розкриття у вершині тріщини δ_{it} за дії корозії за нормального відриву;
- δ_{iscc} – нижнє порогове значення розкриття у вершині тріщини δ_{it} за дії корозії за нормального відриву;
- δ_{it} – розкриття у вершині тріщини (РВТ) за відповідного типу навантаження;
- δ_{it}' – безрозмірне розкриття у вершині тріщини за відповідного типу навантаження;
- δ_{ith} – нижнє порогове розкриття у вершині тріщини біля контуру, що не спричиняє її поширення, за відповідного типу навантаження;

- $+\delta_{it} + -\delta_{it}$ – розмах зміни розкриття у вершині тріщини при двосторонньому зсуві;
- $+\delta_{ith} + -\delta_{ith}$ – розмах зміни нижнього порогового значення розкриття у вершині тріщини за двостороннього зсуву;
- $\delta_{it\max}$ – максимальне розкриття у вершині тріщини за цикл за відповідного типу навантаження;
- $\delta_{it\min}$ – мінімальне за цикл розкриття у вершині тріщини за цикл за відповідного типу навантаження;
- $\delta_{ith\max}$ – максимальне значення нижнього порогового розкриття у вершині тріщини, при якому тріщина не поширюється за відповідного типу навантаження;
- $\delta_{ith\min}$ – мінімальне значення нижнього порогового розкриття у вершині тріщини, при якому тріщина не поширюється за відповідного типу навантаження;
- δ_{IG} – розкриття у вершині тріщини для задачі Гріффітса за нормального відриву;
- ε_{I0} – максимальна величина деформації біля концентратора в початковому стані (за відсутності тріщини) за нормального відриву;
- ε_{Ifc} – критичне значення деформації $\varepsilon_{I\max}$ за нормального відриву;
- $\varepsilon_{I\max}$ – максимальне значення деформації за цикл за нормального відриву;
- ε_{Ith} – нижнє порогове значення деформації за нормального відриву;
- ζ_i – безрозмірна довжина тріщини (відношення довжини тріщини до критичного значення розкриття у її вершині) за відповідного типу навантаження;
- η – корозивна стала;
- λ – відносна довжина тріщини (відношення довжини тріщини до пів ширини смуги);
- μ – модуль зсуву;
- ν – коефіцієнт Пуассона;
- ξ_i – рівень завантаженості пластини за відповідного типу навантаження;
- $\hat{\sigma}$ – тензор напружень;
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальні напруження вздовж осей декартових координат;

- σ_{IB} – границя міцності;
- σ_{it} – усереднене напруження в зоні передруйнування за відповідного типу навантаження;
- τ_i – інтенсивність зусиль зсуву за відповідного типу навантаження;
- τ_{i*} – критичне значення відповідного типу прикладеного навантаження зсуву;
- τ_{ip} – усереднене напруження зсуву в зоні передруйнування за відповідного типу навантаження;
- $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$ – дотичні напруження на відповідних координатних площинах;
- $\vec{\Phi}$ – гармонічна вектор-функція, що визначає дотичні та нормальні напруження у площині $z = 0$;
- Φ_1, Φ_2, Φ_3 – проекції вектор-функції на осі координат;
- ψ_i – відносна довжина тріщини (відношення початкової довжини тріщини до критичної її довжини) за відповідного типу навантаження.

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження

Дослідження елементів конструкцій на предмет коротких тріщин – визначення наявності таких тріщин в елементі або його складовій частині, обчислення довговічності елементів конструкцій з такими тріщинами, визначення швидкості росту коротких тріщин та ступеня їх небезпеки для безаварійної роботи конструкцій – є важливою галуззю дослідження в науці, техніці та індустрії. Автомобілі, мости, літаки, залізничні рейки – усі ці конструкції, що піддаються впливу змінного навантаження та, переважно, корозивного середовища, можуть слугувати практичним прикладом конструкцій та їх елементів, у яких виникають короткі втомні тріщини. Крім того, згідно з гіпотезою Міллера [1], короткі тріщини довжиною 2-4 мкм можуть бути в багатьох матеріалах ще до початку їх експлуатації.

Проблема коротких тріщин привернула значну увагу і стала окремим напрямом досліджень, оскільки ріст коротких тріщин керується іншими законами і для них не застосовуються стандартні підходи, що використовуються для оцінки довгих тріщин. Зокрема, зважаючи на розміри коротких тріщин, для їх вивчення не можна застосовувати лінійну механіку руйнування, на якій базується моделювання росту довгих тріщин [2]. Короткі тріщини мають свої особливості росту, зокрема більшу швидкість росту, її немонотонність зі збільшенням розмаху КІН, нижчі значення номінальних коефіцієнтів інтенсивності напружень у порівнянні з довгими тріщинами [3-5].

Хоча поширення коротких тріщин у металевих матеріалах є важливим предметом дослідження вже декілька десятиліть, проте досі залишається актуальним для подальшого вивчення. На сьогодні недостатньо розроблені універсальні математичні моделі для оцінки поширення втомних тріщин у широкому діапазоні їх довжин, включаючи як короткі, так і довгі тріщини [6]. Цей факт можна пояснити різною природою поширення коротких і довгих тріщин, а також складними механізмами, що лежать в основі процесу поширення

коротких тріщин. Крім того, зважаючи на різницю у механізмах та характері росту коротких та довгих тріщин, часто математичні моделі втомного руйнування, побудовані на основі експериментальних даних довгих тріщин, навіть після введення певних корекцій, які мали б враховувати особливості коротких тріщин, недостатньо точно прогнозують ріст втомних тріщин, починаючи від їх виникнення як коротких тріщин і до кінцевого критичного розміру [7].

Розроблення коректних та точних моделей поширення тріщин, починаючи від коротких та завершуючи макротріщинами критичного розміру, що викликають руйнування, є важливим аспектом у прогнозуванні довговічності елементів промислового устаткування. Причому тут особливу роль відіграє точність прогнозування довговічності, отриманої внаслідок використання відповідних моделей: прогнози не повинні бути завищеними, адже це спричинить непередбачене руйнування конструкції, але в той же час і не значно заниженими, оскільки в цьому випадку спостерігається неоптимальне, недостатнє використання ресурсів, що спричиняє не лише фінансові, але й екологічні проблеми. А оскільки ріст коротких тріщин займає значну частину довговічності елементів конструкцій [8], то коректне врахування внеску періоду поширення коротких тріщин при побудові математичних моделей росту тріщин відіграє важливу роль.

Мета і завдання дослідження відповідно до предмета та об'єкта дослідження

Метою дисертаційної роботи є розроблення математичних моделей і розрахункових методів для визначення довговічності металевих елементів конструкцій з короткими тріщинами, підданих дії тривалого навантаження та корозивного середовища.

У зв'язку з цим у роботі поставлено наступні завдання дослідження:

- критично вивчити існуючі дослідження щодо поширення коротких і малих втомних тріщин у металевих матеріалах та проаналізувати процес моделювання росту втомних тріщин;
- побудувати наближені формули для визначення розкриття тріщини біля контуру у випадках циклічного розтягу тонкої пластини з тріщиною; поперечного та поздовжнього зсуву товстої пластини з тунельною тріщиною, а також циклічного розтягу тривимірного тіла з поверхневою тріщиною опуклого контуру;
- розробити математичні моделі (диференціальні рівняння з початковими та кінцевими умовами) для опису поширення втомної тріщини для вищезгаданих випадків навантаження та геометрії тіла;
- сформулювати математичну модель для опису поширення втомної тріщини в пластині за циклічного навантаження нормального відриву та корозивного середовища;
- розробити математичну модель для визначення періоду зародження втомної тріщини у тонкостінних елементах конструкцій і апробувати її на задачі про визначення періоду зародження тріщини у пластині з двома боковими концентраторами напружень під дією циклічного розтягу;
- на основі розроблених моделей розв'язати задачі поширення коротких та малих втомних тріщин у металевих елементах конструкцій та визначити їх довговічності.

Відповідно, об'єктом вивчення є процес поширення коротких та малих втомних тріщин у металевих елементах під впливом зовнішнього змінного навантаження та корозивного середовища. Предметом дослідження є створення відповідних математичних моделей для опису росту коротких та малих втомних тріщин за заданих умов та обчислення довговічності елементів конструкцій з такими тріщинами. Проте, моделюючи поширення коротких та малих втомних тріщин, у даній роботі не розглядаються тріщини на мікроскопічному рівні, як і

вплив орієнтації та границь зерен і стану поверхні на поширення тріщин у конкретному матеріалі.

Методи дослідження

Методи, використані у цьому дослідженні, включають, перш за все, методи та критерії механіки руйнування коротких та довгих тріщин. По-друге, перший закон термодинаміки і баланс енергетичних складових застосовано для формулювання математичної моделі поширення втомних тріщин. По-третє, у процесі розв'язання поставлених задач застосовано метод порівняння еквівалентних напружених станів для знаходження розкриття у вершині тріщини та метод еквівалентних площ для розроблення математичної моделі поширення поверхневих тріщин довільного випуклого контуру. По-четверте, для визначення довговічності, використано підходи математичного, числового та функціонального аналізу, а також аналітичні та числові методи розв'язування диференціальних рівнянь.

У дисертаційній роботі термін «коротка тріщина» використовується для опису тріщини, малої по одному параметру, а термін «мала тріщина» визначає тріщину, яка є малою по всіх розмірах.

Наукова новизна отриманих результатів

Науковою новизною отриманих результатів є побудова математичних моделей у деформаційних параметрах розкриття у вершині тріщини на відміну від відомих розв'язків задач у параметрах КІН для визначення залишкової довговічності елементів конструкцій з короткими і малими тріщинами за дії змінних навантажень і корозивних середовищ. В основу побудови цих моделей покладено адаптацію відомого енергетичного підходу до дослідження росту коротких та малих тріщин у тонких пластинах та тривимірних тілах за дії нормального відриву, а також у товстих пластинах, підданих поперечному та повздовжньому зсувам. Для кожного з цих випадків запропоновано наближені формули для обчислення розкриття тріщини біля її контуру з урахуванням середньої навантаженості зони передруйнування. Встановлено, що

деформаційний параметр розкриття тріщини у її вершині, на відміну від коефіцієнта інтенсивності напружень, є інваріантною характеристикою для знаходження швидкості росту коротких втомних та корозійно-втомних тріщин.

У роботі розв'язано пружні задачі поперечного та повздовжнього зсувів шляхом зведення їх до відомої розв'язаної задачі нормального відриву через постановку в гармонічних функціях. Крім того, побудовану модель для поширення тріщин у тонких пластинах під дією циклічного розтягу адаптовано до випадку впливу корозивного середовища. Також запропоновано математичну модель зародження та поширення тріщин у вершинах концентраторів напружень у пластині.

Задані вище двовимірні математичні моделі адаптовано на випадок тривимірних елементів конструкцій для дослідження поширення в них плоских малих втомних тріщин нормального відриву, повздовжнього і поперечного зсувів та визначення їх залишкової довговічності за циклічного навантаження. Крім того, узагальнено метод еквівалентних площ, що дозволяє знайти наближений розв'язок задач розтягу тривимірних тіл з малими поверхневими тріщинами. На основі розроблених моделей розв'язано ряд задач з визначення довговічності елементів конструкцій з короткими тріщинами.

Математичні моделі, розроблені в дисертації, можна розглядати як внесок у теорію втомного руйнування шляхом покращення та розширення підходів до визначення довговічності елементів конструкцій з короткими та малими тріщинами за тривалого навантаження та корозивного середовища.

Практичне значення

Практичне значення отриманих результатів полягає у їх потенційному застосуванні в інженерних розрахунках для визначення залишкової довговічності відповідних конструктивних елементів з короткими та малими тріщинами, що підтверджується рядом розв'язаних задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами та грантами

Дисертаційне дослідження виконувалося в рамках програми подвійного керівництва дисертаційною роботою в Університеті Клермон-Овернь, Франція, та Львівському національному університеті імені Івана Франка, Україна, і отримало фінансування за Стипендією французького уряду, програмою I-SITE CAP 20-25 та аспірантською стипендією Міністерства освіти і науки України. В рамках аспірантури було проведено навчальні та дослідницькі відрядження у Школі обчислювальної математики Кільського університету, Великобританія, за підтримки програми Еразмус+ та у відділі інженерії у ТОВ Андрітц Гідро, Равенсбург, Німеччина, за Стипендіальною програмою німецького бізнесу в Україні.

Дослідження за темою дисертації виконані в межах наукових бюджетних тем Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України: «Моделювання руйнування матеріалів за дії довготривалих навантажень, високих температур, водневмісних середовищ і радіаційного опромінення» (№ д/р 0116U001536, 2017–2018) та «Вплив деградації матеріалів на залишковий ресурс елементів конструкцій довготривалої експлуатації за дії силових і фізико-хімічних факторів» (№ д/р 0119U002202, 2019–2021).

Структура та обсяг дисертації

Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. У вступі обґрунтовано вибір теми дослідження, вказано мету, завдання, об'єкт та предмет досліджень. Крім того, описано використані методи дослідження, зазначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

Перший розділ починається з викладення теоретичних основ досліджень, зосереджуючись на трьох ключових темах: критеріях механіки руйнування, поширенні втомних тріщин та рості коротких тріщин. У другому розділі представлено математичну модель росту коротких тріщин у пластинах за нормального відриву, а також обчислювальну модель для визначення періоду

зародження коротких тріщин у конструкційних елементах. Третій розділ стосується оцінки довговічності товстих пластин з малими тріщинами поперечного та повздовжнього зсувів. У четвертому розділі розглянуто довговічність тривимірних тіл з малими тріщинами та узагальнено метод еквівалентних площ для розв'язання задач з малими поверхневими тріщинами довільного опуклого контуру. У висновках подано короткий підсумок теми дослідження та отриманих результатів.

Загальний обсяг роботи становить 203 сторінки, у тому числі 159 сторінок основного тексту, та містить 51 рисунок.

Особистий внесок здобувачки

Усі результати, що стосуються основного змісту дисертації, отримано здобувачкою самостійно. Серед наукових праць за темою дисертації, роботи [9, 10] опубліковані без співавторів. У працях, опублікованих у співавторстві, особистий внесок здобувачки становить: побудова та апробація математичної моделі зародження і поширення тріщин у вершинах концентраторів [11, 12]; розроблення математичної моделі поширення коротких та коротких втомних тріщин, знаходження довговічності елементів конструкцій з тріщинами та отримання формули для визначення розкриття у вершині тріщини [13-16]; розв'язання задачі з визначення залишкової довговічності труби [17]; розрахунки властивостей матеріалів на основі експериментальних результатів [18-20] та розроблення деформаційного критерію розкриття берегів тріщини [21].

Апробація матеріалів дисертації

Основні результати досліджень, викладених у дисертаційній роботі, представлено та обговорено на:

- І-шій Міжнародній науково-технічній конференції «Пошкодження матеріалів під час експлуатації: діагностування і прогнозування» / 1-st Virtual International Conference “In-service Damage of Materials: Diagnostics and Prediction” (Тернопіль, 2021);

- Конкурси представлення дисертаційних робіт УКРАІНЕТ у рамках наукової конференції «Дні України в Берліні та Бранденбурзі: розвиток українсько-німецької академічної співпраці та побудови міцної Європи разом» / UKRAINET Thesis Presentation Contest within the “Days of Ukraine in Berlin and Brandenburg: Fostering German-Ukrainian Academic Cooperation and Building Stronger Europe Together” (Берлін, 2021; друге місце);
- I Зимовій школі «Тенденції адитивного виробництва для інженерних цілей», січень 2021, Політехнічний університет Тімішоари, Румунія / I Winter School “Trends on Additive Manufacturing for Engineering Applications”, Polytechnic University of Timișoara, Romania (2021);
- НАТО воркшопі «Розроблення новітніх методів запобігання руйнуванню газопроводів задля безпеки» / NATO Workshop “Development of Novel Methods for the Prevention of Pipeline Failures with Security Implications” (Львів, 2020);
- засіданні наукової ради інженерної школи СІГМА Клермон / SIGMA Clermont (Клермон-Ферран, Франція, 2019);
- VI Міжнародній науково-технічній конференції «Пошкодження матеріалів під час експлуатації, методи його діагностування і прогнозування» / VI International Scientific and Technical Conference “In-Service Damage of Materials, its Diagnostics and Prediction”, (Тернопіль, 2019);
- VI Міжнародній конференції «Механіка руйнування матеріалів та цілісність конструкцій» / VI International Conference “Fracture Mechanics of Materials and Structural Integrity” (Львів, 2019);
- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки і математики», присвяченій 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України / International Conference on Modern Problems of Mechanics and Mathematics dedicated to 90-th birth anniversary of Yaroslav Stepanovych Pidstryhach,

Academician of NASU and 40-anniversary of the Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU, founded by him (Львів, 2018);

- XIV Міжнародній конференції «Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів» / XIV International Conference “Problems of Corrosion and Corrosion Protection of Structural Materials” (Львів, 2018).

У повному обсязі дисертаційну роботу представлено та обговорено на науковому семінарі кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка.

РОЗДІЛ 1

ДЕЯКІ ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ І ПОШИРЕННЯ КОРОТКИХ ТРІЩИН

У деяких металевих матеріалах короткі тріщини зароджуються вже після досягнення 5% усього періоду втомної довговічності [22]. Схожа ситуація характерна для елементів конструкцій, підданих впливу корозивного середовища, у яких ріст коротких тріщин займає значну частину (до 75%) загальної довговічності [23]. А поєднання втомного навантаження та корозивного середовища є значно небезпечнішим з точки зору довговічності елементів конструкцій, ніж окрема дія цих факторів [24].

Незважаючи на наявні досить ґрунтовні дослідження з проблеми зародження та росту коротких тріщин, дії корозивного середовища та втомного навантаження на елементи конструкцій, на даний момент не розроблено фундаментальну математичну модель, яка змогла б охопити весь процес поширення тріщини [25].

У цьому розділі спершу коротко розглянуто основні критерії механіки руйнування за статичного навантаження та основні механізми поширення тріщин. Крім того, описано деякі основні положення втомного руйнування матеріалів, а також класичні моделі втомного поширення тріщин. Основну увагу звернено на фундаментальні аспекти коротких тріщин та їх поширення, а також розглянуто моделі, що описують кінетику їх росту.

1.1. Критерії механіки руйнування за статичного навантаження

При дослідженні поширення тріщин в елементах конструкцій важливо знати, в який момент тріщина почне поширюватися у твердому тілі та неконтрольовано рости. Визначити час та встановити умови поширення тріщини дозволяють критерії механіки руйнування. У випадку статичного навантаження критерії механіки руйнування можна поділити на декілька основних груп залежно від параметрів, що лягли в їх основу.

1.1.1. Енергетичні критерії

Важливе місце в механіці руйнування займають енергетичні критерії, які базуються на врахуванні різних видів енергії, затрачених при деформуванні тіла. Застосовувати енергетичний підхід до проблем руйнування матеріалів вперше запропонував Гріффітс [26, 27], якого вважають основоположником механіки руйнування [28]. Гріффітс розробив критерій поширення тріщини у твердому тілі, розглядаючи різні види енергій, які беруть участь у процесі росту тріщини.

Згідно з енергетичним критерієм Гріффітса, тріщина буде поширюватися під дією навантаження, якщо зі збільшенням її довжини потенціальна енергія деформованого тіла не збільшуватиметься [29]:

$$\frac{\partial}{\partial l}[U(l) - W(l, p_*)] = 0, \quad (1.1)$$

де l – пів довжина тріщини; $U(l)$ – поверхнева енергія тріщини; $W(l, p)$ – енергія пружних деформацій, зумовлена розкриттям тріщини; p_* – граничне навантаження.

Критерій Гріффітса також формулюють у наступному вигляді [30]: «тріщина поширюватиметься, якщо енергія, вивільнена тілом на одиницю площі руйнування, буде більшою або рівною за приріст поверхневої енергії»:

$$G \geq 2\gamma. \quad (1.2)$$

де G – швидкість вивільнення енергії, γ – густина поверхневої енергії.

З енергетичного критерію Гріффітса (1.1) отримано формулу для визначення критичного значення рівномірно розподіленого навантаження p_* , прикладеного до нескінченної пластини з тріщиною [31]:

$$p_* = \sqrt{\frac{2\gamma E'}{\pi l}}, \quad (1.3)$$

де γ – густина поверхневої енергії, l – пів довжина тріщини, $E' = E$ для плоского напруженого стану, $E' = E / (1 - \nu^2)$ для плоскої деформації, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона.

Критерій руйнування Гріффітса (1.1) та (1.2) у вигляді енергетичного балансу служить необхідною умовою руйнування, проте ця умова не завжди є достатньою для руйнування [28]. Крім того, теорія Гріффітса була розроблена для поширення тріщин у крихких матеріалах і була неточною для оцінки руйнування інженерних сплавів.

У зв'язку з цим Орован [32] модифікував теорію Гріффітса для використання її до оцінки квазікрихкого руйнування матеріалів, врахувавши в енергії на утворення нових поверхонь тріщини роботу енергії пластичних деформацій γ_{pl} [28]:

$$G = G_{crit} = 2\gamma + \gamma_{pl}. \quad (1.4)$$

Експериментальні дослідження показали, що введена величина γ_{pl} значно більша, ніж 2γ , а тому використання цього параметру значно підвищує точність та розширює область застосування критерію. Враховуючи цю поправку, формула Гріффітса (1.3) матиме вигляд [31]

$$p_* = \sqrt{\frac{2E'(\gamma + \gamma_{pl})}{\pi l_0}}. \quad (1.5)$$

На основі теорії Гріффітса розроблено положення, що визначають напрям росту тріщини. Згідно з критерієм передбачення кута росту тріщини, «тріщина ростиме під кутом, що максимізує швидкість вивільнення енергії, тобто мінімізує загальну потенціальну енергію системи» [30]. Ву дослідив [33], що

тріщина поширюється перпендикулярно до найбільшого головного напруження у пластині. У випадку просторової задачі для ізотропного матеріалу встановлено [30], що новою поверхнею руйнування стане поверхня, на якій швидкість вивільнення енергії досягає максимуму.

Проте застосування критерію Гріффітса обмежується випадком невеликих деформацій. У разі наявності великих пластичних деформацій в зоні передруйнування та співмірності зони передруйнування з розмірами тіла чи тріщини, критерій Гріффітса-Орована даватиме некоректні результати. Тому у випадку великих деформацій, співмірних з розміром тріщини, застосовують критерій R -кривих, який базується на балансі швидкостей зміни складових енергії. Основне рівняння цього критерію записується у вигляді [31]:

$$\int_S X_{ni} \frac{\partial u_i}{\partial l} dS - \frac{\partial W^{el}}{\partial l} = D_f + \frac{\partial W^{pl}}{\partial l}, \quad (1.6)$$

де S – поверхня тіла, X_{ni} – поверхневі сили, u_i – зміщення точок тіла, W^{el} – пружна енергія деформації тіла, W^{pl} – енергія дисипації в області пластичних деформацій, D_f – питома енергія руйнування, що витрачається на формування приповерхневого шару тріщини.

Інший підхід запропонував Г.П. Черепанов, дещо модифікувавши ідеї Гріффітса та Орована. Розглядаючи зону передруйнування безпосередньо біля вершини тріщини та поняття її «тонкої структури», він ввів загальний енергетичний підхід до поширення тріщини в довільному суцільному середовищі [34, 35]:

$$R \int_0^{2\pi} [(Q + K - B) \cos \theta - A] d\theta = 2\gamma_{pl}, \quad (1.7)$$

де R – радіус кола з центром у вершині тріщини, яке є малим у порівнянні з лінійним розміром тіла та тріщини, θ – кут полярної системи координат з центром у вершині тріщини, Q – власна робота внутрішніх сил, K – кінетична енергія, B – робота об'ємних сил, A – робота поверхневих сил.

При дослідженні росту тріщини важливо знати, коли настане її спонтанний ріст, тобто неконтрольоване збільшення довжини тріщини, що призводить до руйнування. Критерій спонтанного росту тріщини має наступний вигляд [31]:

$$G_I = R_c, \quad (1.8)$$

де G_I – швидкість вивільнення потенціальної енергії тіла при розширенні тріщини; R_c – критичне значення тріщиностійкості, яке визначається точкою дотику кривих $G_I(l)$ та $R(l)$; $R = R(l)$ – функція приросту довжини тріщини при певній геометрії тіла.

Недоліком цього критерію є залежність функції R від геометрії тіла та умов навантаження, а не лише від приросту тріщини [31].

Для випадку монотонно зростаючого навантаження пружно-пластичного тіла з тріщиною на основі енергетичного підходу отримано критерій J -інтегралу (критерій Черепанова-Райса) [31, 35, 36]:

$$-\frac{\partial U}{\partial l} = \int_C \left(W dx_i - X_{ni} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dl, \quad (1.9)$$

де U – пружний потенціал, C – довільний контур, що охоплює кінець тріщини та з'єднує її нижній берег з верхнім, W – енергія деформації тіла, x_i – довжина дуги контуру C , X_{ni} – поверхневі сили, u_i – зміщення точок тіла.

Інтеграл у правій частині рівняння називається J -інтегралом та не залежить від шляху інтегрування:

$$J = \int_C \left(W dx_i - X_{ni} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dl. \quad (1.10)$$

Згідно з критерієм J -інтегралу тріщина поширюється, якщо J -інтеграл досягає певного критичного для даного матеріалу значення [31]:

$$J|_{\sigma=\sigma_*} = J_{IC}, \quad (1.11)$$

де J_{IC} – критичне значення J -інтегралу, характеристика матеріалу.

Складність у застосуванні J -інтегралу становить визначення характеристичного критичного значення за результатами експерименту.

Для дослідження руйнування пружно-пластичних матеріалів за умов росту тріщини та релаксації напружень використовують загальний енергетичний критерій [31]:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\int_s X_{ni} u_i dS - W^{el} - W^{pl} \right) = D_f. \quad (1.12)$$

Перевага застосування енергетичного підходу полягає в тому, що енергетичні складові можуть одночасно описувати пошкодження, отримані в результаті різних типів прикладених навантажень [37].

1.1.2. Основні механізми поширення тріщин

Напружено-деформований стан біля контуру тріщини у загальному випадку є досить складним, проте його можна представити шляхом суперпозиції трьох основних макромеханізмів руйнування. До таких механізмів належать [31] (рис. 1.1):

- нормальний відрив (I тип), за якого поверхні тріщини переміщуються симетрично відносно площини Oxz у взаємно перпендикулярних напрямках;
- поперечний зсув (II тип), який викликає взаємне ковзання поверхонь тріщини перпендикулярно до її контуру;
- повздовжній зсув (III тип), який означає взаємне ковзання поверхонь тріщини у напрямі, паралельному до контуру тріщини.

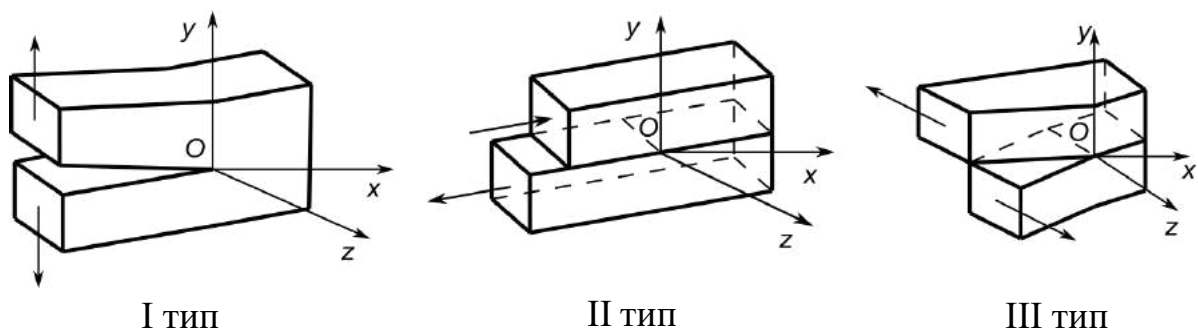


Рис. 1.1. Основні макромеханізми руйнування [31].

За дії кожного з цих механізмів руйнування нормальні та дотичні напруження можна представити через коефіцієнт інтенсивності напружень K – параметр, який виражає міру сингулярності напружень в області біля вершини тріщини [31]:

- для нормального відриву (I тип напруженого стану):

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{2\mu K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0, \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2};\end{aligned}\tag{1.13}$$

- для поперечного зсуву (II тип напруженого стану):

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma_{zz} &= -\frac{2\mu K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0, \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right);\end{aligned}\tag{1.14}$$

- для повздовжнього зсуву (III тип напруженого стану):

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0.\end{aligned}\tag{1.15}$$

У цих формулах σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} позначають нормальні напруження вздовж осей декартових координат; τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} – дотичні напруження у відповідних

координатних площинах; K_i , ($i = I, II, III$) – коефіцієнт інтенсивності напружень за відповідного типу навантаження; r , θ – полярні координати у площині Oxy .

1.1.3. Силовий підхід

На понятті коефіцієнта інтенсивності напружень базується також і силовий підхід, який набув широкого використання в інженерній практиці, застосувавши принципи механіки руйнування до вирішення важливих прикладних проблем.

Основу силового підходу становить силовий критерій, розроблений Дж. Р. Ірвіном [38]. За цим критерієм за умов нормального відриву ($K_I \neq 0$, $K_{II} = 0$, $K_{III} = 0$) тріщина починає поширюватися, якщо коефіцієнт інтенсивності напружень досягає певної постійної для матеріалу величини K_{IC} [39]:

$$K_I^* = K_I(p_*, l) = K_{IC}, \quad (1.16)$$

де K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) за умов нормального відриву, K_{II} – КІН за поперечного зсуву, K_{III} – КІН за повздовжнього зсуву, p_* – граничне навантаження, K_I^* – граничне значення КІН K_I , K_{IC} – статична тріщиностійкість матеріалу за нормального відриву.

Аналогічні критерії дійсні для поперечного зсуву ($K_I = 0$, $K_{II} \neq 0$, $K_{III} = 0$) [31]:

$$K_{II}^* = K_{IIC} \quad (1.17)$$

та повздовжнього зсуву ($K_I = 0$, $K_{II} = 0$, $K_{III} \neq 0$):

$$K_{III}^* = K_{IIIC}, \quad (1.18)$$

а для комбінованої дії трьох напружених станів критерій зведеться до вигляду:

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^{m_1} + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}}\right)^{m_2} + \left(\frac{K_{III}}{K_{IIIC}}\right)^{m_3} = 0 \quad (1.19)$$

де K_{IIC} , K_{IIIC} – характеристики тріщиностійкості матеріалу за поперечного та повздовжнього зсувів відповідно; m_1 , m_2 , m_3 – експериментальні сталі матеріалу.

Критерій Ірвіна широко застосовується в інженерній практиці завдяки значно легшому визначенню його складових та зручності використання, порівняно з критерієм Гріффітса.

Проте слід зазначити, що для обґрунтованого застосування силового підходу слід дотримуватися виконання умов автономності [31], тобто математичних співвідношень між розмірами тіла та тріщини, що забезпечують коректність використання положень лінійної механіки руйнування.

1.1.4. Деформаційні критерії

До основних критеріїв механіки руйнування належать також деформаційні критерії, які базуються на розгляді стану матеріалу у пластичній зоні біля вершини тріщини [21, 29, 31, 40]. Перевага цих критеріїв у порівнянні з критеріями Гріффітса та Ірвіна полягає в тому, що деформаційні критерії можуть застосовуватися до металів з підвищеною пластичністю.

Згідно з класичним деформаційним критерієм, руйнування матеріалу відбувається при досягненні деформацією критичного значення ε_C [31]:

$$\varepsilon_{\max}(l, \sigma_*) = \varepsilon_C, \quad (1.20)$$

де ε_{\max} – максимальна деформація розтягу в околі тріщини, ε_C – критичне значення деформації розтягу, σ_* – критичне навантаження.

На основі деформаційного критерію (1.20) встановлено критерій, що визначає гранично-рівноважний стан пружно-пластичного тіла з тріщиною. Згідно з критерієм критичного розкриття тріщини (КРТ-критерієм), тріщина починає поширюватися, коли її розкриття досягає певного критичного значення [31]

$$\delta_I(l, \sigma_*) = \delta_{IC}, \quad (1.21)$$

де δ_I – розкриття тріщини, δ_{IC} – критичне значення розкриття тріщини.

Аналогічні критерії діють для випадку поперечного

$$\delta_{II}(l, \sigma_*) = \delta_{IIC} \quad (1.22)$$

та повздовжнього зсувів [31]

$$\delta_{III}(l, \sigma_*) = \delta_{IIIc}. \quad (1.23)$$

У випадку комбінованої дії трьох типів навантаження критерій запишеться у вигляді [31]:

$$\left(\frac{\delta_I}{\delta_{IC}}\right)^{n_1} + \left(\frac{\delta_{II}}{\delta_{IIc}}\right)^{n_2} + \left(\frac{\delta_{III}}{\delta_{IIIc}}\right)^{n_3} = 1, \quad (1.24)$$

де n_1, n_2, n_3 – експериментальні характеристики матеріалу.

Для спрощення обчислення параметрів, необхідних для застосування КРТ-критерію, В. В. Панасюком та М. Я. Леоновим запропоновано δ_C -модель [29]. Згідно з цією моделлю, пластичну зону у вершині тріщини моделюють додатковим розрізом, на берегах якого прикладено нормальні напруження σ_0 , а розкриття вершини тріщини в момент початку руйнування вважають характеристикою матеріалу δ_C . Тоді розкриття вершини тріщини δ_{lp} при $x = l$ за дії розтягуючого навантаження p можна обчислити за формулою [29]:

$$\delta_{lp} = -\frac{8\sigma_0 l}{\pi E} \ln \cos\left(\frac{\pi p}{2\sigma_0}\right). \quad (1.25)$$

За умови виконання умов автотодельності, тобто застосування лінійної механіки руйнування, існує взаємозалежність між характеристиками силових та деформаційних критеріїв. Для матеріалу, що не зміцнюється, ці співвідношення мають вигляд [31]:

$$\delta_{IC} = \frac{K_{IC}^2}{\sigma_{0.2} E}, \quad (1.26)$$

$$\delta_{IIc} = \frac{4K_{IIc}^2}{\pi \mu \sigma_{0.2}}, \quad (1.27)$$

$$\delta_{IIIc} = \frac{4K_{IIIc}^2}{\pi \mu \sigma_{0.2}}, \quad (1.28)$$

де E – модуль Юнга, $\sigma_{0.2}$ – границя текучості, $\mu = E / 2(1 + \nu)$ – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона.

Аналогічна модель була запропонована Дагдейлом [40]. Модель побудовано із врахуванням скінченності напружень у вершині тріщини та за припущенням рівності напружень зчеплення в пластичній зоні значенню границі текучості. За цією моделлю, довжину пластичної зони у безмежній пластині з тріщиною можна обчислити за формулою:

$$r_p = l_0 \left[\sec \left(\frac{\pi p}{2\sigma_T} \right) - 1 \right], \quad (1.29)$$

де r_p – довжина пластичної зони, l_0 – пів довжина початкової тріщини, p – прикладене навантаження, σ_T – напруження текучості.

У цьому підрозділі розглянуто три основні групи критеріїв механіки руйнування для тіл з тріщинами за статичного навантаження. Залежно від характеристик твердого тіла та тріщини, умов навантаження та наявних експериментальних даних, ті чи інші критерії механіки руйнування часто становлять основу аналізу подальшого поширення тріщин у твердих тілах. При цьому особливу увагу необхідно звертати на коректність застосування відповідних критеріїв залежно від розмірів тріщини.

1.2. Втомине поширення тріщин

На практиці елементи конструкції переважно перебувають під впливом циклічного навантаження. На відміну від статичного, змінне в часі навантаження не викликає раптового руйнування, але призводить до накопичення пошкоджень у матеріалі. У зв'язку з цим для оцінки залишкової довговічності елементів конструкції за таких умов роботи розроблено математичні моделі, які ґрунтуються на понятті втоми.

1.2.1. Поняття втоми та стадій втомного руйнування

Під втомою розуміють процес локалізованого накопичення пошкоджень під дією циклічного навантаження [41], а руйнування, що виникає внаслідок цього, називають втомним [31].

Оскільки втомне руйнування матеріалів не відбувається раптово, матеріал, підданий дії циклічного навантаження, проходить декілька стадій, починаючи від моменту прикладення навантаження і до остаточного руйнування. Серед вчених немає одностайної думки щодо кількості та деталізації стадій втомного руйнування [37] (рис. 1.2). Зокрема, Форсайт [42] виділяє дві стадії втомного руйнування: старт росту втомної тріщини з поверхні матеріалу та ріст тріщини перпендикулярно до прикладеного навантаження, за яким слідує руйнування матеріалу. Ша [43] поділяє втомне руйнування на п'ять стадій, розглядаючи спершу раннє пошкодження, тоді зародження мікротріщин, за яким слідує ріст коротких тріщин, ріст макротріщин та руйнування на заключній стадії. Схейве [8] вважає, що процес втомного руйнування проходить через чотири фази: зародження тріщини, ріст мікротріщини, ріст макротріщини та безпосередньо руйнування (рис. 1.3).

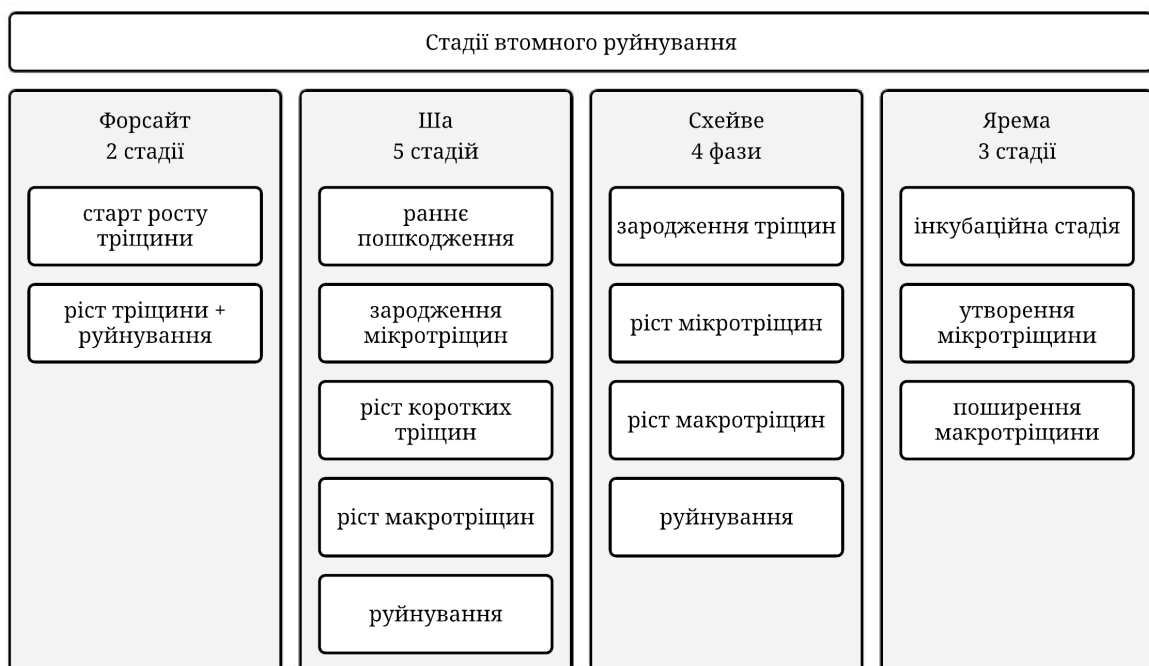


Рис. 1.2. Стадії втомного руйнування. (Побудовано на основі [8, 39, 42-44]).

Згідно з іншим підходом [39, 44] втомне руйнування можна описати трьома стадіями. На першій, інкубаційній стадії, у приповерхневих шарах матеріалу відбувається неоднорідна концентрація мікропластичних зсувів. Друга стадія характеризується зародженням субмікротріщин, їх послідовним розвитком, злиттям та утворенням мікротріщин. Поширення макротріщин відбувається на третій стадії, за якою настає долом матеріалу.

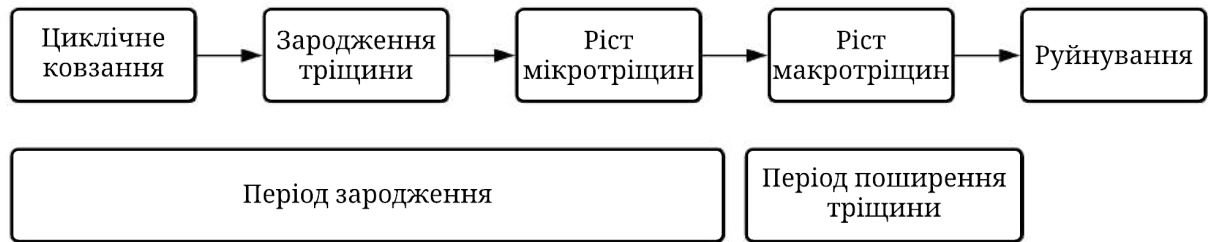


Рис. 1.3. Фази та періоди втомного руйнування за Схейве [8].

Незважаючи на різноманітність підходів до стадійності втомного руйнування, довговічність твердого тіла N можна описати за допомогою двох періодів [8, 39]: періоду зародження макротріщини N_i та періоду поширення макротріщини N_g :

$$N = N_i + N_g, \quad (1.30)$$

Між періодами та стадіями втомного руйнування існує чіткий зв'язок (рис. 1.3).

Період зародження включає в себе інкубаційну стадію і стадію зародження субмікротріщин та їх перетворення у макротріщину. Період поширення макротріщини описує ріст макротріщини та долам матеріалу [39].

Поділ втомного руйнування на періоди зумовлений фізичними процесами, що спричиняють зародження та поширення тріщини. Оскільки тріщина зароджується у приповерхневих шарах матеріалу, то на цей процес безпосередньо впливає структура матеріалу. Подальший розвиток субмікротріщин відбувається під впливом дотичних напружень та структури матеріалу на його поверхні в околі тріщин. Напротивагу цьому, у другому

періоді макротріщина росте в площині максимальних напружень розтягу з дотриманням умов автотривалості й основну роль у цьому процесі відіграють характеристики матеріалу [39, 45].

При визначенні довговічності матеріалу слід враховувати наявність у ньому дефектів та концентраторів напружень, а також стадію втомного руйнування, яка характеризує стан матеріалу у початковий момент. У зв'язку з цим виділяють три схеми розвитку втомного руйнування, які описують відмінності у розрахунку втомної довговічності [31]. Перша схема передбачає існування невеликої тріщини у матеріалі, тому довговічність визначається періодом поширення такої тріщини (тип А). При оцінюванні довговічності за другою схемою, зародження тріщини відбувається швидко, в той час як домінуючим є поширення тріщини (тип В). У третій схемі основну роль при визначенні довговічності відіграє період поширення тріщини, якому передують незначне за тривалістю її зародження (тип С) (рис. 1.4).

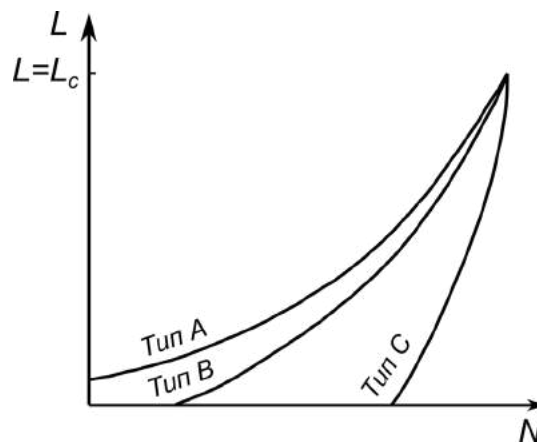


Рис. 1.4. Основні схеми втомного руйнування [31].

1.2.2. Кінетичні діаграми втомного руйнування

Поширення тріщин на етапі їх макроскопічного росту описують за допомогою кінетичних діаграм втомного руйнування (КДВР) $V - K$, які є графічними залежностями швидкості росту тріщини V від розмаху коефіцієнта інтенсивності напружень ΔK у подвійних логарифмічних координатах (рис. 1.5). Такі діаграми мають форму S-подібних кривих, обмежених

вертикальними асимптотами з обох кінців. Асимптота зліва $\Delta K = \Delta K_{th}$ позначає мінімальне порогове значення розмаху КІН, необхідне для поширення макротріщини, у той час як асимптота справа $\Delta K = \Delta K_{fc}$ є критичним значенням розмаху КІН, що характеризує початок спонтанного росту тріщини до руйнування [31, 39].

Враховуючи відмінності у поширенні макротріщин при наближенні до асимптот, тобто на початковому періоді їх поширення та критичному рості до руйнування, на КДВР традиційно виділяють три ділянки (рис. 1.5) [39]. Перша ділянка, розташована справа від асимптоти $\Delta K = \Delta K_{th}$, характеризується низькими швидкостями ($V \approx 10^{-9} - 10^{-8}$ м/цикл) та нерівномірним характером росту тріщин. На другій ділянці, ділянці Паріса, ріст тріщини є рівномірним, що відображено у лінійній залежності $\log V \sim \log \Delta K$. Швидкість поширення тріщини на цій ділянці описується формулою Паріса [46]:

$$V = C(\Delta K)^n, \quad (1.31)$$

де $n = \text{tg} \varphi$; C – константа, що отримується експериментально, та досягає значень переважно $5 \cdot 10^{-7} - 5 \cdot 10^{-6}$ м/цикл.

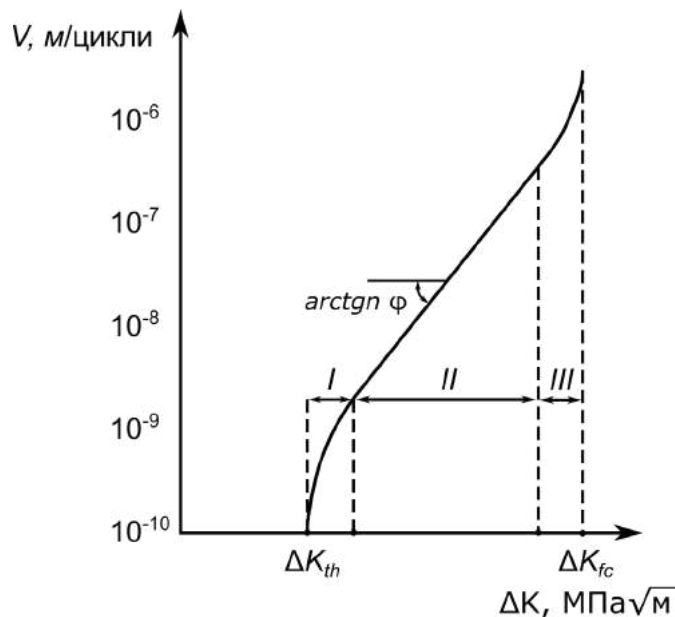


Рис. 1.5. Кінетична діаграма втомного руйнування [39].

Третій ділянці діаграми, розміщеній біля асимптоти $\Delta K = \Delta K_{fc}$, притаманними є нерівномірний, стрибкоподібний характер та високі швидкості росту тріщини [39].

Для аналітичного опису КДВР та різних її ділянок запропоновано багато моделей [31, 37], які базуються на результатах експериментальних випробувань, рівнянні Коффіна-Менсона та понятті енергії деформування, і представляють швидкість поширення тріщини від її довжини переважно за допомогою КІН :

$$V = \frac{dl}{dN} = V[K(l)]. \quad (1.32)$$

У загальному випадку таку залежність емпірично описують співвідношенням [39]:

$$V = AK_{I\max}^s \left(K_{I\max}^{m_1} - K_{th}^{m_2} \right)^{m_3} / \left(K_{fc}^{m_4} - K_{I\max}^{m_4} \right)^{m_5}, \quad (1.33)$$

де A , s , m_1 , m_2 , m_3 , m_4 , m_5 сталі, що залежать від властивостей матеріалу та умов експерименту.

Прикладом такого емпіричного співвідношення є наступна залежність, яка описує швидкість росту тріщини з урахуванням її початкового значення V_0 [31]:

$$V = V_0 \frac{\left(K_{I\max} - K_{th} \right)^q}{\left(K_{fc} - K_{th} \right)^q - \left(K_{I\max} - K_{th} \right)^q}. \quad (1.34)$$

Поряд з емпіричними залежностями модель для опису швидкості поширення тріщини як функції від коефіцієнта інтенсивності напружень також була виведена математично на основі енергетичного підходу [47]:

$$V = (1 - R)^2 \frac{K_{I\max}^4 - K_{th}^4}{K_{fc}^2 - K_{I\max}^2}. \quad (1.35)$$

Перевага такого підходу представлення швидкості поширення тріщини як аналітичної функції від її довжини полягає в тому, що за його допомогою можна передбачити довговічність матеріалу за відомих значень початкової та кінцевої довжин тріщини шляхом розв'язання диференціального рівняння (1.32) [31]:

$$N = \int_{l_0}^{l_*} \frac{dl}{V[K(l)]}. \quad (1.36)$$

1.2.3. Математичні моделі для опису поширення тріщин

При дослідженні втомного поширення тріщин, поряд з вивченням фізичних особливостей їх росту та зародження, значну увагу приділяли математичному опису цих процесів, зокрема побудові моделей втомного росту тріщини, які б виражали залежність швидкості росту тріщин від зміни певних параметрів. Впродовж десятиліть вивчення проблеми втомного росту тріщин у цьому та минулому століттях, вченими було розроблено велику кількість моделей із використанням різних підходів до моделювання та вибору ключових параметрів.

Згідно з однією теорією [48], усі моделі втомного росту тріщин поділяють за критерієм вчення, що ліг в їх основу: на ті, що базуються на механіці руйнування та механіці дислокацій (рис. 1.6). До першої категорії належать моделі, що враховують лінійну пружність, геометричні характеристики та пластичне накопичення [48]. Моделі лінійної пружності побудовані на законах лінійної пружної механіки руйнування та відображають швидкість росту втомної тріщини від розмаху коефіцієнта інтенсивності напружень ΔK при відомих значеннях напруження σ та коефіцієнта асиметрії циклу R . До таких моделей належить рівняння Паріса (1.31) [46], яке відображає залежність швидкості поширення тріщини від розмаху коефіцієнта інтенсивності напружень ΔK , та його подальші модифікації, наприклад, Вокера [49] та Формена [50], із

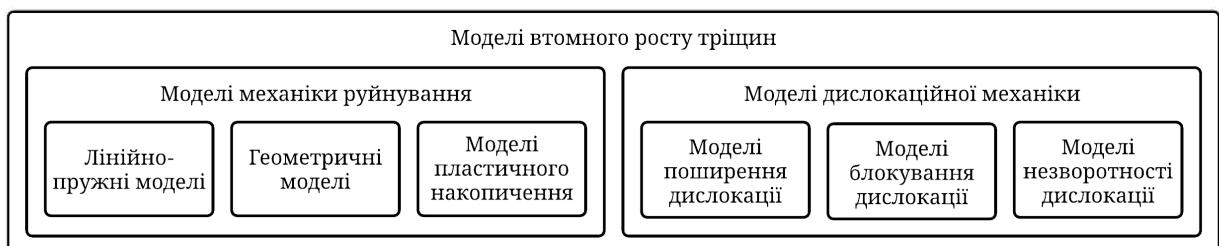


Рис. 1.6. Класифікація моделей втомного росту тріщин за [48].

врахуванням напруження σ та коефіцієнта асиметрії циклу R . Моделі такого типу є досить простими у використанні, тому широко застосовуються в інженерній практиці та для аналізу експериментальних даних, із врахуванням їх обмеженості лінійною ділянкою росту макротріщин.

Для побудови геометричних моделей покрово розглядають геометрію поширення тріщини [48], зокрема, враховуючи контакт берегів (Суреш [51]) чи досліджуючи форму концентраторів напружень у вершині тріщини, базуючись на підході, запропонованому Парісом [46].

На відміну від двох попередніх груп, що спиралися на закони лінійної механіки руйнування, моделі пластичного накопичення, враховують вплив пластичності, що виникає в процесі поширення тріщини в околі її вершини [48]. У результаті такого підходу було виявлено явище закриття вершини тріщини та введено поняття ефективного коефіцієнта інтенсивності напружень K_{eff} (Елбер [52]).

Таким чином, моделі, основані на законах механіки руйнування, сприяли появі основоположних принципів для опису явищ, що відбуваються при рості втомних тріщин, та відіграють вагомую роль у передбаченні втомного поширення тріщин макроскопічного розміру.

Для моделювання росту тріщин мікроскопічного розміру призначені моделі, розроблені на основі дислокаційної механіки, оскільки на ріст тріщин такого розміру безпосередньо впливає мікроструктура матеріалу. Моделі цієї групи враховують процеси, безпосередньо пов'язані з роллю дислокацій під час росту тріщини, зокрема їх поширення, блокування та незворотність [48]. Вивчення поширення дислокацій, особливо у вершині тріщини, дало змогу виявити залежність між ними, границею текучості та граничною енергією гістерезису і на основі цього побудувати математичну модель поширення тріщини у глобальних параметрах (Вертмен [53], Райс [54]). На основі блокування дислокацій досліджували вплив границь зерен на затримку росту коротких тріщин (Танака [55]), а також моделі, що поєднували ріст коротких та

довгих тріщин (Наварро і де лос Ріос [56, 57]). Моделі незворотності дислокацій пов'язують зигзагоподібний характер росту втомних тріщин з явищем незворотності ковзання, що проходить у вершині тріщини при циклічному навантаженні (Ву та співавтори [58]).

На основі іншого підходу [37] (рис. 1.7) виділяють теорії накопичення втомних пошкоджень та теорії втомного поширення тріщин. Моделі поширення тріщин згідно з теорією накопичення втомних пошкоджень побудовані на основі твердження про взаємозв'язок між мікроскопічними параметрами та макроскопічними величинами напруження та деформацій. До цієї групи моделей включають співвідношення, побудовані на основі силового (наприклад, рівняння Баскіна), деформаційного (наприклад, рівняння Коффіна-Менсона), енергетичного (наприклад, правило Глінки) підходів та підходів механіки руйнування суцільних середовищ [37].

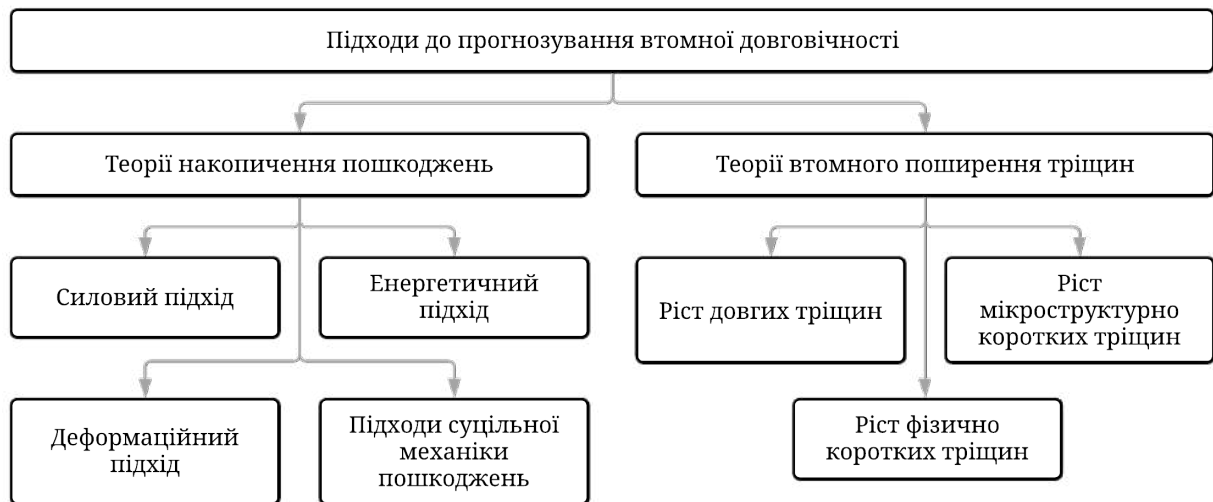


Рис. 1.7. Підходи до прогнозування втомної довговічності. (Побудовано на основі [37]).

Теорія втомного поширення тріщин поділяється на підгрупи залежно від довжини розглядуваної тріщини [37]. Ріст довгих тріщин описується із застосуванням лінійної пружної механіки руйнування, включаючи, з-поміж інших, рівняння Паріса [46], коефіцієнти інтенсивності напружень як основні параметри росту тріщин, кінетичні діаграми втомного руйнування та модель закриття тріщини Ельбера [52]. Проте лінійна механіка не в змозі описати

процеси, що відбуваються при рості коротких тріщин. У зв'язку з цим поширення фізично коротких тріщин моделюють за допомогою пружно-пластичної механіки руйнування, модифікувавши та адаптувавши співвідношення для росту довгих тріщин із врахуванням законів поширення коротких тріщин. Ріст мікроструктурно коротких тріщин, тобто тріщин, співмірних із розміром зерна матеріалу, описують за допомогою мікроструктурної механіки руйнування [37].

У цьому підрозділі представлено короткий опис основних принципів та моделей росту втомних тріщин. У наступному підрозділі розглянуто короткі тріщини, описуючи їх відмінності порівняно з довгими тріщинами, та надано короткий огляд літератури, що стосується опису їх зародження та росту.

1.3. Моделі та принципи дослідження росту коротких втомних тріщин

Питання зародження коротких втомних тріщин, законів їх росту та механізмів, що впливають на їх поширення та зупинку, почали вивчати у 70-х роках ХХ століття. Перша праця [59], у якій вказано на відмінність між короткими та довгими тріщинами, опублікована Пірсоном у 1975 році [8]. З того часу проведено численні дослідження щодо зародження та поширення коротких тріщин. Основні результати досліджень з цієї тематики представлено у ключових оглядах та збірниках [2-4, 60-67]. Зокрема, у [3, 60, 61] подано загальну характеристику коротких тріщин та притаманних їм особливостей; у [4] представлено огляд усіх наявних на той час праць по коротких тріщинах; у [3] наведено огляд праць наступних двох десятиліть; [2] присвячено зародженню та поширенню коротких тріщин з дефектів, а у [63] звернено увагу на ранні етапи поширення та зародження коротких тріщин. Праці [64-67] є збірниками статей з питань коротких тріщин.

Хоча проблема коротких тріщин є предметом дослідження впродовж декількох десятиліть, проте й досі залишається актуальною для подальшого вивчення. Проблемі коротких тріщин присвячено значну увагу та виділено в

окремий напрям досліджень, оскільки їх ріст керується іншими законами і для них не можна застосовувати стандартні підходи для довгих тріщин. Зокрема, зважаючи на розміри коротких тріщин, до них не можна застосовувати лінійну механіку руйнування, на якій базується моделювання росту довгих тріщин [2].

1.3.1. Основні означення та принципи

1.3.1.1. Класифікація коротких тріщин

Короткі тріщини відрізняються за законами росту не лише у порівнянні з довгими тріщинами: серед класу коротких тріщин також існують значні відмінності поміж тріщинами різного розміру, у тому числі стосовно механізмів, відповідальних за їх ріст. Згідно з однією класифікацією, виділяють мікроструктурно короткі та фізично короткі тріщини (Міллер, [1, 68], рис. 1.8), інші дослідження виокремлюють мікроструктурно короткі, фізично короткі, механічно короткі та хімічно короткі тріщини (Річі, Ланкфорд [61], таблиця 1.1) або ж об'єднують клас фізично та хімічно коротких тріщин (Чан [60]; Ванхіл, Бартер [5]).

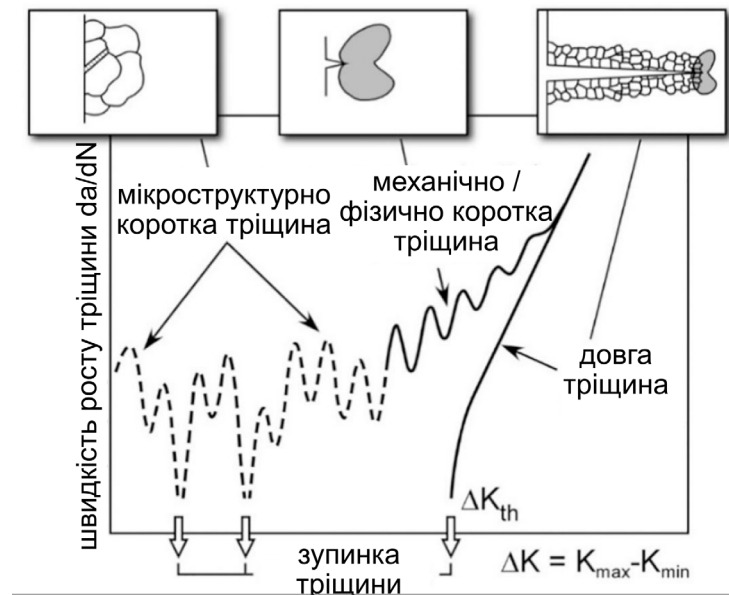


Рис. 1.8. Класифікація коротких тріщин та їх поширення за Міллером [2].

Оскільки класифікація коротких тріщин відрізняється серед дослідників, слід уточнити означення різних типів коротких тріщин. Розміри

мікроструктурно коротких тріщин не перевищують розміру структурної одиниці матеріалу, наприклад, зерна; довжина механічно коротких тріщин є малою у порівнянні з розмірами пластичної зони; у той час як довжина фізично коротких тріщин є меншою, ніж 1 мм, а хімічно малі тріщини не досягають розмірів більше 10 мм та виникають під дією зовнішнього корозивного середовища [61] (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1. Класифікація коротких втомних тріщин згідно з Річі та Ланкфордом [61].

Тип малих тріщин	Розмірність	Відповідальний механізм	Можливий розв'язок
Механічно малі	$a \lesssim r_y^a$	Надмірна (активна) пластичність	Використання ΔJ , ΔS або розкриття у вершині тріщини
Мікроструктурно малі	$a \lesssim d_g^b$	Зчеплення у вершині тріщини, підвищене $\Delta \epsilon_p$	Імовірнісний підхід
Фізично малі	$2c \lesssim (5-10)d_g$, $a \lesssim 1$	Форма тріщини, зчеплення у вершині тріщини, (закриття тріщини)	Використання ΔK_{eff}
Хімічно малі	до 10 мм ^c	Локальне середовище у вершині тріщини	

^a r_y – розмір пластичної зони або пластичної області біля концентратора.

^b d_g – критичний мікроструктурний розмір, наприклад, розмір зерна, a – глибина тріщини, $2c$ – довжина поверхні.

^c Критичне значення є функцією частоти та кінетики реакцій.

У зв'язку з цим прийнято поділяти процес зародження і поширення тріщини на п'ять етапів [2, 37]: зародження втомної тріщини, поширення мікроструктурно короткої тріщини, поширення механічно та фізично коротких тріщин, поширення довгих тріщин та руйнування. Хоча деякі вчені [69]

вважають, що не слід виділяти окремо стадію зародження, а вже з початком навантаження розглядати поширення коротких тріщин.

Відмінності у розумінні поняття «короткі тріщини» існують також залежно від географічного розташування наукових шкіл. Американські вчені послуговуються терміном «мала тріщина», описуючи малість тріщини у всіх вимірах, а терміном «коротка тріщина» – у випадку малості тріщини в одному вимірі, у той час як європейські вчені часто використовують ці терміни у протилежних значеннях [60]. У цій роботі дотримуватимемося означень коротких тріщин як малих по одному параметру, та малих тріщин як малих по усіх параметрах.

1.3.1.2. Основні відмінності між короткими та довгими тріщинами

Ввівши означення та класифікувавши короткі тріщини, необхідно з'ясувати відмінності у їх властивостях. Різниця між поведінкою коротких та довгих тріщин полягає у відмінностях між внутрішніми механізмами та процесами, що впливають на ріст кожної з цих категорій тріщин. До найважливіших причин таких відмінностей вчені відносять [3, 61] вплив мікроструктури та границі зерен, механізм закриття тріщини, форму тріщини, зчеплення у вершині тріщини, а також підвищений рівень пластичності та пластичної деформації біля вершини тріщини. Зокрема [61], закриття вершини тріщини, яке сильніше проявляється для тріщин більшого розміру, спричиняє зчеплення у вершині тріщини, яка у свою чергу впливає на зменшення рушійної сили біля вершини тріщини.

Дія цих факторів проявляється у рості коротких тріщин при значеннях розмаху коефіцієнта інтенсивності напружень, нижчих, ніж розмах порогового КІН, обчислений для довгих тріщин; нестабільній швидкості росту та можливій їх зупинці; немонотонності швидкості зі збільшенням розмаху КІН, нижчі значення номінальних коефіцієнтів інтенсивності напружень у порівнянні з довгими тріщинами [3, 5, 61]. Також часто спостерігаються значення швидкостей, більші, ніж для довгих тріщин при однаковому значенні

номінального КІН, що є характерною властивістю для усіх типів коротких тріщин [61]. Крім того, швидкість росту коротких тріщин залежить від рівня напружень, що є нехарактерним для довгих тріщин [6] (рис. 1.9).

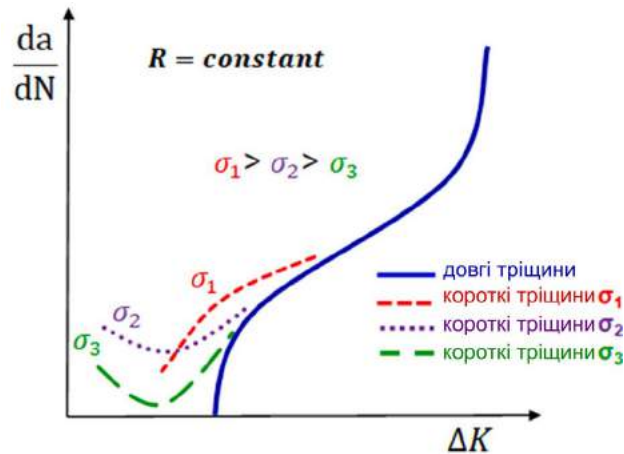


Рис. 1.9. Схематичне порівняння швидкостей росту коротких та довгих тріщин за різного рівня напружень [6].

1.3.1.3. Діаграма Кітагава-Такагаші

Для кращого розуміння відмінностей між короткими та довгими тріщинами та визначення межі між ними, Кітагава й Такагаші розробили діаграму [70], яка пізніше була модифікована Ель Хаддадом та співавторами [71], Міллером [72], Саданандою й Саркармом [73].

На діаграмі Кітагава-Такагаші [70] горизонтальна лінія відповідає границі витривалості, а похила лінія побудована на основі порогового КІН для довгих тріщин (рис. 1.10, а). Таким чином, діаграма шляхом перетину цих двох ліній дозволяє знайти розмір тріщини a_0 , який є границею між короткими та довгими тріщинами. На діаграмі також проведено графічну межу між областю безпечного поширення тріщини, розташованої під обома лініями, та областю, у якій відбуватиметься втомне руйнування (область над обома лініями).

Модифікації Міллера [72] (рис. 1.10, б). та Ель Хаддада [71] були направлені на уточнення граничних ліній між небезпечними та безпечними областями поширення тріщин в сторону зменшення останніх у зв'язку з врахуванням впливу мікроструктури матеріалу на ріст коротких тріщин. Версія

Садананди-Саркара [73] (рис. 1.11) включає, крім зони непоширення тріщин, також області внутрішніх напружень, росту тріщини та росту тріщини при сталому напруженні, а також поєднання стадії зародження та поширення тріщин.

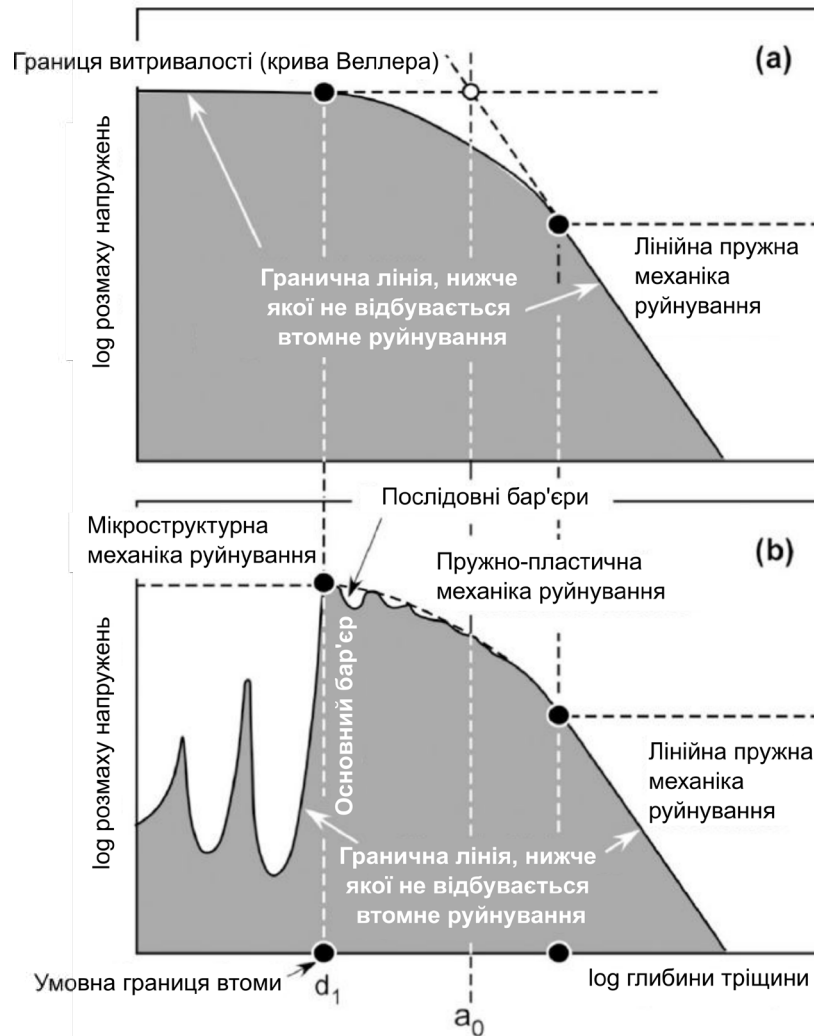


Рис. 1.10. Діаграма Кітагава-Такагаші: а) запропонована Кітагава та Такагаші, б) модифікація Міллера [2].

У цьому пункті описано основні поняття та класи коротких тріщин, а також пояснено необхідність такого поділу й відокремлення від довгих тріщин. У наступному пункті більш детально буде описано першу стадію руйнування – зародження короткої тріщини. Хоча моделі, розроблені в дисертаційному дослідженні, не розглядають вплив мікроструктури на ріст тріщин, для розуміння процесу руйнування в цілому важливо розглянути всі його стадії, починаючи від зародження тріщин.

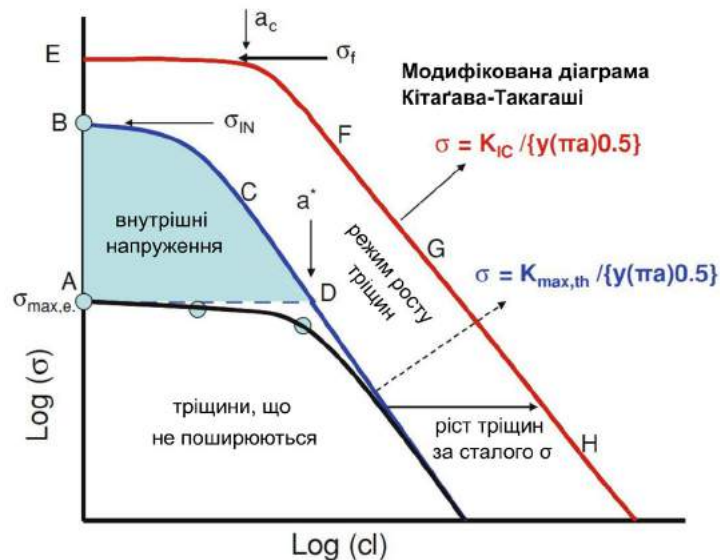


Рис. 1.11. Модифікація діаграми Кітагава-Такагаші, запропонована Саданандою та Саркарром [73].

1.3.2. Особливості та моделювання зародження коротких тріщин

1.3.2.1. Фактори впливу на зародження тріщин

Короткі втомні тріщини на стадії зародження та раннього їх поширення піддаються впливу багатьох факторів, комбінація яких створює передумови для ініціації процесів, що сприяють появі та росту коротких тріщин. Широкий огляд праць з проблеми зародження втомних тріщин представлено у праці [74], та звернено увагу на побудовані на основі мікроструктурних характеристик математичні моделі, які дозволяють змоделювати зародження тріщини.

Одним з найважливіших факторів у процесі зародження тріщин є мікроструктура матеріалу [45]. Її неоднорідність, наявність дефектів, включень та їх розміри, розміри зерен, розташування смуг ковзання, разом з границями зерен та блоків є ключовими компонентами впливу мікроструктури на ріст тріщини. Крім того, на ріст короткої тріщини на початковій стадії впливає багато інших факторів, таких як спосіб навантаження, температура, перевантаження, амплітуда навантажень, тип зразка, наявність концентраторів напружень, надрізів. Вплив способу навантаження можна поділити в свою чергу на інші категорії: режим (малоциклова, багатоциклова, чи надбагатоциклова втома), тип

навантаження (розтяг, поперечний та повздовжній зсуви, згин) чи вид навантаження (одновісне, двовісне, багатовісне).

Зародження втомних тріщин у нержавіючій сталі за дії циклічного розтягу [75] відбувається в основному в місцях постійних смуг ковзання, у той час як їх зародження є незначним на границях двійникування і відсутнім на границях зерен. Проте за дії високої температури та оксидації границь зерен, тріщини утворюються переважно саме на границях зерен, які були направлені перпендикулярно до осі навантаження [76].

З іншого боку, на зародження та ріст тріщини значно впливає режим втомного навантаження. Досліджено [77], що в AL2003 за дії багатоциклового навантаження тріщини зароджуються на границях зерен. На противагу цьому, за малоциклового навантаження тріщини утворюються з інтрузій та екструзій і поширюються вздовж площин ковзання. У порівнянні з алюмінієвим сплавом, у сталі LDSS LDX 2101 інтрузії та екструзії, розташовані у феритних зернах, є основними місцями утворення коротких тріщин [78]. Крім того, при низькоциклової втомі границі зерен та фаз перешкоджають росту тріщини як у Al2003 [77], так і у сталі LDSS LDX 2101 [78].

У той же час для крихкої нержавіючої сталі DIN 1.4462 границі фаз протидіють росту тріщини за обох режимів навантаження [79]. У цій сталі за низькоциклової втомі тріщини зароджувалися у феритній фазі й поширювалися у феритній або аустенітній, тоді як за багатоциклової втомі зародження тріщин відбувалося в аустенітній фазі. Така різниця між механізмами зародження та поширення тріщин за різних режимів навантаження пов'язана з відмінностями у характері впливу пластичної деформації у матеріалі за багато- та малоциклової втомі.

Аналіз літературних джерел показав, що усі згадані фактори впливають на процеси зародження та поширення тріщин, спричиняючи різні швидкості, затримку чи зупинку росту тріщини, явище непоширення, закриття тріщини, а також позначаються на розмірі втомної тріщини, що зароджується.

1.3.2.2. Вплив мікроструктури на зародження тріщин

У зв'язку з неpravомірністю застосування лінійної механіки руйнування до коротких тріщин, як проілюстровано також на діаграмі Кітагава-Такагаші, Міллер [72] (рис. 1.10, б) проводить межу між застосуванням лінійної механіки руйнування для опису росту довгих тріщин, пружно-пластичної механіки руйнування для коротких тріщин та мікроструктурної механіки руйнування, яку застосовують для тріщин, менших, ніж умовна границя втоми. Такий поділ пов'язаний з особливостями росту коротких тріщин, а саме зі значним впливом мікроструктури (границь двійникування, границь зерен, мікроструктурних бар'єрів) [72]. Досягаючи таких бар'єрів, мікроструктурно короткі тріщини сповільнюють або навіть припиняють свій ріст (рис. 1.8). При збільшенні напружень ріст тріщин відновлюється і вона може перейти з категорії мікроструктурно коротких до категорії механічно та фізично малих і в підсумку досягнути розміру великих тріщин.

Серед мікроструктурних факторів для випадку метастабільної аустенітної нержавіючої сталі важливу роль відіграють границі двійникування, смуги ковзання, екструзії, інтрузії, границі зерен, включення та мартенситне перетворення, хоча найбільший вплив на зародження тріщини мають границі двійникування та смуги ковзання [80].

Вплив мікроструктури матеріалу на зародження і ріст коротких тріщин проявляється також у різних механізмах їх поширення: внутрішньозеренному [75, 76, 81, 82] та міжзеренному [76, 82], дія яких особливо відчутна на ранньому етапі поширення тріщин. Тип механізму, що домінуватиме при зародженні тріщин при надбагатоцикловій втомі, залежить від розташування систем ковзання у сусідніх зернах [82]. Наприклад, дослідження [81], проведені для термообробленої мартенситної сталі 0.5C-1.25Cr-Mo, виявили, що тріщина поширюється за міжзеренним механізмом на границях мартенситних блоків.

Внутрішньозеренний механізм також присутній на ранній стадії поширення тріщини і проявляється в основних мартенситних блоках, що спричинено системою ковзання в межах малих блоків [81]. Таким чином,

основною причиною поширення тріщин на ранній стадії вважають [81] не границі аустенітних зерен, а локальне розташування мартенситних блоків у кожному з них. Експерименти циклічної деформації зразків з надрізами з нержавіючої сталі Sanino 25 [75] також свідчать про домінуючу роль внутрішньозеренного механізму росту тріщин у зернах у місцях постійних смуг ковзання.

Таким чином, мікроструктура матеріалу на рівні кожного зерна та зерен, що його оточують, є визначальним фактором у процесі раннього поширення та зародження втомних тріщин.

1.3.2.3. Моделювання зародження коротких тріщин

Складність моделювання поширення та зародження коротких втомних тріщин полягає у великій кількості різного роду факторів, які впливають на цей процес. При побудові моделей, які змогли б прогнозувати поширення тріщин, часто вдаються до певних узагальнень та припущень, концентруючи увагу на декількох основних факторах. Такого типу моделі є досить зручними у використанні, проте не завжди результати моделювання можна використовувати для більш загальних випадків, а також точність отриманих результатів є різною. З іншого боку, існує підхід, згідно з яким намагаються отримати якомога точніші моделі, враховуючи велику кількість параметрів та різноманітність їх впливу на досліджувані процеси. Недоліком такого моделювання є висока складність моделей та необхідність наявності багатьох, часто специфічних, параметрів, характерних для конкретного матеріалу, способу навантаження чи середовища, які далеко не завжди є відомими і які можна отримати лише у результаті досить складних експериментальних досліджень.

Враховуючи складність процесів, що відбуваються під час поширення тріщини, неможливо побудувати модель, яка б змогла точно моделювати усі явища і врахувати усі параметри зародження і поширення тріщин [83]. Такі міркування підтверджено також для мікромеханічного моделювання у режимі коротких тріщин [83], де розроблені моделі базуються або на детальному

теоретичному підґрунті процесу поширення тріщин або на моделюванні за результатами експериментальних даних. Незважаючи на це, у сучасній науці існує потреба подальшого розроблення підходів до моделювання режиму коротких тріщин, зокрема тривимірних моделей, які змогли б повніше описати процес поширення коротких тріщин.

Аналіз літературних джерел свідчить про те, що в останні роки для опису явища втомного зародження та раннього поширення коротких тріщин використовували різні підходи, зокрема криві деформації та втоми, концепцію J -інтегралу, енергетичні та числові підходи, зокрема NASGRO, методи граничних та скінченних елементів. У результаті цього стали доступними багато експериментальних та теоретичних даних для різних металевих матеріалів та сплавів, що значно поглибило стан сучасного розуміння принципів, що лежать в основі зародження та поширення коротких тріщин, а також дозволило точніше описати цей процес. Багато зусиль було направлено на моделювання та математичний опис процесу зародження та поширення тріщин. Це призвело до розроблення моделей прогнозування періоду зародження тріщин та загального періоду довговічності елементів конструкцій.

Незважаючи на різницю у механізмах зародження та поширення тріщин за різного режиму втомного навантаження – малоциклової, багатоциклової та надбагатоциклової втоми – існують універсальні підходи, які можуть бути застосовані до усіх цих типів втомного навантаження. Використовуючи методи граничних та скінченних елементів, розроблено [84] числову модель на основі розкриття вершини тріщини, яка показує добрі результати у порівнянні з експериментальними даними для тріщин, підданих дії мало- і багатоциклової втоми та різного стану матеріалу.

Для випадку малоциклової втоми поширення коротких тріщин у металевих матеріалах можна виразити через залежність між амплітудою напружень та довговічністю, тобто за допомогою деформаційних кривих і традиційних кривих втоми [85]. Для конкретного металу, з урахуванням його структури, запропонований підхід дає змогу визначати етапи зародження та росту коротких

втомних тріщини. Універсальність представлення зародження та поширення втомних тріщин за допомогою запропонованих втомних кривих [85] полягає в тому, що, незважаючи на те, що цей підхід розроблено для режиму малоциклової втоми, його можна застосовувати для обох режимів навантаження – як малоциклової, так і багатоциклової втоми.

За дії багатоциклового навантаження запропоновано [86] співвідношення між початковим розміром дефектів чи коротких тріщин та розміром зерен у сталі для усього діапазону напружень, що дає змогу визначити довговічність ще до появи короткої тріщини.

Визначаючи довговічність елементів конструкції з короткими тріщинами, необхідно мати змогу визначати період зародження тріщини, який є складовою частиною загальної довговічності. Для обчислення періоду зародження тріщини запропоновано [87] метод, що базується на підходах механіки руйнування, зокрема на кривих втоми. При цьому період зародження тріщини обчислюється за відомими значеннями критичної довжини тріщини та довговічності шляхом зворотного інтегрування.

У той же час, експериментальні дослідження циклічного кручення, проведені на сталі SUS316L [88] та JIS343 [89], показали, що у зразках з кільцевим надрізом період зародження та поширення тріщини залежить від концентрації напружень: обернено пропорційно для періоду зародження та прямо пропорційно для періоду поширення тріщини, що спричинено запізненням росту тріщини у зв'язку зі збільшенням контакту між берегами, тобто присутній ефект зміцнення надрізів. Введення складного навантаження шляхом комбінації циклічного кручення та статичного розтягу зменшує контакт берегів та, відповідно, ефект запізнення росту короткої тріщини. Проте ефект впливу концентрації напружень не є універсальним для всіх сталей, зокрема встановлено [88], що він відсутній для сталі SGV410.

Крім концентрації напружень, на зародження та поширення тріщини впливають також головні напруження. Виявлено [90], що в аустенітно-феритних дуплексних сталях високі головні напруження викликають релаксацію головних

деформацій та призводять до циклічного зміцнення. У той же час, додатні головні напруження прискорюють зародження та ріст тріщини, що, в свою чергу, негативно впливає на довговічність матеріалу з тріщиною. У зв'язку з дією цих факторів та відповідним зменшенням періоду зародження тріщини, його пропонують [90] не враховувати при визначенні періоду втомної довговічності за таких умов.

При моделюванні зародження та росту коротких тріщин важливе місце посідають моделі, які дають змогу поєднати обидва ці процеси. Одна з таких моделей, запропонована Ґангом та співавторами [91] для інструментальної сталі DIN HS6-5-3, дозволяє обчислити період зародження та поширення коротких тріщин на основі модифікації моделі Мак-Давелла [92]. В іншій числовій моделі Кастеллучіо та Мак-Давелл [93] поєднали зародження та ріст мікроструктурно коротких втомних тріщин у металевих полікристалах, концентруючись на впливі мікроструктури на ці процеси та використовуючи метод скінченних елементів в ABAQUS. Інша 2D числова модель [94] для опису зародження та поширення мікроструктурно коротких тріщин побудована на основі врахування орієнтації зерен та морфології фаз.

Розглянувши деякі моделі для опису процесу зародження тріщин, моделювання поширення коротких тріщин представлено в наступному підрозділі.

1.3.3. Моделювання поширення коротких втомних тріщин

1.3.3.1. Мікроструктурно та механічно короткі тріщини

Як зображено на рис. 1.8, здебільшого ріст коротких втомних тріщин є нерівномірним, що підтверджують експериментальні дослідження та результати моделювання. За даними Такаґаші [95], короткі тріщини, які утворюються у сплаві дисперсійного твердіння Al-Mg-Si, ростуть повільно, багаторазово проходячи досить тривалі стадії зупинок. Такий характер росту коротких тріщин призводить до того, що більшу частину періоду довговічності матеріалу займає саме ріст мікроструктурно коротких тріщин.

У полікристалічних матеріалах короткі тріщини після зародження вступають у першу фазу росту, згодом переходячи у другу в результаті об'єднання декількох тріщин. Такі тріщини мають форму пів кола та поширюються перпендикулярно до прикладеного навантаження [96].

У зв'язку з цим існує потреба у створенні моделей, які б враховували фактори та особливості поширення тріщин на кожній стадії. Полак [96] запропонував модель для опису поширення коротких тріщин на ранніх етапах за симетричного циклічного навантаження з додатнім значенням середніх напружень, яка враховує наявність вторинних тріщин та дозволяє обчислити довговічність елементів конструкцій з короткими тріщинами. Застосування запропонованої моделі до поширення коротких тріщин у циліндричних зразках з надрізами для різних матеріалів свідчить про експоненційний закон руху таких тріщин. У зв'язку з тим зроблено спробу використати ідею закону Коффіна-Менсона для випадку малих тріщин.

Математична модель [97] дає змогу обчислити швидкість росту мікроструктурно малої втомної тріщини на основі введення поправок на пластичність у вершинах тріщин до даних для довгих тріщин, врахування мікроструктурних особливостей росту коротких тріщин та їх кінцевої обробки методом Монте-Карло. Таким чином, модель [97] для мікроструктурно малих тріщин, як і моделі [98-102] для усього діапазону довжини тріщини, завдяки обмеженій кількості параметрів дозволяють мінімізувати кількість необхідних для їх використання експериментів і, відповідно, спростити визначення кінетики росту коротких тріщин та довговічності, зберігаючи достатню точність прогнозів.

Ендо та МакЕвілі [103] вивчали короткі тріщини, що утворилися з дефектів та піддані дії комбінованого навантаження, досліджуючи швидкість та напрям їх росту, криві й границі втоми на основі лінійної пружно-пластичної механіки руйнування із врахування ефекту Кітагава та явища закриття тріщини.

Гертель та Формвальд [104] запропонували модель для дослідження коротких тріщин за багатовісного змінного навантаження у гладких зразках та

зразках з надрізами на основі модифікації існуючої моделі [105] для випадку багатовісного постійного навантаження. Ці модифікації враховують середні напруження, залежності між втомною міцністю та пошкоджуваністю матеріалу, а також ефект закриття тріщини і дають змогу отримати точніші результати для росту тріщин при змінному втомному навантаженні.

Інший підхід у моделюванні росту коротких тріщин полягає у поєднанні аналітичних розв'язків та результатів числового моделювання, в основному методом скінченних елементів. Наприклад, Ойфінгер та співавтори [106] крім числового моделювання використовують також пружно-пластичну механіку руйнування, ефективний розмах J -інтегралу, закриття та розкриття тріщини для побудови математичної моделі росту механічно коротких втомних тріщин.

1.3.3.2. Фізично короткі та довгі тріщини

Для випадку фізично коротких та довгих тріщин застосовують інші підходи до моделювання. Зокрема, рівняння NASGRO використовується для ефективного моделювання росту довгих тріщин, проте цей підхід є недостатньо точним для випадку коротких тріщин. У зв'язку з цим запропоновано [107] модифікацію рівняння NASGRO, яка повинна коректно моделювати ріст та визначати швидкість росту тріщин довільної довжини, у тому числі й фізично коротких тріщин. Для опису поширення коротких тріщин, що виникають з дефектів матеріалу, ефективно використовують рівняння NASGRO у версії Гартман-Схейве, яке добре корелює з кривими росту коротких та довгих тріщин в координатах «швидкість росту – розмах КІН» [108].

В інших моделях [109, 110] для оцінки залишкової довговічності та швидкості росту фізично коротких тріщин за малоциклової втоми основним параметром вибрано пластичну частину J -інтегралу. Запропонована модель є досить простою у використанні та добре корелює з результатами моделі Полака [111] та експериментальними даними для сталі Y203 [109] та EUROFER [110].

Зважаючи на велику кількість моделей для опису поширення коротких тріщин, які базуються на різних принципах та використовують різні параметри в

якості змінних, постає питання, які параметри дозволяють найбільш точно та коректно описувати рух саме коротких тріщин. У зв'язку з цим проведено дослідження [112], в якому для опису експериментальних даних швидкостей росту коротких тріщин у сталевих та алюмінієвих матеріалах за малоциклової втоми використано КІН, J -інтеграл та його пластичну частину. Лінійна пружно-пластична механіка руйнування та, відповідно, КІН, не змогли достатньо точно описати ріст коротких тріщин через велику деформацію, що виникає у її вершині. На відміну від них, застосування J -інтегралу та пластичної частини J -інтегралу в якості параметрів дало значно кращі результати. Важливо відзначити, що за цих параметрів експериментальні дані швидкості росту коротких тріщин за різних значень навантаження описувалися єдиною кривою. Таким чином, основним чинником, що впливає на швидкість росту тріщини за малоциклової втоми, можна вважати величину енергії, витрачену на пластичну деформацію.

Такі результати також підтверджено для випадку малоциклової втоми загартованої та термообробленої сталі [113]. Проте слід зауважити, що розглядаючи КІН, J -інтеграл, та модель Томкінса, недоліки у використанні параметрів виявлено у застосуванні кожного з них: КІН давав передбачення, некоректні з точки зору безпеки; модель Томкінса показувала неточні результати при зменшенні амплітуди деформацій, а використання J -інтегралу спричиняло великий розкид результатів у порівнянні з експериментальними.

Враховуючи різницю між механізмами поширення тріщин за мало- та багатоциклової втоми, результати, отримані за дії кожного з цих режимів навантаження, не можна просто перенести на випадок їх сумісної дії. У зв'язку з цим розроблено [114] критерій пошкоджуваності для випадку дії комбінованого навантаження у сталях, враховуючи діаграму Кітагава-Такагаші та підвищені швидкості росту коротких тріщин, отримані експериментально.

Моделі, що описують поширення коротких тріщин, використовуються в основному для знаходження швидкості їх поширення чи довговічності елементів конструкції, проте можуть бути застосованими і для визначення інших характеристик у режимі коротких тріщин. Наприклад, модель поширення

коротких тріщин разом з методом скінченних елементів використана для розроблення підходу для визначення границь втоми у зразках з надрізами за дії розтягу [115]. Для випадку дії двовісного навантаження запропоновано іншу модель [116] для знаходження границь втоми, що базується на моделі Мак-Евілі, моделі \sqrt{area} , закритті тріщини та пластичності у її вершині. Ця модель може бути також застосована до інших дефектів, окрім тріщин, оскільки виявлено [116], що дефекти малого розміру впливають на границі втоми аналогічно, як і короткі тріщини.

Аналіз кінетики росту коротких тріщин ліг в основу критеріїв переходу між механізмами розсіяних та локалізованих втомних пошкоджень, зокрема такі критерії побудовано на основі залежності між швидкістю росту коротких тріщин та коефіцієнтом інтенсивності напружень, а також розміром тріщини та періодом довговічності [117].

Як зазначено раніше, спільна дія корозивного середовища та втомного навантаження спричиняє значно більший негативний вплив на ріст тріщини в металевому матеріалі, ніж втомне навантаження. З огляду на це, у наступному підрозділі коротко описується ріст коротких тріщин за дії корозивного середовища.

1.3.4. Моделі росту коротких тріщин за дії корозивного середовища

Відмінності у характері росту коротких та довгих тріщин, зокрема більші швидкості та нижчі порогові КІН при рості коротких тріщин зберігаються і при впливі корозивного середовища. Експерименти, проведені на 3.5NiCrMoV сталі за дії водню тиском 4 бар, підтвердили [118], що ці властивості фізично коротких тріщин є схожими до тих, що спостерігаються на повітрі.

На основі експериментальних досліджень кінетики росту коротких корозійно-втомних тріщин у сталі 12Cr запропоновано концепцію «ефекту розміру електрохімічної тріщини» [119, 120]. Порівнюючи швидкості росту тріщин, встановлено, що короткі тріщини, які утворилися з корозійних

пошкоджень, поширювалися зі швидкістю, меншою, ніж очікувана. У той же час малі тріщини в аерованому хлорованому розчині зростали зі значно більшими швидкостями.

При дослідженні кінетики росту коротких втомних тріщин важливо знати пороговий коефіцієнт інтенсивності напружень, тобто величину, нижче якої тріщина не буде поширюватися. Оскільки пороговий КІН для коротких тріщин є значно нижчим, ніж для довгих, та не є характеристикою матеріалу, а прямо залежить від розміру включень [121], то необхідно мати підхід для його визначення. Такий підхід для двовісного розтягу високоміцних сталей, що містять малі тріщини та дефекти, за впливу водню запропоновано Мураками та співавторами [121] через представлення лінійної залежності порогового коефіцієнта інтенсивності напружень від розміру включення та концентрації водню.

Дослідження порогових коефіцієнтів інтенсивності напружень коротких та довгих тріщин у низьковуглецевих сталях показало [122], що розмах ефективного порогового КІН, а також співвідношення між розмахом ефективного КІН та швидкістю росту тріщини є характеристиками поведінки матеріалу в конкретному середовищі. Ці характеристики залежать у тому числі й від зміни механічних характеристик матеріалу за дії середовища [18-20]. На відміну від них, розмах номінального порогового коефіцієнта інтенсивності напружень змінюється при зміні довжини тріщини та характеру навантаження, а закриття вершини тріщини залежить від навантаження та довжини зони передруйнування.

Для оцінки довговічності елементів конструкцій, що перебувають під впливом корозивного середовища, також розроблено математичні моделі. На основі аналізу процесу поширення тріщин запропоновано [23] модель визначення довговічності алюмінієвих компонентів літаків із врахуванням чотирьохетапного процесу зародження та поширення коротких втомних тріщин, що включає руйнування покриття, зародження корозійних ямок, ріст коротких тріщин до поширення довгих тріщин.

У іншому дослідженні [123] звернено увагу на вплив корозійних чинників на зародження та поширення коротких та довгих тріщин, а також розглянуто взаємозв'язок між розміром тріщини та електролітною провідністю за корозійно-втомного поширення тріщин. У той же час, у [124] узагальнено основні чинники, які присутні за корозійно-втомного навантаження та мають значний вплив на поширення коротких тріщин, а також експериментальні дані щодо швидкості росту коротких тріщин за цих умов.

Іншим важливим параметром при дослідженні довговічності елементів конструкції з тріщинами є обчислення критичного розміру тріщини. Для його визначення запропоновано [125] математичну модель на основі теорії коротких тріщин Кітагава-Такагаші за дії фретинг-корозії та відсутності пластичних деформацій.

Порівняння результатів відомих моделей з експериментальних даних проведено також для визначення границі втоми сталі 12Cr за втомного навантаження та наявності коротких тріщин й корозійних пошкоджень [126]. У цьому випадку моделі Ель Хаддада й співавторів [127] та Сміта й Міллера [128] дали змогу отримати достатньо точні значення границі втоми, в той час як за моделлю Муракамі $\sqrt{\text{area}}$ [129] отримано суперечливі у порівнянні з експериментальними результати.

Порівняння експериментальних даних втомного та корозійно-втомного поширення коротких тріщин у пружинних сталях з деякими існуючими моделями дало змогу розробити нову аналітичну параболічно-лінійну модель для обчислення швидкості поширення тріщин залежно від їх довжини [130]. Проте запропонована модель залежить від матеріалу та має різний вигляд для кожної з досліджуваних сталей.

Експериментальне підтвердження має також модель [131], яка дозволяє обчислити фактичну міцність елементів pomp нафто- та газопроводів, виготовлених зі сталі та підданих дії втомного навантаження та корозивного середовища.

На основі експериментальних досліджень низьковуглецевої сталі під впливом згинного навантаження, азотного та водневого середовищ розроблено рівняння [132], що характеризує швидкість поширення коротких втомних тріщин. Запропоноване рівняння є дійсним за впливу азоту для довільної величини деформації та водню. Проте для коректності рівняння за дії водню необхідними є низькі рівні деформації (0.25 – 0.37 %), що пов'язано з різним мікроструктурним характером та різною швидкістю поширення тріщини за дії цих середовищ.

Для оцінки втомної довговічності високоміцних сталей з тріщинами, що зародилися на неметалевих включеннях, Ямашіта і Мураками [133] запропонували модель на основі підходу $\sqrt{\text{area}}$ [129] та поняття «постійно змінної границі втоми» для ділянки поза оптично темною областю та узагальненої кривої росту для ділянки всередині оптично темної області. Поняття «постійно змінної границі втоми» введено для малих тріщин, оскільки для них розмах порогового КІН ΔK_{th} є постійно змінною величиною при зміні довжини короткої тріщини. Слід зазначити, що запропонована модель є дійсною за довільного режиму навантаження як за малоциклової, так і за багатоциклової втоми.

До цього моменту в цьому розділі основну увагу звернено на визначення відмінностей між класами коротких тріщин та здійснення огляду експериментальних й теоретичних результатів для кожного з них. Однак поширення тріщин у матеріалах є безперервним процесом, починаючи з ранніх стадій коротких тріщин і до довгих тріщин, що викликають руйнування. Таким чином, у наступному розділі мова піде про існуючі універсальні моделі, дійсні як для коротких, так і для довгих тріщин.

1.3.5. Узагальнені моделі коротких та довгих тріщин

На сучасному етапі розвитку науки недостатньо розроблено універсальні моделі, які б могли прогнозувати ріст тріщин в усьому діапазоні: від мікроструктурно коротких і до макротріщин [6]. Це пов'язано, зокрема, з різними характеристиками поширення коротких та довгих тріщин, а також складними механізмами, що лежать в основі процесу росту коротких тріщин.

Проте існують спроби розробити такі універсальні моделі, спектр дії яких поширювався б на тріщини різної довжини. Одна з таких моделей, запропонована Бенгом зі співавторами [6], базується на врахуванні двох типів параметрів: рушійної сили руху тріщини та її критичного значення. Внесення цих параметрів у модель дозволяє авторам описати як процес росту тріщини в матеріалі, так і опір матеріалу, що гальмує ріст коротких тріщин. Кожний з врахованих типів параметрів є функцією від основних величин, що описують характер росту тріщини, таких як КІН, порогові величини, відповідальні за ріст тріщини, та коефіцієнт асиметрії циклу. Проте прогнози, отримані за цією моделлю, залежать від рівня напруження: є більш точними для вищих рівнів напружень та мають більшу похибку у порівнянні з експериментальними даними за нижчих рівнів.

Розроблена раніше двопараметрична модель поширення коротких та довгих тріщин [134, 135] базувалася на загальному максимальному КІН та розмаху загального КІН. Модель показала добру збіжність з експериментальними даними в діапазоні довгих тріщин, проте некоректно моделювала швидкість росту коротких втомних тріщин.

Папангело зі співавторами [136] розробили узагальнене рівняння росту тріщини, що включає стадії поширення короткої та довгої тріщин. Ідея підходу полягає у виведенні рівняння росту коротких тріщин та використанні закону Періса на стадії довгих тріщин.

На відміну від цього, запропонований Садананда та співавторами [137, 138] «єдиний підхід», побудований на основі параметрів K_{max} та ΔK , дозволяє

поєднати аналіз росту та зупинки коротких та довгих тріщин з урахуванням порогового значення рушійної сили тріщини. Таким чином, автори узагальнюють застосування підходу на різні випадки росту тріщин, наприклад, тріщин, що утворюються у надрізах, короткі та довгі тріщини.

Інші моделі, розроблені Герасимчуком зі співавторами [98-102], дозволяють передбачити довговічність, характер росту та швидкість поширення тріщин різного розміру – від фізично коротких до довгих – за одновісного навантаження для гладких зразків [98-100] та зразків з концентраторами напружень [101, 102]. В основу цих моделей покладено розроблений раніше принцип втомних порогових розмахів коефіцієнтів інтенсивності напружень [139], і враховано модифіковану діаграму Кітагава-Такагаші, а межу між короткими та довгими тріщинами встановлено на основі співвідношення між пластичною зоною у вершині тріщини та розміром зерна [139]. За моделлю [99] можна обчислити періоди росту фізично коротких та довгих тріщин, а також загальну довговічність елемента конструкції з тріщинами із врахуванням зміни розміру порогового КІН зі зростанням фізично короткої тріщини.

При побудові моделей встановлено деякі принципи зародження та поширення коротких тріщин, які враховано для отримання точніших результатів. По перше, на основі аналізу мікроструктури було встановлено [99], що на ширину зародженої тріщини сильно впливає орієнтація зерен навколо неї, яка, в свою чергу, впливає на період зародження тріщини та може спричинити різницю у величині періоду зародження до одного порядку. У зв'язку з цим запропоновано формулу для визначення ширини зародженої тріщини через залежність між параметрами у вершині тріщини: КІН та коефіцієнтом концентрації напружень. Крім того, границею між режимами багато- та малоциклової втоми вважають [139] границю між механізмами мікроструктурно та фізично коротких тріщин, тобто границю пропорційності.

Особливість цих моделей полягає у тому, що в них не входять втомні характеристики матеріалу, а лише мікроструктурні параметри і статичні характеристики пружності.

Млікота та співавтори [140] розробили математичну модель, яка описує зародження коротких тріщин на основі моделі Танака-Мура й методу скінченних елементів, а також ріст довгих тріщин через закон Періса за втомного навантаження. Отримана модель дає змогу визначити довговічність елемента конструкції з тріщинами з використанням кривих Веллера.

Осташ та співавтори [141] запропонували використовувати базову криву втоми для зразків з надрізами для визначення періоду зародження макротріщин та кінетики мікроструктурно коротких та фізично малих втомних тріщин у зразках з надрізами та, на цій основі, розробили підхід до визначення загального періоду довговічності, обчислюючи період росту макротріщини із застосуванням КДВР.

Математична модель для визначення довговічності матеріалів, що містять дефекти різного розміру, розроблена Цербстом зі співавторами [142-144], враховує стадії росту коротких та довгих тріщин за малоциклової втоми. Проте необхідною умовою для використання цієї моделі є наявність дефектів у матеріалі, що сприяє швидкому зародженню короткої тріщини, адже у загальний період довговічності у моделі період зародження не входить. Експериментальна апробація моделі здійснена на різних матеріалах, зокрема алюмінієвих сплавах та чавуні за різних випадків навантаження.

Таким чином, у цьому підрозділі коротко описано спроби створити уніфіковану модель для одночасного опису росту втомної тріщини різної довжини. Як видно з цього огляду, необхідність такої моделі широко визнана, і в останні роки дослідження у цій галузі стали актуальними. На сьогодні запропоновано різноманітні моделі для опису цього процесу, проте вони мають деякі обмеження у застосуванні.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі проведено аналіз і синтез результатів досліджень зародження та поширення коротких втомних тріщин, а також підходів до моделювання опису росту тріщин. Для цього розглянуто основні критерії механіки руйнування, механізми поширення тріщин, описано поняття втоми та її стадій, а також зроблено огляд різних підходів до моделювання поширення втомних тріщин та визначення довговічності. Крім того, проаналізовано й узагальнено результати публікацій, що стосуються зародження і поширення коротких втомних тріщин у конструкційних матеріалах при циклічному навантаженні та корозивному середовищі. При цьому розглянуто вплив різних факторів на ці процеси, а також ефективність моделей для їх опису й застосування до прогнозування довговічності елементів конструкцій.

РОЗДІЛ 2

ПОШИРЕННЯ КОРОТКИХ ВТОМНИХ ТРІЩИН У ПЛАСТИНАХ

Зародження та поширення втомних тріщин, незважаючи на майже столітню історію вивчення, залишаються й тепер важливим напрямом для подальших досліджень. Питання прогнозування довговічності елементів конструкцій за сталого та змінного навантаження, а також вплив втоми на структурні елементи з концентраторами напружень, виокремлено як «проблемні галузі» [8], які є актуальними для досліджень у XXI столітті.

Поєднання цієї проблематики досліджень з короткими тріщинами робить її ще більш актуальною та нетривіальною. Цьому сприяють відмінності у законах росту коротких та довгих тріщин, а також у результатах впливу різних факторів на характер їх росту [2, 61].

У цьому розділі представлено математичні моделі для визначення залишкової довговічності пластин з тріщинами. Оскільки процес втомного руйнування складається із двох стадій: зародження та поширення тріщини до критичного розміру [8], запропоновано математичні моделі у параметрах деформації для обчислення періоду зародження механічно коротких тріщин та періоду докритичного росту тріщин, що зароджуються у вершинах концентраторів напружень у пластинах. Також представлено моделі для визначення залишкової довговічності пластин з короткими тріщинами під дією циклічних навантажень та корозивних середовищ із використанням розкриття у вершині тріщини як основного параметра моделі, а також запропоновано формулу для його наближеного аналітичного визначення.

Результати, викладені у цьому розділі, опубліковано у працях [10-16].

2.1. Математична модель поширення втомних тріщин у пружно-пластичних пластинах

2.1.1. Енергетичний підхід для дослідження поширення тріщин у пластинах

При дослідженні росту втомних тріщин у конструкційних матеріалах поряд із силовим та деформаційним, широко розповсюджений енергетичний підхід, який застосовують, наприклад, до вивчення в елементах конструкцій поверхневих [145] та плоских втомних [146] тріщин, високотемпературної [147, 148] та локальної [149] повзучості, а також до тонкостінних елементів конструкцій [150, 151]. Цей підхід дає змогу точніше дослідити поширення тріщини, особливо за умов зміни циклу навантаження, а також врахувати попередню історію деформування матеріалу [152].

У представленій роботі використано запропонований у [152] та [148] енергетичний підхід для дослідження росту втомних тріщин у тривимірних тілах для побудови математичної моделі поширення втомних тріщин у пружно-пластичних пластинах з прямолінійною тріщиною початкової довжини $2l_0$.

Розглянемо пружно-пластичну пластину (рис. 2.1), послаблену прямолінійною тріщиною довжини $2l$. Пластина розтягується циклічним навантаженням інтенсивності p , симетричним відносно лінії розміщення

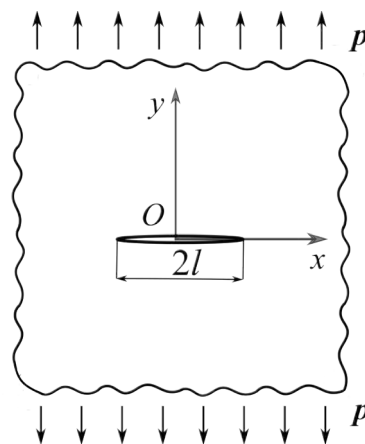


Рис. 2.1. Схема навантаження пластины з прямолінійною тріщиною.

тріщини. Введемо прямокутну систему координат Oxy з центром посередині тріщини, направивши вісь Ox вздовж тріщини. Задача полягає у знаходженні кількості циклів зовнішнього навантаження, тобто періоду докритичного росту тріщини $N = N_*$, коли внаслідок дії втомного навантаження тріщина підросте від початкового $l = l_{l_0}$ до критичного $l = l_{l_*}$ значення і пластина зруйнується [15].

У зв'язку з малими розмірами тріщини, що може призвести до невиконання умов автомодельності [31], розв'язуватимемо задачу на основі енергетичного підходу в параметрах деформацій [39], запропонованого у роботах [152, 153].

Враховуючи, що при втомному навантаженні ріст тріщини відбувається стрибками малого розміру Δl_c протягом великої кількості циклів ΔN_c , вважатимемо, що рух тріщини від початкового розміру $l = l_{l_0}$ до кінцевого $l = l_{l_*}$ є неперервним [154]. Тоді швидкість росту тріщини V можна записати у наступному вигляді:

$$V = \frac{dl}{dN} \approx \frac{\Delta l_c}{\Delta N_c}. \quad (2.1)$$

Запропонований підхід базується на першому законі термодинаміки та пов'язаний з ним умовою енергетичного балансу, що виконується для кожного стрибка тріщини в процесі її поширення [148, 152]:

$$A_I = W_I + \Gamma_I \quad (2.2)$$

де A_I – робота зовнішніх сил; W_I – енергія деформації; Γ_I – енергія руйнування тіла при зміні довжини тріщини за нормального відриву.

Енергію деформування тіла W_I , що утворюється при просуванні тріщини на величину стрибка, можна поділити на наступні складові [15, 148]:

$$W_I = W_{Is} + W_{Ip}^{(1)}(l) - W_{Ip}^{(2)}(t), \quad (2.3)$$

де W_{Is} – пружна складова; $W_{Ip}^{(1)}(l)$ – частина роботи пластичних деформацій за активного навантаження в циклі, що залежить лише від довжини тріщини; $W_{Ip}^{(2)}(t)$ – частина роботи пластичних деформацій в циклі під час розвантаження

тіла і стиску зони передруйнування, що генерується тілом та залежить лише від часу t (відповідно, кількості циклів навантаження $N = tT^{-1}$).

З умови балансу зміни швидкостей енергій [148, 152]

$$\frac{dA_I}{dN} = \frac{dW_I}{dN} + \frac{d\Gamma_I}{dN} \quad (2.4)$$

із врахуванням енергії деформування (2.3) отримаємо [148]:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[\Gamma_I - (A_I - W_{Is} - W_{Ip}^{(1)}) \right] \frac{dl}{dN} - \frac{dW_{Ip}^{(2)}}{dN} = 0. \quad (2.5)$$

Тоді з рівняння (2.5) можна виразити швидкість поширення тріщини [148]:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{dW_{Ip}^{(2)}}{dN} / \frac{\partial}{\partial l} \left[\Gamma_I - (A_I - W_{Is} - W_{Ip}^{(1)}) \right]. \quad (2.6)$$

Враховуючи, що [152]

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[\Gamma_I - (A_I - W_{Is} - W_{Ip}^{(1)}) \right] = \gamma_{Ifc} - \gamma_{It}, \quad (2.7)$$

із рівняння (2.6) отримаємо формулу для розрахунку швидкості поширення тріщини [148]:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{dW_{Ip}^{(2)}}{dN} / (\gamma_{Ifc} - \gamma_{It}), \quad (2.8)$$

де γ_{Ifc} та γ_{It} – відповідно питома енергія руйнування та питома робота пластичних деформацій у зоні передруйнування в процесі поширення втомної тріщини.

Визначенню роботи пластичних деформацій $W_{Ip}^{(2)}(t)$, яку генерує тіло у процесі розвантаження та стиску зони передруйнування, передуює обчислення довжини стрибка тріщини при її втомному поширенні [155]:

$$l_{Ifp} \approx \alpha_{I0} \Delta \delta_{It}(0, \xi) = \alpha_{I0} [\delta_{It \max}(0, \xi) - \delta_{It \min}(0, \xi)], \quad (2.9)$$

де α_{I0} – експериментальна константа; $\delta_{It \max}(0, \xi)$ та $\delta_{It \min}(0, \xi)$ – максимальне та мінімальне розкриття $\delta_{It}(0, \xi)$ зони передруйнування за цикл, ξ – координата вздовж контуру тріщини.

Розкриття у вершині тріщини $\delta_{It}(x, \xi)$ мало змінюється в невеликому її околі, тому його розглядають як константу за параметром x [155]:

$$\delta_{It}(x, \xi) \approx \delta_{It}(0, \xi) \text{ при } 0 \leq x \leq x_*. \quad (2.10)$$

З урахуванням цього, частина роботи пластичних деформацій від зовнішніх зусиль $W_{Ip}^{(2)}$ записується у вигляді [15, 153]:

$$W_{Ip}^{(2)}(N) = \alpha_{I0} N \left(\sigma_{It} [\delta_{It \max} - \delta_{It \min}]^2 - W_{I0}^{(2)} \right), \quad (2.11)$$

де α_{I0} – експериментальна константа, N – кількість циклів навантаження, σ_{It} – усереднене напруження в зоні передруйнування, $\delta_{It \max}$, $\delta_{It \min}$ – максимальне і мінімальне за цикл розкриття у вершині тріщини δ_{It} , $W_{I0}^{(2)}$ – найбільше значення величини енергії за цикл, що не викликає втомного руйнування за нормального відриву [15]:

$$W_{I0}^{(2)} = \sigma_{It} (\delta_{Ith \max} - \delta_{Ith \min})^2, \quad (2.12)$$

де $\delta_{Ith \max}$, $\delta_{Ith \min}$ – нижні порогові значення $\delta_{It \max}$, $\delta_{It \min}$, при яких не відбувається руйнування за нормального відриву.

Тобто на основі співвідношень (2.11) та (2.12), значення $W_{Ip}^{(2)}$ можна обчислити за формулою [15]:

$$W_{Ip}^{(2)}(N) = \alpha_{I0} \sigma_{I0} N \left([\delta_{It \max} - \delta_{It \min}]^2 - [\delta_{Ith \max} - \delta_{Ith \min}]^2 \right). \quad (2.13)$$

Оскільки $\gamma_{Ifc} = \sigma_{It} \delta_{Ifc}$, $\gamma_{It} = \sigma_{It} \delta_{It \max}(l)$, то, враховуючи (2.13), із (2.8) отримаємо рівняння для знаходження швидкості росту тріщини через розкриття у її вершині [15]:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} \left[(\delta_{It \max} - \delta_{It \min})^2 - (\delta_{Ith \max} - \delta_{Ith \min})^2 \right]}{\delta_{Ifc} - \delta_{It \max}}. \quad (2.14)$$

Початкові та кінцеві умови у цьому випадку матимуть вигляд:

$$N = 0, \quad l(0) = l_{I0}; \quad N = N_*, \quad l(N_*) = l_{I*}, \quad (2.15)$$

а критичну довжину тріщини l_{I*} знаходять з КРТ-критерію [39]:

$$\delta_{It}(l_{I*}) = \delta_{Ifc}. \quad (2.16)$$

Ввівши параметр асиметрії циклу в параметрах деформації $R_{I\delta} = \delta_{I\min} / \delta_{I\max}$, математичну модель (2.14) – (2.16) можна записати у наступному вигляді:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} (1 - R_{I\delta})^2 [\delta_{I\max}^2 - \delta_{Ith\max}^2]}{\delta_{Ifc} - \delta_{I\max}}, \quad (2.17)$$

$$N = 0, l(0) = l_{I0}; \quad N = N_*, l(N_*) = l_{I*}.$$

Отже, математична модель (2.14) – (2.16) дозволяє розв'язати задачу втомного розтягу пластини з прямолінійною тріщиною при відомому значенні розкриття у вершині цієї тріщини δ_{II} .

2.1.2. Визначення розкриття у вершині короткої втомної тріщини

Для використання математичної моделі (2.14) – (2.16) необхідно знати розкриття у вершині тріщини δ_{II} . Для розглядуваної задачі Гріффітса відомою є формула для знаходження розкриття у вершині тріщини δ_{II} [39]:

$$\delta_{II} = \pi l p^2 (E \sigma_{II})^{-1} g(\xi_I), \quad g(\xi_I) = -8(\pi \xi_I)^{-2} \ln[\cos(0,5\pi \xi_I)], \quad (2.18)$$

де l – пів довжина тріщини; p – прикладене навантаження; E – модуль Юнга; $g(\xi_I)$ – безрозмірна функція від безрозмірного значення навантаження; $\xi_I = p \sigma_{II}^{-1}$.

Проте ця та інші відомі формули досить складні для використання, особливо коли необхідно знайти не числовий, а аналітичний розв'язок задачі. У зв'язку з цим наближено представимо безрозмірну функцію $g(\xi_I)$ у вигляді:

$$g(\xi_I) \approx (1 - \xi_I^2)^{-1}. \quad (2.19)$$

Підставивши (2.19) у (2.18), отримаємо формулу для визначення розкриття у вершині тріщини для аналогу задачі Гріффітса:

$$\delta_{II} \approx \frac{\pi l p^2}{E \sigma_{II} (1 - \xi_I^2)}, \quad (2.20)$$

або в параметрах коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН):

$$\delta_{II} \approx \frac{K_{II}^2}{E\sigma_{II}(1-\xi_I^2)}, \quad (2.21)$$

де K_{II} – коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершин тріщини для аналогу задачі Гріффітса.

Для наближеного визначення розкриття у вершині тріщини застосуємо метод еквівалентних напружених станів [39], який дозволяє наближено розв'язувати задачі одного класу. Згідно з цим методом, встановлюється зв'язок між напруженнями біля вершини тріщини у відомій та розв'язуваній задачах на основі поняття еквівалентного напруження P_e . Тобто P_e повинно викликати в околі вершини тріщини розв'язуваної задачі такий напружено-деформований стан, відповідно величини КІН та розкриття у вершині тріщини, як і у відомій задачі, для якої параметри напружено-деформованого стану відомі. Таким чином, метод еквівалентних напружених станів дозволяє спростити процес визначення параметрів напружено-деформованого стану навантажених тіл з тріщинами [156-159].

Використовуючи цей метод, величину розкриття у вершині тріщини δ_{II} для випадку коротких прямолінійних тріщин у пластинах за симетричного напруженого стану можна наближено виразити через розкриття δ_{IG} аналогу задачі Гріффітса [160]:

$$\delta_{II} \approx \frac{K_I^2}{K_{II}^2} \delta_{IG}, \quad (2.22)$$

де K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень для розглядуваної задачі.

Тоді підставляючи у співвідношення (2.22) формулу для знаходження розкриття у вершині тріщини δ_{IG} для аналогу задачі Гріффітса (2.21), отримаємо наближену формулу для знаходження розкриття у вершині тріщини δ_{II} для довільних коротких тріщин у пластинах:

$$\delta_{II} = \frac{K_I^2}{E\sigma_{II}(1-\xi_I^2)}. \quad (2.23)$$

Ця формула може бути ефективно застосована для визначення залишкової міцності пластини $p = p_*$. На основі співвідношення (2.23) з урахуванням рівності $\sigma_{II} \delta_{II} = 2\gamma_{II}$ [29] отримуємо наступну формулу для визначення залишкової міцності $p = p_*$ для аналогу задачі Гріффітса:

$$p_* = \sigma_{II} \sqrt{\frac{2\gamma_{Ic} E}{2\gamma_{Ic} E + \pi l \sigma_{II}^2}}. \quad (2.24)$$

Обезрозміримо формулу (2.24), виразивши залежність критичного навантаження p_*/σ_{II} від безрозмірної довжини тріщини ζ_I . Безрозмірна довжина тріщини визначається співвідношенням довжини тріщини l до критичного значення розкриття у її вершині δ_{I*} як $\zeta_I = l/\delta_{I*}$, де δ_{I*} отримуємо з критерію критичного розкриття тріщини $\delta_{I*} = \delta_{Ic} \pi E / 8\sigma_{II}$. Таким чином, безрозмірний параметр ζ_I буде рівний [39]

$$\zeta_I = \frac{8\sigma_{II} l}{\delta_{Ic} \pi E}. \quad (2.25)$$

Тоді підставивши (2.25) у (2.24), отримуємо

$$\frac{p_*}{\sigma_{II}} = \sqrt{\frac{8}{8 + \zeta_I \pi^2}}. \quad (2.26)$$

Залишкову міцність $p = p_*$ для пластини з макротріщиною можна визначити з формули (2.24), врахувавши, що для макротріщин $2\gamma_{Ic} E \ll \pi l \sigma_{II}^2$ [15]:

$$p_* = \sqrt{\frac{2E\gamma_{II}}{\pi l}}, \quad (2.27)$$

що співпадає з розв'язком цієї задачі, обчисленим з використанням критерію Гріффітса-Ірвіна [39].

У параметрах відносної довжини тріщини ζ_I формулу (2.27) можна записати у вигляді:

$$\frac{p_*}{\sigma_{II}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\zeta_I}}. \quad (2.28)$$

Аналог задачі Гріффітса для макротріщин розв'язано також за допомогою δ_c -моделі [39]:

$$\frac{p_*}{\sigma_{It}} = \frac{2}{\pi} \arccos e^{-\frac{1}{\zeta_I}}. \quad (2.29)$$

Порівняємо графічно розв'язки розглядуваного аналогу задачі Гріффітса, тобто розтягу пластини з тріщиною, отримані за допомогою δ_c -моделі (2.29), критерію Гріффітса-Ірвіна (2.28) та запропонованої формули (2.26) (рис. 2.2). З рис. 2.2 видно, що формула (2.26) є досить простою з математичної точки зору і коректно моделює залежність залишкової міцності p_*/σ_{It} від безрозмірної довжини тріщини, а отримані розбіжності у порівнянні з розв'язками (2.28) та (2.29) йдуть у запас міцності. Також варто зазначити, що запропонована формула (2.26) може бути використана для розв'язання задачі розтягу пластини з короткими тріщинами на відміну від розв'язку за критерієм Гріффітса-Ірвіна.

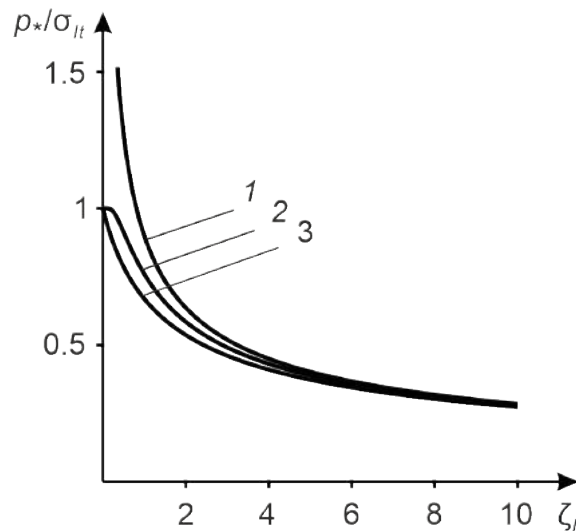


Рис. 2.2. Розв'язок аналогу задачі Гріффітса: 1 – за критерієм Гріффітса-Ірвіна (2.28); 2 – за δ_c -моделлю (2.29); 3 – за (2.26).

2.1.3. Визначення розкриття у вершинах тріщин за розтягу пластини з двома боковими тріщинами

Застосуємо запропоновану формулу для розкриття у вершині тріщини до складніших задач. Розглянемо смугу шириною $2L$ та довжиною $2h$, що розтягується навантаженням p (рис. 2.3). Смуга містить дві симетричні бокові тріщини довжиною l . Необхідно знайти розкриття у вершині тріщини δ_{lt} .

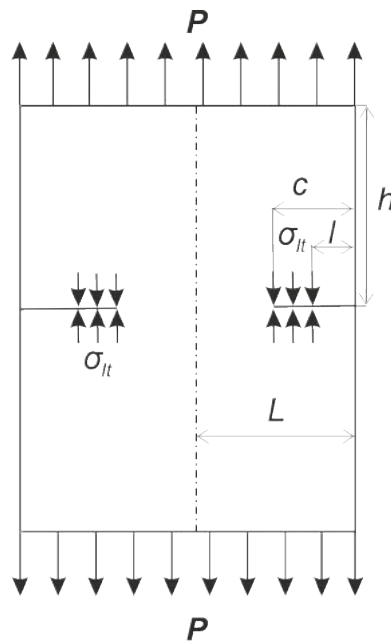


Рис. 2.3. Схема навантаження пластини з двома боковими тріщинами [161].

Розв'язання задачі здійснимо на основі формули (2.23). Тоді для знаходження розкриття у вершині тріщини необхідно знати співвідношення для обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень K_I [162]:

$$K_I = \frac{p\sqrt{\pi l}(1.122 - 0.561\lambda - 0.205\lambda^2 + 0.471\lambda^3 - 0.190\lambda^4)}{\sqrt{1-\lambda}}, \quad (2.30)$$

де $\lambda = l/L$.

Підставивши співвідношення (2.30) у формулу (2.23), отримаємо вираз для обчислення розкриття у вершині тріщини для пластини з двома боковими тріщинами:

$$\delta_{lt} = \frac{\pi\sigma_{lt}L\xi_l^2\lambda(1.122 - 0.561\lambda - 0.205\lambda^2 + 0.471\lambda^3 - 0.190\lambda^4)^2}{E(1-\xi_l^2)(1-\lambda)}. \quad (2.31)$$

Безрозмірне розкриття у вершині тріщини δ_{II}' можна виразити за допомогою формули [161]:

$$\delta_{II}' = \frac{2\pi\mu\delta_{II}}{(\kappa+1)\sigma_{II}L}, \quad (2.32)$$

де μ – модуль зсуву, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ для плоского напруженого стану, ν – коефіцієнт Пуассона.

Враховуючи, що $E = 2\mu(1+\nu)$, формулу (2.32) перепишемо у вигляді:

$$\delta_{II}' = \frac{\pi E \delta_{II}}{4\sigma_{II}L}. \quad (2.33)$$

Тоді на основі виразів (2.33) та (2.31) отримаємо остаточну формулу для знаходження розкриття у вершині тріщини у безрозмірній формі δ_{II}' для пластини з двома крайовими тріщинами:

$$\delta_{II}' = \frac{\pi^2 \xi^2 \lambda (1,122 - 0,561\lambda - 0,205\lambda^2 + 0,471\lambda^3 - 0,190\lambda^4)^2}{4(1 - \xi_I^2)(1 - \lambda)}. \quad (2.34)$$

Порівняємо результати аналітичного розв'язку задачі розтягу пластини з двома боковими тріщинами, отриманого за формулою (2.34), із її числовим розв'язком [161]. Графік залежності безрозмірного розкриття у вершині тріщини δ_{II}' від параметра навантаження ξ_I ($\xi_I = p/\sigma_{II}$) показує (рис. 2.4), що існують відхилення між розв'язками, отриманими аналітичним та числовим способом. Проте якщо розглядати результати при невеликих значеннях відносного навантаження ξ_I , результати, отримані за двома методами, практично збігаються.

Отже, при невеликих значеннях відносного навантаження ξ_I формулу (2.34) можна застосовувати для обчислення розкриття у вершині бокових тріщини у пластині під дією розтягу. Ефективність цієї формули, отриманої на основі (2.23), певною мірою свідчить про коректність запропонованого співвідношення для обчислення розкриття у вершинах тріщин для малого значення відносного навантаження.

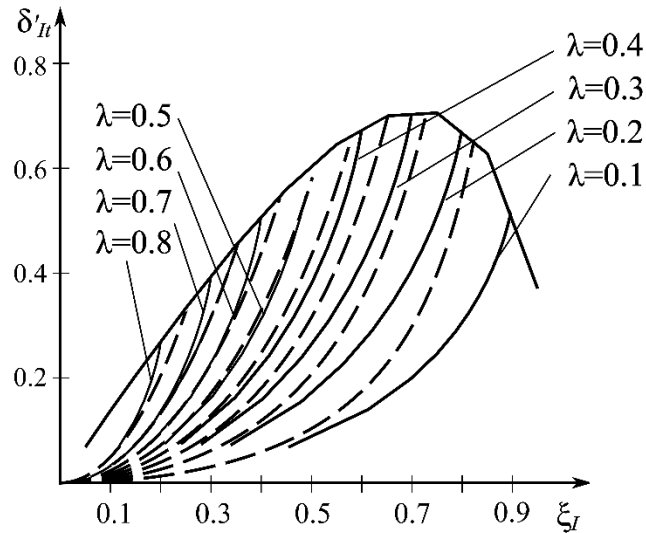


Рис. 2.4. Залежність $\delta'_{II} \sim \xi_I$ для розтягу пластини з двома боковими тріщинами: суцільна лінія – числовий розв’язок [161], пунктирна лінія – аналітичний розв’язок (2.34).

2.2. Швидкість поширення коротких втомних тріщин у пластинах та їх довговічність

2.2.1. Визначення швидкості поширення тріщини у пластині та її довговічності

За математичною моделлю (2.14) – (2.15), сформульованою на основі енергетичного підходу, із використанням запропонованої формули для розкриття у вершині тріщини (2.23) можна знайти кінцевий розв’язок задачі розтягу пластини з тріщиною, тобто обчислити швидкість поширення тріщини та довговічність пластини.

Спершу знайдемо швидкість поширення втомної тріщини. Для її визначення із комбінації співвідношень (2.14) та (2.23) отримаємо наступну формулу:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} \left[\left(K_{I \max}^2 - K_{I \min}^2 \right)^2 - \left(K_{Ith \max}^2 - K_{Ith \min}^2 \right)^2 \right]}{E \sigma_{II} (1 - \xi_I^2) (K_{Ijc}^2 - K_{I \max}^2)}, \quad (2.35)$$

де $K_{I \min}$, $K_{I \max}$ – мінімальне та максимальне значення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I за нормального відриву; $K_{Ith \min}$, $K_{Ith \max}$ – мінімальне та максимальне значення порогових коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{Ith} ; K_{Ifc} – критичне значення КІН.

Із врахуванням коефіцієнта асиметрії циклу $R_{IK} = K_{I \min} / K_{I \max}$, формулу (2.35) можна переписати у вигляді:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} \left[(1 - R_{IK}^2)^2 (K_{I \max}^4 - K_{Ith \max}^4) \right]}{E \sigma_{It} (1 - \xi_I^2) (K_{Ifc}^2 - K_{I \max}^2)}, \quad (2.36)$$

де, згідно з формулою (2.23), $K_{Ith} = \sqrt{\delta_{Ith} E \sigma_{It} (1 - \xi_I^2)}$. Оскільки в такому представленні величина K_{Ith} залежить від рівня прикладеного навантаження, що виражається параметром ξ_I , то вона змінюватиметься для різних випадків росту тріщини залежно від умов їх навантаження. Цей факт підтверджено у роботі [99], в якій різні значення K_{Ith} використовуються для трьох розглядуваних довжин тріщини.

Додавши до рівняння (2.36) початкові та кінцеві умови (2.15), отримаємо математичну модель для знаходження залишкової довговічності прямолінійної тріщини у пластині за нормального відриву:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} \left[(1 - R_{IK}^2)^2 (K_{I \max}^4 - K_{Ith \max}^4) \right]}{E \sigma_{It} (1 - \xi_I^2) (K_{Ifc}^2 - K_{I \max}^2)}, \quad (2.37)$$

$$N = 0, l(0) = l_{I0}; \quad N = N_*, l(N_*) = l_{I*}, \delta_{It}(l_{I*}) = \delta_{Ifc}.$$

Для випадку відносно малої величини зовнішнього навантаження ($\xi_I \rightarrow 0$) та великих розмірів тріщини з розрахункової моделі (2.37) отримаємо відому модель [47]:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} \left[(1 - R_{IK}^2)^2 (K_{I \max}^4 - K_{Ith \max}^4) \right]}{E \sigma_{It} (K_{Ifc}^2 - K_{I \max}^2)}, \quad (2.38)$$

$$N = 0, l(0) = l_{I0}; \quad N = N_*, l(N_*) = l_{I*}, K_I(l_{I*}) = K_{Ifc}.$$

Використаємо математичну модель (2.37), побудовану на основі деформаційного параметру розкриття у вершині тріщини, та моделі (2.38), основаної на силовому параметрі коефіцієнта інтенсивності напружень, для розв'язання аналогу задачі Гріффітса, тобто розтягу пластини з центральною тріщиною.

На основі підходу через розкриття у вершині тріщини, прийнявши $\delta_{I\min} = 0$, $\delta_{Ith} = 0$, $K_{I\max} = \pi l p^2$, $\delta_{I\max} = \pi l p^2 / E \sigma_{It} (1 - \xi_I^2)$, основне рівняння моделі (2.38) для обчислення швидкості росту короткої прямолінійної тріщини у пластині можна записати у вигляді

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} \pi^2 l^2 p^4}{E \sigma_{It} (1 - \xi_I^2) (\delta_{Ifc} E \sigma_{It} (1 - \xi_I^2) - \pi l p^2)}. \quad (2.39)$$

Довговічність пластини з короткою тріщиною отримаємо після розв'язання диференціального рівняння (2.39) із врахуванням граничних умов (2.15):

$$N_* = -\frac{E \sigma_{It} (1 - \xi_I^2)}{\alpha_{I0} \pi p^2} \left[\frac{\delta_{Ifc} E \sigma_{It} (1 - \xi_I^2)}{\pi p^2} \left(\frac{1}{l_{I*}} - \frac{1}{l_{I0}} \right) + \ln \frac{l_{I*}}{l_{I0}} \right]. \quad (2.40)$$

У безрозмірному вигляді формулу (2.40) із врахуванням параметра $\psi_I = l_{I0} / l_{I*}$ можна представити як

$$N_* = \frac{E \sigma_{It} (1 - \xi_I^2)}{\alpha_{I0} \pi p^2} \left[\ln \psi_I - \frac{\delta_{Ifc} E \sigma_{It} (1 - \xi_I^2)}{\pi p^2 l_{I*}} \left(\frac{\psi_I - 1}{\psi_I} \right) \right]. \quad (2.41)$$

Аналогічно до попереднього, використаємо підхід через коефіцієнти інтенсивності напружень (2.38) для знаходження розв'язку аналога задачі Гріффітса. Враховуючи, що $R_{IK} = 0$, $K_{Ith} = 0$, $K_{I\max} = p \sqrt{\pi l}$, швидкість поширення короткої прямолінійної тріщини у пластині на основі рівняння моделі (2.38) можна знайти за формулою:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} p^4 \pi^2 l^2}{E \sigma_{It} (K_{Ifc}^2 - p^2 \pi l)}. \quad (2.42)$$

Розв'язок диференціального рівняння (2.42) з граничними умовами моделі (2.38) дає формулу для визначення залишкової довговічності пластини з короткою тріщиною через КІН:

$$N_* = -\frac{E\sigma_{II}}{\alpha_{I0}p^2\pi} \left[\frac{K_{Ijc}^2}{p^2\pi} \left(\frac{1}{l_{I*}} - \frac{1}{l_{I0}} \right) + \ln \left(\frac{l_{I*}}{l_{I0}} \right) \right], \quad (2.43)$$

яка у безрозмірному вигляді може бути представлена співвідношенням:

$$N_* = \frac{E\sigma_{II}}{\alpha_{I0}p^2\pi} \left[\ln \psi_I - \frac{K_{Ijc}^2}{p^2\pi l_{I*}} \left(\frac{\psi_I - 1}{\psi_I} \right) \right]. \quad (2.44)$$

Дослідимо тепер, наскільки відрізняються величини залишкової довговічності, отримані за обома цими підходами. Порівняння виконано для сталі 10ХСНД (аналог DIN SB 47 FG) з характеристиками [160] $K_{Ijc} = 53.5 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{II} = 781 \text{ МПа}$, $\alpha_{I0} = 0.1$ та рівня завантаженості $\xi_I = 0.9$. Порівняння величин довговічності пластини з центральною тріщиною для аналога задачі Гріффітса, отриманих із використанням розкриття у вершині тріщини δ_{II} (2.41) та коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I (2.44) (рис. 2.5), свідчить про існування розбіжності між розв'язками, особливо для малої відносної довжини тріщини ($\psi_I < 0.4$). Ця неточність пов'язана з існуванням пластичної зони біля вершини тріщини, яка не

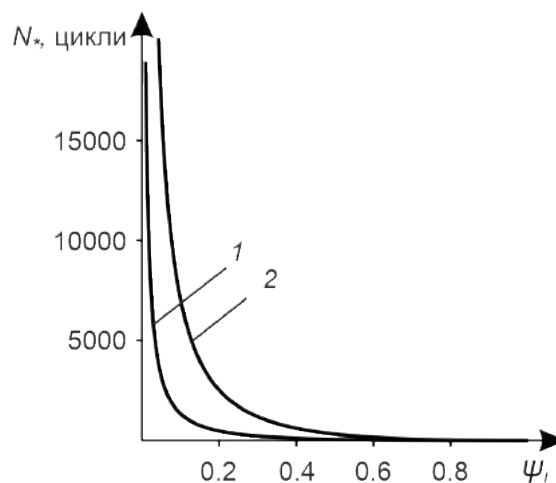


Рис. 2.5. Довговічність пластини з центральною тріщиною N_* при навантаженні $\xi_I = 0.9$: 1 – за (2.41); 2 – за (2.44).

враховується при використанні коефіцієнтів інтенсивності напружень. Крім того, необхідно зауважити, що розбіжність йде не в запас довговічності, а в ризик непередбачуваного руйнування.

Таким чином, розв'язок, отриманий через розкриття у вершині короткої тріщини за моделлю (2.37), є коректнішим у порівнянні з відомим підходом обчислення довговічності пластини з тріщиною через КІН (2.38), а математична модель (2.37) може застосовуватися для визначення швидкості росту короткої втомної тріщини та, відповідно, залишкової довговічності елементів конструкцій з такими тріщинами.

2.2.2. Швидкість поширення тріщини за кругового згину циліндричного зразка

Застосуємо запропоновану формулу для визначення розкриття (2.23) до розв'язання складніших задач та порівняємо отримані результати з розв'язками, отриманими експериментально. Розглянемо задачу кругового згину циліндричного зразка, що містить поверхневу пів еліптичну тріщину [163]. Дослідження проводили на зразку діаметром 5 мм, виготовленому зі сталі Fe-3%Si з хімічним складом C – 0.038%, Si – 3.26%, Mn – 0.16%, P – 0.003%, S – 0.004%, Ni – 2.24%, Al – 0.059%, N – 0.019% та механічними характеристиками $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_H = 1318$ МПа, $\sigma_{IB} = 672$ МПа [164] (рис. 2.6). Тріщини на зразку виникали з кругового отвору діаметром 0.3 мм під поетапним навантаженням зразка, що поступово збільшувалося: $p = 520; 560; 640; 800; 840; 880$ МПа [164].

На рис. 2.7 зображено експериментальні залежності [163] швидкості росту тріщини від коефіцієнта інтенсивності напружень при шести різних рівнях навантаження для короткої втомної тріщини, для якої виконуються умови автотривалості. З графіка видно, що одному значенню розмаху коефіцієнта інтенсивності напружень ΔK_I для одного і того ж зразка відповідають

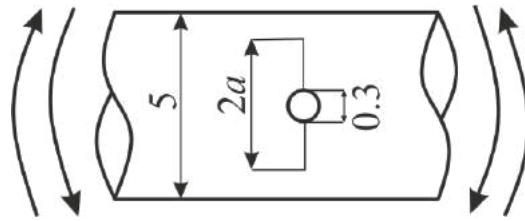


Рис. 2.6. Силовa схема кругового згину циліндричного зразка [164], розмірності в мм.

різні значення швидкості поширення тріщини V залежно від рівня прикладеного навантаження. Це свідчить про те, що залежність $V \sim \Delta K_I$ не є інваріантною, відповідно, коефіцієнт інтенсивності напружень не є інваріантною характеристикою для знаходження швидкості росту коротких втомних тріщин.

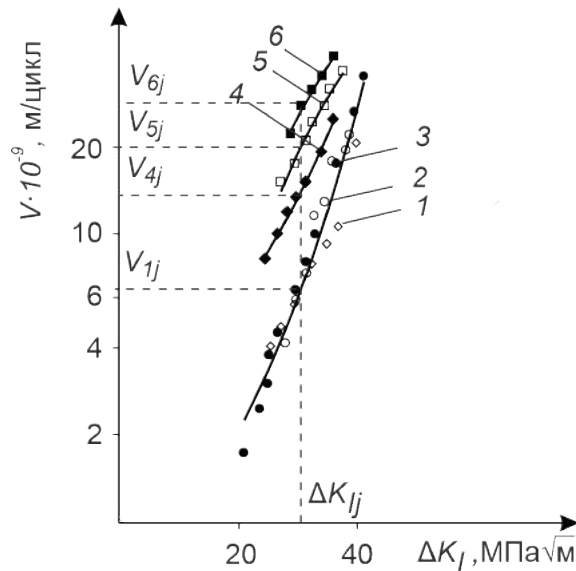


Рис. 2.7. Залежність швидкості росту тріщини V від коефіцієнта інтенсивності напружень ΔK_I за наступних рівнів навантаження: 1 – 520 МПа, 2 – 560 МПа, 3 – 640 МПа, 4 – 800 МПа, 5 – 840 МПа, 6 – 880 МПа [163].

На основі експериментальних даних [163] із використанням запропонованої формули для знаходження розкриття у вершині тріщини δ_{II} (2.23), побудовано графік залежності швидкості росту тріщини V від розкриття у її вершині δ_{II} для різної навантаженості (рис. 2.8). З графіка видно, що для усіх рівнів навантаження $p = 520; 560; 640; 800; 840; 880$ МПа експериментальні дані [163] у межах нормального розкиду лягли на одну криву. Це свідчить про

те, що розкриття у вершині тріщини δ_{II} є інваріантною характеристикою, яка однозначно відповідає швидкості поширення короткої втомної тріщини V .

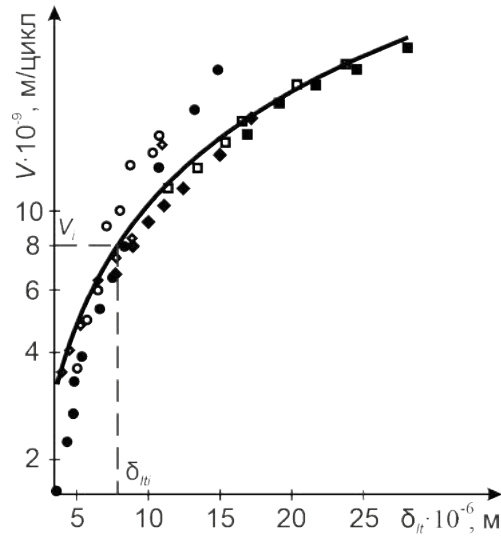


Рис. 2.8. Залежність швидкості росту тріщини V від розкриття у її вершині δ_{II} для серії навантажень $p = 520; 560; 640; 800; 840; 880$ МПа.

2.3. Дослідження періоду зародження та докритичного росту коротких тріщин у вершинах концентраторів

2.3.1. Розроблення математичної моделі зародження втомної тріщини

Вважаючи, що за допомогою деформаційного підходу можна коректно наближено визначати поширення коротких тріщин починаючи з нульової довжини, побудуємо модель зародження короткої тріщини.

Для побудови математичної моделі зародження тріщини розглянемо пластину, до якої на безмежності прикладено циклічне розтягуюче навантаження інтенсивності p (рис. 2.9). З одного краю пластина має концентратор напружень радіуса заокруглення r , у вершині якого утворюється пластична зона довжини l_p . Введемо систему координат з центром O у вершині концентратора: віссю Ox , що проходить вздовж середньої лінії пластичної зони, та віссю Oy , розташованою по дотичній до контуру концентратора.

Необхідно знайти період зародження $N = N_{in}$ тріщини, що виникає у вершині концентратора.

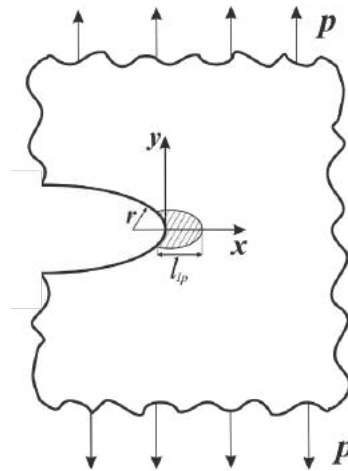


Рис. 2.9. Схема навантаження пластини з боковим концентратором напружень [165].

Варто зазначити, що моделі у цьому розділі побудовані за припущення про неврахування структури матеріалу, тобто вважаючи, що тіло, у якому поширюється тріщина, є ізотропним. У зв'язку з цим не беруться до розгляду мікроструктурно короткі тріщини – тріщини, розміри яких співмірні з розмірами структурної одиниці матеріалу та на кінетику зародження і поширення яких впливає мікроструктура матеріалу. Крім того, вважається, що довжина зародженої тріщини є відразу більшою, ніж структурний параметр матеріалу. Таким чином, побудовані моделі є, по суті, усередненими моделями для усередненої структури, тобто ізотропного тіла.

Для розв'язання поставленої задачі, з урахуванням відсутності тріщини у початковий момент часу, необхідно вибрати коректний підхід для побудови математичної моделі, який дозволить би правильно описувати процес зародження та росту такої тріщини. У цьому випадку не можна використовувати силовий підхід на основі коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН), адже КІН не дозволяє однозначно описати поведінку коротких тріщин [2, 61]. Підхід на основі розкриття у вершині тріщини, який застосовують для моделювання фізично коротких тріщин [13-15], також не підходить для опису зародження

тріщини, адже в такому випадку некоректно говорити про розкриття тріщини у її вершині у початковий момент часу.

У зв'язку з цим для побудови математичної моделі зародження та поширення тріщини застосуємо деформаційний підхід. При цьому використаємо припущення про однозначну взаємозалежність між деформацією матеріалу ε_{\max} та процесами накопичення і розвитку пошкоджень у зоні передруйнування під дією втомного навантаження [160].

При побудові моделі вважаємо, що деформаційний підхід можна застосовувати при поширенні тріщини, починаючи від нульового розміру. Тому записуємо розрахункову модель на базі деформаційного підходу згідно з формулою (2.14) у вигляді :

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0}(1 - R_{I\delta})^2 [\delta_{I\max}^2 - \delta_{Ith\max}^2]}{\delta_{I\max} - \delta_{Ith\max}}. \quad (2.45)$$

Між максимальними та критичними значеннями параметрів розкриття у вершині тріщини ($\delta_{I\max}$, $\delta_{I\max}$) та величиною деформації ($\varepsilon_{I\max}$, $\varepsilon_{I\max}$) існує наступна взаємозалежність [160]:

$$\frac{\varepsilon_{I\max}}{\varepsilon_{I\max}} = \frac{\delta_{I\max}}{\delta_{I\max}}, \quad (2.46)$$

яка дозволить у моделі (2.45) перейти від розкриття у вершині тріщини до деформації в зоні передруйнування біля вершини тріщини, як основного параметра опису поведінки тріщини.

Тоді на основі моделі (2.45) та співвідношення (2.46) отримаємо рівняння для визначення швидкості зародження коротких тріщин у параметрах деформації:

$$\frac{dl}{dN} = \alpha_{I0}(1 - R_{I\delta})^2 \frac{\delta_{I\max}}{\varepsilon_{I\max}} \cdot \frac{\varepsilon_{I\max}^2 - \varepsilon_{Ith}^2}{\varepsilon_{I\max} - \varepsilon_{Ith}}, \quad (2.47)$$

де $\varepsilon_{I\max}$ – максимальне значення деформації за цикл; $\varepsilon_{I\max}$ – критичне значення деформації $\varepsilon_{I\max}$.

Для використання рівняння (2.47) необхідно насамперед визначити максимальне значення деформації за розтягу $\varepsilon_{I \max}$. Для цього на основі [160] треба скористатися наступною залежністю між максимальною деформацією та довжиною тріщини:

$$\varepsilon_{I \max} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_{I_{fc}} K_{I \max}^2 l + \varepsilon_{I_0} K_{I_{fc}}^2 (l_{Ip} - l)}{K_{I_{fc}}^2 l_{Ip}}, & l < l_{Ip}; \\ \frac{K_{I \max}^2}{K_{I_{fc}}^2} \varepsilon_{I_{fc}}, & l \geq l_{Ip}, \end{cases} \quad (2.48)$$

де $K_{I \max}$ – максимальний коефіцієнт інтенсивності напружень циклу, $K_{I_{fc}}$ – критичне значення коефіцієнта інтенсивності напружень, l_{Ip} – довжина пластичної зони (області передруйнування), ε_{I_0} – максимальна величина деформації біля концентратора в початковому стані (за відсутності тріщини), яка рівна [31]:

$$\varepsilon_{I_0} = \left[1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^\omega \right]^{-\frac{1}{\omega}} \left(\frac{K_I}{K_{I_{fc}}} \right)^2 \varepsilon_{I_{fc}}, \quad (2.49)$$

де r – радіус заокруглення концентратора, $\omega = 2$ – параметр інтерполяції, K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень за нормального відриву, $r_0 = 4K_{I_{fc}}^2 / \pi E \sigma_{It} \varepsilon_{I_{fc}}$.

Підставивши співвідношення (2.49) у формулу (2.48), отримаємо:

$$\varepsilon_{I \max} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_{I_{fc}} K_{I \max}^2 l + \left[1 + \left(\frac{\pi E \sigma_{It} \varepsilon_{I_{fc}} r}{4K_{I_{fc}}^2} \right)^\omega \right]^{-\frac{1}{\omega}} \varepsilon_{I_{fc}} K_I^2 (l_{Ip} - l)}{K_{I_{fc}}^2 l_{Ip}}, & l < l_{Ip}; \\ \frac{K_{I \max}^2}{K_{I_{fc}}^2} \varepsilon_{I_{fc}}, & l \geq l_{Ip}. \end{cases} \quad (2.50)$$

Аналіз формули (2.50) показує, що навіть за відсутності тріщини у вершині концентратора в початковий момент часу ($l = l_{I_0} = 0$), отримаємо ненульові значення деформації $\varepsilon_{I \max}$ завдяки ненульовому другому доданку у чисельнику першої формули (2.50). Таким чином, цю формулу можна застосовувати для

різного значення довжини короткої тріщини, у тому числі і для випадку нульової довжини.

Підстановка першого співвідношення (2.50), що визначає максимальну деформацію в циклі для випадку тріщини, що знаходиться в межах пластичної зони у вершині концентратора ($l < l_{Ip}$), у формулу (2.47) дає наступне рівняння:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} \delta_{Ifc} (1 - R_{I\delta})^2}{\varepsilon_{Ifc}^2 K_{Ifc}^2 l_{Ip}} \times$$

$$\times \frac{\left[\varepsilon_{Ifc} K_{I_{max}}^2 l + K_I^2 \varepsilon_{Ifc} (l_{Ip} - l) \left[1 + \left(\frac{r\pi E \sigma_{It} \varepsilon_{Ifc}}{4K_{Ifc}^2} \right)^\omega \right]^{-\frac{1}{\omega}} \right]^2 - \varepsilon_{Ith}^2 K_{Ifc}^4 l_{Ip}^2}{K_{Ifc}^2 l_{Ip} - \left[K_{I_{max}}^2 l + K_I^2 (l_{Ip} - l) \left[1 + \left(\frac{r\pi E \sigma_{It} \varepsilon_{Ifc}}{4K_{Ifc}^2} \right)^\omega \right]^{-\frac{1}{\omega}} \right]}, \quad (2.51)$$

яке разом з початковими та кінцевими умовами

$$N = 0, \quad l(0) = l_{I0}; \quad N = N_{in}, \quad l(N_{in}) = l_{in} \quad (2.52)$$

формує математичну модель для зародження короткої втомної тріщини.

Проінтегрувавши попереднє рівняння з урахуванням початкових та кінцевих умов, отримаємо формулу для обчислення періоду зародження тріщини:

$$N_{in} = \frac{\varepsilon_{Ifc} K_{Ifc}^2 l_{Ip}}{\alpha_{I0} \delta_{Ifc} (1 - R_{I\delta})^2} \times$$

$$\times \int_{l_{I0}}^{l_{in}} \frac{\left[\varepsilon_{Ifc} K_{I_{max}}^2 l_{Ip} - \left[\varepsilon_{Ifc} K_{I_{max}}^2 l + K_I^2 \varepsilon_{Ifc} (l_{Ip} - l) \left[1 + \left(\frac{r\pi E \sigma_{It} \varepsilon_{Ifc}}{4K_{Ifc}^2} \right)^\omega \right]^{-\frac{1}{\omega}} \right]^2}{\left[\varepsilon_{Ifc} K_{I_{max}}^2 l + K_I^2 \varepsilon_{Ifc} (l_{Ip} - l) \left[1 + \left(\frac{r\pi E \sigma_{It} \varepsilon_{Ifc}}{4K_{Ifc}^2} \right)^\omega \right]^{-\frac{1}{\omega}} \right]^2 - \varepsilon_{Ith}^2 K_{Ifc}^4 l_{Ip}^2} dl. \quad (2.53)$$

Отож розроблена на основі деформаційного підходу математична модель дозволяє обчислювати період зародження короткої тріщини.

Для апробації розробленої математичної моделі (2.51) – (2.52) та рівняння (2.53) застосуємо їх для визначення періоду зародження тріщини у смугі з двома боковими концентраторами напружень (рис. 2.10). До смуги шириною $2L$ прикладено симетричне рівномірно розподілене навантаження інтенсивності p . З обох боків смуги симетрично до середньої лінії розташовані концентратори напружень глибини b та радіуса заокруглення r . У вершинах концентраторів утворюється пластична зона довжиною l_p . Вважається, що в початковий момент часу тріщина відсутня. Задача полягає у визначенні критичного значення кількості циклів $N = N_{in}$, після досягнення якого зародиться тріщина.

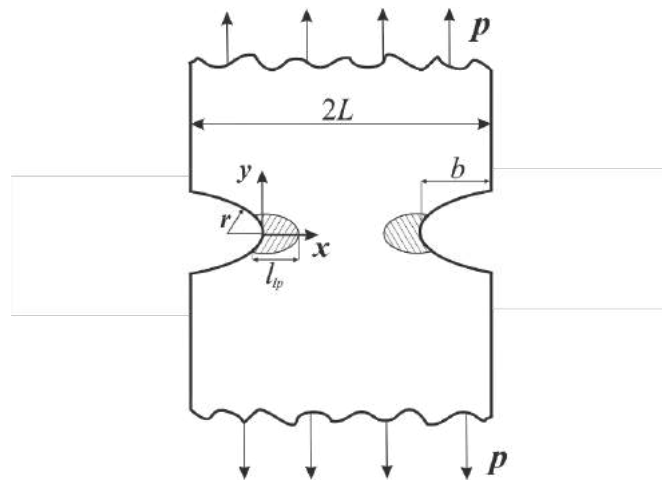


Рис. 2.10. Схема навантаження смуги з двома концентраторами напружень.

Задачу розв'язуватимемо на основі формули (2.53). Для обчислення необхідних значень K_I та $K_{I_{max}}$ застосуємо наступні формули [165, 166]:

$$K_I = \frac{2.243 p \sqrt{\pi b}}{\sqrt{1 - \frac{b}{L}} \sqrt{4 + \frac{b}{L} (1,25\pi^2 - 4)}} \quad (2.54)$$

та

$$K_{I_{max}} = \frac{2.243 p \sqrt{\pi(l_p + b)} \cdot A_0}{\sqrt{1 - \frac{l_p + b}{L}} \sqrt{4 + \frac{l_p + b}{L} (1,25\pi^2 A_0^2 - 4)}} \quad (2.55)$$

Оскільки розглядається зародження тріщини, тобто відсутність тріщини в початковий момент часу, то для обчислення коефіцієнта K_I в якості параметра

довжини підставляємо значення глибини концентратора напружень b . У випадку обчислення максимального коефіцієнта інтенсивності напружень циклу $K_{I_{\max}}$, який у формулі для визначення деформації (2.50) є множником біля критичного значення деформації, в якості параметра довжини підставляємо суму глибини концентратора b та довжини пластичної зони у її вершині l_{lp} .

Формула (2.55) містить коефіцієнт концентрації напружень A_0 , який на основі [165, 166] обчислюється як

$$A_0 = \frac{2K_I}{p\sqrt{\pi r}}. \quad (2.56)$$

Таким чином, комбінація рівняння (2.53) та формул (2.54) – (2.56) дозволяє обчислити період зародження тріщини у вершині концентратора для смуги з двома боковими симетричними концентраторами.

Порівняємо теоретичні розрахунки, отримані за запропонованими формулами, з результатами експериментальних досліджень [167] для смуги шириною $L = 22$ мм з концентраторами глибини $b = 14$ мм та радіуса кривизни у їх вершинах $r = 0.3$ мм. Смуга виготовлена зі сталі 65Г (аналог до AISI 1066) з наступними характеристиками, отриманими на основі [165, 167]:

$$\begin{aligned} \alpha_{I_0} &= 0.0136; R_{I\delta} = 0.05; E = 1.9 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \sigma_{It} = 560 \text{ МПа}; \\ K_{Ith} &= 8.5 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}; K_{Ifc} = 110 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}; \delta_{Ifc} = 11.37 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \\ \varepsilon_{Ifc} &= 0.597; \varepsilon_{Ith} = 0.002. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Для визначення періоду зародження тріщини, шукаємо кількість циклів навантаження, які призведуть до утворення тріщини довжиною $l_{in} = l_{lp} = 0.05$ мм [167].

На основі характеристик (2.57) та формул (2.54) – (2.56), співвідношення для визначення періоду зародження тріщини для розглядуваної задачі матиме вигляд:

$$N_{in} = \int_{l_0}^{l_{in}} \frac{9.35 \cdot 10^4 - 5.68 \cdot 10^3 p^2 l - 0.32 p^2}{(2.2l + 2.5)^2 \cdot 10^{-4} p^4 - 1.46 \cdot 10^{-6}} dl. \quad (2.58)$$

На рис. 2.11 представлено залежності періоду зародження N_{in} тріщини як функції від прикладеного навантаження p , отримані за запропонованою аналітичною формулою (2.58) та експериментальними даними [167]. Як показує порівняння, між теоретичними та експериментальними результатами є добра кореляція, що підтверджує ефективність моделі (2.51) – (2.52) та рівняння (2.53) для визначення періоду зародження втомної тріщини.

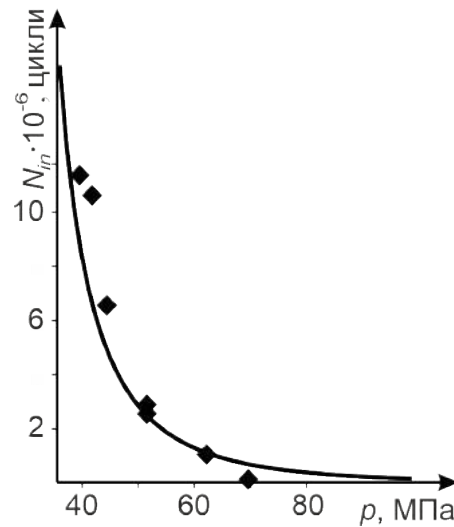


Рис. 2.11. Залежність періоду зародження тріщини N_{in} від прикладеного навантаження p : суцільна лінія – за формулою (2.58), символи – експериментальні дані [167].

2.3.2. Математична модель для визначення довговічності пластини з гладким концентратором

У попередньому параграфі розглянуто випадок зародження тріщини у вершині концентратора напружень у пластині та запропоновано математичну модель для обчислення періоду зародження тріщини за таких умов. Далі дослідимо подальший ріст тріщини та визначимо довговічність пластини із зародженою тріщиною (рис. 2.9).

Математичну модель для періоду докритичного росту тріщини будуватимемо на основі енергетичного підходу, викладеному у першому підрозділі. У цьому випадку вважаємо, що початкова довжина тріщини рівна

довжині пластичної зони $l_{I0} = l_{Ip}$. При подальшому навантаженні тріщина поширюватиметься і перевищить розміри пластичної зони $l > l_{Ip}$. Підставивши друге співвідношення (2.48) у модель (2.47), отримаємо наступне рівняння для визначення швидкості поширення тріщини:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} \delta_{Ifc} (1 - R_{I\delta})^2}{\varepsilon_{Ifc}^2 K_{Ifc}^2} \cdot \frac{\varepsilon_{Ifc}^2 K_{I\max}^4 - \varepsilon_{Ith}^2 K_{Ifc}^4}{K_{Ifc}^2 - K_{I\max}^2}. \quad (2.59)$$

Рівняння (2.59) разом з початковими та кінцевими умовами

$$N = 0, \quad l(0) = l_{Ip}; \quad N = N_{subcr}, \quad l(N_{subcr}) = l_{I*} \quad (2.60)$$

складає математичну модель для визначення періоду докритичного росту тріщини. Критичне значення довжини тріщини l_{I*} знайдено з використанням критерію критичного розкриття тріщини [39]:

$$\delta_{Ii}(l_{I*}) = \delta_{Ifc} \quad (2.61)$$

Проінтегрувавши рівняння (2.59) з урахуванням умов (2.60), отримаємо наступну формулу:

$$N_{subcr} = \frac{\varepsilon_{Ifc}^2 K_{Ifc}^2}{\alpha_{I0} \delta_{Ifc} (1 - R_{I\delta})^2} \cdot \int_{l_{Ip}}^{l_{I*}} \frac{K_{Ifc}^2 - K_{I\max}^2}{\varepsilon_{Ifc}^2 K_{I\max}^4 - \varepsilon_{Ith}^2 K_{Ifc}^4} dl. \quad (2.62)$$

Обчислимо тепер загальну довговічність пластини. Оскільки у початковий момент часу тріщина відсутня (рис. 2.9), то процес руйнування пластини починатиметься із зародження втомної тріщини, за якою слідуватиме її поширення як короткої, а тоді макротріщини до досягнення критичного значення, що спричинить руйнування. Тобто довговічність пластини N_* складатиметься із двох компонент: періоду зародження тріщини N_{in} та періоду докритичного росту тріщини, що зародилася N_{subcr} :

$$N_* = N_{in} + N_{subcr}, \quad (2.63)$$

де період зародження тріщини у загальному випадку знайдено за допомогою моделі (2.51) – (2.52) та рівняння (2.53), а період докритичного росту – на основі моделі (2.59) – (2.60) та рівняння (2.62).

Застосуємо отриману модель (2.59) – (2.60) та рівняння (2.62) для знаходження періоду докритичного росту тріщини, що утворилася у вершині концентратора напружень у смузі з двома боковими концентраторами (рис. 2.10). Для цього обчислимо максимальний коефіцієнт інтенсивності напружень $K_{I_{\max}}$ за наступною формулою [165]:

$$K_{I_{\max}} = \frac{2.243 p \sqrt{\pi(l_{lp} + b + l) \cdot A_0}}{\sqrt{1 - \frac{l_{lp} + b + l}{L}} \sqrt{4 + \frac{l_{lp} + b + l}{L} (1,25\pi^2 A_0^2 - 4)}}, \quad (2.64)$$

де в якості параметра довжини використовуємо суму глибини концентратора b , довжини пластичної зони l_{lp} та довжини тріщини l .

Тоді підстановка співвідношень (2.64), (2.56) та характеристик (2.57) у співвідношення (2.62) дасть формулу для періоду докритичного росту тріщини для конкретної задачі розтягу смуги з концентраторами напружень. Для знаходження загальної довговічності смуги згідно з формулою (2.63), просумуємо період зародження тріщини (2.58) та знайдений період її докритичного росту. На рис. 2.12 графічно представлено довговічність смуги як функцію від прикладеного навантаження p .

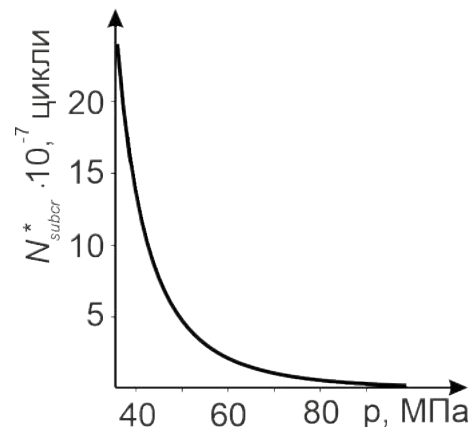


Рис. 2.12. Залежність $N_* \sim p$ для смуги з двома концентраторами напружень.

Таким чином, запропоновані математичні моделі для зародження та докритичного росту коротких втомних тріщин у пластинах з концентраторами напружень дають змогу наближено визначати період зародження тріщини у вершині концентратора, а також загальну довговічність пластини.

2.4. Визначення залишкової довговічності елементів конструкцій з короткими втомними тріщинами за дії корозії

2.4.1. Побудова математичної моделі для визначення поширення корозійно-втомних тріщин

Розглянемо пластину з короткою прямолінійною тріщиною початкової довжини l_{i0} . Пластина знаходиться під впливом корозивно-агресивного середовища і розтягується циклічним рівномірно розподіленим навантаженням p , направленим перпендикулярно до лінії тріщини. Необхідно визначити залишкову довговічність пластини, тобто кількість циклів навантаження $N = N_*$, при якій тріщина досягне розміру $l = l_{j*}$ і пластина зруйнується.

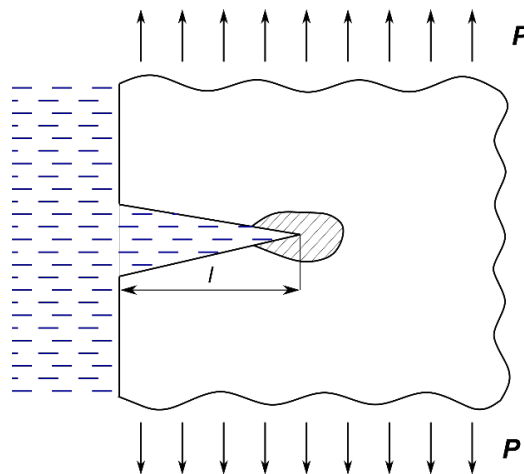


Рис. 2.13. Схема навантаження пластини з короткою корозійно-втомною тріщиною.

Аналогічно до викладеного у підрозділі 2.1, задачу розв'язуватимемо на основі енергетичного підходу [168] з урахуванням припущення про неперервне потрапляння корозивного середовища у вершину тріщини, що призводить до постійної механіко-хімічної ситуації у цій ділянці [47].

На основі енергетичного балансу [168]

$$A_I = W_I + \Gamma_I \quad (2.65)$$

та балансу швидкостей зміни складових енергій [168]

$$\frac{dA_I}{dN} = \frac{dW_I}{dN} + \frac{d\Gamma_I}{dN} \quad (2.66)$$

отримаємо наступний вираз [47]:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[\Gamma_I - (A_I + W_{Is} + W_{Ip}^{(1)}) \right] \frac{dl}{dN} + \frac{d\Gamma_I}{dN} - \frac{dW_{Ip}^{(2)}}{dN} = 0, \quad (2.67)$$

де енергія руйнування Γ_I залежить як від довжини тріщини, так і від кількості циклів, тобто часу навантаження і впливу корозивного середовища.

Тоді швидкість росту тріщини можна записати у такому вигляді [47]:

$$\frac{dl}{dN} = \left[\frac{dW_{Ip}^{(2)}}{dN} - \frac{d\Gamma_I}{dN} \right] / \frac{\partial}{\partial l} \left[\Gamma_I - (A_I - W_{Is} - W_{Ip}^{(1)}) \right]. \quad (2.68)$$

Враховуючи наступні співвідношення для знаменника [47]

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[\Gamma_I - (A_I - W_{Is} - W_{Ip}^{(1)}) \right] = \gamma_{Ifcc} - \gamma_{It}, \quad (2.69)$$

де $\gamma_{Ifcc} = \delta_{Ifcc} \sigma_{It}$ та $\gamma_{It} = \delta_{It} \sigma_{It}$ – питома енергія руйнування та питома робота пластичних деформацій відповідно у зоні передруйнування із врахуванням дії корозивного середовища, δ_{Ifcc} – критичне значення розкриття у вершині тріщини δ_{It} за дії корозії, δ_{Iscc} – нижнє порогове значення розкриття у вершині тріщини δ_{It} за дії корозії,

та для зміни частини роботи пластичних деформацій $W_{Ip}^{(2)}$ [47]

$$\frac{dW_{Ip}^{(2)}}{dN} = \alpha_{I0} \sigma_{It} (1 - R_{I\delta})^2 (\delta_{It \max}^2 - \delta_{Iscc}^2), \quad (2.70)$$

рівняння (2.68) перепишемо у наступному вигляді:

$$\frac{dl}{dN} = \left[\alpha_{I0} \sigma_{It} (1 - R_{I\delta})^2 (\delta_{I\max}^2 - \delta_{Isc}^2) - \frac{\partial \Gamma}{\partial N} \right] / \sigma_{It} (\delta_{Ifcc} - \delta_{It\max}). \quad (2.71)$$

Для знаходження величини $d\Gamma_I/dN$ необхідно враховувати характеристики корозивного середовища. Вважаючи, що корозивне середовище кисле з водневою деградацією, а також, що воднево-механічний механізм руйнування є домінуючим, цю компоненту наближено можна визначити за допомогою співвідношення [47]

$$\frac{d\Gamma_I}{dN} \approx -\eta \sigma_{It} (\delta_{It\max} - \delta_{Isc}), \quad (2.72)$$

де η – експериментальна константа.

Тоді формула (2.68) з урахуванням (2.71) та (2.72) набуде вигляду [47]

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} (\delta_{It\max} - \delta_{Isc}) \left[(1 - R_{I\delta})^2 (\delta_{It\max} + \delta_{Isc}) + \eta \right]}{(\delta_{Ifcc} - \delta_{It\max})}. \quad (2.73)$$

Отже, додавши крайові умови

$$N = 0, l(0) = l_{I0}; \quad N = N_*, l(N_*) = l_{I*}; \quad \delta_{It\max}(l_{I*}) = \delta_{Ifc}, \quad (2.74)$$

математична модель для знаходження залишкової довговічності пластини із втомною тріщиною за дії корозивного середовища матиме вигляд (2.73) – (2.74).

Для застосування моделі до розв'язання задач росту тріщин у пластинах за корозивно-втомного навантаження, слід знати розкриття у вершині тріщини δ_{It} , яке визначатимемо за формулою (2.23).

2.4.2. Визначення швидкості поширення коротких корозійно-втомних тріщин у пластинах

Математична модель (2.73) – (2.74) дозволяє обчислювати швидкість поширення коротких корозійно-втомних тріщин із застосуванням розкриття у вершині тріщини як основного параметра, що описує їх просування. Відомою є також математична модель, основу якої становить коефіцієнт інтенсивності напружень [47]:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} (K_{I\max}^2 - K_{Isc}^2) \left[(1 - R_{IK}^2)^2 (K_{I\max}^2 - K_{Isc}^2) + \eta E \sigma_{It} \right]}{E \sigma_{It} (K_{Ifcc}^2 - K_{I\max}^2)}, \quad (2.75)$$

$$N = 0, l(0) = l_{I0}; \quad N = N_*, l(N_*) = l_{I*}; \quad K_{I\max}(l_{I*}) = K_{Ifcc}, \quad (2.76)$$

де K_{Isc} – нижнє порогове значення КІН, K_{Ifcc} – критичне значення КІН за дії корозивного середовища.

Необхідною умовою для використання цієї моделі, як і параметра коефіцієнта інтенсивності напружень, є умови автотодельності, які дозволяють застосовувати положення лінійної механіки руйнування для опису росту тріщин. Спершу вважалося [160], що для коректного застосування моделі (2.75) – (2.76) поширення втомних тріщин, необхідний розмір тріщини можна визначити з умов автотодельності, розроблених для статичного навантаження. Проте згідно з результатами експериментальних досліджень [163], умови автотодельності для випадку втомного навантаження повинні відрізнятися від стандартних, прийнятих для статички. Аналогічний висновок можна зробити також на основі формули (2.23), де розкриття у вершині тріщини визначається не лише через КІН, але й з урахуванням завантаженості пластини ξ_l , як відношення прикладеного навантаження p до усередненого напруження в зоні передруйнування біля вершини тріщини σ_{It} .

Для підтвердження цих міркувань проведемо числовий експеримент на основі експериментальних даних [17, 169] корозійно-втомного росту тріщин довжиною $11 < l < 19$ мм під дією ґрунтового середовища у сталевій пластині (сталь Х70) з наступними характеристиками: $R_{IK} = 0.1$, $\alpha_{I0} = 0.18$, $\sigma_{It} = 633.5$ МПа, $K_{Ifcc} = 94$ МПа $\sqrt{м}$, $K_{Isc} = 9$ МПа $\sqrt{м}$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\delta_{Isc} = 2 \cdot 10^{-7}$ м, $\delta_{Ifcc} = 8 \cdot 10^{-3}$ м, $\eta = 10^{-5}$ м [169].

Числовий експеримент проводитимемо на аналогу задачі Гріффітса, розглядаючи циклічний розтяг пластини з центральною тріщиною за дії корозивного середовища. Для цього піддамо пластину з тріщиною дії ряду

циклічних навантажень $p = 170; 350; 420; 460; 490$ МПа. У процесі навантаження тріщина зростатиме у проміжку $0.5 < l < 9$ мм, що відповідає діапазону коротких і довгих тріщин.

Для такого діапазону зміни довжини тріщини та рівнів навантаження, використовуючи експериментальні дані розмаху КІН ΔK_I , знайдемо розкриття у вершині тріщини δ_{It} та швидкість росту цієї тріщини V для кожного співвідношення «довжина тріщини – рівень навантаження» за формулами (2.23) та (2.73) відповідно. За обчисленими даними побудуємо графічні залежності $V \sim K_I$ та $V \sim \delta_{It}$.

З графіка залежності швидкості росту тріщини зі зміною КІН (рис. 2.14, а) видно, що одному значенню КІН K_I відповідає декілька значень швидкості росту короткої тріщини під дією втомного навантаження та корозивного середовища. Звідси слідує, що параметр КІН не можна вважати інваріантною характеристикою для випадку коротких корозійно-втомних тріщин, незважаючи на те, що для них виконуються умови автотомельності, прийняті для статичного навантаження.

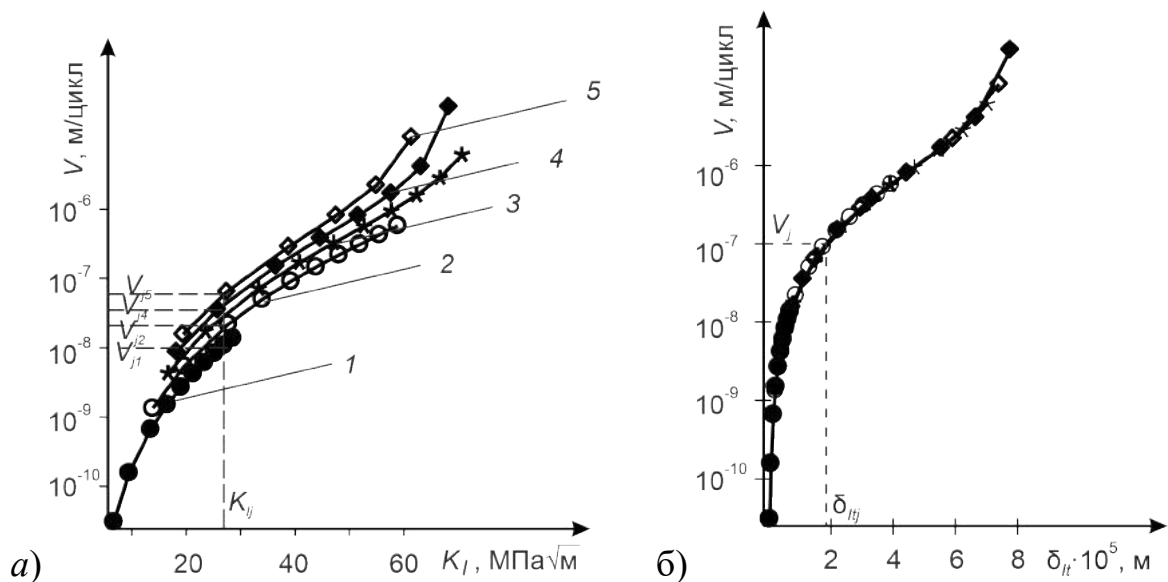


Рис. 2.14. Залежність швидкості росту корозійно-втомної тріщини V від КІН K_I а) та розкриття у її вершині δ_{It} б) для серії навантаження p :
1 – 170, 2 – 350, 3 – 420, 4 – 460, 5 – 490 МПа.

На відміну від рис. 2.14, *a*, побудована на основі числового експерименту залежність швидкості росту тріщини від розкриття у її вершині (рис. 2.14, *б*) демонструє взаємно-однозначну відповідність між величинами V та δ_{II} . На цій діаграмі, усі точки близько лягли на одну криву, що підтверджує інваріантність розкриття у вершині тріщини як характеристики корозійно-втомного росту тріщин.

Отже, математична модель (2.73) – (2.74) для випадку дії корозивного середовища, як і математична модель (2.37) для нейтрального середовища, дозволяє коректно і більш точно, у порівнянні з підходом через КІН, визначати швидкість росту коротких втомних тріщин.

2.4.3. Визначення залишкової довговічності тонкостінних елементів конструкцій з короткими корозійно-втомними тріщинами

Переконавшись у коректності математичної моделі (2.73) – (2.74), застосуємо її для оцінки залишкової довговічності тонкостінних елементів конструкцій з короткими тріщинами, підданими дії втомного навантаження та корозивного середовища. Для цього розглянемо тонкостінний елемент конструкції, що містить коротку тріщину довжиною $2l_{I0}$ та розтягується циклічним навантаженням p . Задача полягає у знаходженні залишкової довговічності $N = N_*$ тонкостінного елемента конструкції з тріщиною, яку визначатимемо двома способами: за деформаційним підходом (N_{δ^*}) з використанням моделі (2.73) – (2.74) та за силовим підходом у параметрах КІН (N_{K^*}), застосовуючи модель (2.75) – (2.76).

Спершу розглянемо деформаційний підхід до розв'язання задачі. Додавши до моделі (2.73) – (2.74) формулу для наближеного знаходження розкриття у вершині тріщини (2.23), отримаємо модель у наступному вигляді:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{I0} (K_{I\max}^2 - K_{Isc}^2) \left[(1 - R_{I\delta}^2)^2 (K_{I\max}^2 + K_{Isc}^2) + \eta E \sigma_{II} (1 - \xi_I^2) \right]}{E \sigma_{II} (1 - \xi_I^2) (K_{Ifcc}^2 - K_{I\max}^2)} \quad (2.77)$$

$$N = 0, l(0) = l_{I0}; N = N_*, l(N_*) = l_{I*}; K_{I\max}(l_{I*}) = \sqrt{E\sigma_{It}\delta_{Ifcc}(1 - \xi_I^2)}. \quad (2.78)$$

Використовуючи метод відокремлення змінних, запишемо розв'язок задачі (2.77) – (2.78):

$$N_{\delta*} = \frac{E\sigma_{It}}{\alpha_{I0}} \int_{l_{I0}}^{l_{I\delta*}} \frac{(1 - \xi_I^2)(K_{Ifcc}^2 - K_{I\max}^2) dl}{(K_{I\max}^2 - K_{Isc}^2) \left[(1 - R_I^2)^2 (K_{I\max}^2 + K_{Isc}^2) + \eta E\sigma_{It} (1 - \xi_I^2) \right]}, \quad (2.79)$$

де $N_{\delta*}$ та $l_{I\delta*}$ – залишкова довговічність пластини з тріщиною та критичний розмір тріщини, отримані на основі деформаційного підходу (2.77) – (2.78).

На основі силового підходу та положень лінійної механіки руйнування, розв'язок задачі з використанням моделі (2.75) – (2.76) запишемо у вигляді:

$$N_{K*} = \frac{E\sigma_{It}}{\alpha_{I0}} \int_{l_{I0}}^{l_{IK*}} \frac{(K_{Ifcc}^2 - K_{I\max}^2) dl}{(K_{I\max}^2 - K_{Isc}^2) \left[(1 - R_{I\delta}^2)^2 (K_{I\max}^2 + K_{Isc}^2) + \eta E\sigma_{It} \right]}, \quad (2.80)$$

де N_{K*} та l_{IK*} – залишкова довговічність пластини з тріщиною та критичний розмір тріщини, отримані на основі силового підходу (2.75) – (2.76).

Порівняємо результати, отримані за підходом через розкриття у вершині тріщини (2.79) та КІН (2.80) на прикладі узагальненої задачі Гріффітса. Для цього розглянемо сталеву пластину, виготовлену зі сталі Х70, з прямолінійною тріщиною. Пластина піддана дії циклічного навантаження зусиллям $p = 400$ МПа та ґрунтової корозії.

Для розв'язання цієї задачі за (2.79) та (2.80), знайдемо спершу критичні розміри тріщини $l_{I\delta*}$ та l_{IK*} за деформаційним (2.78) та силовим (2.76) критеріями: $l_{I\delta*} = 12.1$ мм та $l_{IK*} = 17.6$ мм. З врахуванням цього, на основі (2.79) та (2.80) отримаємо співвідношення для визначення залишкової довговічності пластини з тріщиною залежно від початкової довжини тріщини l_{I0} :

$$N_{\delta*} = \int_{l_{I0}}^{0.0121} \frac{8.6 \cdot 10^2 (1.76 \cdot 10^{-2} - l) dl}{(l - 1.6 \cdot 10^{-4})(l + 1.7 \cdot 10^{-3})} \quad (2.81)$$

та

$$N_{K^*} = \int_{l_{I0}}^{0,0203} \frac{14.3 \cdot 10^2 (1.76 \cdot 10^{-2} - l) dl}{(l - 1.6 \cdot 10^{-4})(l + 2.7 \cdot 10^{-3})}. \quad (2.82)$$

Представимо отримані співвідношення (2.81) та (2.82) графічно, побудувавши залежності $N_{K^*} \sim l_{I0}$ та $N_{\delta^*} \sim l_{I0}$ (рис. 2.15). З графіка видно, що залишкова довговічність N_{K^*} як і критичний розмір тріщини l_{IK^*} за силовим підходом, є більшими, ніж відповідні значення N_{δ^*} та $l_{I\delta^*}$, отримані за деформаційним підходом. З цього можна зробити висновок, що розбіжність між результатами йде у ризик непередбачуваного руйнування, а не у запас міцності, а використання силового підходу до розв'язання задач з короткими тріщинами може призвести до завищення значень залишкової довговічності та критичних розмірів тріщини.

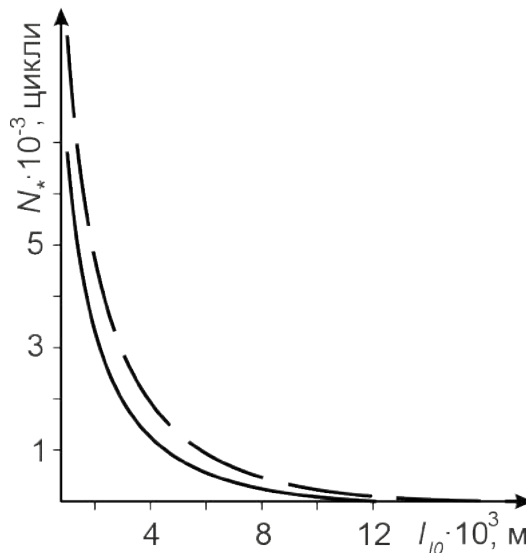


Рис. 2.15. Залишкова довговічність пластини з втомною тріщиною під дією корозії: пунктирна лінія – $N_{K^*} \sim l_{I0}$; суцільна лінія – $N_{\delta^*} \sim l_{I0}$.

Висновки до розділу 2

1. На основі відомого енергетичного підходу розроблено математичну модель для обчислення швидкості поширення короткої втомної тріщини та залишкової довговічності пластин з такими тріщинами із використанням деформаційного параметра розкриття у вершині тріщини. Для застосування

моделі побудовано формулу для визначення розкриття у вершині короткої тріщини, враховуючи рівень навантаження пластини.

2. Запропоновану модель апробовано при розв'язанні задачі знаходження швидкості росту V малої тріщини за циклічного розтягу пластини з двома боковими тріщинами та кругового згину циліндричного зразка з тріщиною за допомогою силового підходу в параметрах K_I та деформаційного підходу в параметрах РВТ. При цьому виявилось, що при розв'язку задачі для кругового згину циліндричного зразка з тріщиною отримано неоднозначну залежність між V та K_I . У той же час результат застосування моделі свідчить про взаємно однозначну залежність між розкриттям у вершині тріщини та швидкістю її поширення.
3. Запропоновано математичні моделі у параметрах деформації для визначення періоду зародження та докритичного росту коротких втомних тріщин біля вершини гладких концентраторів напружень. Коректність моделі перевірено шляхом порівняння з результатами відомих експериментальних даних зародження тріщини у смузі з двома концентраторами напружень.
4. Аналогічно до попереднього випадку нейтрального середовища, побудовано розрахункову модель для корозійно-втомних тріщин у пластинах, підтверджено інваріантність залежності в координатах «розкриття у вершині тріщини – швидкість її поширення», а також обчислено залишкову довговічність пластини з тріщиною та критичний розмір тріщини. Залишкова довговічність пластини та критична довжина тріщини за силовим підходом з використанням КІН виявилася більшою, ніж за більш коректним деформаційним підходом з використанням розробленої моделі, що свідчить про некоректність силового підходу.

РОЗДІЛ 3

РОЗРОБЛЕННЯ ТЕОРІЇ ДЛЯ ОЦІНКИ ДОВГОВІЧНОСТІ ПЛАСТИН З МАЛИМИ ТРІЩИНАМИ ПОПЕРЕЧНОГО І ПОВЗДОВЖНЬОГО ЗСУВІВ

Серед напрямів досліджень втомного руйнування елементів конструкцій під впливом зовнішнього навантаження переважає випадок нормального відриву як механізм росту тріщин, найбільш поширений в інженерній практиці. Попри це, два інші механізми росту – поперечний (II тип) та повздовжній зсув (III тип) – також відіграють важливу роль в інженерії: поперечний зсув виникає у залізничних рейках, підшипниках, конструкційних елементах, підданих дії циклічного навантаження кочення, а повздовжній зсув спостерігається при крученні елементів конструкцій, наприклад, у валах роторів турбін чи автомобілів [170]. Незважаючи на це, втомне руйнування елементів конструкцій за зсуву значно менше досліджено, особливо для випадку поширення малих тріщин. Крім того, дослідження у цій галузі спрямовані переважно на отримання емпіричних результатів, які, звісно, також мають важливе значення для інженерної практики.

На відміну від експериментальних результатів, у цьому розділі запропоновано теоретичний підхід до визначення довговічності елементів конструкцій з малими тріщинами поперечного і повздовжнього зсувів. Отримані математичні моделі базуються на енергетичному підході, а для визначення розкриття біля контуру тріщини за II та III типу навантаження запропоновано формули, які, окрім іншого, враховують рівень завантаженості пластини.

Результати, представлені у цьому розділі, опубліковано у працях дисертантки [171, 172].

3.1. Математична модель поширення малих тріщин за поперечного та повздовжнього зсувів

Як зазначено вище, для інженерної практики важливою є побудова теорії поширення в елементах конструкцій втомних тріщин поперечного і повздовжнього зсувів, а також формулювання розрахункових моделей для визначення їх залишкового ресурсу. Для побудови такої теорії, яка дала б змогу визначити довговічність пластини з тріщиною за навантаження зсуву (тип II та тип III), розглянемо випадок елементів конструкцій великих розмірів, тобто плоскої деформації. Для цього візьмемо товсту пластину, перпендикулярно до бокових поверхонь якої розміщена тунельна тріщина (рис. 3.1). На пластину діє циклічне навантаження, створюючи напружений стан, який можна розглядати як суперпозицію нормального відриву, поперечного та повздовжнього зсувів. По-перше, рівномірно розподілені зусилля інтенсивності p , що прикладені на безмежності у напрямі, перпендикулярному до площини тріщини, викликають циклічний розтяг (I тип навантаження). По-друге, рівномірно розподілені зусилля інтенсивності τ_{II} , прикладені на безмежності паралельно до контуру тріщини, спричиняють циклічний поперечний зсув щодо контуру тріщини (II тип

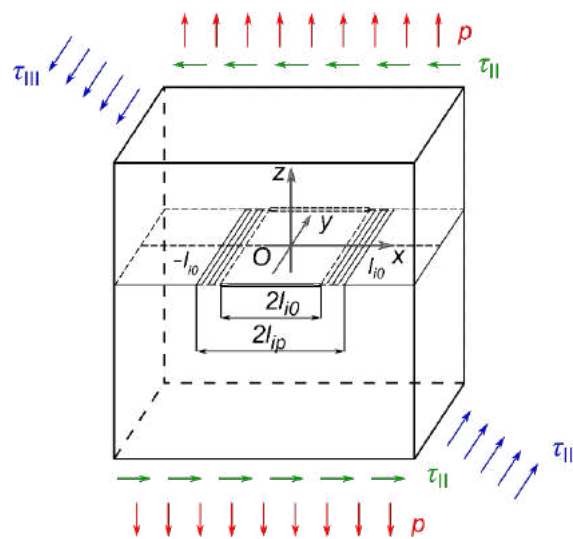


Рис. 3.1. Схема товстої пластини з тунельною тріщиною.

навантаження). По-третє, внаслідок дії прикладеного на безмежності рівномірно розподіленого зусилля інтенсивності τ_{III} паралельно до середньої лінії тріщини, виникає циклічний повздовжній зсув щодо контуру тріщини.

Для однозначного опису положення прикладених зусиль та розміщення тріщини, введемо декартову систему координат $Oxyz$ з центром O на середній лінії тріщини на поверхні пластини (рис. 3.1). Осі координат направимо так, щоб вісь Ox проходила паралельно до контуру тріщини та напрямку дії зусиль τ_{II} ; вісь Oy – перпендикулярно до середньої лінії тріщини та паралельно до напрямку дії зусиль τ_{III} , а вісь Oz була перпендикулярною до площини тріщини та паралельною до напрямку дії зусиль p . Довжину тріщини позначимо через $2l_{i0}$, а довжину тріщини разом з пластичною зоною – $2l_{ip}$, що представлено заштрихованою областю на рисунку.

Задача полягає у визначенні кількості циклів навантаження $N = N_{i*}$, що спричинить ріст тріщини до критичного розміру $l = l_{i*}$ ($i = I, II, III$) та руйнування пластини внаслідок втомного навантаження.

У цьому розділі індекс i ($i = I, II, III$) відповідає типу напруженого стану пластини: I – нормальний відрив, II – поперечний зсув, III – повздовжній зсув.

Для розв'язання задачі слід побудувати математичну модель, яка дасть змогу описати процес росту тріщини під дією прикладеного навантаження. Для цього використаємо описаний у підрозділі 2.1 енергетичний підхід, що базується на першому законі термодинаміки балансу енергетичних складових та балансу швидкостей їх зміни. При застосуванні цього підходу приймається, що рух тріщини від початкового $l = l_{i0}$ до кінцевого $l = l_{i*}$ розміру є прямолінійним і неперервним, оскільки фізичний процес росту тріщини відбувається стрибками малого розміру за велику кількість циклів.

У результаті застосування енергетичного підходу, аналогічно до підрозділу 2.1 (у якому це викладено для нормального відриву), отримаємо математичну модель, що описуватиме рух тріщини за кожного з напружених

станів при відповідних значеннях індексу i у параметрах розкриття біля контуру тріщини (PKT):

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{i0} (1 - R_{i\delta})^2 (\delta_{it\max}^2 - \delta_{ith\max}^2)}{\delta_{ifc} - \delta_{it\max}} \quad (3.1)$$

з відповідними початковими та кінцевими умовами

$$N = 0, \quad l(0) = l_0; \quad N = N_{i*}, \quad l(N_{i*}) = l_{i*}, \quad (3.2)$$

де критичне значення довжини тріщини отримано з використанням критерію критичного розкриття тріщини [39]:

$$\delta_{it}(l_{i*}) = \delta_{ifc}. \quad (3.3)$$

У цих рівняннях α_{i0} – сталий коефіцієнт матеріалу за відповідних умов навантаження, який можна отримати на основі експериментальних даних; $R_{i\delta}$ – коефіцієнт асиметрії циклу в параметрах δ_{it} ; $\delta_{it\max}$ – максимальне розкриття біля контуру тріщини за цикл; $\delta_{ith\max}$ – максимальне значення розкриття біля контуру тріщини, при якому тріщина не поширюється; δ_{ifc} – критичне розкриття біля контуру тріщини.

Таким чином, використовуючи математичну модель (3.1) – (3.3) при відомих параметрах матеріалу за втомного руйнування та розкриття біля контуру тріщини $\delta_{it\max}$, можна обчислити довговічність пластини з малими втомними тріщинами $N = N_{i*}$ за різних типів напруженого стану.

Проте навантаження, що виникає за різних типів напруженого стану, може мати досить різний характер. Особливо це проявляється при порівнянні нормального відриву з поперечним і повздовжнім зсувами, оскільки в цих випадках змінюється діапазон розкриття тріщини. У випадку нормального відриву розкриття тріщини знаходиться в діапазоні $[\delta_{I\min}, \delta_{I\max}]$, тоді як для поперечного і повздовжнього зсувів діапазон розкриття біля контуру тріщини розширюється також й у протилежний бік: $[-\delta_{it}, +\delta_{it}]$, ($i = II, III$), оскільки зазвичай для II і III типів навантаження використовується коефіцієнт асиметрії

циклу $R_i = -1$. Позначення (+) та (-), застосовані до розкриття біля контуру тріщини δ_{it} , вибрано з урахуванням умови ${}_+\delta_{it} > {}_-\delta_{it}$.

Враховуючи цю властивість поперечного та повздожнього зсувів, математичну модель (3.1) – (3.3) можна дещо модифікувати, використавши наступні позначення:

$$\delta_{it\min}(0) = -{}_-\delta_{it}, \quad \delta_{it\max}(0) = {}_+\delta_{it}. \quad (3.4)$$

Тоді згідно з цими позначеннями, частину роботи пластичних деформацій від зовнішніх зусиль $W_{ip}^{(2)}$ на основі формули (2.13) можна записати у вигляді:

$$W_{ip}^{(2)}(N) = \alpha_{i0} N \sigma_{it} \left([{}_+\delta_{it} + {}_-\delta_{it}]^2 - [{}_+\delta_{ith} + {}_-\delta_{ith}]^2 \right). \quad (3.5)$$

Аналогічно до введених позначень (3.4) для ${}_-\delta_{it}$ та ${}_+\delta_{it}$, величини ${}_-\delta_{ith}$ та ${}_+\delta_{ith}$ вибрано з урахуванням співвідношення для коефіцієнту асиметрії циклу в параметрах розкриття біля контуру тріщини $R_{i\delta} = {}_-\delta_{it} / {}_+\delta_{it} = {}_-\delta_{ith} / {}_+\delta_{ith}$ та відсутності поширення тріщини при умові $[{}_+\delta_{it} + {}_-\delta_{it}]^2 - [{}_+\delta_{ith} + {}_-\delta_{ith}]^2 = 0$.

Звідси на основі (2.8), беручи до уваги формулу (3.5), аналогічно до (3.1) – (3.3), отримаємо математичну модель для поперечного та повздожнього зсувів у наступному вигляді:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{i0} (1 - R_{i\delta})^2 ({}_+\delta_{it}^2 - {}_+\delta_{ith}^2)}{\delta_{ifc} - {}_+\delta_{it}}, \quad (i = 2, 3) \quad (3.6)$$

$$N = 0, \quad l(0) = l_{i0}; \quad N = N_{i*}, \quad l(N_{i*}) = l_{i*}; \quad {}_+\delta_{it}(l_{i*}) = \delta_{ifc}.$$

По суті, математична модель (3.1) – (3.3) коректно описує рух тріщини для усіх трьох напружених станів, у тому числі й поперечного та повздожнього зсувів, а модель (3.6) можна розглядати як її частковий випадок для II і III типів навантаження, записаний з використанням інших позначень.

3.2. Знаходження розкриття біля контуру тріщини за допомогою методу порівняння еквівалентних напружених станів нормального відриву, поперечного та повздовжнього зсувів

Використання запропонованої моделі (3.1) – (3.3), як і моделі (3.6), для знаходження швидкості поширення тріщини та довговічності пластини з такою тріщиною у випадку нормального відриву, поперечного та повздовжнього зсувів передбачає існування формули для визначення відповідного розкриття біля контуру тріщини δ_{it} , ($i=1,2,3$). Відповідно, для розв'язання початкової задачі необхідно спершу розв'язати задачу про визначення розкриття біля контуру тріщини для кожного напруженого стану.

Для симетричних та кососиметричних відносно площини тріщини пружних задач переміщення поверхонь тріщини можна знайти за формулою [173]:

$$2\mu\vec{u} = z \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Phi} - 2(1-\nu) \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial z} + (1-2\nu)(\operatorname{grad} \Phi_3 - \vec{e}_3 \operatorname{div} \vec{\Phi}), \quad (3.7)$$

де \vec{u} – вектор переміщень; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – напрямні одиничні вектори декартової системи $Oxyz$; $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ – гармонічна вектор-функція, що визначає дотичні та нормальні напруження у площині $z=0$; Φ_1, Φ_2, Φ_3 – проєкції вектор-функції на осі координат, μ – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона.

Представлення компонентів тензора напружень $\hat{\sigma}$ через гармонічні функції у площині тріщини ($z=0$) матиме вигляд [173]:

$$\vec{e}_3 \cdot \hat{\sigma} = z \operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial z^2} + \nu \left(\vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial y} - \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right). \quad (3.8)$$

Оскільки у випадку усіх трьох напружених станів розглядувана задача є симетричною або кососиметричною відносно площини тріщини, то розв'язки (3.7) та (3.8) можна застосувати для її розв'язання. Для цього необхідно спершу зробити постановку задач для кожного з напружених станів – нормального відриву, поперечного та повздовжнього зсувів – за стану плоскої деформації.

3.2.1. Постановка задачі в інтегральній формі за нормального відриву

Математична модель, що описує напружений стан заданої пластини з тріщиною за нормального відриву (I тип навантаження) матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \sigma_z(x,0) = f_I(x), & 0 \leq |x| < l_{Ip}; \\ u_z(x,0) = 0, & l_{Ip} \leq |x| < \infty; \\ \tau_{xz}(x,0) = 0, & 0 \leq |x| < \infty. \end{cases} \quad f_I(x) = \begin{cases} -p, & 0 \leq |x| < l_{I0}; \\ \sigma_{II} - p, & l_{I0} \leq |x| < l_{Ip}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Тобто компонента заданих нормальних напружень σ_z на поверхнях тріщини, описується функцією $f_I(x)$. У зоні передруйнування біля контуру тріщини напруження σ_z виражаються через усереднене напруження в цій зоні, зменшене на величину прикладеного навантаження. Компоненти дотичних напружень τ_{xz} є нульовими в усіх точках площини. Оскільки задача є симетричною відносно площини $z = 0$, то на цій площині поза областю тріщини переміщення відсутні, тобто $u_z(x,0) = 0$.

Для розв'язання задачі у такій постановці необхідно визначити компоненти нормальних $\sigma_z(x,0)$ і дотичних $\tau_{xz}(x,0)$ напружень та переміщень $u_z(x,0)$. З цією метою можна використати формули (3.7) і (3.8) та представити шукані величини через гармонічні функції.

Визначаючи переміщення поверхонь тріщини \vec{u} , на основі (3.7) можна записати:

$$\begin{aligned} \vec{u} = & \frac{1}{2\mu} \left[z \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Phi} - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \vec{e}_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \vec{e}_2 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \vec{e}_3 \right) + \right. \\ & \left. + (1-2\nu) \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \vec{e}_3 - \vec{e}_3 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Запишемо вектор \vec{u} (3.10) покомпонентно, врахувавши, що переміщення шукаємо у площині $z = 0$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2(1-\nu)}{2\mu} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{(1-2\nu)}{2\mu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \\ -\frac{2(1-\nu)}{2\mu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \frac{(1-2\nu)}{2\mu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \\ -\frac{2(1-\nu)}{2\mu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \frac{(1-2\nu)}{2\mu} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Таким чином, шукане переміщення $u_z(x,0)$ виражається формулою:

$$u_z(x,0) = \frac{1}{2\mu} \left[-2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - (1-2\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right]. \quad (3.12)$$

Для знаходження напружень застосуємо формулу (3.8):

$$\begin{aligned} (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z) = & - \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \vec{e}_1 + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \vec{e}_2 + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \vec{e}_3 \right) + \\ & + \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} \right) \vec{e}_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Звідси покомпонентний запис напружень у площині $z=0$ матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} \right) \\ -\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Отож на основі (3.12) та (3.14) компоненти переміщення $u_z(x,0)$, нормальних $\sigma_z(x,0)$ та дотичних $\tau_{xz}(x,0)$ напружень можна представити через гармонічні функції наступним чином:

$$\begin{cases} u_z(x,0) = \frac{1}{2\mu} \left[-2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - (1-2\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right]; \\ \sigma_z(x,0) = -\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2}; \quad \tau_{xz}(x,0) = -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Для розглядуваної задачі на функцію Φ_1 не накладаються жодні додаткові умови, адже виконання граничних умов (3.9) забезпечуватиметься при

довільному значенні функції Φ_1 . У зв'язку з цим для спрощення розв'язання задачі приймемо, що функція рівна деякій довільній обмеженій величині $\Phi_1 = A$. Із врахуванням цього, постановку задачі (3.9) можна переписати через гармонічні функції:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} = f_I(x), & 0 \leq |x| < l_p; \\ -B_I \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = 0, & l_p \leq |x| < \infty; \quad B_I = \frac{1-\nu}{\mu}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Постановку задачі у формі (3.16) для першого напруженого стану розглядатимемо як основну.

Переконаємося, що постановка задачі (3.16) відповідає напруженому стану нормального відриву. Це можна зробити, звівши її до рівняння Фредгольма I роду та представивши гармонічну функцію $\Phi_3(x, z)$, що входить у задачу, за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. При цьому множник перед інтегралом вибрано з міркувань симетрії між прямою та оберненою задачею, а також враховано симетричність напруженого стану початкової задачі:

$$\Phi_3(x, z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \xi^{-1} A_{III}(\xi) e^{-\xi z} \cos \xi x d\xi, \quad (3.17)$$

де $A_{III}(\xi)$ – невідома функція, ξ – змінна інтегрування.

Підставивши функцію $\Phi_3(x, z)$ у представленні (3.17) у задачу (3.16), для площини $z = 0$ отримаємо:

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \xi A_{III}(\xi) \cos(\xi x) d\xi = f_I(x), & 0 \leq |x| < l_p; \\ \frac{1-\nu}{\mu} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A_{III}(\xi) \cos(\xi x) d\xi = 0, & l_p \leq |x| < \infty. \end{cases} \quad (3.18)$$

Друге співвідношення (3.18) розширимо на діапазон зміни аргументу по всій довжині тріщини $0 \leq |x| < l_p$:

$$\frac{1-\nu}{\mu} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A_{III}(\xi) \cos(\xi x) d\xi = u_{1z}(x, 0), \quad 0 \leq |x| < l_p, \quad (3.19)$$

де $u_{1z}(x, 0)$ – деяке переміщення у заданому діапазоні.

Для визначення $A_{III}(\xi)$ застосуємо до співвідношення (3.19) обернене перетворення Фур'є:

$$A_{III}(\xi) = \frac{\mu}{1-\nu} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l_p} u_{1z}(x, 0) \cos(\xi x) dx. \quad (3.20)$$

Підставивши знайдену функцію (3.20) у перше рівняння (3.18), отримаємо:

$$-\frac{2}{\pi} \frac{\mu}{1-\nu} \int_0^\infty \xi \cos(\xi x) \left[\int_0^{l_p} u_{1z}(x_1, 0) \cos(x_1 \xi) dx_1 \right] d\xi = f_I(x). \quad (3.21)$$

У рівнянні (3.21) використаємо співвідношення між модулем зсуву та модулем Юнга $\mu = 0,5E(1+\nu)^{-1}$ та, з метою спрощення, припустимо, що функція $f_I(x)$, що описує напруження у пластині, залежить лише від прикладеного зовнішнього навантаження на усьому діапазоні її зміни $f_I(x) = -p$:

$$\frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \int_0^\infty \xi \cos(\xi x) \left[\int_0^{l_p} u_{1z}(x_1, 0) \cos(x_1 \xi) dx_1 \right] d\xi = p, \quad (3.22)$$

де x_1 – змінна інтегрування.

Задачу щодо знаходження розкриття берегів тріщини та напружень у площині тріщини за нормального відриву було розв'язано за допомогою іншого підходу та встановлено [29] співвідношення для нормальних напружень $\sigma_{1z}(x, 0)$ у зоні поза тріщиною ($|x| > l_p$):

$$\begin{aligned} \sigma_{1z}(x, 0) = & \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 - l_p^2}} \left(\pi(p - \sigma_{II}) \left(x - \sqrt{x^2 - l_p^2} \right) + 2\sigma_{II} x \arcsin \frac{l}{l_p} + \right. \\ & \left. + \sigma_{II} \sqrt{x^2 - l_p^2} \left[\arcsin \frac{l_p^2 - xl}{l_p(x-l)} - \arcsin \frac{l_p^2 + xl}{l_p(x+l)} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

та для розкриття її берегів ($|x| \leq l_{I0}$):

$$\begin{aligned} 2u_{1z}(x, 0) = & \frac{2p(1-\nu)}{\mu} \sqrt{l_p^2 - x^2} + \frac{\sigma_{II}(1-\nu)}{\pi\mu} \left[(x-l) \Gamma(l_p, x, l) - \right. \\ & \left. -(x+l) \Gamma(l_p, x, -l) - 4\sqrt{l_p^2 - x^2} \arccos \frac{l}{l_p} \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

де x – біжуча координата вздовж тріщини; l_p – пів довжина тріщини разом з її зоною передруйнування при I типі навантаження; l – пів довжина тріщини; p – рівномірно розподілене навантаження, прикладене до пластини паралельно до осі Ox ; σ_{II} – усереднене напруження в зоні передруйнування; $\Gamma(l_p, x, \xi)$ – функція, що визначається за формулою [29]:

$$\Gamma(l_p, x, \xi) = \ln \frac{l_p^2 - x\xi - \sqrt{(l_p^2 - x^2)(l_p^2 - \xi^2)}}{l_p^2 - x\xi + \sqrt{(l_p^2 - x^2)(l_p^2 - \xi^2)}}. \quad (3.25)$$

Застосувавши наведені вище міркування про характер функції $f_i(x)$ та зв'язок між модулями пружності до (3.24), отримаємо формулу для визначення $u_{Iz}(x, 0)$:

$$u_{Iz}(x, 0) = \frac{2p(1-\nu^2)}{E} \sqrt{l_p^2 - x^2} \quad (3.26)$$

та підставимо її у рівняння (3.22):

$$\frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \xi \cos(\xi x) \left[\int_0^{l_p} \sqrt{l_p^2 - x^2} \cos(x_1 \xi) dx_1 \right] d\xi = p. \quad (3.27)$$

Наступним кроком є перевірка співвідношення (3.27) шляхом спрощення лівої його частини. Відомо, що інтегрування складеної функції, що містить добуток тригонометричної функції та квадратного кореня з многочлена такого типу, здійснюється за формулою [174]:

$$\int_0^1 \cos(\alpha x) \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} J_1(\alpha), \quad (3.28)$$

де α – константа, $J_1(\alpha)$ – циліндрична функція.

Застосувавши (3.28) до внутрішнього інтегралу у (3.27), після перетворень отримаємо [174]:

$$pl_p \int_0^\infty \cos(\xi x) J_1(l_p \xi) d\xi = p. \quad (3.29)$$

Інтеграл добутку косинуса та циліндричної функції у співвідношенні (3.29) можна знайти за формулою [174]:

$$\int_0^{\infty} J_1(\alpha x) \cos \beta x = \frac{\cos\left(\arcsin \frac{\beta}{\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, \quad \beta < \alpha. \quad (3.30)$$

Після спрощення вираз (3.29), а відповідно і (3.27), перетвориться у тотожність, що свідчить, певною мірою, про коректність поставленої задачі (3.16).

3.2.2. Визначення розкриття біля контуру тріщини за поперечного зсуву

Сформулювавши задачу для нормального відриву товстої пластини з тунельною тріщиною, аналогічним чином запишемо постановку задачі для випадку поперечного зсуву (рис. 3.2):

$$\begin{cases} u_x(x, 0) = 0, & l_{IIp} \leq |x| < \infty; \\ u_z(x, 0) = 0, & 0 \leq |x| < \infty; \\ \tau_{xz}(x, 0) = f_{II}(x), & 0 \leq |x| < l_{IIp}; \end{cases} \quad f_{II}(x) = \begin{cases} -\tau_{II}, & 0 \leq |x| < l_{II0}; \\ \tau_{IIp} - \tau_{II}, & l_{II0} \leq |x| < l_{IIp}. \end{cases} \quad (3.31)$$

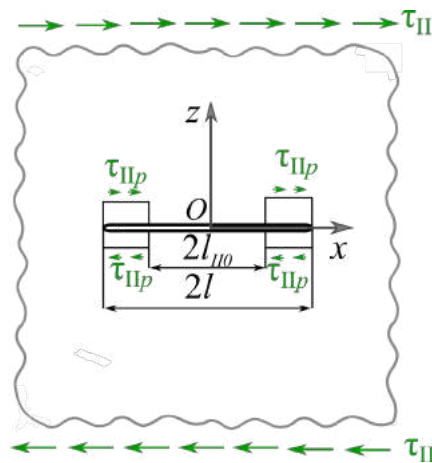


Рис. 3.2. Пластина з тріщиною піддана дії поперечного зсуву.

Постановка задачі у такому вигляді передбачає, що для поперечного зсуву компоненти розкриття берегів $u_x(x, 0)$ поза тріщиною та її зоною передруйнування і компоненти $u_z(x, 0)$ в усьому діапазоні зміни координати x рівні нулеві. Внаслідок дії навантаження τ_{II} , у ділянці, де розміщена тріщина, виникають дотичні напруження $\tau_{xy}(x, 0)$, які описуються функцією $f_{II}(x)$.

Функція $f_{II}(x)$ визначає, що дотичні напруження по довжині тріщини чисельно рівні прикладеному до пластини зсувному навантаженню τ_{II} , а в зоні передруйнування – усередненому напруженню τ_{IIp} , зменшеному на величину діючого навантаження τ_{II} .

Задача про поперечний зсув пластини з тріщиною за стану плоскої деформації розглядалася в літературі й раніше [175]. У цій праці при постановці задачі використано умову $\sigma_z(x,0) = 0$, $0 \leq |x| < \infty$, що в результаті призвело до перекривання поверхонь зони передруйнування. Для уникнення такого некоректного з фізичної точки зору результату, у постановці задачі (3.31) застосовано умову відсутності розкриття берегів тріщини у напрямі осі Oz – $u_z(x,0) = 0$, $0 \leq |x| < \infty$.

Аналогічно до випадку нормального відриву, перепишемо формулювання задачі (3.31), використовуючи гармонічні функції. На основі (3.12) та (3.14) його можна представити через функції Φ_1 та Φ_3 :

$$\begin{cases} u_x(x,0) = -\frac{1-\nu}{\mu} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{1-2\nu}{2\mu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = 0, & l_{IIp} \leq |x| < \infty; \\ u_z(x,0) = -\frac{1-\nu}{\mu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \frac{1-2\nu}{2\mu} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 0, & 0 \leq |x| < \infty; \\ \tau_{xz}(x,0) = -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = f_{II}(x), & 0 \leq |x| < l_{IIp}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Перетворимо представлення (3.32) так, щоб у нього входила лише одна гармонічна функція. Для цього введемо функції Φ_1 та Φ_3 у вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \xi^{-1} A_I(\xi) e^{-\xi z} \sin(\xi x) d\xi, \\ \Phi_3 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \xi^{-1} A_{III}(\xi) e^{-\xi z} \cos(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (3.33)$$

та підставимо їх у друге рівняння (3.32), визначене в усьому діапазоні зміни x , внаслідок чого після перетворень отримаємо:

$$u_z(x,0) = \frac{1}{2\mu} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left[2(1-\nu) \int_0^\infty A_{III}(\xi) \cos(\xi x) d\xi - (1-2\nu) \int_0^\infty A_I(\xi) \cos(\xi x) d\xi \right] = 0. \quad (3.34)$$

Звідси можна знайти залежність між підінтегральними функціями $A_I(\xi)$ та $A_{III}(\xi)$:

$$A_{III}(\xi) = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} A_I(\xi). \quad (3.35)$$

Використаємо перше рівняння (3.32) та підставимо у нього співвідношення (3.35). У результаті після спрощень отримаємо представлення $u_x(x,0)$ лише через функцію $A_I(\xi)$:

$$u_x(x,0) = \frac{1}{2\mu} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \int_0^\infty A_I(\xi) \sin(\xi x) d\xi = 0, \quad (3.36)$$

або ж, відповідно, через функцію Φ_1 :

$$u_x(x,0) = \frac{1}{2\mu} \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0. \quad (3.37)$$

Враховуючи співвідношення (3.37) та (3.32), постановка задачі для поперечного зсуву через одну гармонічну функцію матиме вигляд:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = f_{II}(x), & 0 \leq |x| < l_{IIp}; & f_{II}(x) = \begin{cases} -\tau_{II}, & |x| < l_{II0}; \\ \tau_{IIp} - \tau_{II}, & l_{II0} \leq |x| < l_{IIp}. \end{cases} \\ B_{II} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0, & l_{IIp} \leq |x| < \infty. & B_{II} = \frac{3-4\nu}{4\mu(1-\nu)}. \end{cases} \quad (3.38)$$

Порівняння задач для нормального відриву (3.16) та поперечного зсуву (3.38) у гармонічному представленні свідчить про еквівалентність цих задач з точністю до множників B_I та B_{II} . Відповідно, розв'язок задачі для другого типу навантаження (3.38) буде аналогічним до розв'язку задачі для першого типу (3.16). Розкриття біля контуру тріщини за нормального відриву δ_{II} можна визначити за формулою [29]:

$$\delta_{II} = -\frac{8l\sigma_{II}(1-\nu^2)}{\pi E} \ln \left(\cos \left(\frac{\pi p_I}{2\sigma_{II}} \right) \right). \quad (3.39)$$

Тоді на основі (3.39) з урахуванням еквівалентності задач, взаємозв'язку між параметрами B_I і B_{II} ($B_I/B_{II} = 0.25(3-4\nu)(1-\nu)^{-2}$), а також модулем Юнга та модулем зсуву ($E = 2\mu(1+\nu)$) розкриття біля контуру тріщини для поперечного зсуву можна записати у вигляді:

$$\delta_{III} = -\frac{(3-4\nu)l\tau_{IIp}}{\mu\pi(1-\nu)} \ln \left(\cos \left(\frac{\pi\tau_{II}}{2\tau_{IIp}} \right) \right). \quad (3.40)$$

Критичне значення прикладеного зсувного навантаження $\tau_{II} = \tau_{II*}$ можна знайти, підставивши рівняння (3.40) у критерій критичного розкриття тріщини [39]:

$$-\frac{(3-4\nu)l\tau_{IIp}}{\mu\pi(1-\nu)} \ln \left(\cos \left(\frac{\pi\tau_{II*}}{2\tau_{IIp}} \right) \right) = \delta_{IIfc}. \quad (3.41)$$

Звідси безрозмірне критичне значення прикладеного навантаження можна обчислити за формулою:

$$\frac{\tau_{II*}}{\tau_{IIp}} = \frac{2}{\pi} \arccos \left(\exp \left(-\frac{1}{\zeta_{II}} \right) \right), \quad (3.42)$$

$$\text{де } \zeta_{II} = \frac{l\tau_{IIp}(3-4\nu)}{\pi\mu\delta_{IIfc}(1-\nu)}.$$

Формула (3.40) досить складна у використанні, оскільки для визначення довговічності пластини необхідно розв'язувати диференціальне рівняння, що описує кінетику росту тріщини. У зв'язку з цим перетворимо її до простішого вигляду, розклавши останній множник (3.40) в ряд Маклорена та ввівши множник $\left[1 - (\tau_{II}/\tau_{IIp})^2 \right]^{-1/2}$, отриманий на основі числового аналізу, аналогічно до [15]. У результаті формулу (3.40) можна записати у наступному вигляді:

$$\delta_{III} \approx \frac{(3-4\nu)\pi l\tau_{II}^2}{8\mu(1-\nu)\tau_{IIp}\sqrt{1 - (\tau_{II}/\tau_{IIp})^2}}, \quad (3.43)$$

або з використанням коефіцієнта інтенсивності напружень:

$$\delta_{III} \approx \frac{C_{II} K_{II}^2}{\sqrt{1 - (\tau_{II} / \tau_{IIp})^2}}, \quad (3.44)$$

де $K_{II} = \tau_{II} \sqrt{\pi l}$, $C_{II} = \frac{3 - 4\nu}{8\mu(1 - \nu)\tau_{IIp}}$.

Таким чином, формули (3.43) та (3.44) при визначенні розкриття біля контуру тріщини враховують, окрім іншого, рівень завантаженості пластини τ_{II} / τ_{IIp} .

Відповідно, безрозмірне критичне значення зовнішнього навантаження на основі (3.44) можна обчислити наступним чином:

$$\frac{\tau_{II*}}{\tau_{IIp}} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2 \zeta_{II}} \sqrt{\sqrt{\pi^4 \zeta_{II}^2 + 16} - 4}. \quad (3.45)$$

Порівняємо графічно результати, отримані з використанням обох формул для знаходження безрозмірного критичного навантаження. Для цього побудуємо графік залежності безрозмірного значення критичного навантаження τ_{II*} / τ_{IIp} від безрозмірного значення довжини тріщини ζ_{II} (рис. 3.3), на якому суцільна лінія

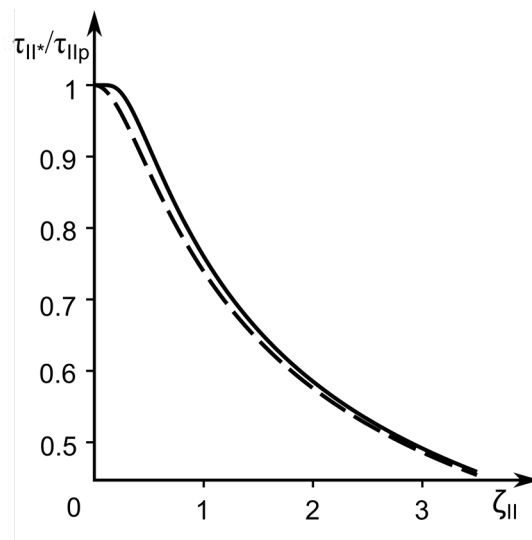


Рис. 3.3. Залежність безрозмірного значення навантаження від безрозмірної довжини тріщини $\tau_{II*} / \tau_{IIp} \sim \zeta_{II}$: суцільна лінія – за формулою (3.42), штрихова лінія – за формулою (3.45).

відповідає залежності, визначеній за точною формулою (3.42), а пунктирна – за наближеною (3.45). З графіка видно, що використання запропонованої спрощеної формули (3.45) дозволяє досить точно визначати критичне значення навантаження, яке може спричинити руйнування пластини.

3.2.3. Визначення розкриття біля контуру тріщини за повздовжнього зсуву

Аналогічно до задач за напруженого стану нормального відриву та поперечного зсуву, використаємо такий підхід до розв'язання задачі для випадку III типу навантаження – повздовжнього зсуву (рис. 3.4). У цьому випадку математичне формулювання задачі про зсув товстої пластини, послабленої тунельною тріщиною, можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} u_y(x,0) = 0, & l_{IIIp} \leq |x| < \infty; \\ u_z(x,0) = 0, & 0 \leq |x| < \infty; \\ \tau_{yz}(x,0) = f_{III}(x), & 0 \leq |x| < l_{IIIp}; \end{cases} \quad f_{III}(x) = \begin{cases} -\tau_{III}, & |x| < l_{III0}; \\ \tau_{IIIp} - \tau_{III}, & l_{III0} \leq |x| < l_{IIIp}. \end{cases} \quad (3.46)$$

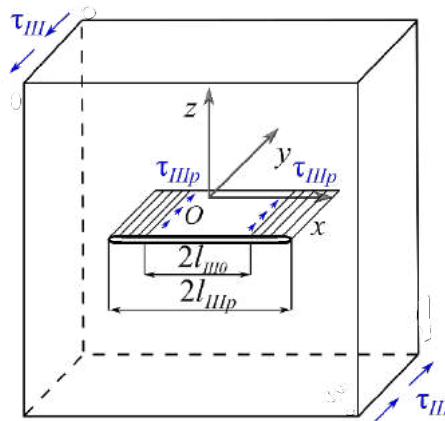


Рис. 3.4. Схема товстої пластини з тріщиною за повздовжнього зсуву

Таке формулювання задачі відображає, що напруження повздовжнього зсуву τ_{yz} у діапазоні росту тріщини визначаються функцією $f_{III}(x)$, причому, аналогічно до напруженого стану I та II, напруження по довжині тріщини чисельно рівні прикладеному зсувному навантаженню τ_{III} , а напруження у зоні передруйнування біля контуру тріщини рівні різниці прикладеного

навантаження τ_{III} та усередненого напруження у цій зоні τ_{IIIp} . У зоні поза тріщиною компоненти переміщення $u_y(x, 0) = 0$ та направлені вглибину тріщини, а компоненти переміщення $u_z(x, 0)$, що визначають переміщення вздовж вертикальної осі z , рівні нулеві на всьому діапазоні зміни x .

Представимо формулювання задачі (3.46) через гармонічні функції. На основі (3.11) та (3.14), задача запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} u_y(x, 0) = -\frac{2(1-\nu)}{2\mu} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{(1-2\nu)}{2\mu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = 0, & l_{IIIp} \leq |x| < \infty; \\ u_z(x, 0) = -\frac{2(1-\nu)}{2\mu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \frac{(1-2\nu)}{2\mu} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 0, & 0 \leq |x| < \infty; \\ \tau_{yz}(x, 0) = -\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = f_3(x), & 0 \leq |x| < l_{IIIp}. \end{cases} \quad (3.47)$$

У співвідношення (3.47) входять усі три гармонічні функції Φ_1 , Φ_2 та Φ_3 . Проте оскільки компоненти переміщень $u_z(x, 0)$ рівні нулеві на усій центральній площині, то розглядуваний пів простір є нерухомим, а отже, $\Phi_1 = \text{const}$ та $\Phi_3 = \text{const}$.

У зв'язку з цим співвідношення (3.47) спроститься до вигляду:

$$\begin{cases} \tau_{yz}(x, 0) = -\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = f_{III}(x), & 0 \leq |x| < l_{IIIp}; \\ u_y(x, 0) = -\frac{2(1-\nu)}{2\mu} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0, & l_{IIIp} \leq |x| < \infty. \end{cases} \quad (3.48)$$

Функцію Φ_2 запишемо в інтегральному вигляді:

$$\Phi_2(x, z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \xi^{-1} A_{II}(\xi) e^{-\xi z} \cos(\xi x) d\xi \quad (3.49)$$

та підставимо у співвідношення (3.48):

$$\begin{cases} -(1-\nu) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \xi A_{II}(\xi) e^{-\xi x} \cos(\xi x) d\xi = f_{III}(x), & 0 \leq |x| < l_{IIIp}; \\ -\frac{1-\nu}{\mu} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \xi A_{II}(\xi) e^{-\xi x} \cos(\xi x) d\xi = 0, & l_{IIIp} \leq |x| < \infty. \end{cases} \quad (3.50)$$

У результаті задача (3.46) для поперечного зсуву товстої пластини з тунельною тріщиною запишеться через одну гармонічну функцію у вигляді:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} = \tilde{f}_{III}(x), & |x| < l_{IIIp}; \\ B_{III} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0, & |x| \geq l_{IIIp}; \end{cases} \quad \tilde{f}_{III}(x) = \begin{cases} -\frac{\tau_{III}}{1-\nu}, & |x| < l_{III0}; \\ \frac{\tau_{IIIp} - \tau_{III}}{1-\nu}, & l_{III0} \leq |x| < l_{IIIp}, \end{cases} \quad (3.51)$$

$$B_{III} = \frac{1-\nu}{\mu}.$$

Порівняння задач для нормального відриву (3.16) та повздовжнього зсуву (3.51) свідчить про їх еквівалентність відносно прикладеного зовнішнього навантаження. Враховуючи цю еквівалентність та співвідношення між модулями пружності, розкриття біля контуру тріщини δ_{III} на основі (3.40) виражається формулою:

$$\delta_{III} = 2u_y(l, 0) = -\frac{4(1-\nu)\tau_{IIIp}l}{\pi\mu} \ln \left(\cos \left(\frac{\pi\tau_{III}}{2\tau_{IIIp}} \right) \right), \quad (3.52)$$

а довжина тріщини із врахуванням пластичної зони $l_{IIIp} = l \sec(0.5\pi\tau_{III}\tau_{IIIp}^{-1})$.

Тоді з (3.52) за критерієм критичного розкриття тріщини для III типу навантаження

$$-\frac{4(1-\nu)\tau_{IIIp}l}{\pi\mu} \ln \left(\cos \left(\frac{\pi\tau_{III*}}{2\tau_{IIIp}} \right) \right) = \delta_{IIIc} \quad (3.53)$$

можна визначити безрозмірне критичне зовнішнє навантаження:

$$\frac{\tau_{III*}}{\tau_{IIIp}} = \frac{2}{\pi} \arccos \left(\exp \left(-\frac{1}{\zeta_{III}} \right) \right), \quad (3.54)$$

де $\zeta_{III} = \frac{4(1-\nu)\tau_{IIIp}l}{\pi\mu\delta_{IIIc}}$ – відносна довжина тріщини за повздовжнього зсуву.

Формула (3.54) аналогічна за структурою до відповідної формули при II типі навантаження і також є досить незручною у використанні. У зв'язку з цим аналогічно до попереднього, методами математичного аналізу формулу (3.52) перетворимо до вигляду:

$$\delta_{III} \approx \frac{(1-\nu)\pi\tau_{III}^2 l}{2\tau_{IIIp}\mu\sqrt{1-(\tau_{III}/\tau_{IIIp})^2}}, \quad (3.55)$$

або через коефіцієнт інтенсивності напружень для повздовжнього зсуву K_{III} :

$$\delta_{III} \approx \frac{C_3 K_{III}^2}{\sqrt{1-(\tau_{III}/\tau_{IIIp})^2}}, \quad (3.56)$$

де $K_{III} = \tau_3 \sqrt{\pi l}$, $C_3 = \frac{1-\nu}{2\tau_{IIIp}\mu}$.

У зв'язку з цим з критерію критичного розкриття тріщини та співвідношення (3.56) після перетворень отримаємо формулу для визначення безрозмірного критичного навантаження:

$$\frac{\tau_{III*}}{\tau_{IIIp}} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2 \zeta_{III}} \sqrt{\sqrt{\pi^4 \zeta_{III}^2 + 16} - 4}. \quad (3.57)$$

Для порівняння залежностей безрозмірного критичного значення навантаження та відносного розміру тріщини, отриманих за формулами (3.54) та (3.57), представимо їх графічно (рис. 3.5). З аналізу графіка можна зробити висновок про достатню точність запропонованого наближеного розв'язку (3.57) з точки зору його практичного застосування.

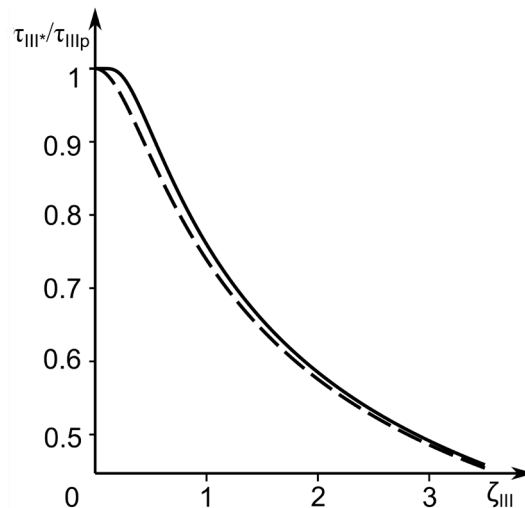


Рис. 3.5. Залежність $\tau_{III*}/\tau_{IIIp} \sim \zeta_{III}$, отримана за точною (3.54) (суцільна лінія) та (3.57) (штрихова лінія) формулами.

Отож, для випадків навантаження товстої пластини з тріщиною поперечним та повздовжнім зсувним зусиллям запропоновано досить точні наближені формули для знаходження розкриття біля контуру тріщини δ_{II} , δ_{III} та критичного навантаження τ_{II*} , τ_{III*} на основі інтегрального представлення формулювання задач та відомих відповідних розв'язків для нормального відриву.

3.3. Визначення довговічності пластини з тріщиною за поперечного та повздовжнього зсувів

3.3.1. Знаходження довговічності пластини через розкриття біля контуру тріщини

Поставлену на початку розділу задачу про навантаження товстої пластини з тунельною тріщиною зсувними зусиллями II (τ_{II}) і III (τ_{III}) типів та визначення відповідних значень довговічності N_i , ($i = II, III$) (рис. 3.1) можна розв'язати, використовуючи запропоновану математичну модель на основі енергетичного підходу (3.1) – (3.3) та отриманих формул для визначення розкриття біля контуру тріщини δ_{II} (3.43) та δ_{III} (3.55).

Для отримання математичних моделей у кінцевому вигляді підставимо у співвідношення (3.1) – (3.3) формулу (3.43) для випадку поперечного зсуву:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{II0} (1 - R_{II\delta})^2 \left((D_{II}l)^2 - \delta_{IIth\max}^2 \right)}{\delta_{IIfc} - D_{II}l}, \quad (3.58)$$

$$N = 0, \quad l(0) = l_{II0}; \quad N = N_{II*}, \quad l(N_{II*}) = l_{II*}; \quad D_{II}l_{II*} = \delta_{IIfc}, \quad (3.59)$$

де $D_{II} = \frac{(3 - 4\nu)\pi\tau_{II}^2}{8\mu(1 - \nu)\tau_{IIp}\sqrt{1 - (\tau_{II} / \tau_{IIp})^2}},$

та формулу (3.55) для повздовжнього зсуву:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{III0} (1 - R_{III\delta})^2 \left((D_{III}l)^2 - \delta_{IIIth\max}^2 \right)}{\delta_{IIIfc} - D_{III}l}, \quad (3.60)$$

$$N = 0, \quad l(0) = l_{III0}; \quad N = N_{III*}, \quad l(N_{III*}) = l_{III*}; \quad D_{III} l_{III*} = \delta_{IIIc}, \quad (3.61)$$

$$\text{де } D_{III} = \frac{(1-\nu)\pi\tau_{III}^2}{2\tau_{IIIp}\mu\sqrt{1-(\tau_{III}/\tau_{IIIp})^2}}.$$

Крім цього, окремо слід звернути увагу на II та III типи навантаження, за яких щопроценту зсув відбувається у прямому та у зворотному напрямках. У цьому випадку використаємо співвідношення (3.6) та підставимо у нього вираз розкриття біля контуру тріщини (3.43) для отримання математичної моделі поперечного зсуву:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{II0}(1-R_{II\delta})^2((l_+D_{II})^2 - {}_+\delta_{IIth}^2)}{\delta_{IIc} - l_+D_{II}}, \quad (3.62)$$

$$N = 0, \quad l(0) = l_{II0}; \quad N = N_{II*}, \quad l(N_{II*}) = l_{II*}; \quad l_+D_{II} = \delta_{IIc}, \quad (3.63)$$

$$\text{де параметр } {}_+D_{II} = \frac{\pi(3-4\nu){}_+\tau_{II}^2}{4\mu(1-\nu)\tau_{IIp}\sqrt{1-({}_+\tau_{II}/\tau_{IIp})^2}},$$

та розкриття біля контуру тріщини (3.55) для математичної моделі повздовжнього зсуву:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{III0}(1-R_{III\delta})^2((l_+D_{III})^2 - {}_+\delta_{IIIth}^2)}{\delta_{IIIc} - l_+D_{III}}, \quad (3.64)$$

$$N = 0, \quad l(0) = l_{III0}; \quad N = N_{III*}, \quad l(N_{III*}) = l_{III*}; \quad l_+D_{III} = \delta_{IIIc},$$

$${}_+D_{III} = \frac{(1-\nu)\pi{}_+\tau_{III}^2}{2\mu\tau_{IIIp}\sqrt{1-({}_+\tau_{III}/\tau_{IIIp})^2}}. \quad (3.65)$$

Отож на основі моделей поперечного зсуву (3.58) – (3.59) і (3.62) – (3.63) та повздовжнього зсуву (3.60) – (3.61) і (3.64) – (3.65) можна обчислити швидкість руху тріщини та довговічність пластини N_{II*} та N_{III*} .

Використаємо ці моделі для визначення довговічності конкретних елементів конструкцій. Розглянемо спершу випадок поперечного зсуву товстої, нескінченної з математичної точки зору, пластини, що містить малу тріщину початкової довжини $2l_{II0}$ (рис. 3.1, рис. 3.2). Поперечний зсув цієї пластини

забезпечується рівномірно розподіленим циклічним навантаженням $\tau_{II} = 245$ МПа, розміщеним по нормалі до контуру тріщини вздовж осі Oy . Прикладене на безмежності зсувне навантаження характеризується двостороннім симетричним циклом. Пластина виготовлена зі сталі 65Г (аналог сталі AISI 1066), обробленої за температури 600°C , характеристики якої отримано на основі [176]:

$$\begin{aligned} \alpha_{II0} &= 0.021 \text{ N}^{-1}, \quad \delta_{IIIh} = 1.29 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \quad \delta_{IIc} = 7.64 \cdot 10^{-5} \text{ м}, \\ R_{II\delta} &= -1, \quad \nu = 0.3, \quad \mu = 81 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \tau_{IIp} = 490 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Задача полягає у знаходженні довговічності пластини з тріщиною, тобто кількості циклів навантаження $N = N_{II*}$, після досягнення якої тріщина підросте до критичного розміру $l = l_{II*}$, що призведе до руйнування пластини.

Оскільки це задача поширення тріщини поперечного зсуву з двостороннім циклом навантаження, для її розв'язання використаємо модель (3.58) – (3.59). Підставивши характеристики сталі (3.66), отримаємо рівняння поширення тріщини для цієї задачі з відповідними початковими та кінцевими умовами:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{0.08(3.12 \cdot 10^{-6} l^2 - 1.66 \cdot 10^{-12})}{7.64 \cdot 10^{-5} - 0.18 \cdot 10^{-2} l}, \quad (3.67)$$

$$N = 0, \quad l(0) = l_{II0}; \quad N = N_{II*}, \quad l(N_{II*}) \approx 43.2 \text{ мм}.$$

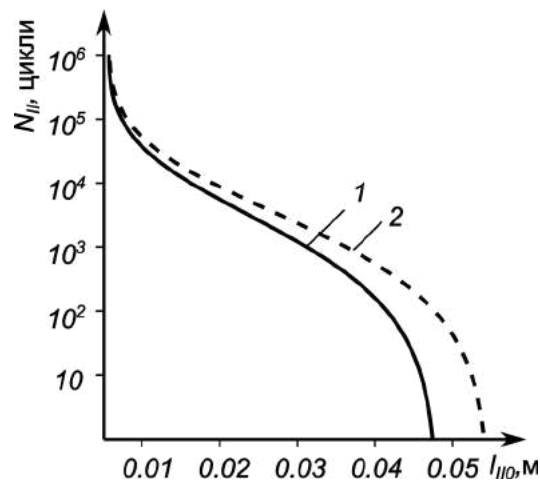


Рис. 3.6. Співвідношення довговічності N_{II} та початкової довжини тріщини l_{II0} поперечного зсуву, отримане через розкриття біля контуру тріщини (крива 1) та через КІН (крива 2).

Для випадку повздовжнього зсуву розглянемо аналогічну задачу розтягу товстої безмежної пластини з малою центральною тріщиною початкової довжини $l = 2l_{III0}$ (рис. 3.1 та рис. 3.3). До пластини на безмежності прикладено рівномірно розподілене навантаження інтенсивності $\tau_{III} = 276$ МПа, яке викликає напружений стан повздовжнього зсуву. Пластина виготовлена зі сталі AISI 4340 та має наступні характеристики, отримані на основі [177]:

$$\begin{aligned} \alpha_{III0} &= 0.06 \text{ N}^{-1}, \quad \delta_{IIIth} = 1.96 \cdot 10^{-7} \text{ м}, \quad \delta_{IIIfc} = 5.02 \cdot 10^{-5} \text{ м}, \\ R_{III\delta} &= -1, \quad \nu = 0.3, \quad \mu = 81 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \tau_{IIIp} = 552 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Слід визначити довговічність пластини $N = N_{III*}$ за дії повздовжнього зсуву, коли пластина зруйнується.

Для розв'язання задачі використаємо модель (3.60) – (3.61), що описує ріст тріщини повздовжнього зсуву та підставимо в неї характеристики матеріалу (3.68). У результаті отримаємо конкретну математичну модель поширення тріщини для поставленої задачі:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dN} &= \frac{0.24(4.71 \cdot 10^{-6} l^2 - 3.85 \cdot 10^{-4})}{5.02 \cdot 10^{-5} - 0.22 \cdot 10^{-2} l}, \\ N = 0, \quad l(0) &= l_{III0}; \quad N = N_{III*}, \quad l(N_{III*}) \approx 23.2 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

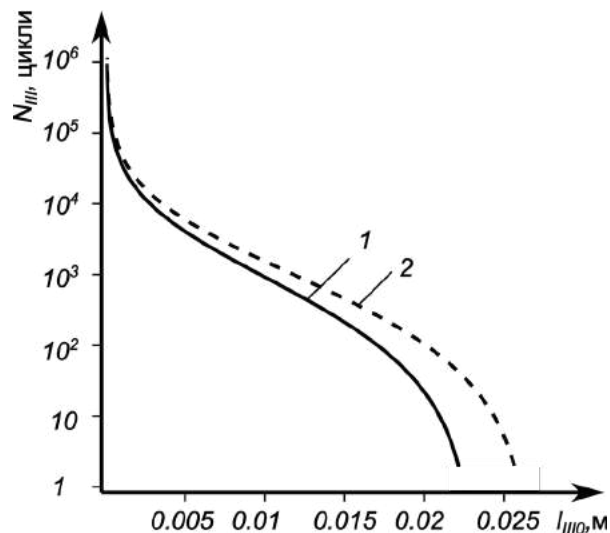


Рис. 3.7. Співвідношення довговічності N_{III} та початкової довжини тріщини l_0 повздовжнього зсуву, отримане через розкриття тріщини біля контуру (крива 1) та КІН (крива 2).

Розділивши змінні та проінтегрувавши рівняння (3.69) за початкових та кінцевих умов, отримаємо залежність довговічності пластини з малою центральною тріщиною повздовжнього зсуву залежно від початкового розміру тріщини (рис. 3.7, крива I).

3.3.2. Знаходження довговічності пластини з тріщиною через КІН

У попередньому підпункті для знаходження залишкового ресурсу товстих пластин з тріщинами використано математичні моделі, що базувалися на розкритті тріщини біля контуру як основному параметрі, що описував зміну поведінки тріщини. Проте відомо [29, 178], що при виконанні умов автомодельності з цією метою можна використовувати також коефіцієнт інтенсивності напружень, оскільки у цьому випадку параметри КІН та РКТ пов'язані між собою. Незважаючи на це, за нормального відриву значення швидкості росту тріщини та довговічності пластини, отримані за підходами через КІН та РКТ, відрізняються між собою для малих тріщин навіть при дотриманні умов автомодельності [13-15]. При цьому значення величин, обчислених на основі коефіцієнтів інтенсивності напружень, перевищують відповідні значення, знайдені через розкриття вершин тріщини, як показано у розділі 2. У зв'язку з цим дослідимо, як зміняться швидкість росту тріщини та довговічність пластини за таких умов при дії поперечного та повздовжнього зсувного навантаження.

Для цього необхідно переформулювати запропоновані моделі росту тріщини поперечного (3.58) – (3.59) та повздовжнього (3.60) – (3.61) зсувів через параметри $\delta_{ifc} = C_i K_{ifc}^2$ коефіцієнта інтенсивності напружень K_{II} та K_{III} . На основі (3.44) та (3.56) запишемо залежність між КІН та РКТ за повздовжнього та поперечного зсувів без врахування введеного корекційного множника

$$\left(\sqrt{1 - (\tau_i / \tau_{ip})^2} \right)^{-1} :$$

$$\delta_{it} = C_i K_i^2, \quad \delta_{ith} = C_i K_{ith}^2, \quad i = II, III. \quad (3.70)$$

Підставивши ці співвідношення у початкову математичну модель (3.1), отримаємо рівняння поширення тріщини в параметрах КІН для поперечного

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{II0}(3-4\nu)(1-R_{II\delta})^2}{8\tau_{IIp}\mu(1-\nu)} \cdot \frac{K_{II}^4 - K_{IIth}^4}{K_{IIfc}^2 - K_{II}^2} \quad (3.71)$$

та повздовжнього зсувів:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{III0}(1-\nu)(1-R_{III\delta})^2}{2\tau_{IIIp}\mu} \cdot \frac{K_{III}^4 - K_{IIIth}^4}{K_{IIIfc}^2 - K_{III}^2} \quad (3.72)$$

На основі цих моделей можна розв'язати задачі навантаження пластин зі сталей 65Г (аналог AISI 1066) та AISI 4340, розглянуті у попередньому підпункті. Для цього підставимо у (3.71) та (3.72) відповідні характеристики кожного з матеріалів і отримаємо конкретні математичні моделі швидкості росту тріщини відповідно за поперечного зсуву (для сталі 65Г):

$$\frac{dl}{dN} = \frac{6.82 \cdot 10^{-10} (3.56 \cdot 10^{10} l^2 - 2.52 \cdot 10^4)}{9409 - 1.89 \cdot 10^5 l}, \quad (3.73)$$

$$N = 0, \quad l(0) = l_{II0}; \quad N = N_{IIK*}, \quad l(N_{IIK*}) \approx 49.9 \text{ мм}$$

та за повздовжнього зсуву (для сталі AISI 4340):

$$\frac{dl}{dN} = \frac{1.87 \cdot 10^{-9} (5.73 \cdot 10^{10} l^2 - 625)}{6400 - 2.39 \cdot 10^5 l}, \quad (3.74)$$

$$N = 0, \quad l(0) = l_{III0}; \quad N = N_{IIIK*}, \quad l(N_{IIIK*}) \approx 26.7 \text{ мм.}$$

3.3.3. Порівняння підходів до визначення довговічності пластини з тріщиною через РКТ та КІН

Графічні залежності між довговічністю пластини та розміром початкової тріщини отримано внаслідок розв'язання диференціальних рівнянь (3.73) і (3.74) та представлено кривими 2 на рис. 3.6 і рис. 3.7 для другого та третього напруженого стану відповідно. Порівнюючи ці залежності з відповідними співвідношеннями, отриманими з використанням параметрів РКТ (рис. 3.6 та рис. 3.7, крива 1), можна зробити висновок, що значення довговічності та критичної довжини тріщини є більшими при застосування КІН як параметра моделювання (рис. 3.6, рис. 3.7, крива 2). Таким чином, використання

коефіцієнта інтенсивності напружень при моделюванні росту малих втомних тріщин призводить до завищення прогнозів довговічності для усіх трьох напружених станів: як нормального відриву, так і повздовжнього та поперечного зсувів. Такі завищені прогнози, у свою чергу, спричиняють похибку розрахунку не в сторону запасу міцності, а в сторону непередбачуваного руйнування.

Іншою складністю, пов'язаною з використанням коефіцієнта інтенсивності напружень як основного параметра моделювання росту малих втомних тріщин, є неінваріантність основаного на КІН підходу навіть при виконанні умов автотомності [179]. Неінваріантність цього підходу підтверджено для нормального відриву на основі експериментальних досліджень [179] та числових експериментів у розділі 2 [13-15], де показано, що одному значенню КІН за різних рівнів навантаження відповідає декілька значень швидкості поширення тріщини.

Дослідимо цю особливість для випадку поперечного та повздовжнього зсувів, провівши аналогічні числові експерименти із застосуванням запропонованих розрахункових моделей.

Для числового експерименту за дії поперечного зсуву використаємо пластину з центральною тріщиною зі сталі 65Г (аналог сталі AISI 1066) з характеристиками (3.66), розглянуту в пункті 3.3.1. З метою експерименту прикладатимемо до пластини навантаження різного рівня $\tau_{II} = 230, 320, 380, 410, 440$ МПа та щоразу покроково збільшуватимемо довжину тріщини від 0.8 мм до 5 мм. Отриману залежність між КІН K_{II} та швидкістю росту тріщини V представимо графічно (рис. 3.8). З графіка видно, що одному значенню коефіцієнта інтенсивності напруження K_{IIj} відповідають чотири різні значення швидкості росту тріщини $V_{1j}, V_{2j}, V_{3j}, V_{4j}$, які знаходяться на паралельних кривих, залежно від рівня прикладеного навантаження.

Дослідимо тепер, як зміниться характер залежності, якщо замість коефіцієнта інтенсивності напружень використати параметр розкриття біля

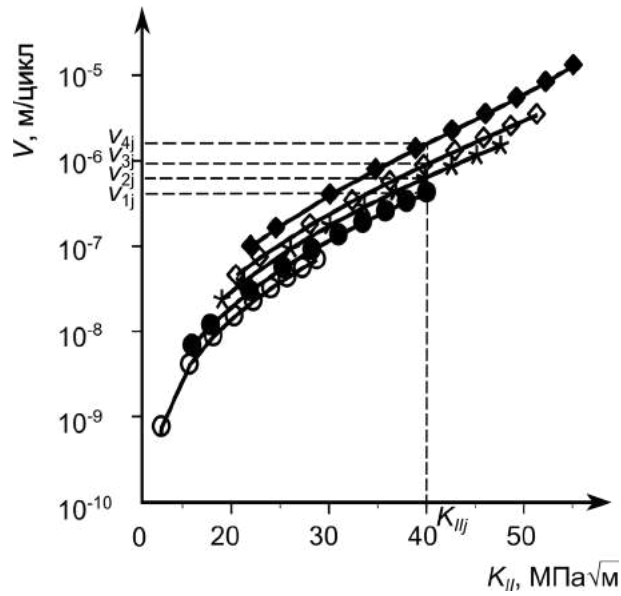


Рис. 3.8. Залежність $V \sim K_{II}$ при поперечному зсуві за різного рівня навантажень τ_{II} : \circ – 230 МПа; \bullet – 320 МПа; $*$ – 380 МПа; \diamond – 410 МПа; \blacklozenge – 440 МПа

контуру тріщини. Для цього перебудуємо залежність $V \sim K_{II}$ у залежність $V \sim \delta_{III}$ за допомогою моделі (3.58) та співвідношень між параметрами (3.44). На отриманій кривій (рис. 3.9) існує однозначна відповідність між розкриттям біля контуру тріщини δ_{III} та швидкістю її поширення V , що пов'язано з врахуванням рівня навантаженості пластини τ_{II}/τ_{IIp} при обчисленні РКТ (3.44).

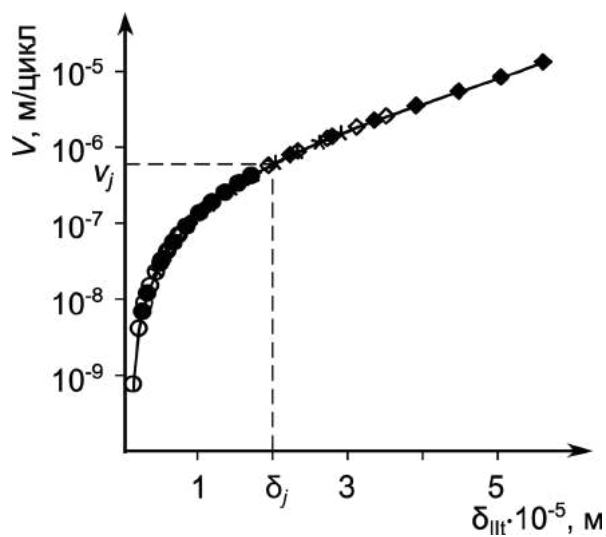


Рис. 3.9. Залежність $V \sim \delta_{III}$ при поперечному зсуві за різного рівня навантажень τ_{II} : \circ – 230 МПа; \bullet – 320 МПа; $*$ – 380 МПа; \diamond – 410 МПа; \blacklozenge – 440 МПа

У випадку повздовжнього зсуву числовий експеримент проведемо на пластині, виготовленій зі сталі AISI 4340 з втомними характеристиками (3.68). Для отримання залежностей між швидкістю росту тріщини та коефіцієнтом інтенсивності напружень за різних рівнів навантаження $\tau_{III} = 300, 400, 450, 475, 490$ МПа (рис. 3.10) покроково збільшуватимемо довжину тріщини в діапазоні від 0,1 мм до 5 мм для кожного значення навантаження. Для отримання співвідношення $V \sim \delta_{III}$ перебудуємо отриману залежність в параметрах КІН (рис. 3.9), використовуючи рівняння моделі (3.60) та запропоновану формулу визначення δ_{III} через K_{III} (3.56).

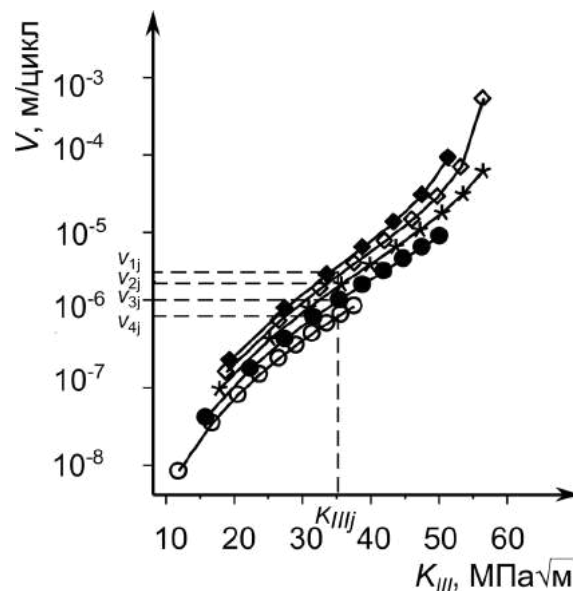


Рис. 3.10. Залежність $V \sim K_{III}$ при повздовжньому зсуві за різного рівня навантажень τ_{III} : \circ – 300 МПа; \bullet – 400 МПа; $*$ – 450 МПа; \diamond – 475 МПа; \blacklozenge – 490 МПа.

Порівнюючи ці дві залежності $V \sim K_{III}$ (рис. 3.10) та $V \sim \delta_{III}$ (рис. 3.11), отримуємо аналогічні результати, як і для випадку поперечного зсуву та нормального відриву: важливість врахування рівня навантаженості пластини при моделюванні руху малої втомної тріщини та, відповідно, коректність застосування підходу на основі розкриття біля її контуру.

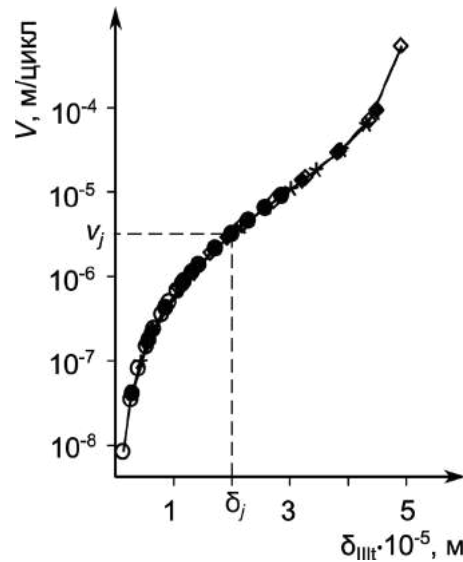


Рис. 3.11. Залежність $V \sim \delta_{III}$ при повздовжньому зсуві за різного рівня навантажень τ_{III} : \circ – 300 МПа; \bullet – 400 МПа; $*$ – 450 МПа; \diamond – 475 МПа; \blacklozenge – 490 МПа

3.4. Поширення малих тріщин за сумісної дії поперечного та повздовжнього зсувів

Поряд з циклічними навантаженнями поперечного або повздовжнього зсувів, розглянутими раніше у цьому розділі, на практиці елементи конструкції часто зазнають одночасної їх дії з утворенням певного напруженого стану. Дослідимо цей випадок детальніше, розглянувши товсту пластину з тунельною тріщиною, що розміщена перпендикулярно до її бокових поверхонь (рис. 3.12). До пластини на безмежності з однаковою частотою прикладено рівномірно розподілені циклічні зусилля τ_{II} , перпендикулярно до контуру тріщини, та рівномірно розподілені зусилля τ_{III} , перпендикулярно до лінії тріщини. Таким чином, зусилля τ_{II} спричиняє напружений стан II типу, а зусилля τ_{III} – напружений стан III типу, внаслідок чого пластину з тріщиною піддана сумісній дії поперечного та повздовжнього зсувів. Для розв'язання задачі необхідно знайти кількість циклів навантаження $N = N_{(II+III)*}$, після досягнення якої тріщина підросте до критичного розміру $l = l_{(II+III)*}$ та спричинить руйнування пластини.

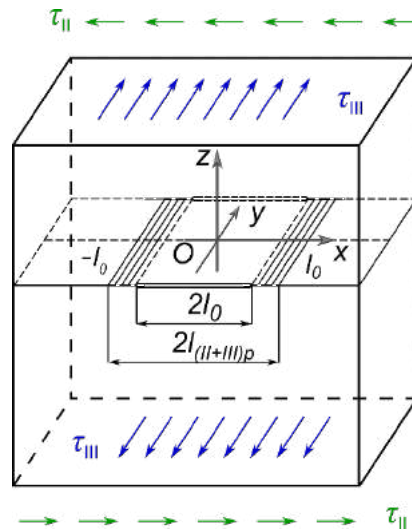


Рис. 3.12. Схема товстої пластини, підданої сумісній дії II та III типів навантаження.

Модель для розв'язання задачі будуватимемо на основі енергетичного підходу, описаного у пункті 2.1.1 для нормального відриву. Для цього спершу запишемо умову енергетичного балансу [148]:

$$A = \Gamma + W. \quad (3.75)$$

Оскільки на пластину діє зусилля як поперечного, так і повздовжнього зсувів, то енергію деформування W можна розкласти на дві частини, що відповідають за кожен тип навантаження:

$$W = W_{II} + W_{III}, \quad (3.76)$$

де W_{II} – енергія деформування, викликана II типом навантаження, W_{III} – енергія деформування внаслідок дії III типу навантаження.

Тоді кожен з цих компонент W_{II} та W_{III} , аналогічно до (2.3), можна записати через її складові:

$$W_i = W_{is} + W_{ip}^{(1)}(l) - W_{ip}^{(2)}(t). \quad (3.77)$$

Диференціювання умови балансу енергетичних складових (3.75) з використанням формули (3.76) дає умову балансу швидкості їх зміни за сумісної дії поперечного та повздовжнього зсувів:

$$\frac{dA}{dN} = \frac{d\Gamma}{dN} + \frac{dW_{II}}{dN} + \frac{dW_{III}}{dN}. \quad (3.78)$$

Підставивши складові енергій деформацій (3.77) у співвідношення (3.78), отримаємо вираз для визначення швидкості поширення тріщини:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\frac{dW_{IIp}^{(2)}}{dN} + \frac{dW_{IIIp}^{(2)}}{dN}}{\frac{\partial}{\partial l} \left[\Gamma - \left(A - W_{II\delta} - W_{III\delta} - W_{IIp}^{(1)} - W_{IIIp}^{(1)} \right) \right]}. \quad (3.79)$$

Для подальшого використання формули (3.79), необхідно розписати вирази у чисельнику аналогічно до (2.7):

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[\Gamma - \left(A - W_{II\delta} - W_{III\delta} - W_{IIp}^{(1)} - W_{IIIp}^{(1)} \right) \right] = \gamma_{(II+III)fc} - \gamma_{II} - \gamma_{III}, \quad (3.80)$$

де $\gamma_{(II+III)fc}$ – питома енергія руйнування за сумісної дії поперечного та повздовжнього зсувів; γ_{II} та γ_{III} – питома робота пластичних деформацій в зоні передруйнування за II та III типів навантаження, та у знаменнику, аналогічно до (2.13):

$$W_{ip}^{(2)}(N) = \alpha_{i0} N \tau_{ip} \left(\left[\delta_{it\max} - \delta_{it\min} \right]^2 - \left[\delta_{ith\max} - \delta_{ith\min} \right]^2 \right). \quad (3.81)$$

Підстановка виразів (3.80) та (3.81) у формулу (3.79) дає рівняння для визначення швидкості поширення тунельної тріщини у товстій пластині за сумісної дії поперечного та повздовжнього зсувів:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{II0} (1 - R_{II\delta})^2 \tau_{IIp} (\delta_{II\max}^2 - \delta_{IIh\max}^2) + \alpha_{III0} (1 - R_{III\delta})^2 \tau_{IIIp} (\delta_{III\max}^2 - \delta_{IIIh\max}^2)}{\delta_{(II+III)fc} \tau_{(II+III)p} - \delta_{II} \tau_{IIp} - \delta_{III} \tau_{IIIp}}, \quad (3.82)$$

де $\delta_{(II+III)fc}$ – критичне значення розкриття біля контуру тріщини за одночасної дії II та III типу навантаження; $\tau_{(II+III)p}$ – усереднене значення напруження в зоні передруйнування за дії II та III типу навантаження.

Рівняння (3.82) є досить незручним у користуванні, оскільки для знаходження характеристик $\delta_{(II+III)fc}$ та $\tau_{(II+III)p}$ необхідно мати експериментальні дані випробувань конкретного матеріалу, проведені саме в умовах комбінованої дії обох типів зсувного навантаження.

Проте існують дослідження з порівняння втомного поширення тріщин за повздовжнього та поперечного зсувів. Мураками та співавтори [170]

експериментально показали, що механізми росту тріщин за повздовжнього та поперечного зсувів є «по суті однаковими». Такий висновок було зроблено на основі порівняння поверхонь руйнування та темних протравлених ділянок за II та III типів навантаження у зразках з вуглецевої сталі 0,47% з пів еліптичною тріщиною.

Спираючись на результати Мураками [170], та на діаграми втомного руйнування за поперечного [176] та повздовжнього зсувів [177], які є досить близькими для одного й того ж матеріалу, можна наближено прийняти, що характеристики матеріалу, як, наприклад, α_{i0} , τ_{ip} , $R_{i\delta}$, ($i = II, III$), є рівними для поперечного та повздовжнього зсувів. Внаслідок цього, рівняння (3.82) спроститься до наступного вигляду:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{(II/III)0} (1 - R_{(II/III)\delta})^2 [\delta_{II\max}^2 + \delta_{III\max}^2 - \delta_{IIth\max}^2 - \delta_{IIIth\max}^2]}{\delta_{(II/III)fc} - \delta_{II} - \delta_{III}}, \quad (3.83)$$

де $\alpha_{(II/III)0}$ – експериментальна стала, $R_{(II/III)\delta}$ – коефіцієнт асиметрії циклу навантаження в деформаціях, $\delta_{(II/III)fc}$ – критичне значення розкриття тріщини біля контуру за II (або III) типу навантаження, $\delta_{IIth\max}$ та $\delta_{IIIth\max}$ – порогове значення розкриття тріщини біля контуру за II та, відповідно, III типів навантаження.

Рівняння (3.83) разом з початковими та кінцевими умовами

$$N = 0, \quad l(0) = l_{(II+III)0}; \quad N = N_{(II+III)*}, \quad l(N_{(II+III)*}) = l_{(II+III)*}, \quad (3.84)$$

становить математичну модель для наближеного визначення поширення тунельної тріщини в товстій пластині за сумісної дії поперечного та повздовжнього зсувів. З огляду на використання моделі (3.83) – (3.84), необхідні характеристики матеріалу можна отримати з результатів експериментальних досліджень та нормативних документів, а для наближеного визначення розкриття тріщини біля конуру $\delta_{II\max}$, $\delta_{III\max}$ за II та III типів навантаження можна використати знайдені у цьому розділі формули (3.43) та (3.55).

У результаті підстановки виразів (3.43) та (3.55) для знаходження розкриття тріщини біля контуру, на основі моделі (3.83) – (3.84) отримуємо:

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha_{(II/III)0} (1 - R_{(II/III)\delta})^2 [(D_{II}l)^2 + (D_{III}l)^2 - \delta_{IIth\max}^2 - \delta_{IIIth\max}^2]}{\delta_{(II/III)fc} - D_{II}l - D_{III}l}, \quad (3.85)$$

$$N = 0, \quad l(0) = l_0; \quad N = N_{(II+III)*}, \quad l(N_{(II+III)*}) = l_{(II+III)*}.$$

$$\text{де } D_{II} = \frac{(3 - 4\nu)\pi\tau_{II}^2}{8\mu(1 - \nu)\tau_{IIp}\sqrt{1 - (\tau_{II} / \tau_{IIp})^2}}, \quad D_{III} = \frac{(1 - \nu)\pi\tau_{III}^2}{2\tau_{IIIp}\mu\sqrt{1 - (\tau_{III} / \tau_{IIIp})^2}}.$$

Застосуємо запропоновану модель (3.85) для розв'язання конкретної задачі комбінованої дії повздовжнього та поперечного зсувних навантажень на товсту пластину (рис. 3.12). Для цього розглянемо пластину з малою центральною тріщиною початкової довжини $2l_0$, виготовлену зі сталі 65Г (аналог сталі AISI 1066) з температурною обробкою 600 °С з наступними характеристиками міцності та тріщиностійкості [176]:

$$\nu = 0.3, \quad E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \mu = 80769 \text{ МПа}, \quad \alpha_{(II/III)0} = 0.0082,$$

$$R_{(II/III)\delta} = -1, \quad \tau_{(II/III)p} = 490 \text{ МПа}, \quad \delta_{(II/III)fc} = 7.6 \cdot 10^{-5} \text{ м}, \quad (3.86)$$

$$K_{(II/III)fc} = 97 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}, \quad K_{(II/III)th} = 12.6 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}, \quad \delta_{(II/III)th} = 1.29 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

До пластини прикладено на безмежності рівномірно розподілені зусилля поперечного зсуву τ_{II} перпендикулярно до контуру тріщини та зусилля повздовжнього зсуву τ_{III} паралельно до контуру тріщини. Для розв'язання задачі необхідно знайти довговічність пластини, тобто критичну кількість циклів навантаження $N = N_{(II+III)*}$, що спричинить її руйнування.

Для визначення цієї величини використаємо математичну модель (3.85). Підставивши в неї характеристики матеріалу (3.86), отримуємо модель для конкретної задачі, за допомогою якої можна знайти швидкість поширення тріщини, та, відповідно, і довговічність пластини, залежно від рівня прикладеного навантаження τ_{II} та τ_{III} .

Розглянемо декілька випадків прикладеного навантаження II та III типу і обчислимо для кожного з них діапазон зміни довжини тріщини для застосування

моделі (таблиця 3.1). Значення навантаження вибрано таким чином, щоб розглянути випадок однакового навантаження незначної інтенсивності ($\tau_{II} = \tau_{III} = 100$ МПа); однакового навантаження, рівного половині границі текучості за зсуву ($\tau_{II} = \tau_{III} = 245$ МПа), а також різного за величиною навантаження з переважаючим поперечним ($\tau_{II} = 245$ МПа, $\tau_{III} = 100$ МПа) та повздовжнім ($\tau_{II} = 100$ МПа, $\tau_{III} = 245$ МПа) зсувним навантаженням.

Таблиця 3.1. Співвідношення прикладеного навантаження та довжини тріщини

τ_{II} , МПа	τ_{III} , МПа	l_0 , м	l_* , м
245	245	$69.74 \cdot 10^{-5}$	$20.69 \cdot 10^{-3}$
245	100	$10.18 \cdot 10^{-4}$	$37.24 \cdot 10^{-3}$
100	245	$93.84 \cdot 10^{-5}$	$34.95 \cdot 10^{-3}$
100	100	$47.32 \cdot 10^{-4}$	$14.03 \cdot 10^{-2}$

На основі цих даних за моделлю (3.85) можна обчислити довговічність пластини $N_{(II+III)*}$ залежно від початкової довжини тріщини за різної комбінації навантажень поперечного та повздовжнього зсувів (рис. 3.13).

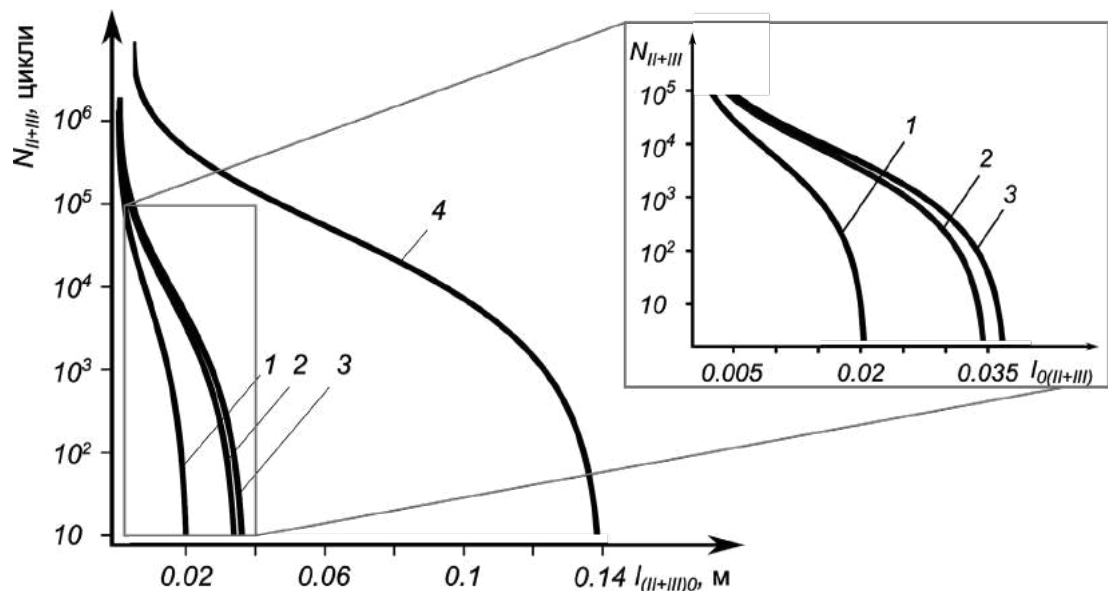


Рис. 3.13. Залежність $N_{II+III} \sim l_{(II+III)0}$ при різній комбінації напружень поперечного та повздовжнього зсувів: 1 – $\tau_{II} = 245$ МПа, $\tau_{III} = 245$ МПа; 2 – $\tau_{II} = 100$ МПа, $\tau_{III} = 245$ МПа; 3 – $\tau_{II} = 245$ МПа, $\tau_{III} = 100$ МПа; 4 – $\tau_{II} = 100$ МПа, $\tau_{III} = 100$ МПа.

З графіка видно, що для випадку непропорційного навантаження, напрямок прикладання більших зусиль має значення з точки зору довговічності: величина навантаження поперечного зсуву має більший вплив на величину довговічності пластини, аніж значення повздовжнього зсувного навантаження.

Отож на основі рівняння (3.82), або наближеної математичної моделі (3.85), можна визначити довговічність товстої пластини з малою тріщиною за комбінованої дії поперечного та повздовжнього зсувів.

Висновки до розділу 3

1. На основі енергетичного підходу, що базується на першому законі термодинаміки, розроблено математичні моделі для дослідження поширення малих втомних тріщин у товстій пластині за дії поперечного (II тип) та повздовжнього (III тип) зсувів та визначення її залишкової довговічності. На відміну від розв'язку Беккера та Гроса [175] задачі про визначення розкриття у вершині тріщини поперечного зсуву, який містить некоректність перекриття контурів зони передруйнування, запропонований у розділі розв'язок усуває цю некоректність шляхом покращення постановки задачі.
2. Для визначення розкриття біля контуру тріщин поперечного та повздовжнього зсувів запропоновано формули, що враховують рівень навантаження пластини. Ці формули отримано з використанням методу порівняння еквівалентних напружених станів та представлення задачі в інтегральній формі через гармонічні функції.
3. Розроблені математичні моделі апробовано на задачах поширення тріщини поперечного зсуву у пластині зі сталі 65Г (аналог AISI 1066) та тріщини повздовжнього зсуву у пластині зі сталі AISI 4340, базуючись на експериментальних даних, відомих у літературі.
4. Результати, отримані на основі представлених математичних моделей через розкриття біля контуру тріщини, порівняно з відповідними результатами,

знайденими за моделями в параметрах коефіцієнтів інтенсивності напружень. Порівняння показало, що використання моделей в КІН призводить до завищених значень довговічності, тобто отримана за цими моделями неточність йде в ризик непередбачуваного руйнування.

5. Коректність моделей в параметрах КІН та РКТ для поперечного та повздовжнього зсувів проаналізовано за допомогою числового експерименту для різних серій навантаження. Результати експерименту показують неоднозначну відповідність між КІН та швидкістю поширення тріщини, що свідчить про некоректність використання моделей в параметрах КІН для малих тріщин навіть при виконанні умов автоточності. На відміну від цього, математичні моделі в параметрах розкриття тріщини біля її контуру дають взаємооднозначну відповідність між РКТ та швидкістю її росту, що свідчить про інваріантність моделей в параметрах РКТ та коректність такого підходу для опису поширення малих тріщин за поперечного та повздовжнього зсувів.
6. На основі енергетичного підходу та схожості механізмів руйнування за поперечного та поздовжнього зсувів згідно з результатами Мураками [170], розроблено математичну модель у деформаційних параметрах розкриття тріщини біля її контуру для наближеного визначення довговічності товстої пластини з тунельною тріщиною за сумісної дії поперечного та повздовжнього зсувів. Експериментальними результатами якісно підтверджено коректність побудованої моделі.

РОЗДІЛ 4

ОЦІНКА ДОВГОВІЧНОСТІ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ З МАЛИМИ ТРІЩИНАМИ ПОПЕРЕЧНОГО І ПОВЗДОВЖНЬОГО ЗСУВІВ ТА НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ

Поряд з дослідженням тонких і товстих пластин з тріщинами нормального відриву, поперечного та повздовжнього зсувів, розглянутих у попередніх розділах, тривимірні тіла є одним з основних прототипів для моделювання реальних елементів конструкцій. У той же час вивчення тривимірних тіл є значно складнішим у порівнянні з пластинами, що пов'язано не лише з урахуванням додаткової компоненти основних механічних параметрів, але й більш комплексними взаємозв'язками між окремими змінними у задачі.

У цьому розділі запропоновано математичні моделі для наближеного визначення довговічності тривимірних тіл з малими тріщинами опуклого контуру за дії циклічного навантаження. Спершу розглянуто тріщини довільної опуклої форми та запропоновано узагальнення методу еквівалентних площ на випадок малих тріщин для розв'язання таких задач через заміну початкової тріщини еквівалентною круговою тріщиною рівної площі. З використанням отриманої формули для оцінки розкриття біля контуру кругової тріщини та узагальненого методу еквівалентних площ, наближено визначено довговічність тіла з малою опуклою тріщиною. Для задачі циклічного розтягу тривимірного тіла з еліптичною тріщиною порівняно розв'язки, отримані аналітично з використанням методу еквівалентних площ та чисельно за методом Рунге-Кутта.

Також розв'язано задачу кручення торсіону з малою поверхневою пів еліптичною тріщиною шляхом зведення її до задачі зсуву простору з еліптичною тріщиною та подальшим застосуванням розробленої моделі й альтернативного представлення розкриття біля контуру тріщини за поперечного та повздовжнього зсувів.

Результати, представлені у цьому розділі, опубліковано у роботі [9].

4.1. Дослідження поширення малих втомних тріщин з опуклим контуром

4.1.1. Енергетичний підхід для поширення тріщин у тривимірних тілах

Для розв'язання задач втомного руйнування пластин з тріщинами у пункті 2.1.1 представлено енергетичний підхід для двовимірного випадку. Поряд з цим універсальність енергетичного підходу полягає в тому, що його ідею можна використовувати для розв'язання просторових задач, модифікувавши спосіб обчислення енергетичних складових. У зв'язку з цим розглянемо детальніше енергетичний підхід для тривимірного випадку за дії I типу навантаження.

Розглянемо тривимірне тіло, послаблене малою плоскою тріщиною контуру L та початкової площі S_{I0} . До тіла на безмежності симетрично до площини тріщини прикладено рівномірно розподілене циклічне навантаження інтенсивності p . У центрі тріщини введено декартову систему координат $Oxyz$, осі Ox та Oy якої лежать у площині тріщини. Задача полягає у визначенні кількості циклів навантаження $N = N_*$, що викликають збільшення тріщини до критичного розміру $S = S_{I*}$ та руйнування тіла.

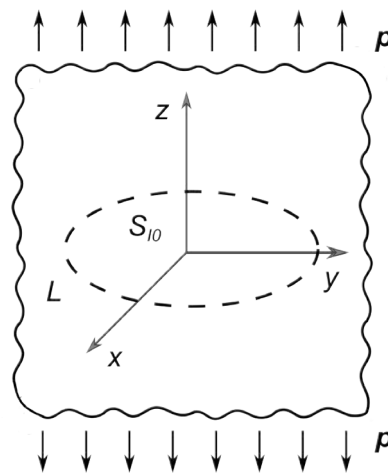


Рис. 4.1. Схема тривимірного тіла з плоскою тріщиною.

Аналогічно до двовимірного випадку вважаємо, що ріст тріщини під дією навантаження відбувається стрибкоподібно. Малий розмір стрибків ΔS_c протягом великої кількості циклів ΔN_c дозволяє вважати рух тріщини неперервним від початкового $S = S_{I0}$ до кінцевого розміру $S = S_{I*}$ [47]. У такому випадку швидкість V поширення тріщини можна розглядати як зміну її площі за цикл [47]:

$$V = \frac{dS}{dN} \approx \frac{\Delta S_c}{\Delta N_c}. \quad (4.1)$$

При цьому для кожного стрибка тріщини ΔS_c виконується умова енергетичного балансу, аналогічно до (2.2):

$$A_I = W_I + \Gamma_I \quad (4.2)$$

та умова балансу швидкостей зміни енергій [47], аналогічно до (2.4):

$$\frac{dA_I}{dN} = \frac{dW_I}{dN} + \frac{d\Gamma_I}{dN}. \quad (4.3)$$

При кожному стрибку тріщини утворюється енергія деформування тіла W_I , яка складається з пружної W_{Is} та пластичних $W_{Ip}^{(1)}(S)$, $W_{Ip}^{(2)}(t)$ компонент [47]:

$$W_I = W_{Is} + W_{Ip}^{(1)}(S) - W_{Ip}^{(2)}(t). \quad (4.4)$$

Тут частина роботи пластичних деформацій $W_{Ip}^{(1)}(S)$ залежить лише від площі тріщини S , а компонента $W_{Ip}^{(2)}(t)$ – лише від часу t , або ж кількості циклів навантаження N .

Підставляючи вираз для енергії деформування (4.4) в умову балансу швидкостей зміни енергій (4.3), отримаємо наступний вираз [47]:

$$\frac{\partial}{\partial S} \left[\Gamma_I - (A_I - W_{Is} - W_{Ip}^{(1)}) \right] \frac{dS}{dN} - \frac{dW_{Ip}^{(2)}}{dN} = 0, \quad (4.5)$$

з якого можна виразити швидкість поширення тріщини [47]:

$$\frac{dS}{dN} = \left[\frac{dW_{Ip}^{(2)}}{dN} \right] / \frac{\partial}{\partial S} \left[\Gamma_I - (A_I - W_{Is} - W_{Ip}^{(1)}) \right]. \quad (4.6)$$

Як і для двовимірного випадку, наступним кроком є перетворення знаменника у формулі (4.6) до такого вигляду [47]:

$$\frac{\partial}{\partial S} \left[\Gamma_I - (A_I - W_{Is} - W_{Ip}^{(1)}) \right] = \gamma_{Ifc} - L^{-1} \int_L \sigma_{It} \delta_{It \max}(0, \xi) d\xi. \quad (4.7)$$

Враховуючи формулу для визначення довжини стрибка втомної тріщини l_{Ip} (2.9) та припущення про незмінність розкриття $\delta_{It}(x, \xi)$ безпосередньо біля контуру тріщини, роботу пластичних деформацій можна записати як [47]:

$$W_{Ip}^{(2)}(N) = \alpha_{I0} N \left(\int_L \sigma_{It} [\delta_{It \max}(0, \xi) - \delta_{It \min}(0, \xi)]^2 d\xi - W_{I0}^{(2)} \right), \quad (4.8)$$

а енергію $W_{I0}^{(2)}$, що не спричиняє втомне руйнування матеріалу за цикл, виразити наступним чином [47]:

$$W_{I0}^{(2)} = \int_L \sigma_{It} (\delta_{It \max} - \delta_{It \min})^2 d\xi. \quad (4.9)$$

Тоді підставивши співвідношення (4.7) – (4.9) у рівняння (4.6), отримаємо формулу для визначення швидкості росту втомної тріщини у тривимірному тілі [47]:

$$\frac{dS}{dN} = \frac{\alpha_{I0} (1 - R_{I\delta})^2 \int_L (\delta_{It \max}^2(0, \xi) - \delta_{It \min}^2(0, \xi)) d\xi}{\delta_{Ifc} - L^{-1} \int_L \delta_{It \max}(0, \xi) d\xi}. \quad (4.10)$$

Додавши до цього рівняння початкові

$$N = 0, \quad S(0) = S_{I0} \quad (4.11)$$

та кінцеві умови

$$N = N_*, \quad S(N_*) = S_{I*}, \quad (4.12)$$

отримаємо модель для визначення довговічності малої втомної тріщини з опуклим контуром у тривимірному тілі. При цьому критичне значення площі тріщини S_{I*} , що призводить до руйнування, можна визначити за допомогою критерію критичного розкриття тріщини [39]:

$$\delta_{It}(S_{I*}) = \delta_{Ifc}. \quad (4.13)$$

4.1.2. Узагальнення методу еквівалентних площ на випадок малих тріщин

У загальному випадку застосування математичної моделі (4.10) – (4.12) для оцінки довговічності тривимірного тіла з тріщиною довільного опуклого контуру вимагає існування в аналітичному вигляді функцій розподілу напружень та розкриття зони передруйнування в усіх точках контуру, а також подальшого інтегрування добутку цих функцій. Такі функції не завжди наявні в аналітичному вигляді, та часто мають досить складний вигляд, що ускладнює розв'язання задачі [152].

З метою спрощення процесу розв'язання задачі із використанням запропонованої моделі скористаємося методом еквівалентних площ, узагальнивши його на випадок малих втомних тріщин. Метод еквівалентних площ широко застосовують для дослідження поширення макротріщин під впливом різних умов та геометричних конфігурацій тріщин, зокрема еліптичних крайових тріщин [160], пів еліптичних тріщин у трубах [180], тріщин біля зварних швів [181], тріщин повзучості [182].

Розглянемо дві опуклі тріщини рівної площі S з довільною конфігурацією контурів. Використавши припущення, що значення складових енергії деформування $W_{Ip}^{(1)}$, $W_{Ip}^{(2)}$ є досить близькими для двох довільних тріщин рівної площі, замінимо форму однієї з них кругом радіуса r та площею $S = \pi r^2$. Таким чином, складові енергії деформування $W_{Ip}^{(1)}$, $W_{Ip}^{(2)}$ для довільної опуклої тріщини будуть незначно відрізнятися від відповідних компонент $W_{Ip}^{(1)(c)}$, $W_{Ip}^{(2)(c)}$ для випадку тріщини кругової конфігурації [152].

Таким чином, характер поширення тріщини довільного опуклого контуру L наближено відповідає характеру росту тріщини кругового контуру, за умови рівності їх площ S . Цей підхід узгоджується з міркуваннями, покладеними в основу методу еквівалентних площ для макротріщин [160].

Застосуємо цей метод до узагальненої на випадок малих тріщин задачі Сакка. Згідно з методом еквівалентних площ, задану малу тріщину опуклого

контуру L та початкової площі S_{I0} у тривимірному тілі можна замінити круговою тріщиною радіуса r_{I0} рівної площі [160]:

$$S_{I0} = S_{I0}^{(c)}, \quad (4.14)$$

де $S_{I0}^{(c)} = \pi r_{I0}^2$ – площа еквівалентної кругової тріщини.

Таким чином, радіус еквівалентної кругової тріщини на основі (4.14) буде залежати від початкової площі первинної тріщини довільного контуру [160]:

$$r_{I0} = \sqrt{S_{I0} / \pi}. \quad (4.15)$$

Для визначення швидкості поширення кругової тріщини, рівняння (4.10) зведеться до наступного вигляду:

$$V = \alpha_{I0} (1 - R_I^2)^2 \frac{(\delta_{It}^{(c)})^2 - \delta_{Ith}^2}{\delta_{Ifc} - \delta_{It}^{(c)}}, \quad (4.16)$$

де $\delta_{It}^{(c)}$ – розкриття біля контуру кругової тріщини.

Адаптувавши, аналогічно до [182], модель (4.10) – (4.12) до випадку кругової тріщини, з урахуванням (4.16), отримаємо наступну математичну модель для визначення довговічності тривимірного тіла з малою тріщиною:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dN} &= \alpha_{I0} (1 - R_I^2)^2 \frac{(\delta_{It}^{(c)})^2 - \delta_{Ith}^2}{\delta_{Ifc} - \delta_{It}^{(c)}}; \\ N = 0, \quad r(0) &= r_{I0} = \sqrt{S_{I0} / \pi}; \\ N = N_*, \quad r(N_*) &= r_{I*}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Критичне значення радіуса тріщини r_{I*} , що викличе руйнування тіла, отримаємо за допомогою КРТ-критерію [39]:

$$\delta_{It}^{(c)}(r_{I*}) = \delta_{Ifc} \quad (4.18)$$

Отже, використовуючи узагальнення методу еквівалентних площ, узагальнена задача теорії тріщин з довільною малою плоскою тріщиною опуклого контуру звелася до задачі Сакка з малою круговою тріщиною, яка, в свою чергу, на основі моделі (4.10) – (4.12) звелася до оцінки розкриття біля контуру кругової тріщини.

4.1.3. Оцінка розкриття біля контуру малої кругової тріщини

Використання моделі поширення плоскої опуклої тріщини у тривимірному тілі (4.10) – (4.12) передбачає обчислення розкриття біля її контуру. Для цього розглянемо нескінченне пружне тіло, піддане одновісному розтягу циклічним навантаженням інтенсивності p (рис. 4.2). Напруження прикладено на безмежності перпендикулярно до площини внутрішньої дископодібної тріщини радіуса r [39].

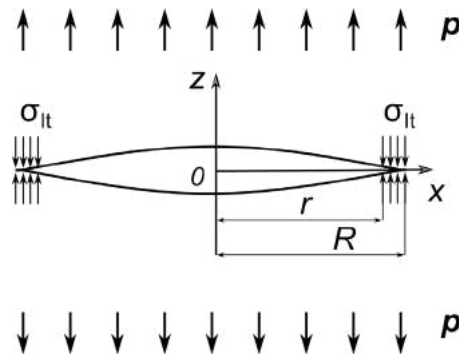


Рис. 4.2. Схема розтягу тривимірного тіла з дископодібною тріщиною [39].

Циклічне навантаження, прикладене до тіла з тріщиною, викликає утворення пластичної зони розміром $R - r$ в околі контуру тріщини (рис. 4.2), де R – радіус межі між областями пружної та пластичної деформації [39]. Враховуючи це, розкриття зони передруйнування біля контуру тріщини δ_{it} у випадку згаданої узагальненої задачі теорії тріщин обчислюється за формулою [39]:

$$\delta_{it} = \frac{8r\sigma_{it}(1-\nu^2) \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{p}{\sigma_{it}}\right)^2}\right)}{\pi E}. \quad (4.19)$$

Використовуючи методи математичного аналізу, формулу (4.19) можна звести до наступного вигляду:

$$\delta_{it} = \frac{4rp^2(1-\nu^2)}{\pi\sigma_{it}E\sqrt{1 - \left(\frac{p}{\sigma_{it}}\right)^2}}. \quad (4.20)$$

Ввівши параметр коефіцієнта інтенсивності напружень K_I для задачі Сакка у вигляді [31]:

$$K_I = \frac{2\sqrt{r}p}{\sqrt{\pi}}, \quad (4.21)$$

формулу (4.20) для розкриття зони передруйнування біля контуру тріщини перепишемо у параметрах КІН:

$$\delta_{II} = \frac{K_I^2(1-\nu^2)}{\sigma_{II}E\sqrt{1-\left(\frac{p}{\sigma_{II}}\right)^2}}. \quad (4.22)$$

Формули (4.19) та (4.20) застосовано до визначення розкриття зони передруйнування біля контуру тріщини, розташованої у тривимірному тілі (сталь 65Г, аналог сталі AISI 1066: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{II} = 910$ МПа [183]). Порівняння отриманих результатів свідчить про досить добру кореляцію між отриманими результатами для різних значень прикладеного циклічного навантаження.

Розв'язок сформульованої вище узагальненої задачі теорії тріщин, тобто визначення критичного значення навантаження, що призводить до руйнування тіла, можна знайти за наступною формулою [39]:

$$p_* = \begin{cases} \sigma_{II}, & r < r_{I*}; \\ \sigma_{II}\sqrt{2r_{I*}/r}\sqrt{1-r_{I*}/2r}, & r > r_{I*}, \end{cases} \quad (4.23)$$

де критичний розмір тріщини r_{I*} обчислюють як [39]:

$$r_{I*} = \frac{\pi E \delta_{Ifc}}{8\sigma_{II}(1-\nu^2)}. \quad (4.24)$$

На основі (4.24) використання запропонованої формули для визначення розкриття біля контуру тріщини (4.20), після перетворень отримаємо співвідношення, що описує залежність між безрозмірним значенням критичного навантаження p_*/σ_{II} та розмірами тріщини r/r_{I*} :

$$\frac{1}{16} \left(\frac{p_*}{\sigma_{II}} \right)^8 \left(\frac{r}{r_{I*}} \right)^4 + \left(\frac{p_*}{\sigma_{II}} \right)^2 = 1 \quad (4.25)$$

Порівняння розв'язків, отриманих за формулою (4.23) та запропонованим виразом (4.25), свідчить про те, що співвідношення (4.25) досить точно моделює залежність $p_*/\sigma_{II} \sim r/r_{I*}$ для узагальненої задачі Сакка (рис. 4.3). Крім того, на відміну від відомої формули (4.23), вираз (4.25) є дійсним в усьому діапазоні значень безрозмірного розміру тріщини. Таким чином, формулу (4.25) можна застосовувати для моделювання як докритичного росту тріщин ($r/r_{I*} < 1$), так і спонтанного руйнування ($r/r_{I*} > 1$).

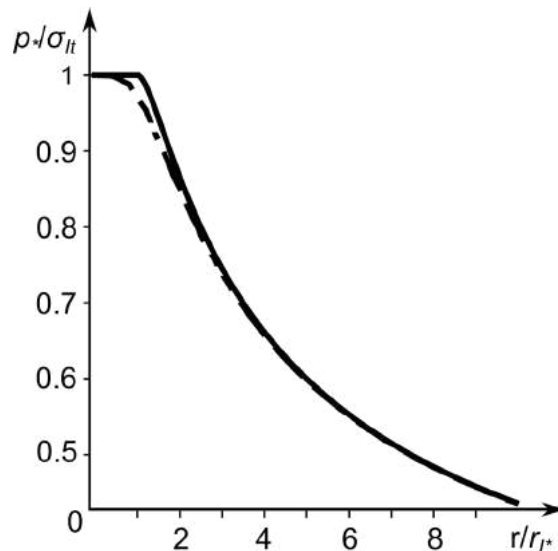


Рис. 4.3. Залежність $p_*/\sigma_{II} \sim r/r_{I*}$ для узагальненої задачі Сакка: суцільна лінія – точний розв'язок (4.23); пунктирна лінія – наближений розв'язок за (4.25).

Для аналогу задачі Гріффітса у випадку циклічного розтягу тонких пластин (розділ 2, пункти 2.2.2 та 2.4.2), а також поперечного та повздовжнього зсувів товстих пластин з тунельними тріщинами (розділ 3, пункт 3.3.3) показано, що розкриття вершини тріщини є інваріантним параметром по відношенню до швидкості її поширення на відміну від коефіцієнта інтенсивності напружень. Перевіримо, чи прослідковується така ж тенденція для узагальненої задачі Сакка для тривимірного тіла. Для цього проведемо числовий експеримент на основі запропонованої формули для визначення розкриття біля контуру тріщини.

Розглянемо тривимірне тіло з дископодібною тріщиною, виготовлене зі сталі 65Г (аналог сталі AISI 1066) з термічною обробкою 600 °С з наступними характеристиками матеріалу, отриманими на основі [183]: $\alpha_{I_0} = 0.197$, $\nu = 0.3$, $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{It} = 910$ МПа, $\Delta K_{Ith} = 7.4$ МПа $\sqrt{м}$, $\Delta K_{Ijc} = 118$ МПа $\sqrt{м}$, $K_{Ith} = 8.2$ МПа $\sqrt{м}$, $K_{Ijc} = 131.1$ МПа $\sqrt{м}$, $\delta_{Ijc} = 8.99 \cdot 10^{-5}$ м, $\delta_{Ith} = 3.54 \cdot 10^{-7}$ м.

Експеримент проводимо для п'яти рівнів циклічного навантаження з наступними величинами амплітуди p : 1 – 500 МПа, 2 – 700 МПа, 3 – 800 МПа, 4 – 850 МПа, 5 – 875 МПа, у результаті прикладання якого розмір тріщини змінюється в діапазоні $1 \leq r \leq 10$ мм. Для кожного співвідношення рівня навантаження та розміру тріщини із заданого діапазону обчислюємо величину КІН за формулою (4.21), розкриття біля контуру тріщини за формулою (4.22) та швидкість росту тріщини за рівнянням (4.16). За отриманими результатами будуюмо графічні залежності, що описують зміну швидкості росту тріщини від зміни КІН $V \sim K_I$ (рис. 4.4, а) та розкриття біля контуру тріщини $V \sim \delta_{It}$ (рис. 4.4, б).

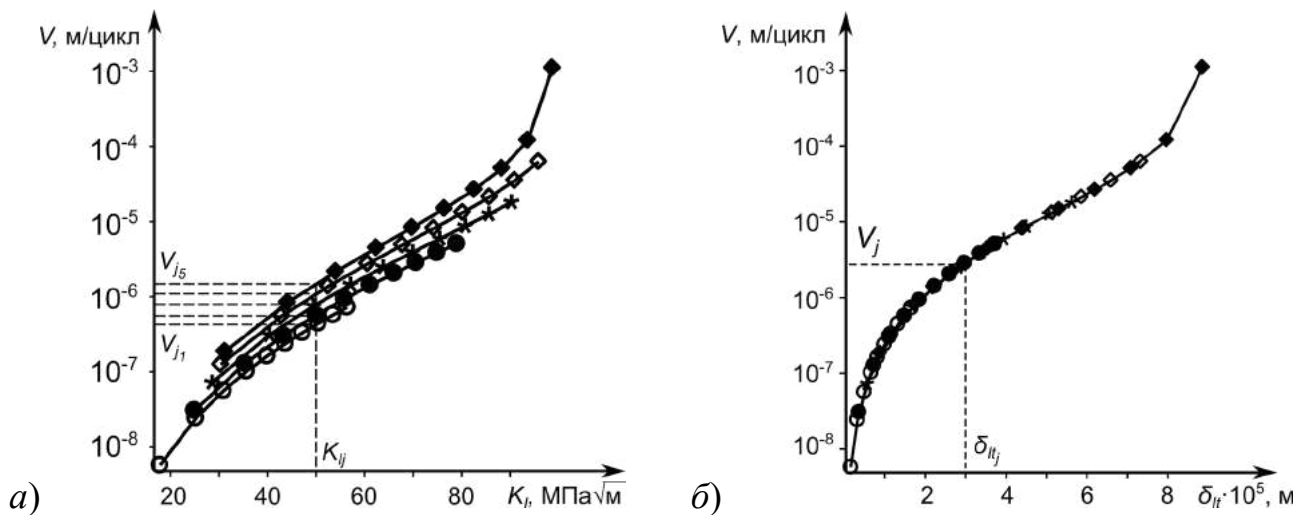


Рис. 4.4. Залежності $V \sim K_I$ (а) та $V \sim \delta_{It}$ (б) для аналогу задачі Сакка за рівнів навантаження: \blacklozenge – 875 МПа, \blacklozenge – 850 МПа, $*$ – 800 МПа, \bullet – 700 МПа, \circ – 500 МПа.

Аналіз рис. 4.4, *a* свідчить про те, що точки, обчислені за різних значень прикладеного навантаження, знаходяться на паралельних кривих. Відповідно, для одного значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_I існує декілька значень швидкості поширення тріщини V , що відповідають різним рівням навантаження p . Така неоднозначність результатів спричинена явищем пластичності, оскільки для малих тріщин параметр КІН не враховує утвореної пластичної зони. Більший ступінь розбіжності результатів наявний для навантажень вищої інтенсивності, що спричинено збільшенням пластичної зони. Для усунення цієї некоректності у підході через КІН, у формулі (4.20) для визначення розкриття біля контуру тріщини введено множник $\sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{lp})^2}$.

Порівнюючи з рис. 4.4, *a*, між величиною розкриття у вершині тріщини δ_{II} та швидкістю її поширення V існує взаємнооднозначна залежність, що відображено на рис. 4.4, *b* єдиною для усіх рівнів навантаження кривою. Таким чином, залежність $V \sim \delta_{II}$ є інваріантною з точки зору прикладеного навантаження різної величини.

Отже, запропоновані формули (4.20) та (4.22) дають змогу коректно обчислювати розкриття біля контуру дископодібної втомної тріщини для аналогу задачі Сакка. Крім того, деформаційний підхід, що передбачає обчислення швидкості поширення тріщини з використанням параметрів розкриття тріщини біля контуру δ_{II} , дозволяє отримати взаємно-однозначну залежність $V \sim \delta_{II}$ незалежно від рівня прикладеного навантаження.

4.1.4. Визначення довговічності тривимірного тіла з малою тріщиною

Отримавши формулу для визначення розкриття біля контуру кругової тріщини $\delta_{II}^{(c)}$, повернемося до моделі (4.17) для визначення довговічності тіла з тріщиною. Підставивши вираз для розкриття біля контуру тріщини (4.20) у

рівняння моделі (4.17), врахувавши початкові та кінцеві умови, отримаємо формулу для оцінки довговічності N_* :

$$N_* = \frac{\pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}}{\alpha_{I0} (1 - R_I^2)^2} \int_{r_{I0}}^{r_{I*}} \frac{\delta_{It} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} - 4rp^2 (1 - \nu^2)}{16r^2 p^4 (1 - \nu^2)^2 - \left(\delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} \right)^2} dr. \quad (4.26)$$

У результаті інтегрування вираз (4.26) зведеться до наступного вигляду:

$$N_* = \frac{\pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}}{8\alpha_{I0} p^2 (1 - \nu^2) (1 - R_I^2)^2} \left[\frac{\delta_{Ifc}}{\delta_{Ith}} \ln \left| \frac{4rp^2 (1 - \nu^2) - \delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}}{4rp^2 (1 - \nu^2) + \delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}} \right| \times \right. \\ \times \left. \frac{4\sqrt{S_{I0}/\pi} p^2 (1 - \nu^2) + \delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}}{4\sqrt{S_{I0}/\pi} p^2 (1 - \nu^2) - \delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}} \right] - \\ - \ln \left[\frac{16r^2 p^4 (1 - \nu^2)^2 - \left(\delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} \right)^2}{16S_{I0}/\pi p^4 (1 - \nu^2)^2 - \left(\delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} \right)^2} \right]. \quad (4.27)$$

На основі КРТ-критерію (4.18), критичне значення радіусу кругової тріщини становить:

$$r_{I*} = \frac{\delta_{Ifc} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}}{8p^2 (1 - \nu^2)} \quad (4.28)$$

і буде досягнуте внаслідок прикладання наступної кількості циклів навантаження:

$$N_* = \frac{\pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}}{8\alpha_{I0} p^2 (1 - \nu^2) (1 - R_I^2)^2} \times \\ \times \left[\frac{\delta_{Ifc}}{\delta_{Ith}} \ln \left| \frac{\delta_{Ifc} - \delta_{Ith}}{\delta_{Ifc} + \delta_{Ith}} \cdot \frac{4\sqrt{S_{I0}/\pi} p^2 (1 - \nu^2) + \delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}}{4\sqrt{S_{I0}/\pi} p^2 (1 - \nu^2) - \delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}} \right| \right. \\ \left. - \ln \left[\frac{(\delta_{Ifc}^2 - \delta_{Ith}^2) \left(\pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} \right)^2}{16S_{I0}/\pi p^4 (1 - \nu^2)^2 - \left(\delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} \right)^2} \right] \right]. \quad (4.29)$$

Отже, застосування методу еквівалентних площ до коротких тріщин дозволяє значно спростити розв'язання задачі та наближено визначати довговічність тривимірного тіла з довільною опуклою втомною тріщиною шляхом її наближення круговою тріщиною однакової початкової площі.

4.2. Розв'язання задачі розтягу тіла з малою еліптичною тріщиною

4.2.1. Формулювання задачі та її розв'язання з використанням методу еквівалентних площ

Застосуємо запропонований підхід для наближеного визначення довговічності тривимірних тіл з малими тріщинами, побудований на основі узагальненого методу еквівалентних площ, до конкретного прикладу. Розглянемо тривимірне тіло (рис. 4.5), піддане на безмежності дії рівномірно розподіленого циклічного навантаження інтенсивності p . У тілі розміщена внутрішня мала тріщина еліптичної форми з пів осями початкового розміру a_{I0} та b_{I0} . У центрі тріщини введемо декартову систему координат $Oxyz$, направивши вісь Ox паралельно до великої осі еліпса $2a$; вісь Oy – паралельно до малої осі тріщини $2b$. Задача полягає у знаходженні довговічності тіла $N = N_*$ та критичних розмірів тріщини a_{I*} , b_{I*} , що викличе його руйнування.

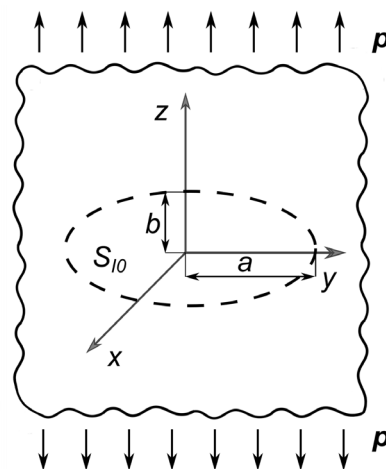


Рис. 4.5. Схема тривимірного тіла з еліптичною тріщиною [182].

Розв'язок задачі шукатимемо за допомогою двох різних методів: узагальненого методу еквівалентних площ та числового методу Рунге-Кутта.

Спершу розв'язуватимемо задачу за допомогою узагальненого методу еквівалентних площ, замінивши початкову еліптичну тріщину з пів осями a_{I_0} і b_{I_0} та площі $S_{I_0}^{(e)}$ круговою тріщиною з радіусом r_{I_0} так, щоб виконувалася умова рівності площ цих тріщин [160]:

$$S_{I_0}^{(e)} = S_{I_0}^{(c)} \quad (4.30)$$

де $S_{I_0}^{(e)} = \pi a_{I_0} b_{I_0}$ – початкова площа еліптичної тріщини, $S_{I_0}^{(c)} = \pi r_{I_0}^2$ – площа еквівалентної кругової тріщини (рис. 4.6).

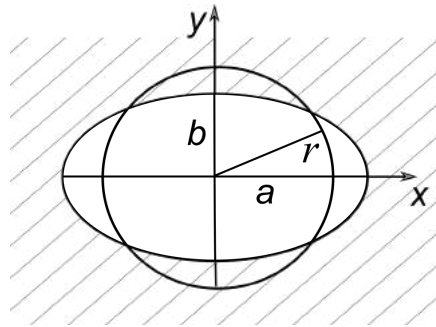


Рис. 4.6. Співвідношення між еліптичною та еквівалентною круговою тріщиною [160].

Аналогічно до (4.15), початковий радіус кругової тріщини обчислюється через величини пів осей початкової еліптичної тріщини:

$$r_{I_0} = \sqrt{a_{I_0} b_{I_0}}. \quad (4.31)$$

Тоді розв'язання поставленої задачі, згідно з міркуваннями, викладеними у 4.1.2, зведеться до моделі (4.17) з початковими умовами (4.31). Інтегрування рівняння моделі (4.17) з межами (4.31) та (4.28) дасть залежність довговічності N_* тіла з тріщиною від зміни її радіуса r :

$$\begin{aligned}
N_* = & \frac{\pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}}{8\alpha_{I0} p^2 (1 - \nu^2) (1 - R_I^2)^2} \left[\frac{\delta_{Ifc}}{\delta_{Ith}} \ln \left| \frac{4rp^2 (1 - \nu^2) - \delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}}{4rp^2 (1 - \nu^2) + \delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}} \right| \times \right. \\
& \times \frac{4\sqrt{a_{I0} b_{I0}} p^2 (1 - \nu^2) + \delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}}{4\sqrt{a_{I0} b_{I0}} p^2 (1 - \nu^2) - \delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}} \left. - \right. \\
& \left. - \ln \left| \frac{16r^2 p^4 (1 - \nu^2)^2 - \left(\delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} \right)^2}{16a_{I0} b_{I0} p^4 (1 - \nu^2)^2 - \left(\delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} \right)^2} \right| \right]. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Підставивши у формулу (4.32) критичне значення радіуса еквівалентної кругової тріщини r_{I*} (4.28), отримаємо наступну довговічність тіла з тріщиною:

$$\begin{aligned}
N_* = & \frac{\pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}}{8\alpha_{I0} p^2 (1 - \nu^2) (1 - R_I^2)^2} \times \\
& \times \left[\frac{\delta_{Ifc}}{\delta_{Ith}} \ln \left| \frac{\delta_{Ifc} - \delta_{Ith}}{\delta_{Ifc} + \delta_{Ith}} \cdot \frac{4\sqrt{a_{I0} b_{I0}} p^2 (1 - \nu^2) + \delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}}{4\sqrt{a_{I0} b_{I0}} p^2 (1 - \nu^2) - \delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}} \right| - \right. \\
& \left. - \ln \left| \frac{(\delta_{Ifc}^2 - \delta_{Ith}^2) \left(\pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} \right)^2}{16a_{I0} b_{I0} p^4 (1 - \nu^2)^2 - \left(\delta_{Ith} \pi E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} \right)^2} \right| \right]. \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Отож формули (4.32) та (4.33) виражають наближений розв'язок задачі циклічного розтягу тривимірного тіла з внутрішньою еліптичною тріщиною, отриманий на основі узагальненого методу еквівалентних площ.

4.2.2. Визначення довговічності тіла з еліптичною тріщиною за допомогою методу Рунге-Кутта

Застосування методу еквівалентних площ для знаходження розв'язку задачі розтягу тіла з еліптичною тріщиною передбачає її заміну на тріщину з круговим контуром рівної площі й завдяки цьому дозволяє отримати розв'язок у вигляді аналітичної функції. Проте така заміна є наближеною і отриманий

внаслідок використання цього методу розв'язок є не зовсім точним. Для встановлення ступеня розбіжності між точним та наближеним розв'язками, побудуємо розв'язок задачі для тіла з еліптичною конфігурацією контуру тріщини та застосуємо метод Рунге-Кутта для отримання більш точного, проте чисельного розв'язку задачі.

Для випадку макротріщин досліджено [160, 182], що форма контуру еліптичної тріщини під час її поширення незначно змінюватиметься за рівномірного руху тріщини. У зв'язку з цим рух великих тріщин еліптичної форми моделюють, досліджуючи характер росту їх великої та малої пів осей.

Аналогічно до цих міркувань припустимо, що мала еліптична тріщина при поширенні незначно змінює свою форму. Тоді для дослідження зміни площі тріщини у процесі її росту достатньо вивчати зміну довжини великої та малої пів осей еліптичної тріщини. У зв'язку з цим аналогічно до рівняння моделі (4.17), отримаємо систему рівнянь для опису швидкості росту пів осей тріщини a та b :

$$\begin{cases} \frac{da}{dN} = h(\delta_{Ia}^{(e)}); \\ \frac{db}{dN} = h(\delta_{Ib}^{(e)}). \end{cases} \quad (4.34)$$

Функції $h(\delta_{Ia}^{(e)})$ та $h(\delta_{Ib}^{(e)})$ описують швидкість росту тріщини еліптичної конфігурації через розкриття біля її контуру $\delta_{Ia}^{(e)}$ та $\delta_{Ib}^{(e)}$ у напрямі великої a та малої b пів осей відповідно. Ці функції побудовані аналогічно, як і для випадку кругової тріщини (4.16), і мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} h(\delta_{Ia}^{(e)}) &= \alpha_{I0} (1 - R_I^2)^2 \frac{(\delta_{Ia}^{(e)})^2 - \delta_{Ith}^2}{\delta_{Ifc} - \delta_{Ia}^{(e)}}; \\ h(\delta_{Ib}^{(e)}) &= \alpha_{I0} (1 - R_I^2)^2 \frac{(\delta_{Ib}^{(e)})^2 - \delta_{Ith}^2}{\delta_{Ifc} - \delta_{Ib}^{(e)}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Розкриття контуру тріщини $\delta_{Ia}^{(e)}$ та $\delta_{Ib}^{(e)}$ на основі (4.22) запишемо у вигляді:

$$\delta_{Ia}^{(e)} = \frac{(K_{Ia}^{(e)})^2 (1-\nu^2)}{\sigma_{II} E^4 \sqrt{1 - \left(\frac{p}{\sigma_{II}}\right)^2}}; \quad \delta_{Ib}^{(e)} = \frac{(K_{Ib}^{(e)})^2 (1-\nu^2)}{\sigma_{II} E^4 \sqrt{1 - \left(\frac{p}{\sigma_{II}}\right)^2}}. \quad (4.36)$$

Наступним кроком є визначення коефіцієнта інтенсивності напружень для внутрішньої еліптичної тріщини. Зважаючи на конфігурацію тріщини, КІН буде змінюватися вздовж її контуру за наступним законом [31, 160]:

$$K_I = p \frac{\sqrt{\pi b}}{E(k)} \sqrt{\sin^2 \beta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \beta}, \quad (4.37)$$

де β – кутовий параметр, $k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, $E(k)$ – повний еліптичний інтеграл другого роду:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta. \quad (4.38)$$

Оскільки довільну точку контуру тріщини можна описати через її координати за допомогою кутового параметру β [160]:

$$x = a \cos \beta, \quad y = b \sin \beta, \quad (4.39)$$

то КІН для великої пів осі еліпса ($x = a, \beta = 0$) згідно з (4.37) запишеться у вигляді:

$$K_{Ia}^{(e)} = \frac{pb\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}E(k)}, \quad (4.40)$$

а для малої пів осі ($y = b, \beta = \pi/2$) задаватиметься виразом:

$$K_{Ib}^{(e)} = \frac{p\sqrt{\pi b}}{E(k)}. \quad (4.41)$$

Підстановка формул для визначення функцій (4.35), розкриття тріщини біля контуру (4.36), КІН (4.40) – (4.41) та еліптичного інтегралу (4.38) дозволить звести систему (4.34) до наступного вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dN} = \frac{\alpha_{I_0} (1 - R_I^2)^2}{a(E(k))^2 E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}} \times \\ \times \frac{\left(\pi b^2 p^2 (1 - \nu^2) \right)^2 - \left(a(E(k))^2 \delta_{Ith} E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} \right)^2}{a(E(k))^2 \delta_{Ifc} E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} - \pi b^2 p^2 (1 - \nu^2)}; \\ \frac{db}{dN} = \frac{\alpha_{I_0} (1 - R_I^2)^2}{(E(k))^2 E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2}} \times \\ \times \frac{\left(\pi b p^2 (1 - \nu^2) \right)^2 - \left((E(k))^2 \delta_{Ith} E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} \right)^2}{(E(k))^2 \delta_{Ifc} E \sigma_{It} \sqrt[4]{1 - (p/\sigma_{It})^2} - \pi b p^2 (1 - \nu^2)}. \end{array} \right. \quad (4.42)$$

Повний еліптичний інтеграл II роду $E(k)$ (4.38) можна представити у вигляді ряду по параметру k [174]:

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right]. \quad (4.43)$$

Підставивши розклад (4.43) у співвідношення (4.42), отримаємо систему рівнянь, яка разом з початковими умовами

$$N = 0, \quad a(0) = a_{I_0}, \quad b(0) = b_{I_0} \quad (4.44)$$

складатиме математичну модель для обчислення довговічності тривимірного тіла з еліптичною тріщиною. Систему рівнянь розв'язуватимемо числовим способом, використовуючи метод Рунге-Кутта.

Для цього розглянемо тіло з тріщиною початкових розмірів $a_{I_0} = 1$ мм, $b_{I_0} = 0.5$ мм, що розтягується навантаженням інтенсивності $p = 900$ МПа з асиметрією циклу $R = 0.1$. Тіло виготовлене зі сталі 65Г (аналог AISI 1066), що має наступні механічні й втомні характеристиками [183]: $\alpha_{I_0} = 0.197$, $\nu = 0.3$, $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{It} = 910$ МПа, $\Delta K_{Ith} = 7.4$ МПа $\sqrt{\text{м}}$, $\Delta K_{Ifc} = 118$ МПа $\sqrt{\text{м}}$.

За таких параметрів тіла з тріщиною та умов навантаження критичний розмір еліптичної тріщини, що призведе до руйнування, становитиме $a_{I^*} = 7$ мм,

$b_{I^*} = 7$ мм згідно з КРТ-критерієм [39]:

$$\delta_{Ia}^{(e)}(a_{I^*}, b_{I^*}) = \delta_{Ifc}, \quad \delta_{Ib}^{(e)}(a_{I^*}, b_{I^*}) = \delta_{Ifc} \quad (4.45)$$

Критичний розмір еквівалентної кругової тріщини, обчислений на основі (4.28), також дорівнюватиме $r_{I^*} = 7$ мм.

На рис. 4.7 представлено порівняння розв'язків цієї задачі, отриманих із використанням наближеного узагальненого методу еквівалентних площ та числового методу Рунге-Кутта. Порівняння показує, що отримані залежності між довговічністю тривимірного тіла з еліптичною тріщиною N та її площею S є достатньо близькими, що вказує на достатньо високу точність узагальненого методу еквівалентних площ при розв'язанні задач такого типу.

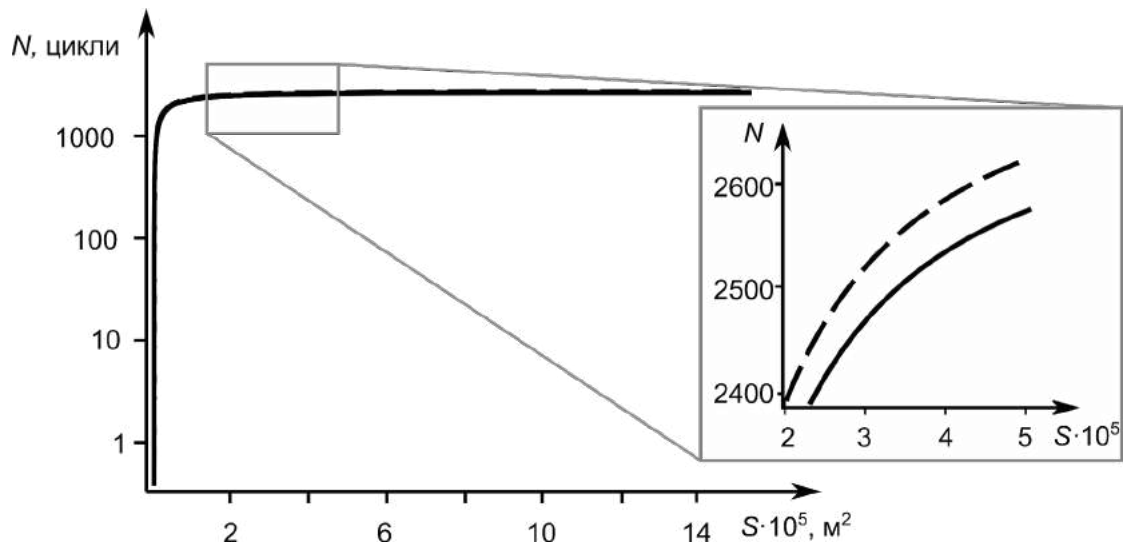


Рис. 4.7. Залежність $N \sim S$ для тривимірного тіла з еліптичною тріщиною: суцільна лінія – за методом Рунге-Кутта; штрихова лінія – за узагальненим методом еквівалентних площ.

Отже, довговічність тривимірних тіл з малими тріщинами опуклої конфігурації можна досить точно обчислювати із застосуванням узагальненого методу еквівалентних площ. Використання цього методу разом з рівнянням, побудованим на основі енергетичного підходу, та формулою для визначення розкриття біля контуру тріщини призводить до співвідношення (4.32), яке представляє довговічність як функцію від радіуса еквівалентної кругової тріщини.

4.3. Розв'язання комплексної задачі поширення частин контуру тріщини за механізмами поперечного та повздовжнього зсувів

Поряд із просторовими задачами для малих плоских тріщин у цьому розділі розглянуто задачу, у якій одночасно відбувається поширення однієї частини контуру тріщини за механізмом поперечного зсуву, а іншої – за механізмом повздовжнього зсуву. Суть такої комплексної задачі зводиться до наступного.

4.3.1. Математична модель поширення малої тріщини у торсіоні

Розглянемо торсіон, тобто вал радіуса R , підданий на його кінцях циклічному крученню моментами M (рис. 4.8). На поверхні валу знаходиться мала пів еліптична тріщина з пів осями a_0 та b_0 . Задача полягає у знаходженні довговічності торсіону, тобто кількості циклів $N = N_*$, що призведе до збільшення тріщини до критичних розмірів a_* і b_* та руйнування валу.

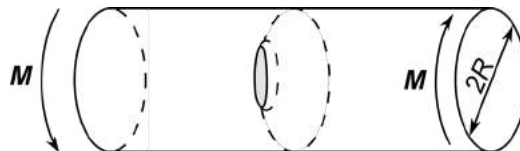


Рис. 4.8. Схема торсіона з пів еліптичною тріщиною.

Для спрощення розв'язання задачі, врахуємо що діаметр торсіону є значно більший у порівнянні з розміром тріщини. Тоді можна наближено перейти від задачі кручення торсіону з пів еліптичною тріщиною до задачі зсуву пів простору з аналогічною пів еліптичною тріщиною (рис. 4.9). У такому випадку замість крутного моменту M на пів простір діятиме зсувне навантаження τ_{xy} , яке можна обчислити за наступною формулою [184]:

$$\tau_{xy} = \frac{M}{J_p} \rho, \quad (4.46)$$

де M – крутний момент, ρ – відстань від центру торсіона до точки обчислення напружень, J_p – полярний момент інерції, який для валу круглого поперечного перерізу рівний $J_p = \pi R^4/32$.

Для опису положення тріщини введемо декартову систему координат $Oxyz$ з центром у середній точці великої осі тріщини, направивши вісь Ox по межі пів простору, а вісь Oz – паралельно до малої пів осі еліпса.

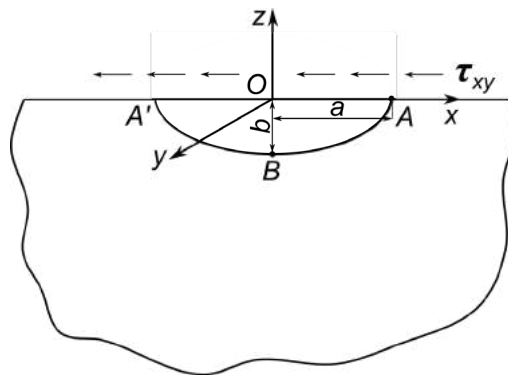


Рис. 4.9. Пів простір з пів еліптичною тріщиною.

Розв'язання цієї задачі згідно з розглядуваним у цьому розділі підходом вимагає знаходження розкриття біля контуру тріщини, що для цієї задачі пов'язано з певними складнощами. У зв'язку з цим припустимо, що переміщення на межі пів простору при $z=0$ рівні нулеві. У цьому випадку при $u_z=0$ розглядувана задача пів простору з пів еліптичною тріщиною перетворюється у задачу зсуву у просторі, тобто зсуву тривимірного тіла з еліптичною тріщиною (рис. 4.10). При зсуві симетричного тривимірного тіла у просторі зсувні навантаження прикладені в обох кінцях тіла у взаємно протилежних напрямках. Таким чином, на середній лінії, тобто при $z=0$, ці навантаження взаємно компенсуються, внаслідок чого переміщення u_z на цій лінії рівні нулеві. Відповідно, задача зсуву пів простору з пів еліптичною тріщиною та простору з еліптичною тріщиною є еквівалентними за прийнятого припущення.

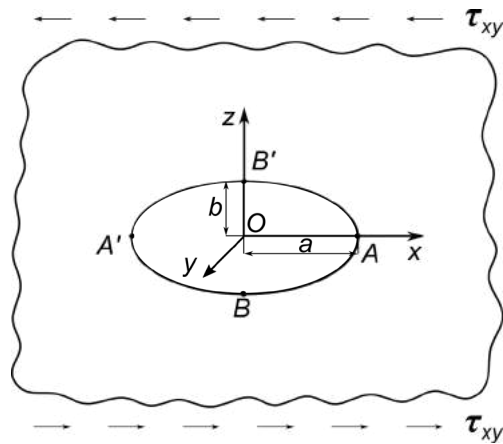


Рис. 4.10. Простір з еліптичною тріщиною

Таким чином, початкова задача кручення торсіона з малою пів еліптичною тріщиною в два етапи звелася до задачі зсуву тривимірного тіла з малою еліптичною тріщиною (рис. 4.10).

Аналогічно до пункту 4.2.2, застосуємо гіпотезу про незмінність форми контуру еліптичної тріщини при навантаженні [160, 182]. У такому разі з метою дослідження кінетики руху тріщини достатньо слідкувати за зміною пів осей еліптичної тріщини. Враховуючи характер навантаження, можна зробити висновок, що тіло з тріщиною буде піддане складному напруженому стану, що складатиметься з комбінації навантаження II (поперечний зсув) та III (повздовжній зсув) типу. В той же час точки $A' - A$ великої осі еліпса будуть піддані дії лише II типу навантаження, оскільки у цих точках зсувне зусилля є перпендикулярним до контуру тріщини. Відповідно, на точки малої осі $B' - B$ діє лише III тип навантаження, тому що зсувне зусилля направлене паралельно до контуру тріщини у цих точках.

Задачу розв'язуватимемо на основі енергетичного підходу, викладеного в пункті 4.1.1, та рівняння (4.16), яке описує зміну площі тріщини від кількості циклів прикладеного навантаження у параметрах розкриття вершини тріщини. За припущенням про те, що тріщина залишається еліптичною протягом усього періоду навантаження [185], рівняння (4.16) можна розкласти на дві залежності вздовж кожної з осей еліптичної тріщини:

$$\begin{cases} \frac{da}{dN} = \alpha_{II0} (1 - R_{II\delta})^2 \frac{\delta_{II\max}^2 - \delta_{IIth}^2}{\delta_{IIc} - \delta_{II\max}}; \\ \frac{db}{dN} = \alpha_{III0} (1 - R_{III\delta})^2 \frac{\delta_{III\max}^2 - \delta_{IIIth}^2}{\delta_{IIIc} - \delta_{III\max}}. \end{cases} \quad (4.47)$$

Розкриття біля контуру тріщини у напрямі великої та малої осей можна визначити за допомогою запропонованих у III розділі формул (3.44) та (3.56) відповідно для поперечного:

$$\delta_{II} = \frac{3 - 4\nu}{8\mu(1 - \nu)\tau_{IIp}} \cdot \frac{K_{II}^2}{\sqrt{1 - (\tau_{II}/\tau_{IIp})^2}} \quad (4.48)$$

та повздовжнього зсуву:

$$\delta_{III} = \frac{1 - \nu}{2\mu\tau_{IIIp}} \cdot \frac{K_{III}^2}{\sqrt{1 - (\tau_{III}/\tau_{IIIp})^2}}. \quad (4.49)$$

Наступним кроком у процесі розв'язання задачі є знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{II} та K_{III} . Для загального випадку дії зсувного навантаження відомими є наступні формули для обчислення КІН для довільної точки H контуру еліптичної тріщини [162]:

$$\begin{aligned} K_{II}(H) &= \frac{k^2 \sqrt{\pi b}}{\sqrt[4]{\sin^2 \beta + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos^2 \beta}} \times \\ &\times \left[\frac{k' \tau_{xy} \cos \beta}{(k^2 - \mu)E(k) + \mu k'^2 K(k)} + \frac{\tau_{zy} \sin \beta}{(k^2 + \mu k'^2)E(k) - \mu k'^2 K(k)} \right]; \\ K_{III}(H) &= \frac{-(1 - \mu)k^2 \sqrt{\pi b}}{\sqrt[4]{\sin^2 \varphi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos^2 \varphi}} \times \\ &\times \left[\frac{\tau_{xy} \cos \beta}{(k^2 - \mu)E(k) + \mu k'^2 K(k)} - \frac{\tau_{zy} k' \cos \beta}{(k^2 + \mu k'^2)E(k) - \mu k'^2 K(k)} \right], \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\quad (4.51)$$

де β – кут між радіус-вектором точки H на контурі еліптичної тріщини та віссю Ox ; τ_{xy} – зсувне навантаження у площині Oxy ; τ_{zy} – зсувне навантаження у

площині Oyz ; $k' = b/a$, $a \geq b$; $k^2 = 1 - k'^2$ [162]; $K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta$ – повний еліптичний інтеграл першого роду; $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ – повний еліптичний інтеграл другого роду [186].

У цій задачі навантаження діє лише в площині Oxy , тому врахувавши, що $\tau_{zy} = 0$, формули (4.50) – (4.51) можна записати у наступному вигляді:

$$K_{II}(H) = \frac{k^2 \sqrt{\pi b}}{\sqrt[4]{\sin^2 \beta + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos^2 \beta}} \cdot \frac{k' \tau_{xy} \cos \beta}{(k^2 - \mu)E(k) + \mu k'^2 K(k)}, \quad (4.52)$$

$$K_{III}(H) = \frac{-(1 - \mu)k^2 \sqrt{\pi b}}{\sqrt[4]{\sin^2 \beta + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos^2 \beta}} \cdot \frac{\tau_{xy} \sin \beta}{(k^2 - \mu)E(k) + \mu k'^2 K(k)}. \quad (4.53)$$

Оскільки, згідно з припущенням, вивчаємо кінетику зміни великої та малої осей еліпса, необхідно знайти формули для визначення КІН на їх кінцях. Кінці великої осі еліпса A та A' піддані поперечному зсуву, а радіус-вектори точок A та A' співпадають з віссю Ox ($\beta = 0$). Тоді з формули (4.52) отримаємо вираз для КІН на кінцях великої осі еліпса:

$$K_{II}(A) = \frac{k^2 k' \sqrt{\pi a} \tau_{xy}(A)}{(k^2 - \mu)E(k) + \mu k'^2 K(k)}. \quad (4.54)$$

Кінці малої пів осі перебувають лише під дією повздовжнього зсуву, а кут між радіус-векторами точок B та B' й віссю Ox становить $\beta = \pi/2$, то формула (4.53) зведеться до вигляду:

$$K_{III}(B) = \frac{-(1 - \mu)k^2 \sqrt{\pi b} \tau_{xy}(B)}{(k^2 - \mu)E(k) + \mu k'^2 K(k)}. \quad (4.55)$$

На основі (4.46) можна визначити напруження $\tau_{xy}(A)$ на кінцях великої пів осі еліпса при $\rho = R$:

$$\tau_{xy}(A) = \frac{32M}{\pi R^3} \quad (4.56)$$

та напруження $\tau_{xy}(B)$ на кінцях малої пів осі при $\rho = R - b$:

$$\tau_{xy}(B) = \frac{32M(R-b)}{\pi R^4}. \quad (4.57)$$

Оскільки у точках A та A' діє лише навантаження II типу, а у точках B та B' – лише навантаження III типу, то позначимо напруження $\tau_{xy}(A)$ та $\tau_{xy}(B)$ наступним чином: $\tau_{xy}(A) = \tau_{xy}(A') = \tau_{II}$ та $\tau_{xy}(B) = \tau_{xy}(B') = \tau_{III}$.

Підставивши формули для визначення КІН (4.54) і (4.55) у співвідношення для розкриття біля контуру тріщини (4.48) та (4.49), отримаємо наступні формули для обчислення розкриттів при поперечному та повздовжньому зсувах:

$$\delta_{II}(A) = \frac{(3-4\nu)k^4 k'^2 \pi a}{8\mu(1-\nu)\tau_{IIp} \left((k^2 - \mu)E(k) + \mu k'^2 K(k) \right)^2} \cdot \frac{\tau_{II}^2}{\sqrt{1 - (\tau_{II}/\tau_{IIp})^2}}, \quad (4.58)$$

$$\delta_{III}(B) = \frac{(1-\nu)(1-\mu)^2 k^4 \pi b}{2\mu\tau_{IIIp} \left((k^2 - \mu)E(k) + \mu k'^2 K(k) \right)^2} \cdot \frac{\tau_{III}^2}{\sqrt{1 - (\tau_{III}/\tau_{IIIp})^2}}. \quad (4.59)$$

Еліптичні інтеграли $K(k)$ та $E(k)$, що входять у співвідношення (4.58) – (4.59), можна обчислити шляхом їх представлення у вигляді рядів за параметром k [174]:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 k^{2n} + \dots \right] \quad (4.60)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \dots - \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right] \quad (4.61)$$

Підставивши формули для визначення розкриття (4.58) – (4.59) у співвідношення (4.47), отримаємо наступну систему рівнянь для визначення швидкості росту малої еліптичної тріщини по її осях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dN} = \alpha_{II0} (1 - R_{II\delta})^2 \frac{F_{II}^2 \tau_{II}^4 - \delta_{IIth}^2 \left(1 - (\tau_{II}/\tau_{IIp})^2\right)}{\left(\delta_{IIfc} \sqrt{1 - (\tau_{II}/\tau_{IIp})^2} - F_{II} \tau_{II}^2\right) \sqrt{1 - (\tau_{II}/\tau_{IIp})^2}}; \\ \frac{db}{dN} = \alpha_{III0} (1 - R_{III\delta})^2 \frac{F_{III}^2 \tau_{III}^4 - \delta_{IIIth}^2 \left(1 - (\tau_{III}/\tau_{IIIp})^2\right)}{\left(\delta_{IIIfc} \sqrt{1 - (\tau_{III}/\tau_{IIIp})^2} - F_{III} \tau_{III}^2\right) \sqrt{1 - (\tau_{III}/\tau_{IIIp})^2}}, \end{array} \right. \quad (4.62)$$

$$\text{де } F_{II} = \frac{(3 - 4\nu)k^4 k'^2 \pi a}{8\mu(1 - \nu)\tau_{IIp} \left((k^2 - \mu)E(k) + \mu k'^2 K(k)\right)^2};$$

$$F_{III} = \frac{(1 - \nu)(1 - \mu)^2 k^4 \pi b}{2\mu\tau_{IIIp} \left((k^2 - \mu)E(k) + \mu k'^2 K(k)\right)^2}.$$

Система рівнянь (4.62) разом з початковими

$$N = 0, \quad a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0 \quad (4.63)$$

та кінцевими умовами

$$N = N_*, \quad a(N_*) = a_*, \quad b(N_*) = b_* \quad (4.64)$$

складає математичну модель для визначення залишкової довговічності торсіона з малою пів еліптичною тріщиною.

4.3.2. Визначення довговічності торсіона з малою тріщиною

Розглянемо конкретну задачу циклічного кручення торсіона з малою пів еліптичною тріщиною моментом $M = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та визначимо його довговічність за запропонованою моделлю (4.62) – (4.64). Початкові розміри тріщини приймаємо $a_0 = 0.0016 \text{ м}$ та $b_0 = 0.00124 \text{ м}$. Торсіон радіуса $R = 0.05 \text{ м}$ виготовлений зі сталі 65 Г (аналог AISI 1066), характеристики якої отримано на основі [176]:

$$\begin{aligned}
\alpha_{II0} &= 0.02; \alpha_{III0} = 0.02; R_{II\delta} = -1; R_{III\delta} = -1; \tau_{IIp} = 490 \text{ МПа}; \\
\tau_{IIIp} &= 490 \text{ МПа}; \nu = 0.3; E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \mu = 80769 \text{ МПа}; \\
K_{IIIh} &= 12.6 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}; K_{IIIc} = 97 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}; K_{IIIh} = 10 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}; \\
K_{IIIc} &= 79 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}; \delta_{IIIc} = 67.42 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \delta_{IIIh} = 1.29 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \\
\delta_{IIIc} &= 55.19 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \delta_{IIIh} = 8.84 \cdot 10^{-7} \text{ м}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

При цьому, зважаючи на результати Мураками [170] про схожість механізмів зсувів II та III типу, прийmemo рівними деякі характеристики для поперечного і повздовжнього зсувів: $\alpha_{II0} = \alpha_{III0} = 0.02$; $R_{II\delta} = R_{III\delta} = -1$; $\tau_{IIp} = \tau_{IIIp} = 490 \text{ МПа}$.

Аналогічно до попереднього, наближено зводимо задачу кручення торсіона до задачі зсуву тривимірного тіла з еліптичною тріщиною. Зсувні зусилля, прикладені до тіла, обчислимо на основі крутного моменту та геометричних розмірів валу за формулами (4.56) та (4.57). Зважаючи на малість розміру тріщини b у порівнянні з радіусом торсіона, наближено прийmemo, що $\tau_{II} = \tau_{III} = 245 \text{ МПа}$.

Підставивши конкретні значення умов навантаження та характеристик матеріалу (4.65) у рівняння (4.62) та початкові умови (4.63), отримаємо наступні залежності для визначення кінетики росту тріщини:

$$\begin{cases} \frac{da}{dN} = \frac{2.63 \cdot 10^{-7} b^4 (1 - (b/a)^2)^4 - 1.4 \cdot 10^{-13} a^2 Q^4}{\left(7.64 \cdot 10^{-5} a Q^2 - 5.63 \cdot 10^{-4} \pi b^2 (1 - (b/a)^2)^2\right) a Q^2}; \\ \frac{db}{dN} = \frac{7.48 \cdot 10^{-8} b^2 (1 - (b/a)^2)^4 - 6.57 \cdot 10^{-14} Q^4}{\left(5.52 \cdot 10^{-5} Q^2 - 9.44 \cdot 10^{-4} b (1 - (b/a)^2)^2\right) Q^2}, \end{cases} \tag{4.66}$$

$$\text{де } Q = \frac{\pi}{2} \left(0.7 - \frac{b^2}{a^2}\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{3}{64} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^2\right) + 0.15\pi \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{5}{4} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{9}{64} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^2\right),$$

та відповідні початкові й кінцеві умови:

$$N = 0, \quad a(0) = 0.0016, \quad b(0) = 0.00124; \tag{4.67}$$

$$N = N_*, \quad a(N_*) = a_*, \quad b(N_*) = b_*. \tag{4.68}$$

Критичне значення розмірів тріщини, що призведе до руйнування тіла, знайдемо за допомогою критерію критичного розкриття тріщини, записавши його для точок контуру тріщини, що відповідають великій та малій пів осям еліпса:

$$\begin{aligned}\delta_{III}(a_*, b_*) &= \delta_{IIIc}; \\ \delta_{III}(a_*, b_*) &= \delta_{IIIc}.\end{aligned}\tag{4.69}$$

Розв'язавши систему рівнянь (4.66) – (4.68) методом Рунге-Кутта, отримуємо, що критичне значення довговічності становить $N_* = 2467153$ циклів. Внаслідок прикладання такої кількості циклів навантаження тріщина початкового розміру $a_0 = 0.0016$ м, $b_0 = 0.00124$ м підросте до критичного значення $a_* = 0.09841$ м, $b_* = 0.07267$ м, перевищення якого призведе до руйнування тіла.

На рис. 4.11 зображено співвідношення між кількістю циклів прикладеного циклічного навантаження та збільшенням розмірів тріщини по її великій (рис. 4.11, *a*) та малій (рис. 4.11, *б*) пів осях. Аналізуючи кінетику росту тріщини, можна зробити висновок, що її розмір по обох пів осях мало змінюється до $2 \cdot 10^6$ циклів. У діапазоні навантаження приблизно $2 \cdot 10^6 - 2.4 \cdot 10^6$ циклів, тріщина починає помітно збільшуватися, а після досягнення значення $2.4 \cdot 10^6$ циклів спостерігається неконтрольований стрімкий ріст тріщини до кінцевого руйнування. З порівняння графіків *a*) та *б*) випливає, що характер росту тріщини є однаковий як по малій, так і по великій пів осях, тобто одне і те ж значення кількості циклів навантаження викликає зміну характеру росту тріщини в обох основних напрямках. Це ж стосується і критичної довжини тріщини: у даному випадку критичний розмір тріщини по обох пів осях a_* та b_* досягається при одному і тому ж значенні довговічності N_* .

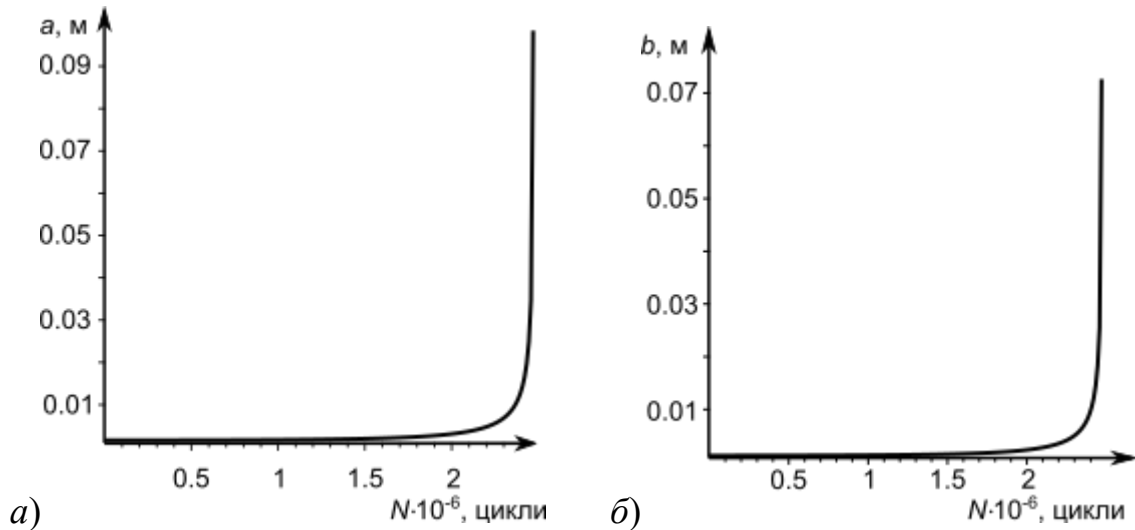


Рис. 4.11. Залежність між величиною пів осей тріщини та кількістю циклів навантаження: а) $a \sim N$; б) $b \sim N$.

Дослідимо тепер, як змінюється довговічність пів простору залежно від початкової довжини тріщини для цієї ж задачі. Для цього, зважаючи на рівномірність росту тріщини в напрямку обох пів осей, припустимо, що співвідношення між її пів осями a та b залишатиметься увесь час незмінним і дорівнюватиме його початковому значенню $b_0/a_0 = 0.775$.

Підставивши це співвідношення у перше рівняння системи (4.66) й розділивши змінні, отримаємо наступне співвідношення для визначення довговічності:

$$N_* = \int_{a_0}^{a_*} \frac{7.64 \cdot 10^{-5} - 8.11 \cdot 10^{-4} a}{5.53 \cdot 10^{-8} a^2 - 1.4 \cdot 10^{-13}} da. \quad (4.70)$$

На рис. 4.12 представлено співвідношення між довговічністю тіла з еліптичною тріщиною та початковим розміром тріщини в напрямі більшої пів осі за сталого співвідношення між пів осями 0.775. З рисунка видно, що при збільшенні великої, a , відповідно, й малої пів осей довговічність торсіону різко прямує до нуля.

Отже, задачу кручення торсіону з малою поверхневою пів еліптичною тріщиною наближено зведено до задачі зсуву пів простору з пів еліптичною тріщиною, та, в свою чергу, до задачі зсуву простору з еліптичною тріщиною.

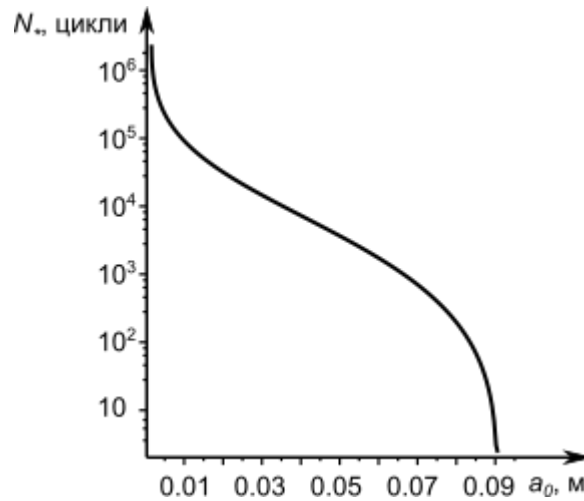


Рис. 4.12. Співвідношення $N_* \sim a_0$ при $b/a = 0.775$.

У результаті цього вдалося наближено знайти розв'язок вихідної задачі, використовуючи запропоновану для еліптичної тріщини математичну модель та формули для обчислення розкриттів біля контуру тріщини за поперечного та повздовжнього зсувів.

Висновки до розділу 4

1. Запропоновано математичну модель поширення малих поверхневих втомних тріщин довільного опуклого контуру у тривимірних тілах з використанням енергетичного підходу. Для спрощення розв'язання задачі узагальнено метод еквівалентних площ на випадок малих тріщин, який передбачає заміну початкової тріщини опуклої конфігурації на кругову за умови рівності їхніх площ.
2. Для визначення розкриття вершини біля контуру кругової тріщини представлено альтернативну формулу, що враховує відносний рівень навантаження тіла. На основі цієї формули підтверджено інваріантність параметру розкриття біля контуру тріщини щодо рівня навантаження на відміну від КІН.

3. На основі запропонованої математичної моделі розв'язано задачу розтягу тривимірного тіла, послабленого малою еліптичною тріщиною, двома способами: аналітично за допомогою узагальненого методу еквівалентних площ та чисельно за методом Рунге-Кутта. Порівняння отриманих результатів свідчить про високу точність наближеного аналітичного розв'язку в порівнянні з точним числовим.
4. Задача кручення торсіона з малою поверхневою пів еліптичною тріщиною розв'язана шляхом зведення її в два етапи до задачі зсуву простору з еліптичною тріщиною. У результаті отримано графічні залежності росту пів осей тріщини зі збільшенням довговічності, а також зміни критичної довговічності із зміною початкового розміру пів осей тріщини за умови сталого співвідношення між ними.

ВИСНОВКИ

1. Дисертаційна робота присвячена вивченню кінетики росту коротких тріщин і направлена на розроблення математичних моделей поширення коротких втомних тріщин за різних поєднань геометрії тріщини й тіла, умов навантаження та зовнішнього середовища. Ідея полягає в тому, щоб описати ріст фізично коротких і довгих тріщин за допомогою однієї моделі, яка дозволяє визначити довговічність елементів конструкцій.
2. У результаті огляду літератури встановлено, що існують відмінності у принципах та характері поширення коротких і довгих тріщин. У зв'язку з цим основним методом моделювання обрано енергетичний підхід. Оскільки коефіцієнт інтенсивності напружень, широко застосований в експериментальних і теоретичних дослідженнях для довгих тріщин, не може охарактеризувати поширення коротких тріщин, то за основний параметр моделювання прийнято деформаційний параметр розкриття у вершині тріщини.
3. Математичні моделі, отримані на основі енергетичного підходу, вимагають визначення розкриття тріщини у вершині. Для цього в роботі запропоновано формули для розрахунку розкриття залежно від рівня відносного навантаження для кожної розглянутої постановки задачі: розтяг тонкої пластини з тріщиною з врахуванням корозивного середовища та без нього, поперечний та повздовжній зсуви товстої пластини з тунельною тріщиною, а також розтяг тривимірного тіла з поверхневою тріщиною опуклого контуру.
4. Підтверджено правомірність підходу через розкриття вершини тріщини до опису поширення коротких тріщин у розглянутих задачах. Застосування РВТ як основного параметра моделювання дає взаємнооднозначну відповідність між швидкістю росту тріщини і розкриттям у її вершині, що вказує на інваріантність цієї залежності відносно розкриття. Отриманий розв'язок відрізняється від експериментальних й аналітичних результатів, які

базуються на КІН, і, як відомо, не підходять для опису росту коротких тріщин. Крім того, на відміну від РВТ, застосування КІН призводить до завищених значень довговічності та критичної довжини тріщини, що йде у ризик непередбаченого руйнування розглянутого елемента конструкції. Таким чином, результати цього дослідження свідчать про ефективність використання розкриття у вершині тріщини як основного параметра моделювання росту коротких і довгих тріщин.

5. Для задачі розтягу тонкої пластини запропоновано модель на основі параметра деформації для визначення періоду зародження та докритичного росту тріщин, що виникають у вершинах бокових концентраторів напружень смуги.
6. Для випадків поперечного та повздовжнього зсувів, розв'язання задач проводилося із застосуванням інтегральної форми постановки задач, гармонійних функцій, перетворення Фур'є та методу еквівалентних напружених станів. Отриманий розв'язок задачі дозволив усунути фізичну некоректність, що існувала в попередніх розв'язках, коли береги тріщини перекривалися в зоні передруйнування. Таким чином, результати представленої роботи доповнюють результати попередніх досліджень.
7. Запропоновані формули визначення розкриття вершини тріщини, а також дослідження Мураками щодо еквівалентності механізмів поширення тріщин поперечного та повздовжнього зсувів, дозволили розробити модель поширення короткої втомної тріщини за спільної дії поперечного та повздовжнього зсувів.
8. Розв'язано задачу розтягу тривимірного тіла з поверхневою опуклою тріщиною за допомогою узагальнення методу еквівалентних площ на випадок коротких тріщин. Аналогічну задачу для тіла з еліптичною тріщиною розв'язано наближеним аналітичним методом еквівалентних площ і точним чисельним методом Рунге-Кутта, що підтвердило точність запропонованого підходу.

9. Математичні моделі, розроблені у даній роботі, дозволили визначити довговічність елементів конструкцій у розглянутих задачах. Достовірність моделей підтверджено на конкретних задачах з урахуванням відомих експериментальних даних.
10. Основним внеском дисертаційного дослідження вважається ефективний математичний розв'язок задач механіки руйнування, що полягає у розроблених моделях росту коротких і довгих тріщин відповідними диференціальними рівняннями з початковими і кінцевими умовами. На основі математичного моделювання складних процесів поширення тріщин побудовано кількісну теорію цих процесів, а розроблені математичні моделі дозволили якісно описати такі процеси, зокрема, визначити періоди зародження та докритичного росту тріщини.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] K. J. Miller, “The behaviour of short fatigue cracks and their initiation. Part II – A general summary,” *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 10, no. 2, pp. 93-113, 1987, doi: 10.1111/j.1460-2695.1987.tb01153.x.
- [2] U. Zerbst, M. Madia, C. Klingner, D. Bettge, and Y. Murakami, “Defects as a root cause of fatigue failure of metallic components. I: Basic aspects,” *Engineering Failure Analysis*, vol. 97, pp. 777-792, 2019, doi: 10.1016/j.engfailanal.2019.01.055.
- [3] D. Davidson, K. Chan, S. McClung, and S. Hudak, “Small fatigue cracks,” in *Comprehensive Structural Integrity*, I. Milne, R. O. Ritchie, and B. Karahaloo Eds. Amsterdam: Elsevier, 2003, ch. 4.05, pp. 129-164.
- [4] S. Suresh and R. O. Ritchie, “Propagation of short fatigue cracks,” *International Metals Reviews*, vol. 29, no. 6, pp. 445-475, 1984, doi: 10.1179/imtr.1984.29.1.445.
- [5] R. Wanhill and S. Barter, “Short/small fatigue crack growth,” in *Fatigue of Beta Processed and Beta Heat-treated Titanium Alloys*. Dordrecht, The Netherlands: Springer Netherlands, 2012, ch. 5, pp. 27-40.
- [6] D. J. Bang and A. Ince, “A short and long crack growth model based on 2-parameter driving force and crack growth thresholds,” *International Journal of Fatigue*, vol. 141, pp. 1-12, 2020, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2020.105870.
- [7] B. Main, M. Jones, and S. Barter, “The practical need for short fatigue crack growth rate models,” *International Journal of Fatigue*, vol. 142, p. 105980, 2021, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2020.105980.
- [8] J. Schijve, “Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art,” *International Journal of Fatigue*, vol. 25, no. 8, pp. 679-702, 2003, doi: 10.1016/s0142-1123(03)00051-3.
- [9] N. Yadzhak, “Generalization of the equivalent area method for the case of short fatigue cracks in a three-dimensional body,” *Visnyk of the Lviv University*, no. 89, Series Mech. Math., pp. 106-122, 2020, doi: 10.30970/vmm.2020.89.106-122.
- [10] Н. С. Штаюра, “Визначення залишкової міцності тонкостінних елементів конструкцій з короткими тріщинами,” *Наукові нотатки*, том 57, С. 187-189, 2017.

- [11] Y. Lapusta, O. Andreikiv, and N. Yadzhak, "Short crack problem in delayed fracture mechanics," *Procedia Structural Integrity*, vol. 16, pp. 105-112, 2019, doi: 10.1016/j.prostr.2019.07.028.
- [12] О. Є. Андрейків, Ю. М. Лапуста, та Н. С. Яджак, "Визначення залишкового ресурсу тонкостінних елементів конструкцій з короткими тріщинами," *VI Міжнародна науково-технічна конференція "Пошкодження матеріалів під час експлуатації, методи його діагностування і прогнозування"*, Тернопіль, 24-27 вересня 2019, С. 139-142.
- [13] O. E. Andreikiv and N. S. Shtayura, "Computational models of fatigue cracks growth in metallic materials under the action of force and physicochemical factors," *Materials Science*, vol. 54, no. 4, pp. 465-476, 2019, doi: 10.1007/s11003-019-00206-1.
- [14] O. E. Andreikiv, A. R. Lysyk, N. S. Shtayura, and A. V. Babii, "Evaluation of the residual service life of thin-walled structural elements with short corrosion-fatigue cracks," *Materials Science*, vol. 53, no. 4, pp. 514-521, 2018, doi: 10.1007/s11003-018-0104-4.
- [15] O. E. Andreykiv, N. S. Shtayura, and R. Y. Yarema, "Energy-based approach to evaluation of short fatigue crack growth rate in plates," *Strength of Materials*, vol. 49, no. 6, pp. 778-787, 2017, doi: 10.1007/s11223-018-9923-7.
- [16] Ю. Лапуста, О. Андрейків, та Н. Штаюра, "Оцінка залишкового ресурсу елементів конструкцій з механічно малими тріщинами за дії силових і фізико-хімічних факторів" *Сучасні проблеми механіки і математики*, Львів, 22-25 травня 2018, т. 2, С. 223-224.
- [17] O. Andreykiv, O. Hembara, I. Dolinska, Y. Sapuzhak, and N. Yadzhak, "Prediction of Residual Service Life of Oil Pipeline Under Non-stationary Oil Flow Taking into Account Steel Degradation," in *Degradation Assessment and Failure Prevention of Pipeline Systems*, G. Bolzon, G. Gabetta, and H. Nykyforchyn Eds., (Lecture Notes in Civil Engineering, no. 102). Cham: Springer, 2020, pp. 203-216.
- [18] С. Штаюра та Н. Штаюра, "Аналіз впливу водню на механічні характеристики середньокарбоневих сталей," *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск "Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів"*, №. 12, С. 58-63, 2018.
- [19] С. Штаюра, Р. Костів, І. Вергун, та Н. Штаюра, "Вплив водню за непропорційного двовісного навантаження на деформування та міцність сталі 20," *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск "Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів"*, С. 76-81, 2016.

- [20] С. Штаюра, Р. Костів, І. Вергун, та Н. Штаюра, “Побудова діаграм руйнування сталі 20 за двовісного навантаження циліндричних порожнинних зразків і дії водню,” *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск “Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів”*, С. 170-175, 2014.
- [21] I. Panko, S. Shtayura, O. Panko, and N. Shtayura, “Biaxial Tension of the Plate Softened by the Griffith Crack,” *Scientific journal of TNTU*, no. 4, pp. 88-96, 2017.
- [22] I. Roth, M. Kübbeler, U. Krupp, H.-J. Christ, and C.-P. Fritzen, “Crack initiation and short crack growth in metastable austenitic stainless steel in the high cycle fatigue regime,” *Procedia Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 941-948, 2010, doi: 10.1016/j.proeng.2010.03.102.
- [23] B. Pan, T. Jiang, X. Li, and L. Huang, “Lifetime assessment of aircraft structural components in coastal environments,” *Journal of Aircraft*, vol. 47, no. 4, pp. 1409-1412, 2010, doi: 10.2514/1.C000224.
- [24] S. R. Holdsworth, R. P. Skelton, and B. A. Dogan, “Code of practice for the measurement and analysis of high strain creep-fatigue short crack growth,” *Materials at High Temperatures*, vol. 27, no. 4, pp. 265-283, 2010, doi: 10.3184/096034010X12901002809519.
- [25] N. O. Larrosa, R. Akid, and R. A. Ainsworth, “Corrosion-fatigue: a review of damage tolerance models,” *International Materials Reviews*, vol. 63, no. 5, pp. 283-308, 2018, doi: 10.1080/09506608.2017.1375644.
- [26] A. A. Griffith, “The phenomena of rupture and flow in solids,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 221, no. 582-583, pp. 163-198, 1921, doi: 10.1098/rsta.1921.0006.
- [27] A. A. Griffith, “The theory of rupture,” in *1st Int. Congress on Applied Mechanics*, Delft The Netherlands, 1924, pp. 54-63.
- [28] J. F. Knott, “The science and engineering of fracture,” *Materials Science*, vol. 29, no. 3, pp. 229-248, 1993, doi: 10.1007/BF00558966.
- [29] В. В. Панасюк, *Предельное равновесие хрупких тел с трещинами*. Киев: Наукова думка, 1968.
- [30] A. T. Zehnder, “Griffith Theory of Fracture,” in *Encyclopedia of Tribology*, Q. J. Wang and Y.-W. Chung Eds. Boston, MA: Springer US, 2013, pp. 1570-1573.

- [31] В. В. Панасюк, О. Е. Андрейкив, та В. З. Партон, *Основы механики разрушения* (Механика разрушения и прочность материалов, т. 1). Киев: Наукова думка, 1988, С. 488.
- [32] E. Orowan, "Energy Criteria of Fracture," Office of Naval Research, Massachusetts Institute of Technology, Ohio, USA, Technical report no. 3, 1954.
- [33] C. H. Wu, "Maximum-energy-release-rate criterion applied to a tension-compression specimen with crack," *Journal of Elasticity*, vol. 8, no. 3, pp. 235-257, 1978, doi: 10.1007/BF00130464.
- [34] Г. П. Черепанов, *Механика хрупкого разрушения*. Москва: Наука, 1974.
- [35] Г.П. Черепанов, "О распространении трещин в сплошной среде," *Прикладная математика и механика*, том 31, № 3, С. 476-488, 1967.
- [36] J. R. Rice, "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 379-386, 1968, doi: 10.1115/1.3601206.
- [37] W. Cui, "A state-of-the-art review on fatigue life prediction methods for metal structures," *Journal of Marine Science and Technology*, vol. 7, pp. 43-56, 2002, doi: 10.1007/s007730200012.
- [38] G. R. Irwin, "Analysis of stress and strain near end of a crack traversing a plate," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, no. 3, pp. 361-364, 1957, doi: 10.1115/1.4011547.
- [39] В. В. Панасюк, *Механика квазихрупкого разрушения материалов*. Киев: Наукова думка, 1991.
- [40] D. S. Dugdale, "Yielding of steel sheets containing slits," *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8, no. 2, pp. 100-104, 1960, doi: 10.1016/0022-5096(60)90013-2.
- [41] K. S. Chan, "Growth characteristics of large fatigue cracks," in *Encyclopedia of Tribology*, Q. J. Wang and Y.-W. Chung Eds. Boston, MA: Springer US, 2013, pp. 1580-1692.
- [42] P. J. E. Forsyth, "A two stage process of fatigue crack growth," in *Proceedings of the Crack Propagation Symposium Cranfield*, 1963, vol. 1, pp. 76-94.
- [43] D.-G. Shang, W.-X. Yao, and D.-J. Wang, "A new approach to the determination of fatigue crack initiation size," *International Journal of Fatigue*, vol. 20, no. 9, pp. 683-687, 1998, doi: 10.1016/S0142-1123(98)00035-8.

- [44] S. Y. Yarema, "Stages of fatigue fracture and their consequences," *Materials Science*, vol. 9, no. 6, pp. 681-686, 1975, doi: 10.1007/BF00717767.
- [45] J. Schijve, *Fatigue of Structures and Materials*, 2nd ed. Springer Netherlands, 2009.
- [46] P. Paris and F. Erdogan, "A critical analysis of crack propagation laws," *Journal of Basic Engineering*, vol. 85, no. 4, pp. 528-533, 1963, doi: 10.1115/1.3656900.
- [47] О. Є. Андрейків, В. М. Пустовий, Д. В. Рудавський, І. Я. Долінська, та П. О. Семенов, *Методи оцінювання залишкової міцності та довговічності елементів конструкції за даними неруйнівного контролю (Технічна діагностика матеріалів і конструкцій)*. Львів: Простір-М, 2017.
- [48] P. Chowdhury and H. Sehitoglu, "Mechanisms of fatigue crack growth – a critical digest of theoretical developments," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 39, pp. 652-674, 2016, doi: 10.1111/ffe.12392.
- [49] K. Walker, "The Effect of Stress Ratio During Crack Propagation and Fatigue for 2034-T3 and 7075-16 Aluminium," in *Effects of Environment and Complex Load History on Fatigue Life*, vol. 462: American Society for Testing and Materials, 1970, pp. 1-14.
- [50] R. G. Forman, V. E. Kearney, and R. M. Engle, "Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures," *Journal of Basic Engineering*, vol. 89, no. 3, pp. 459-463, 1967, doi: 10.1115/1.3609637.
- [51] S. Suresh and R. O. Ritchie, "A geometric model for fatigue crack closure induced by fracture surface roughness," *Metallurgical Transactions A*, vol. 13, no. 9, pp. 1627-1631, 1982/09/01 1982, doi: 10.1007/BF02644803.
- [52] W. Elber, "Fatigue crack closure under cyclic tension," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 2, pp. 37-45, 1970, doi: 10.1016/0013-7944(70)90028-7.
- [53] J. Weertman, "Rate of growth of fatigue cracks calculated from the theory of infinitesimal dislocations distributed on a plane," *International Journal of Fracture Mechanics*, vol. 2, no. 2, pp. 460-467, 1966, doi: 10.1007/BF00183823.
- [54] J. R. Rice, "Mechanics of Crack Tip Deformation and Extension by Fatigue," in *Fatigue Crack Propagation*, J. Grosskreutz Ed. West Conshohocken, PA, USA: ASTM International, 1967, pp. 247-311.
- [55] K. Tanaka, Y. Akiniwa, Y. Nakai, and R. P. Wei, "Modelling of small fatigue crack growth interacting with grain boundary," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 24, no. 6, pp. 803-819, 1986, doi: 10.1016/0013-7944(86)90266-3.

- [56] A. Navarro and E. R. de los Rios, "Short and long fatigue crack growth: A unified model," *Philosophical Magazine A*, vol. 57, no. 1, pp. 15-36, 1988, doi: 10.1080/01418618808204496.
- [57] A. Navarro and E. R. d. l. Rios, "A model for short fatigue crack propagation with an interpretation of the short-long crack transition," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 10, no. 2, pp. 169-186, 1987.
- [58] X. J. Wu, A. K. Koul, and A. S. Krausz, "A transgranular fatigue crack growth model based on restricted slip reversibility," *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 24, no. 6, p. 1373, 1993, doi: 10.1007/BF02668205.
- [59] S. Pearson, "Initiation of fatigue cracks in commercial aluminium alloys and the subsequent propagation of very short cracks," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 7, no. 2, pp. 235-247, 1975, doi: 10.1016/0013-7944(75)90004-1.
- [60] K. S. Chan, "Growth characteristics of small fatigue cracks," in *Encyclopedia of Tribology*, Q. J. Wang and Y.-W. Chung Eds. Boston, MA: Springer US, 2013, pp. 1592-1605.
- [61] R. O. Ritchie and J. Lankford, "Small fatigue cracks: A statement of the problem and potential solutions," *Materials Science and Engineering*, vol. 84, pp. 11-16, 1986, doi: 10.1016/0025-5416(86)90217-X.
- [62] K. J. Miller, "Materials science perspective of metal fatigue resistance," *Materials Science and Technology*, vol. 9, no. 6, pp. 453-462, 1993, doi: 10.1179/mst.1993.9.6.453.
- [63] S. J. Hudak, Jr., "Small crack behavior and the prediction of fatigue life," *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 103, no. 1, pp. 26-35, 1981, doi: 10.1115/1.3224969.
- [64] R. O. Ritchie and J. Lankford, Eds. *Small fatigue cracks*. Warrendale, PA, United States: Metallurgical Society, 1986.
- [65] K. J. Miller and E. R. de los Rios, Eds. *Short Fatigue Cracks*. London, United Kingdom: Mechanical Engineering Publications Limited, 1992.
- [66] C. M. Branco and L. G. Rosa, Eds. *Advances in Fatigue Science and Technology* (NATO ASI Series (Series E: Applied Sciences)). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [67] K. S. Ravichandran, Y. Murakami, and R. Ritchie, Eds. *Small Fatigue Cracks: Mechanics, Mechanisms and Applications*. Elsevier Science, 1999, p. 498.
- [68] K. J. Miller, "The behaviour of short fatigue cracks and their initiation. Part I – A review of two recent books," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials &*

- Structures*, vol. 10, no. 1, pp. 75-91, 1987, doi: 10.1111/j.1460-2695.1987.tb01150.x.
- [69] K. J. Miller, "The three thresholds for fatigue crack propagation," in *Fatigue and Fracture Mechanics: 27th Volume*, R. S. Piascik, J. C. Newman, and N. E. Dowling Eds. West Conshohocken, PA: ASTM International, 1997, pp. 267-286.
- [70] H. Kitagawa and S. Takahashi, "Applicability of fracture mechanics to very small cracks or the cracks in the early stage," in *Proceedings of 2nd International Conference on Mechanical Behavior of Materials*, vol. 2. Boston, MA, US: American Society for Metals, 1976, pp. 627-631.
- [71] M. H. El Haddad, K. N. Smith, and T. H. Topper, "Fatigue crack propagation of short cracks," *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 101, no. 1, pp. 42-46, 1979, doi: 10.1115/1.3443647.
- [72] K. J. Miller, "The two thresholds of fatigue behaviour," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 16, no. 9, pp. 931-939, 1993, doi: 10.1111/j.1460-2695.1993.tb00129.x.
- [73] K. Sadananda and S. Sarkar, "Modified kitagawa diagram and transition from crack nucleation to crack propagation," *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 44, no. 3, pp. 1175-1189, 2013, doi: 10.1007/s11661-012-1416-x.
- [74] M. D. Sangid, "The physics of fatigue crack initiation," *International journal of fatigue*, vol. 57, pp. 58-72, 2013, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2012.10.009.
- [75] V. Mazánová and J. Polák, "Initiation and growth of short fatigue cracks in austenitic Sanicro 25 steel," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 41, no. 7, pp. 1529-1545, 2018, doi: 10.1111/ffe.12794.
- [76] V. Mazánová, M. Heczko, and J. Polák, "Fatigue crack initiation and growth in 43Fe-25Ni-22.5Cr austenitic steel at a temperature of 700 °C," *International Journal of Fatigue*, vol. 114, pp. 11-21, 2018, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2018.04.033.
- [77] R. Strubbia, S. Hereñú, A. Giertler, I. Alvarez-Armas, and U. Krupp, "Experimental characterization of short crack nucleation and growth during cycling in lean duplex stainless steels," *International Journal of Fatigue*, vol. 65, pp. 58-63, 2014, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2013.08.023.
- [78] R. Strubbia, S. Hereñú, M. C. Marinelli, and I. Alvarez-Armas, "Short crack nucleation and growth in lean duplex stainless steels fatigued at room temperature," *International Journal of Fatigue*, vol. 41, pp. 90-94, 2012, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2012.01.011.

- [79] I. Alvarez-Armas, U. Krupp, M. Balbi, S. Hereñú, M. C. Marinelli, and H. Knobbe, "Growth of short cracks during low and high cycle fatigue in a duplex stainless steel," *International Journal of Fatigue*, vol. 41, pp. 95-100, 2012, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2012.01.010.
- [80] J. W. Pegues, M. D. Roach, and N. Shamsaei, "Influence of microstructure on fatigue crack nucleation and microstructurally short crack growth of an austenitic stainless steel," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 707, pp. 657-667, 2017, doi: 10.1016/j.msea.2017.09.081.
- [81] K. Koschella and U. Krupp, "Investigations of fatigue damage in tempered martensitic steel in the HCF regime," *International Journal of Fatigue*, vol. 124, pp. 113-122, 2019, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2019.02.050.
- [82] U. Krupp *et al.*, "The behavior of short fatigue cracks during Very High Cycle (VHCF) Fatigue of duplex stainless steel," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 145, pp. 197-209, 2015, doi: 10.1016/j.engfracmech.2015.03.024.
- [83] H. J. Christ, C. P. Fritzen, and P. Köster, "Micromechanical modeling of short fatigue cracks," *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, vol. 18, no. 4, pp. 205-211, 2014, doi: 10.1016/j.cossms.2014.05.001.
- [84] U. Krupp and I. Alvarez-Armas, "Short fatigue crack propagation during low-cycle, high cycle and very-high-cycle fatigue of duplex steel – An unified approach," *International Journal of Fatigue*, vol. 65, pp. 78-85, 2014, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2013.06.018.
- [85] G. V. Tsybanev, "Description of the kinetics of short surface fatigue crack growth using the parameters of fatigue curves," *Strength of Materials*, vol. 50, no. 2, pp. 308-316, 2018, doi: 10.1007/s11223-018-9973-x.
- [86] G. V. Tsybanev, "Application of the deformation criterion to the description of short fatigue crack growth," *Strength of Materials*, vol. 45, no. 1, pp. 28-34, 2013, doi: 10.1007/s11223-013-9429-2.
- [87] S. Kolitsch, H.-P. Gänser, and R. Pippan, "Determination of crack initiation and crack growth stress-life curves by fracture mechanics experiments and statistical analysis," *Procedia Structural Integrity*, vol. 2, pp. 3026-3039, 2016, doi: 10.1016/j.prostr.2016.06.379.
- [88] K. Tanaka, "Crack initiation and propagation in torsional fatigue of circumferentially notched steel bars," *International Journal of Fatigue*, vol. 58, pp. 114-125, 2014, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2013.01.002.
- [89] K. Tanaka, "Small fatigue crack propagation in notched components under combined torsional and axial loading," *Procedia Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 27-46, 2010, doi: 10.1016/j.proeng.2010.03.004.

- [90] J. Polák, M. Petrenec, J. Man, and K. Obrtlík, "Initiation and short crack growth in austenitic-ferritic duplex steel-effect of positive mean stress," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 35, no. 3, pp. 257-268, 2012, doi: 10.1111/j.1460-2695.2011.01613.x.
- [91] N. A. Giang, U. A. Ozden, A. Bezold, and C. Broeckmann, "A model for predicting crack initiation in forged M3:2 tool steel under high cycle fatigue," *International Journal of Fracture*, vol. 187, no. 1, pp. 145-158, 2014, doi: 10.1007/s10704-013-9927-z.
- [92] D. L. McDowell, "Basic issues in the mechanics of high cycle metal fatigue," *International Journal of Fracture*, vol. 80, no. 2, p. 103, 2004, doi: 10.1007/BF00012666.
- [93] G. M. Castelluccio and D. L. McDowell, "Mesoscale modeling of microstructurally small fatigue cracks in metallic polycrystals," *Materials Science & Engineering: A*, vol. 598, pp. 34-55, 2014, doi: 10.1016/j.msea.2014.01.015.
- [94] P. Kucharczyk, M. Sharaf, and S. Münstermann, "On the influence of steel microstructure on short crack growth under cyclic loading," *International Journal of Fatigue*, vol. 41, pp. 83-89, 2012, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2011.12.005.
- [95] Y. Takahashi, T. Shikama, S. Yoshihara, T. Aiura, and H. Noguchi, "Study on dominant mechanism of high-cycle fatigue life in 6061-T6 aluminum alloy through microanalyses of microstructurally small cracks," *Acta Materialia*, vol. 60, no. 6/7, pp. 2554-2567, 2012, doi: 10.1016/j.actamat.2012.01.023.
- [96] J. Polák, T. Kruml, K. Obrtlík, J. Man, and M. Petrenec, "Short crack growth in polycrystalline materials," *Procedia Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 883-892, 2010, doi: 10.1016/j.proeng.2010.03.095.
- [97] A. G. Spangenberg and D. A. Lados, "A novel physics-based predictive model for small fatigue crack growth with microstructural sensitivity in cast aluminum alloys," *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 50, no. 9, pp. 4364-4377, 2019, doi: 10.1007/s11661-019-05349-z.
- [98] O. M. Herasymchuk, "Microstructure-dependent model for calculating the growth rate of physically small and long fatigue cracks," *Strength of Materials*, vol. 47, no. 2, pp. 257-267, 2015, doi: 10.1007/s11223-015-9656-9.
- [99] O. M. Herasymchuk and O. V. Kononuchenko, "Model for fatigue life prediction of titanium alloys. Part 1. Elaboration of a model of fatigue life prior to initiation of microstructurally short crack and a propagation model for physically short and long cracks," *Strength of Materials*, vol. 45, no. 1, pp. 44-55, 2013, doi: 10.1007/s11223-013-9431-8.

- [100] O. M. Herasymchuk, "Microstructurally-dependent model for predicting the kinetics of physically small and long fatigue crack growth," *International Journal of Fatigue*, vol. 81, pp. 148-161, 2015, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2015.08.002.
- [101] O. M. Herasymchuk and A. I. Novikov, "Microstructure-based model for sharp stress raiser-related fatigue stage length assessment," *Strength of Materials*, vol. 51, no. 3, pp. 361-373, 2019, doi: 10.1007/s11223-019-00082-9.
- [102] O. M. Herasymchuk, "Modified KT-diagram for stress raiser-involved fatigue strength assessment," *Strength of Materials*, vol. 50, no. 4, pp. 608-619, 2018, doi: 10.1007/s11223-018-0006-6.
- [103] M. Endo and A. J. McEvily, "Fatigue crack growth from small defects under out-of-phase combined loading," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 78, no. 8, pp. 1529-1541, 2011, doi: 10.1016/j.engfracmech.2010.12.011.
- [104] O. Hertel and M. Vormwald, "Short-crack-growth-based fatigue assessment of notched components under multiaxial variable amplitude loading," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 78, no. 8, pp. 1614-1627, 2011, doi: 10.1016/j.engfracmech.2011.01.016.
- [105] R. Döring, J. Hoffmeyer, T. Seeger, and M. Vormwald, "Short fatigue crack growth under nonproportional multiaxial elastic-plastic strains," *International Journal of Fatigue*, vol. 28, no. 9, pp. 972-982, 2006, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2005.08.012.
- [106] J. Eufinger, A. Heinrietz, T. Bruder, and H. Hanselka, "An engineering approach to fatigue analysis based on elastic-plastic fracture mechanics," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 36, no. 1, pp. 65-74, 2013, doi: 10.1111/j.1460-2695.2012.01680.x.
- [107] J. Maierhofer, R. Pippan, and H. P. Gänser, "Modified NASGRO equation for physically short cracks," *International Journal of Fatigue*, vol. 59, pp. 200-207, 2014, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2013.08.019.
- [108] R. Jones, P. Huang, and D. Peng, "Crack growth from naturally occurring material discontinuities under constant amplitude and operational loads," *International Journal of Fatigue*, vol. 91, pp. 434-444, 2016, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2016.02.010.
- [109] P. Hutař, I. Kuběna, M. Ševčík, M. Šmíd, T. Kruml, and L. Náhlík, "Small fatigue crack propagation in Y2O3 strengthened steels," *Journal of Nuclear Materials*, vol. 452, no. 1-3, pp. 370-377, 2014, doi: 10.1016/j.jnucmat.2014.05.071.

- [110] P. Hutař, J. Poduška, A. Chlupová, M. Šmíd, T. Kruml, and L. Náhlík, “Description of short fatigue crack propagation under low cycle fatigue regime,” *Procedia Structural Integrity*, vol. 2, pp. 3010-3017, 2016, doi: 10.1016/j.prostr.2016.06.377.
- [111] J. Polák, “Plastic strain-controlled short crack growth and fatigue life,” *International Journal of Fatigue*, vol. 27, no. 10-12, pp. 1192-1201, 2005, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2005.06.028.
- [112] P. Hutař *et al.*, “Short fatigue crack behaviour under low cycle fatigue regime,” *International Journal of Fatigue*, vol. 103, pp. 207-215, 2017, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2017.06.002.
- [113] S. Beretta, S. Foletti, and K. Valiullin, “Fatigue crack propagation and threshold for shallow micro-cracks under out-of-phase multiaxial loading in a gear steel,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 77, no. 11, pp. 1835-1848, 2010, doi: 10.1016/j.engfracmech.2010.05.015.
- [114] L. Patriarca, S. Foletti, S. Beretta, S. Parodi, and A. Riva, “Crack propagation under combined cycle fatigue for a precipitation hardened steel,” *Procedia Structural Integrity*, vol. 7, pp. 214-221, 2017, doi: 10.1016/j.prostr.2017.11.080.
- [115] N. O. Larrosa, A. Navarro, and V. Chaves, “Calculating fatigue limits of notched components of arbitrary size and shape with cracks growing in mode I,” *International Journal of Fatigue*, vol. 74, pp. 142-155, 2015, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2015.01.002.
- [116] K. Yanase and M. Endo, “Multiaxial high cycle fatigue threshold with small defects and cracks,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 123, pp. 182-196, 2014, doi: 10.1016/j.engfracmech.2014.03.017.
- [117] V. T. Troshchenko and L. A. Khamaza, “Fatigue fracture stages of metals and alloys and stage-to-stage transition criteria,” *Strength of Materials*, vol. 50, no. 4, pp. 529-539, 2018, doi: 10.1007/s11223-018-9998-1.
- [118] C. Sarrazin-Baudoux *et al.*, “Fatigue propagation of short and long cracks in gaseous hydrogen environment in 3.5NiCrMoV steel,” *Engineering Failure Analysis*, vol. 69, pp. 29-34, 2016, doi: 10.1016/j.engfailanal.2016.02.024.
- [119] M. Lukaszewicz, S. Zhou, and A. Turnbull, “Novel concepts on the growth of corrosion fatigue small and short cracks,” *Materials & Corrosion*, vol. 66, no. 12, pp. 1488-1490, 2015, doi: 10.1002/maco.201508390.
- [120] A. Turnbull, “Corrosion pitting and environmentally assisted small crack growth,” *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 470, pp. 1-19, 2014, doi: 10.1098/rspa.2014.0254.

- [121] Y. Murakami, T. Kanezaki, and P. Sofronis, "Hydrogen embrittlement of high strength steels: Determination of the threshold stress intensity for small cracks nucleating at nonmetallic inclusions," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 97, pp. 227-243, 2013, doi: 10.1016/j.engfracmech.2012.10.028.
- [122] T.-H. Pham, V.-X. Tran, G. Chretien, C. Gardin, C. Sarrazin-Baudoux, and J. Petit, "Near-threshold fatigue propagation of physically through-thickness short and long cracks in a low alloy steel," *Journal of Materials Science*, vol. 50, no. 1, pp. 242-250, 2015, doi: 10.1007/s10853-014-8582-8.
- [123] A. Turnbull, "Characterising the early stages of crack development in environment-assisted cracking," *Corrosion Engineering, Science & Technology*, vol. 52, no. 7, pp. 533-540, 2017, doi: 10.1080/1478422X.2017.1348761.
- [124] A. Turnbull, "The environmentally small/short crack growth effect: current understanding," *Corrosion Reviews*, vol. 30, no. 1-2, pp. 1-17, 2012, doi: 10.1515/corrrev-2012-0003.
- [125] S. Fouvry, D. Nowell, K. Kubiak, and D. A. Hills, "Prediction of fretting crack propagation based on a short crack methodology," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, no. 6, pp. 1605-1622, 2008, doi: 10.1016/j.engfracmech.2007.06.011.
- [126] G. Härkegård, "Short-crack modelling of the effect of corrosion pits on the fatigue limit of 12% Cr steel," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 38, no. 9, pp. 1009-1016, 2015, doi: 10.1111/ffe.12305.
- [127] M. H. El Haddad, T. H. Topper, and K. N. Smith, "Prediction of non propagating cracks," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 11, no. 3, pp. 573-584, 1979, doi: 10.1016/0013-7944(79)90081-X.
- [128] R. A. Smith and K. J. Miller, "Prediction of fatigue regimes in notched components," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 20, no. 4, pp. 201-206, 1978, doi: 10.1016/0020-7403(78)90082-6.
- [129] Y. Murakami and M. Endo, "Effects of defects, inclusions and inhomogeneities on fatigue strength," *International Journal of Fatigue*, vol. 16, no. 3, pp. 163-182, 1994, doi: 10.1016/0142-1123(94)90001-9.
- [130] D. Angelova, R. Yordanova, and S. Yankova, "On fatigue behaviour of two spring steels. Part II: Mathematical models," *Procedia Materials Science*, vol. 3, pp. 1459-1466, 2014, doi: 10.1016/j.mspro.2014.06.236.
- [131] J. Hoehbusch, S. Bucher, H. Haensel, and J. Scholten, "Evaluation of the fatigue strength of multiphase pump components under corrosive conditions using a short crack fracture mechanics approach," *Engineering Failure Analysis*, vol. 47, pp. 265-272, 2015, doi: 10.1016/j.engfailanal.2014.03.005.

- [132] D. Lee, H. Nishikawa, Y. Oda, and H. Noguchi, "Small fatigue crack growth characteristics and fracture surface morphology of low carbon steel in hydrogen gas," *International Journal of Fracture*, vol. 179, no. 1, pp. 147-156, 2013, doi: 10.1007/s10704-012-9783-2.
- [133] Y. Yamashita and Y. Murakami, "Small crack growth model from low to very high cycle fatigue regime for internal fatigue failure of high strength steel," *International Journal of Fatigue*, vol. 93, pp. 406-414, 2016, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2016.04.016.
- [134] D. J. Bang, L. Q. Tang, and A. Ince, "A modification of UniGrow 2-parameter driving force model for short fatigue crack growth," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 42, no. 1, pp. 45-60, 2019, doi: 10.1111/ffe.12865.
- [135] D. J. Bang, A. Ince, and M. Noban, "Modeling approach for a unified crack growth model in short and long fatigue crack regimes," *International Journal of Fatigue*, vol. 128, pp. 1-15, 2019, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2019.06.042.
- [136] A. Papangelo, R. Guarino, N. Pugno, and M. Ciavarella, "On unified crack propagation laws," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 207, pp. 269-276, 2019, doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.12.023.
- [137] K. Sadananda, M. Nani Babu, and A. K. Vasudevan, "A review of fatigue crack growth resistance in the short crack growth regime," *Materials Science & Engineering: A*, vol. 754, pp. 674-701, 2019, doi: 10.1016/j.msea.2019.03.102.
- [138] K. Sadananda, M. Nani Babu, and A. K. Vasudevan, "The unified approach to subcritical crack growth and fracture," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 212, pp. 238-257, 2019, doi: 10.1016/j.engfracmech.2019.03.010.
- [139] O. M. Herasymchuk, "Relationship between the threshold stress intensity factor ranges of the material and the transition from short to long fatigue crack," *Strength of Materials*, vol. 46, no. 3, pp. 360-374, 2014, doi: 10.1007/s11223-014-9558-2.
- [140] M. Mlikota, S. Schmauder, and Ž. Božić, "Calculation of the Wöhler (S-N) curve using a two-scale model," *International Journal of Fatigue*, vol. 114, pp. 289-297, 2018, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2018.03.018.
- [141] O. P. Ostash, R. V. Chepil, and V. V. Vira, "The assessment of fatigue life of notched components at uniaxial pulsating loading using the fracture mechanics approach," *International Journal of Fatigue*, vol. 105, pp. 305-311, 2017, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2017.09.007.
- [142] U. Zerbst, M. Madia, and D. Hellmann, "An analytical fracture mechanics model for estimation of S-N curves of metallic alloys containing large second phase

- particles,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 82, pp. 115-134, 2012, doi: 10.1016/j.engfracmech.2011.12.001.
- [143] M. Madia, U. Zerbst, and H. T. Beier, “A model for the determination of the fatigue life in technical alloys containing large and small defects,” *Procedia Materials Science*, vol. 3, pp. 493-498, 2014, doi: 10.1016/j.mspro.2014.06.082.
- [144] U. Zerbst, M. Madia, and H. T. Beier, “A model for fracture mechanics based prediction of the fatigue strength: Further validation and limitations,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 130, pp. 65-74, 2014, doi: 10.1016/j.engfracmech.2013.12.005.
- [145] Ю. В. Банахевич, О. Є. Андрейків, та М. Б. Кіт, “Циклічна міцність труб з поверхневими тріщинами,” *Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ*, том 30, № 1, С. 23-28, 2009.
- [146] D. V. Rudavs’kyi, “Evaluation of the residual life of a three-dimensional solid body weakened by a plane fatigue crack under cyclic loading,” *Materials Science*, vol. 51, no. 3, pp. 348-357, 2015, doi: 10.1007/s11003-015-9848-2.
- [147] O. Andrejkiv and R. Lesiv, “Mathematical model for estimating the period of creep-fatigue crack growth in construction materials at high temperature,” *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 1, no. 1, pp. 7-10, 2007.
- [148] O. E. Andreikiv and N. B. Sas, “Fracture mechanics of metallic plates under the conditions of high-temperature creep,” *Materials Science*, vol. 42, no. 2, pp. 210-219, 2006, doi: 10.1007/s11003-006-0073-x.
- [149] O. E. Andreikiv, V. R. Skal’s’kyi, Y. Y. Matviiv, and T. A. Kradinova, “Evaluation of the durability of cracked plates under the conditions of long-term static loading and local creep,” *Materials Science*, vol. 48, no. 1, pp. 36-45, 2012, doi: 10.1007/s11003-012-9470-5.
- [150] О. Є. Андрейків та Н. Б. Сас, “Визначення залишкової довговічності тонкостінних елементів конструкцій в умовах високотемпературної повзучості,” *Праці XIII міжнародного колоквиуму “Механічна втома металів”*, С. 469-474, 2006.
- [151] О. Є. Андрейків, Ю. В. Банахевич, та М. Кіт, “Циклічна міцність тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами,” *Доповіді Національної академії наук України*, № 7, С. 56-62, 2009.
- [152] М. Шата та З. О. Терлецька, “Енергетичний підхід в механіці втомного поширення макротріщин,” у *Механіка Руйнування Матеріалів та Міцність Конструкцій*, том. 2, В. В. Панасюк ред. Львів: Каменяр, 1999, С. 141-148.

- [153] O. E. Andreikiv and M. V. Lishchyns'ka, "Equations of growth of fatigue cracks in inhomogeneous plates," *Materials Science*, vol. 35, no. 3, pp. 355-362, 1999, doi: 10.1007/BF02355479.
- [154] О. Є. Андрейків та Н. Б. Сас, "Математична модель для визначення періоду докритичного поширення тріщин високотемпературної повзучості в твердих тілах," *Доповіді Національної академії наук України*, No. 5, С. 47-52, 2006.
- [155] О. Є. Андрейків, В. Р. Скальський, та І. Я. Долінська, *Заповільнене руйнування матеріалів за локальної повзучості*. Львів: Львівський національний університет ім. Івана Франка, 2017.
- [156] І. М. Панько, *Теоретичні основи інженерних методів для оцінки тріщиностійкості матеріалів і елементів конструкцій*. Львів: Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2000.
- [157] I. M. Pan'ko and N. I. Tim'yak, "Equivalent-strain method and crack vertex advance," *Materials Science*, vol. 25, no. 2, pp. 130-133, 1989, doi: 10.1007/BF00780495.
- [158] V. V. Panasyuk, I. M. Pan'ko, and N. I. Tim'yak, "Approximate determination of the state of stress and strain in an elastoplastic body weakened by cracks," *Materials Science*, vol. 25, no. 6, pp. 593-598, 1990, doi: 10.1007/BF00727086.
- [159] I. M. Pan'ko and N. I. Tim'yak, "Extension of the equivalent stress state method to general-type crack opening," *Materials Science*, vol. 27, no. 4, pp. 371-374, 1992, doi: 10.1007/BF00723227.
- [160] О. Е. Андрейкив та А. И. Дарчук, *Усталостное разрушение и долговечность конструкций*. Киев: Наукова думка, 1992.
- [161] D. J. Hayes and J. G. Williams, "A practical method for determining Dugdale model solutions for cracked bodies of arbitrary shape," *International Journal of Fracture Mechanics*, vol. 8, no. 3, pp. 239-256, 1972, doi: 10.1007/BF00186123.
- [162] М. П. Саврук, *Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами* (Механика разрушения и прочность материалов, т. 2). Киев: Наукова думка, 1988.
- [163] H. Nisitani, N. Kawagoishi, and M. Goto, "Growth behavior of small fatigue cracks and relating problems," in *Handbook of Fatigue Crack Propagation in Metallic Structures*, vol. 1, A. Carpinteri Ed. Amsterdam: Elsevier, 1994, pp. 733-778.

- [164] H. Nisitani and N. Kawagoishi, "Relation between fatigue crack growth law and reversible plastic zone size in Fe-3% Si alloy," *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A*, vol. 50, no. 450, pp. 277-282, 1984, doi: 10.1299/kikaia.50.277.
- [165] O. E. Andreikiv, I. Y. Dolins'ka, and N. V. Yavors'ka, "Estimation of the periods of initiation and propagation of creep-fatigue cracks in thin-walled structural elements," *Materials Science*, vol. 47, no. 3, pp. 273-283, 2011, doi: 10.1007/s11003-011-9393-6.
- [166] О. Є. Андрейків та І. Я. Долінська, "Вплив високотемпературної повзучості на зародження втомних тріщин у тілах біля концентраторів напружень," *Доповіді Національної академії наук України*, No. 4, С. 48-53, 2011.
- [167] S. Y. Yarema and V. V. Popovich, "Influence of the structure and stress concentration on the period of fatigue crack origin in 65G steel," *Materials Science*, vol. 21, no. 2, pp. 133-138, 1985, doi: 10.1007/BF01150629.
- [168] O. E. Andreikiv, I. Y. Dolins'ka, A. R. Lysyk, and N. B. Sas, "Computational model of the propagation of stress-corrosion cracks at high temperatures," *Materials Science*, vol. 52, no. 5, pp. 714-721, 2017, doi: 10.1007/s11003-017-0014-x.
- [169] O. E. Andreikiv, O. V. Hembara, O. T. Tsyru'nyk, and L. I. Nyrkova, "Evaluation of the residual lifetime of a section of a main gas pipeline after long-term operation," *Materials Science*, vol. 48, no. 2, pp. 231-238, 2012, doi: 10.1007/s11003-012-9497-7.
- [170] Y. Murakami, K. Takahashi, and R. Kusumoto, "Threshold and growth mechanism of fatigue cracks under mode II and III loadings," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 26, no. 6, pp. 523-531, 2003, doi: 10.1046/j.1460-2695.2003.00644.x.
- [171] N. Yadzhak, O. Andreykiv, and I. Dolinska, "Calculational Models for Mode II and Mode III Small Fatigue Crack Growth in Structural Elements," *Archives of Applied Mechanics*. [Accepted for publication].
- [172] N. Yadzhak, O. Andreykiv, and Y. Lapusta, "Modelling small fatigue crack propagation under mixed mode II+III loading," *Procedia Structural Integrity*. [Accepted for publication].
- [173] A. E. Andreikiv, "Three-dimensional problems in crack theory for quasibrittle bodies," *Materials Science*, vol. 12, no. 3, pp. 266-270, 1977, doi: 10.1007/BF00722691.

- [174] И. С. Градштейн та И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.
- [175] W. Becker and D. Gross, "About the mode II Dugdale crack solution," *International Journal of Fracture*, vol. 34, no. 1, pp. 65-70, 1987, doi: 10.1007/BF00042125.
- [176] T. M. Lenkovs'kyi, "Fatigue crack-growth resistance of thermally hardened 65G steel under transverse shear," *Materials Science*, vol. 53, no. 2, pp. 200-206, 2017, doi: 10.1007/s11003-017-0063-1.
- [177] R. O. Ritchie, F. A. McClintock, H. Nayeb-Hashemi, and M. A. Ritter, "Mode III fatigue crack propagation in low alloy steel," *Metallurgical Transactions A*, vol. 13, no. 1, pp. 101-110, 1982, doi: 10.1007/BF02642420.
- [178] V. V. Panasyuk, *Limiting equilibrium of brittle solids with fracture* Detroit, MI: Manag. Inform. Serv., 1971.
- [179] H. Nisitani and N. Kawagoishi, "Relation between Fatigue Crack Growth Law and Reversible Plastic Zone Size in Fe-3 Si Alloy," in *VI International Congress on Experimental Mechanics*, 1988, vol. 2, pp. 795-800.
- [180] O. E. Andreikiv and N. B. Sas, "Determination of the period of subcritical growth of creep cracks in steam pipelines," *Materials Science*, vol. 49, no. 5, pp. 624-630, 2014, doi: 10.1007/s11003-014-9655-1.
- [181] О. Андрейків та Н. Сас, "Оцінювання залишкового ресурсу зварних з'єднань паропроводів з тріщинами," *Вісник Тернопільського національного технічного університету*, No. 3, С. 14-20, 2014.
- [182] O. Andreikiv and N. Sas, "Subcritical growth of a plane crack in a three-dimensional body under the conditions of high-temperature creep," *Materials Science*, vol. 44, no. 2, pp. 163-174, 2008, doi: 10.1007/s11003-008-9064-4.
- [183] O. P. Datsyshyn, T. M. Lenkovskyi, and A. Y. Glazov, "Specimen for the determination of fatigue thresholds under cyclic transverse shear," *Materials Science*, vol. 55, no. 4, pp. 492-501, 2020, doi: 10.1007/s11003-020-00330-3.
- [184] B. J. Goodno and J. M. Gere, *Mechanics of Materials*, 9 ed. Canada: Cengage Learning, 2016.
- [185] О. Е. Андрейкив, *Пространственные задачи теории трещин*. Киев: Наукова думка, 1982.
- [186] Ю. Мураками, сост. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений*. Москва: Мир, 1990.

ДОДАТОК А

Список опублікованих праць здобувачки за темою дисертації та
відомості про апробацію*Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:*

1. N. Yadzhak, "Generalization of the equivalent area method for the case of short fatigue cracks in a three-dimensional body," *Visnyk of the Lviv University*, no. 89, Series Mech. Math., pp. 106-122, 2020.
2. O. Andreykiv, O. Hembara, I. Dolinska, Y. Sapuzhak, and N. Yadzhak, "Prediction of residual service life of oil pipeline under non-stationary oil flow taking into account steel degradation," in *Degradation Assessment and Failure Prevention of Pipeline Systems. Lecture Notes in Civil Engineering*, G. Bolzon, G. Gabetta, and H. Nykyforchyn, Eds. Cham: Springer, 2020, pp. 203-216.
3. Y. Lapusta, O. Andreikiv, and N. Yadzhak, "Short crack problem in delayed fracture mechanics," *Procedia Structural Integrity*, vol. 16, pp. 105-112, 2019.
4. O. E. Andreikiv and N. S. Shtayura, "Computational models of fatigue cracks growth in metallic materials under the action of force and physicochemical factors," *Materials Science*, vol. 54, no. 4, pp. 465-476, 2019.
5. O. E. Andreikiv, A. R. Lysyk, N. S. Shtayura, and A. V. Babii, "Evaluation of the residual service life of thin-walled structural elements with short corrosion-fatigue cracks," *Materials Science*, vol. 53, no. 4, pp. 514-521, 2018.
6. O. Andreykiv, N. Shtayura, and R. Yarema, "Energy-based approach to evaluation of short fatigue crack growth rate in plates," *Strength of Materials*, vol. 49, no. 6, pp. 778-787, 2017.
7. С. Штаюра та Н. Штаюра, «Аналіз впливу водню на механічні характеристики середньокарбоневих сталей,» *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск «Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів», № 12, С. 58-63, 2018.*

8. С. Штаюра, Р. Костів, І. Вергун, та **Н. Штаюра**, «Вплив водню за непропорційного двовісного навантаження на деформування та міцність сталі 20,» *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск «Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів»*, № 11, С. 76-81, 2016.
9. С. Штаюра, Р. Костів, І. Вергун, та **Н. Штаюра**, «Побудова діаграм руйнування сталі 20 за двовісного навантаження циліндричних порожнинних зразків і дії водню,» *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск «Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів»*, № 10, С. 170-175, 2014.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

10. О. Є. Андрейків, Ю. М. Лапуста, та **Н. С. Яджак**, «Визначення залишкового ресурсу тонкостінних елементів конструкцій з короткими тріщинами,» *VI Міжнародна науково-технічна конференція «Пошкодження матеріалів під час експлуатації, методи його діагностування і прогнозування»*, Тернопіль, 24-27 вересня 2019, С. 139-142.
11. Ю. Лапуста, О. Андрейків, та **Н. Штаюра**, «Оцінка залишкового ресурсу елементів конструкцій з механічно малими тріщинами за дії силових і фізико-хімічних факторів,» *Сучасні проблеми механіки і математики*, Львів, 22-25 травня 2018, том 2, С. 223-224.
12. **Н. С. Штаюра**, «Визначення залишкової міцності тонкостінних елементів конструкцій з короткими тріщинами,» *Наукові нотатки*, том 57, С. 187-189, 2017.
13. I. Panko, S. Shtayura, O. Panko, and **N. Shtayura**, «Biaxial tension of the plate softened by the Griffith crack» *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*, no. 4, pp. 88-96, 2017.