АНОТАЦІЯ

Глова А.Р. Розробка програмного та математичного забезпечення для моделювання еволюційних процесів. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки». - Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2022.

Комп'ютерне моделювання, зокрема проведення обчислювальних експериментів, є важливим підходом до вивчення складних процесів та явищ. Такі дослідження, з одного боку, потребують розробки нових та вдосконалення вже відомих математичних моделей, а також вимагають ефективних методів для чисельного розв'язування прикладних задач. З іншого боку, щоб отримати якісні результати необхідно реалізувати відповідне обчислювальне середовище. При цьому складність математичних моделей зумовлює оперування значними обчислювальними ресурсами, вимагаючи розробки нових підходів до побудови програмного забезпечення.

Еволюційні процеси характеризуються неперервною зміною станів системи з бігом часу. У багатьох випадках їхніми математичними моделями є мішані задачі для рівнянь із частинними похідними другого порядку зі сталими коефіцієнтами. У дисертації для побудови розв'язків таких задач застосовано комбінацію методу крайових інтегральних рівнянь (КІР) із перетворенням Лаґерра за часовою змінною.

Перший етап зазначеного підходу полягає у зведенні мішаних задач до еволюційних крайових інтегральних рівнянь (ЕКІР), для чого розв'язок

таких задач подано поверхневими потенціалами, які також залежать від часової змінної. У випадку хвильового рівняння з цією метою використано формулу Кірхгофа (прямий підхід) чи один із хвильових потенціалів простого або подвійного шару (непрямий підхід). Аналогічні підходи можна застосувати для зведення задач теплопровідності до подібних ЕКІР, але вже за допомогою відповідних теплових потенціалів.

Результатом переходу до ЕКІР є зменшення на одиницю розмірності досліджуваної задачі, оскільки треба відшукати невідомі густини поверхневих потенціалів. Ця властивість є актуальною для тривимірних за просторовими координатами задач, особливо при розгляді необмежених областей.

На наступному етапі усі раніше отримані ЕКІР за допомогою перетворення Лаґерра за часовою змінною зведено до послідовностей КІР, які завдяки своїй спеціальній структурі допускають покрокове розв'язування. А саме, на кожному кроці в таких послідовностях інтегральний оператор лівої частини є один і той самий для усіх рівнянь, а права частина рекурентно залежить від розв'язків КІР, знайдених на попередніх кроках. Крім того, оскільки результати перетворення Лаґерра теплових і хвильових потенціалів є подібними, то і отримані КІР також є однотипними.

Розглянутий процес зведення мішаних задач до послідовностей відповідних КІР є подібним для еволюційних задач різних типів. У дисертації основні моменти, які пов'язані зі знаходженням чисельних розв'язків таких задач, продемонстровано на прикладі мішаної задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою. Зокрема подано конкретний вигляд КІР, виведено розрахункові формули для чисельних розв'язків та виконано обґрунтування відповідних математичних аспектів.

Для чисельного розв'язування усіх отриманих КІР застосовано метод

Гальоркіна, а саме його реалізацію у вигляді методу крайових елементів (МКЕ). Комбінація перетворення Лаґерра і МКЕ дає змогу узагальнити обчислювальні схеми для усіх розглянутих у дисертації еволюційних задач і сформулювати функціональні вимоги до розробки спеціалізованого програмного комплексу MultiMathFramework (MMF), придатного до виконання обчислювальних експериментів стосовно нестаціонарних процесів різної природи.

На основі отриманих вимог у дисертації спроєктовано архітектуру фреймворку, яка, з одного боку, враховує спільні властивості обчислювальних схем для різних задач із предметної області, а з іншого – передбачає розширення програмного забезпечення за рахунок нових модулів, які модифікують раніше визначені алгоритми чи реалізують обчислювальні схеми для нових задач.

Для досягнення максимальної гнучкості системи застосовано розподіл програмних модулів на чотири рівні. Кожен із рівнів утворюють програмні модулі, які логічно пов'язані між собою спільним видом функціональності. Разом із тим, залежність між модулями різних рівнів є обмеженою і слабкою. Запропонована архітектура дає змогу модифікувати окремі модулі незалежно від інших частин програми, розширюючи фреймворк на інші класи еволюційних задач.

Перший рівень фреймворку утворюють компоненти, які формують інтерфейси користувача. Зокрема визначено способи введення вхідних даних задачі як із використанням графічного інтерфейсу, так і командного рядка. Їх взаємодію із іншими частинами системи спроєктовано максимально незалежно із використанням проміжного рівня ядра. Користувач застосовує ці компоненти також для запуску процесу обчислень із вибраними параметрами, що зберігаються в окремому конфігураційному файлі задачі.

Крім того, компонентами першого рівня є відповідні інтерфейси для модулів обробки даних. Це, зокрема, інтерфейс для генерування множини крайових елементів, які використовують для наближення межі області і при дискретизації інтегральних операторів у програмній реалізації МКЕ. Також користувачу надано інтерфейси модулів, які дають змогу аналізувати отримані чисельні результати і архівувати їх для подальшого використання. Зазначені інтерфейси передбачають просте внесення змін при розширенні фреймворку на нові задачі.

Рівень ядра є центральною частиною фреймворку. Ядро складається із завантажувача модулів розв'язування задач та бібліотеки базових класів. Головну частину класів становлять абстрактні типи, що визначають базові сутності та основні алгоритми обчислювальних схем, які відповідають задачам із предметної області.

Класи ядра побудовано з дотриманням принципу інверсії залежностей між відповідними програмними абстракціями. Для утворення потрібних залежностей між типами розроблено спеціальний механізм на основі шаблону ін'єкції залежностей. Його налаштування виконують за допомогою конфігураційного файлу. Внаслідок такого підходу ядро не залежить від інших рівнів і є компонентом фреймворку, який не потребує модифікації при розширенні.

У бібліотеці ядра також визначено інфраструктурні елементи фреймворку. З метою забезпечення гнучкості та розділення функціональності типів відповідні базові класи побудовано з використанням шаблонів проєктування Template method, Strategy, Factory method, Bridge.

У фреймворку також окремий рівень обробки даних утворюють компоненти, які задають спільні для усіх задач допоміжні алгоритми, а саме генерування крайових елементів, візуалізацію розв'язків, обчислення їхніх

апостеріорних похибок та конвертування результатів у різні формати даних для взаємодії із зовнішніми системами.

Програмне забезпечення рівня розв'язування задач містить модулі для отримання розв'язків задач, які зареєстровані у фреймворку. Цей програмний код є реалізацією конкретних алгоритмів і чисельних методів, які застосовуються на різних етапах обчислювальної схеми конкретної задачі з предметної області фреймворку. На цьому рівні також впроваджують нові модулі при розширенні фреймворку новими задачами і чисельними методами.

Попри виявлені для задач із предметної області фреймворку загальні закономірності обчислювальних схем, кожна з них має відмінності, які випливають із подання розв'язку задач та вигляду залежних від часової змінної потенціалів. У дисертації детально проаналізовано властивості поверхневих потенціалів та асоційованих із ними крайових операторів, отриманих після застосування перетворення Лаґерра. Також розглянуто апроксимаційні скінченновимірні простори, в яких відповідно до методу Гальоркіна-МКЕ виконано дискретизацію крайових операторів.

Завдяки спроєктованій архітектурі, програмний код, в якому локалізовані відмінності окремих задач, є відносно невеликим за обсягом. В основному це модулі, які відповідають за обчислення матриць отриманих систем алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Оскільки для усіх задач із предметної області ядра поверхневих потенціалів мають особливості при співпадінні аргументів, то для обчислення відповідних елементів матриць СЛАР розроблено алгоритми, основані на адитивному виділенні таких особливостей, та виведено відповідні розрахункові формули.

Після висвітлення основних архітектурних та алгоритмічних аспектів фреймворку розглянуто реалізацію запропонованих підходів на прикладі

побудови модуля розв'язування згаданої раніше задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою. Послідовно показано використання інфраструктурних елементів, реєстрацію задачі та її активацію контейнером залежностей у ядрі фреймворку. Далі продемонстровано застосування базових класів та інтерфейсів ядра з метою конкретизації функціональностей для знаходження наближеного розв'язку, які є специфічними для цієї задачі. Додатково запропоновано допоміжні механізми фреймворку, що доступні при дослідженні різних типів задач.

Окрема увага приділена математичному обґрунтуванню ключових аспектів запропонованих підходів. Для цього введено основні функційні простори, сформульовано задачу у вагових просторах Лебега та визначено поняття сильного розв'язку мішаної задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою. Доведено теореми про існування і єдиність її розв'язку, а також його неперервну залежність від вхідних даних.

З метою демонстрації прикладного застосування розглянутого математичного і програмного забезпечення у завершальній частині дисертації подано результати серії чисельних експериментів для еволюційних задач. Вони підтверджують коректність побудованої теорії та показують ефективність розробленої архітектури фреймворку та його програмної реалізації.

Ключові слова: мішана задача для еволюційного рівняння, перетворення Лаґерра, крайові інтегральні рівняння, метод крайових елементів, архітектура програмного забезпечення, фреймворк, програмний модуль, шаблон проєктування, бібліотека класів, абстракція, інверсія залежностей, ін'єкція залежностей, рефлексія, інтерфейс, об'єктно-орієнтоване програмування.

ABSTRACT

Hlova A.R. Development of the software and mathematical instruments for modelling of evolutionary processes. - Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Dissertation for obtaining a scientific degree of a Ph.D. in specialty 122 “Computer science”. - Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2022.

Computer modeling, in particular conducting computational experiments, is an important approach for studying complex processes and phenomena. On the one hand, such research needs the development of new mathematical models and improvement of already known ones and requires efficient methods for numerical solution of applied problems. On the other hand, it is necessary to implement an appropriate computing environment to obtain quality results. At the same time, the complexity of mathematical models determines the need to operate with significant computing resources and requires new approaches for software development.

Evolutionary processes are characterized by continuous system state changes over time. In many cases, their mathematical models are mixed problems for second order differential equations with constant coefficients. In the dissertation, a combination of boundary integral equations (BIE) method with the Laguerre transform over the time variable is applied to obtain solutions to such problems.

The first stage of this approach consists in reducing mixed problems to evolutionary boundary integral equations (EBIE). The solution to such problems is represented with surface potentials, which also depend on the

time variable. In the case of a wave equation, the Kirchhoff formula (direct approach) or one of the single or double layer wave potentials (indirect approach) is used for this purpose. Analogous approaches can be used to reduce heat problems to similar EBIE but with the help of the corresponding heat potentials.

The result of the transition to EBIE is a reduction of the studied problem by a one-dimensional unit since it is required to find unknown densities of the surface potentials. This property is relevant for three-dimensional problems in spatial coordinates, especially when considering unbounded domains.

At the next stage, with the Laguerre transform over the time variable, all previously obtained EBIE are reduced to the sequences of BIE, which allow step-by-step solution due to their special structure. Namely, at each step in this sequence, the integral operator of the left part is the same for all equations, and the right part recurrently depends on the solutions of BIE, which are found in the previous steps. Furthermore, since the results of the Laguerre transform of heat and wave potentials are similar, the obtained BIE are also of the same type.

The considered process of reduction of mixed problems to sequences of corresponding BIE is similar for evolutionary problems of different types. In the dissertation, the main points, which relate to finding numerical solutions to such problems, are demonstrated in the example of a mixed problem for the wave equation with dynamic boundary condition. In particular, a specific representation of BIE is demonstrated, calculation formulae for numerical solutions are derived and justification of relevant mathematical aspects is performed.

Galerkin method is used to find solutions of all obtained BIE, namely its implementation in the form of boundary element method (BEM). Such

a combination of the Laguerre transform and BEM allows the generalization of computational schemes for all evolutionary problems considered in the dissertation and formulation of functional requirements for the development of specialized software, called MultiMathFramework (MMF), which is suitable for conducting computational experiments regarding various non-stationary processes.

Based on the requirements obtained in the dissertation, the architecture of the framework is designed. On the one hand, it takes into account the common properties of computational schemes for different domain problems, and on the other hand – anticipates the expansion of the software through new modules, which modify previously defined algorithms or implement computational schemes for new problems.

To ensure the maximum flexibility of the system, the division of software modules into four levels is applied. Each of these levels is formed by program modules, which are logically coupled by a common type of functionality. However, the dependency between modules at different levels is limited and weak. The proposed architecture allows the modification of individual modules independently from other parts of the program, extending the framework with other classes of evolutionary problems.

The first level of the framework is constructed from components, which form user interfaces. In particular, methods for entering problem input data using both graphical interface and command line are defined. Their interaction with other parts of the system is designed with a high degree of independence using the intermediate kernel level. The user also applies these components to run the calculation process with the selected parameters, which are stored in a separate problem configuration file.

Furthermore, corresponding interfaces for the data processing modules are

components of the first level. In particular, one of them is an interface for generating a set of boundary elements, which are used to generate a surface approximation and discretize integrated operators in the software implementation of BEM. Also, the user is provided with module interfaces, which allow the analysis of obtained numerical results and their archiving for future use. These interfaces provide the ability to simply apply changes when extending the framework with new problems.

The kernel level is the central part of the framework. It consists of a loader of problem solver modules and a base class library. Abstract types are the main part of classes, which define base entities and the main algorithms of computational schemes, which correspond to the domain problems.

Kernel classes are constructed in compliance with the dependency inversion principle between corresponding program abstractions. A special mechanism is designed to create required dependencies between types, which is based on the dependency injection pattern. Its setup is performed using the configuration file. As a result of this approach, the kernel doesn't depend on other levels and it is a component of the framework, which doesn't require modifications during expansion.

The infrastructure elements of the framework are also defined in the base class library. In order to provide flexibility and separation of functionality for types, the corresponding base classes are built with patterns, such as Template method, Strategy, Factory method, Bridge.

In the framework, a separate data processing level is formed by components, which for all problems define common auxiliary algorithms, namely the generation of boundary elements, visualization of solutions, calculation of their a posteriori errors and conversion of results into different data formats for interaction with external systems.

The software of the problem solver level contains modules for obtaining solutions to the problems, which are registered in the framework. This program code is the implementation of specific algorithms and numerical methods, which are applied at different stages of a computational scheme for a specific domain problem. New modules are also composed at this level when extending the framework with new problems and numerical methods.

Despite the detected general regularities of computational schemes for problems of the framework domain, each of them has differences, which follow from the representation of the solution to problems and the form of time-dependent potentials. The properties of surface potential and associated boundary operators obtained after the application of the Laguerre transform are analyzed in the dissertation in detail. Also, approximation finite spaces are considered, in which the discretization of the obtained boundary operators is performed, according to Galerkin-BEM method.

Due to the designed architecture, the amount of program code, where the differences in individual problems are localized, is relatively small. In particular, these are modules, which are responsible for the calculation of the matrices of the obtained systems of algebraic equations (SLAE). Since the kernels of the surface potentials have singularities when arguments coincide for all domain problems, algorithms based on the additive solving of such singularities are developed to calculate the corresponding elements of the matrices of SLAE and corresponding calculation formulae are derived.

After highlighting the main architectural and algorithmic aspects of the framework, the implementation of the proposed approaches is considered in the example of building a module for solving the previously mentioned problem for the wave equation with dynamic boundary condition. The use of infrastructure elements, registration of the problem and its activation by the dependency

injection container in the framework kernel are consistently shown. Next, the application of base classes and kernel interfaces is demonstrated in order to specify the functionalities for finding an approximate solution, which are specific to this problem. Additionally, auxiliary mechanisms of the framework are proposed, which are available for exploring different types of problems.

Particular attention is paid to the mathematical justification of key aspects of the proposed approaches. For this purpose, the basic functional spaces are introduced, the problem is formulated in Lebesgue weight spaces and the concept of a strong solution to a mixed problem for the wave equation with dynamic boundary condition is defined. The theorems on the existence and uniqueness of its solution, as well as its continuous dependence on the input data, are proved.

In order to demonstrate the application of the considered mathematical instruments and software in the final part of the dissertation, the results of a series of numerical experiments for evolutionary problems are presented. They confirm the correctness of the constructed theory and show the effectiveness of the developed architecture of the framework and its software implementation.

Keywords: mixed problem for evolutionary equation, Laguerre transform, boundary integral equations, boundary element method, software architecture, framework, program module, pattern, class library, abstraction, dependency inversion, dependency injection, reflection, interface, object-oriented programming.

Список публікацій здобувача за темою дисертації.

Статті у виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз даних Web of Science, Scopus:

1. Hlova A.R. Coupling of Laguerre Transform and Fast BEM for solving Dirichlet initial-boundary value problems for the wave equation / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // J. of Numerical and Appl. Math. — 2018. — N 2 (128). — P. 42–60.
2. Chapko R. Wave propagation from lateral Cauchy data using a boundary element method / Roman Chapko, B. Tomas Johansson, Yuriy Muzychuk, Andriy Hlova // Wave Motion. – Vol.91, November 2019, Article 102385. – https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102385.
3. Hlova A.R. On solution of the initial-value problem for homogeneous wave equation with dynamic boundary condition in weighted Lebesgue spaces / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // J. of Numerical and Appl. Math. — 2021. — N 3 (137). — P. 76–98.

Статті у фахових виданнях України:

4. Глова А. Р. Чисельне розв'язування початково-крайових задач для хвильового рівняння із застосуванням формули Кірхгофа та перетворення Лаґерра / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук, А. О. Музичук // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2019. – Вип. 27. – С. 18-33.
5. Глова А. Р. Система MultiMathFramework для розв'язування початково-крайових задач з використанням методу граничних елементів та перетворення Лаґерра / А. Р. Глова, О. В. Кір // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2020. – Вип. 28. – С. 27-44.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Hlova A. On Laguerre-Fast-BEM for Robin initial-boundary value problems for the wave equation / A. Hlova, A. Muzychuk // Proceedings of the International Conference "Ukrainian Conference on Applied Mathematics" dedicated to the 100th birth anniversary of Professor Olexandr Kostovskiy, 28-30 September, 2017, Lviv. — Lviv: PAIS, 2017. — P. 59–60.
7. Глова А. Р. Чисельне розв'язування початково-крайової задачі Робіна для однорідного хвильового рівняння / А. Р. Глова // Матеріали Міжнародної студентської наукової конференції з прикладної математики та комп'ютерних наук (СНКПМКН-2018), 2018, Львів. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2018. – С. 19–20.
8. Глова А. Р. Про застосування потенціалів із запізненням в початково-крайових задачах для хвильового рівняння / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук // Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2018)", 26-28 вересня 2018, Львів. — Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2018. — С. 39–42.
9. Глова А. Р. Про розв'язування задач для хвильового рівняння з імпедансними крайовими умовами з використанням перетворення Лаґерра і МГЕ / А. Р. Глова, С. В. Літинський, А. О. Музичук // Матеріали XXV Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2019)", 24-27 вересня 2019, Львів. — Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2019. — С. 52–56.
10. Hlova A. R. Numerical solution of initial boundary-value problem for homogeneous wave equation with dynamic boundary conditions using Laguerre transform on time variable and boundary element method. /

A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Y. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // Proceedings of XXVI International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), 2021, Tbilisi. — IEEE, 2021. — P. 222-227. — https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552285.

11. Глова А. Р. Про розв'язування залежних від часу граничних інтегральних рівнянь у початково-крайових задачах для хвильового рівняння у вагових просторах Лебега / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук, А. О. Музичук // Матеріали XXVI Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук (APAMCS-2021)", 27-28 вересня 2021, Львів. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2021. — С. 80-84.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розглянуто математичні моделі еволюційних процесів на основі мішаних задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку зі сталими коефіцієнтами, розроблено комбінований метод крайових елементів (МКЕ) і перетворення Лаґерра для їхнього чисельного розв'язування та побудовано відповідне програмне забезпечення. В рамках цих досліджень отримано такі основні результати.

1. Узагальнено обчислювальні схеми математичних моделей, які основані на поєднанні перетворення Лаґерра і МКЕ для чисельного розв'язування мішаних еволюційних задач у тривимірних областях зі складною геометрією.
2. Дотримуючись підходу ін'єкції залежностей з використанням абстрактних типів, розроблено чотирирівневу архітектуру програмного комплексу, яка забезпечує його розширення новими задачами і чисельними методами без переробки існуючого програмного коду.
3. Відповідно до концепції, закладеної в основу архітектури комплексу, для усіх досліджуваних математичних моделей розроблено модулі розв'язування відповідних мішаних задач і, крім того, продемонстровано модифікацію відповідних модулів для розв'язування нових класів задач.
4. Обґрунтовано математичну модель мішаної задачі для однорідного хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою, а також досліджено розв'язки відповідних КІР методом Гальоркіна-МКЕ.
5. Отриманими результатами чисельних експериментів підтверджено ко-

ректність проведених теоретичних досліджень та ефективність запропонованих підходів до побудови спеціалізованого програмного комплексу.

Отримані теоретичні результати та побудований програмний комплекс можуть бути використані для моделювання еволюційних процесів різної природи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. *Линейные уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1964.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
3. Галазюк В. А. Метод поліномів Чебишева — Лагера в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами / В. А. Галазюк // Доп. АН УРСР. — 1981. — N 1. — С. 3–7.
4. Глова А. Р. Про застосування потенціалів із запізненням в початково-крайових задачах для хвильового рівняння / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук // Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2018)", 26-28 вересня 2018, Львів. — Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2018. — С. 39–42.
5. Глова А. Р. Про розв'язування задач для хвильового рівняння з імпедансними крайовими умовами з використанням перетворення Лаґерра і МГЕ / А. Р. Глова, С. В. Літинський, А. О. Музичук // Матеріали XXV Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2019)", 24-27 вересня 2019, Львів. — Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2019. — С. 52–56.
6. Глова А. Р. Про розв'язування залежних від часу граничних інтегральних рівнянь у початково-крайових задачах для хвильового рівняння у вагових просторах Лебега / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Му-

зичук, А. О. Музичук // Матеріали XXVI Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та комп’ютерних наук (APAMCS-2021)”, 27-28 вересня 2021, Львів. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2021. — С. 80-84.

7. Глова А. Р. Система MultiMathFramework для розв’язування початково-крайових задач з використанням методу граничних елементів та перетворення Лаґерра / А. Р. Глова, О. В. Кір // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2020. – Вип. 28. – С. 27-44.
8. Глова А. Р. Чисельне розв’язування початково-крайових задач для хвильового рівняння із застосуванням формули Кірхгофа та перетворення Лаґерра / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук, А. О. Музичук // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2019. – Вип. 27. – С. 18-33.
9. Глова А. Р. Чисельне розв’язування початково-крайової задачі Робіна для однорідного хвильового рівняння / А. Р. Глова // Матеріали Міжнародної студентської наукової конференції з прикладної математики та комп’ютерних наук (СНКПМКН-2018), 2018, Львів. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2018. – С. 19–20.
10. Ладыженская О.Я. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
11. Літинський С. В. Про поєднання перетворення Лагера і методу граничних елементів для розв’язування інтегральних рівнянь запізнюючих потенціалів / С. В. Літинський, Ю. А. Музичук, А. О. Музичук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — [2017].
12. Літинський С. В. Розв’язування мішаних задач для хвильового рівняння з використанням запізнюючих поверхневих потенціалів та перетворення Лаґера / С. В. Літинський, А. О. Музичук // Мат. сту-

дії. — 2015. — Т. 44. — N 2. — С. 185–203.

13. Людкевич И. В. Численное решение краевых задач для волнового уравнения / И. В. Людкевич, А. Е. Музычук. — Львов: ЛГУ, 1990. — 80 с.
14. Людкевич Й. В. Чисельне розв'язування крайової задачі Діріхле для рівняння теплопровідності методами інтегральних перетворень та інтегральних рівнянь у випадку незамкнутих осесиметричних поверхонь / Й. В. Людкевич, Р. Б. Скасків // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 1989. — N 31. — С. 2–8.
15. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы/Г.И.Марчук, В.И.Агошков. — М.: Наука, 1981. — 416 с.
16. Мартін Р. Чиста архітектура: Мистецтво розроблення програмного забезпечення / пер. з англ. І. Бондар-Терещенко. — Харків: Вид-во "Ранок": Фабула, 2021. — 368 с.
17. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М.: Наука, 1983. — 424 с.
18. Пасичнык Р. М. Численное решение гранично-временного интегрального уравнения типа волнового потенциала: интегральные уравнения в прикладном моделировании / Р. М. Пасичнык // Тез. докл. 2-й респ. науч.-техн. конф. — Киев, 1986. — С. 175–176.
19. Положий Г. Н. Уравнения математической физики / Г. Н. Положий. — М.: Высшая школа, 1964. — 560 с.
20. Пучка В.А. Входной язык пакета программ АМИР // Численное решение граничных задач математической физики на незамкнутых поверхностях методом интегральных уравнений / Львов. ун-т. Львов, 1988. -С.48-65. Деп. в УкрНИИНТИ 16.12.88, N2987-Ук88.
21. Хапко Р.С, Переймибіда А.А. Метод потенціалів розв'язування початково-крайових задач для телеграфного рівняння на площині //

Теоретична електротехніка.- 1996.- Вип. 53.- С.73-82.

22. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач / Г. А. Шинкаренко. — К.: НМК ВО, 1991. — 88 с.
23. AcousticBEM. – https://github.com/fjargsto/abem.
24. Ballani J. Numerical solution of exterior Maxwell problems by Galerkin BEM and Runge — Kutta convolution quadrature / J. Ballani, L. Banjai, S. Sauter, A. Veit // Numer. Math. — 2013. — N 123. — P. 643–670.
25. Bamberger A. Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retarde de la diffraction d'une onde acoustique (I) / A. Bamberger, T. Ha Duong // Math. Methods Appl. Sci. — 1986. — N 8 (3). — P. 405–435.
26. Bamberger A. Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigide / A. Bamberger, T. Ha Duong // Math. Methods Appl. Sci. — 1986. — N 8. — P. 598–608.
27. Banjai L. Convolution quadrature for the wave equation with a nonlinear impedance boundary condition. / L. Banjai, A. Rieder // Mathematics of Computation — Volume 87. — P. 1783-1819; doi:10.1090/mcom/3279
28. Banjai L. Time-domain Dirichlet-to-Neumann map and its discretization / L. Banjai // IMA J. Numer. Analysis. — 2014. — N 34. — P. 1136–1155.
29. Bebendorf M. Hierarchical matrices: a means to efficiently solve elliptic boundary value problems / M. Bebendorf. — Springer Science & Business Media, 2008.
30. BEM++. – https://gow.epsrc.ukri.org/NGBOViewGrant.aspx?GrantRef=EP/I030042/1.
31. BESLE. – https://researchportal.port.ac.uk/en/publications/besle-boundary-element-software-for-3d-linear-elasticity.
32. Bempp. – http://bempp.com.

33. Bruno O.P. "Regularized integral equations and fast high-order solvers for sound-hard acoustic scattering problems"/ O.P. Bruno, T. Elling and C. Tur. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 91, no. 10, pp. 1045-1072, 2012.

34. Chapko R. On a boundary integral solution of a lateral planar Cauchy problem in elastodynamics/R. Chapko, B. Johansson, L. Mindrinos//J.of Comp.and Appl.Math. – Vol. 367, March 2020, 112463.– https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112463

35. Chapko R. Numerical solution of the Dirichlet initial boundary value problem for the heat equation in exterior 3-dimensional domains using integral equations / R. Chapko, B. Johansson // J. of Eng. Math., Springer. — 2016. — P. 17.

36. Chapko R. On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations / R. Chapko, R. Kress // Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications. Ser. in Math. Analysis and Applications. — 2000. — N 2. — P. 55–69.

37. Chapko R. A projected iterative method based on integral equations for inverse heat conduction in domains with a cut/ Roman Chapko, B. Tomas Johansson, Vasyl Vavrychuk//Inverse Problems. — Vol. 29, Number 6, Article 065003. – https://doi.org/10.1088/0266-5611/29/6/065003.

38. Chapko R. Wave propagation from lateral Cauchy data using a boundary element method / Roman Chapko, B. Tomas Johansson, Yuriy Muzychuk, Andriy Hlova // Wave Motion. – Vol.91, November 2019, Article 102385.– https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102385.

39. Colton D. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, 3rd edn/

D.Colton , R.Kress // Applied mathematical sciences. Springer, Berlin.— 2013.

40. Costabel M. Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results / M. Costabel // SIAM J. on Math. Analysis. — 1988. — N 19. — P. 613–626.
41. Danson D., Brebbia C.A., Adey R.A. The BEASY system / D. Danson, C. A. Brebbia, R. A. Adey // Advances in Engineering Software. – 1982. – N 2(4). – P. 68-74. – https://doi.org/10.1016/S0141-1195(82)80056-9.
42. Daursen S., Seemann M. Dependency Injection Principles, Practices, and Patterns / S. Daursen, M. Seemann. – Manning Publications Co., 2019. – 552 p. – ISBN: 9781617294730.
43. Dautray R., Lions J.L. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology / Functional and Variational Methods, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. – 1988. - Vol.2.
44. Dautray R. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology / R. Dautray, J. L. Lions. — Berlin: Springer-Verlag, 1992. — Vol. 5: Evolution problems I. — 742 p.
45. Dautray R. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology / R. Dautray, J. L. Lions. — Berlin: Springer-Verlag, 1992. — Vol. 4: Integral Equations and Numer. Methods. — 493 p.
46. Davies P. J. Stability and convergence of collocation schemes for retarded potential integral equations / P. J. Davies, D. B. Duncan // SIAM J. Numer. Anal. — 2004. –N 42. — P. 1167–1188.
47. Dominguez V. Some properties of layer potentials and boundary integral operators for wave equation / V. Dominguez, F.-G. Sayas // J. of Integral Equations and Applications. — 2013. — N 25 (2). — P. 253–294.
48. Gamma E. Design Patterns: Elements of Reusable Object-Oriented

Software / E. Gamma., R. Helm., R. Johnson., J. Vlissides. — Addison-Wesley Professional Computing Series, 1994. — ISBN: 0-201-63361-2.

49. Hunt Andrew. The Pragmatic Programmer: From Journeyman to Master / Andrew Hunt, David Thomas. — Addison Wesley, 1999. — ISBN: 0-201-61622-X.
50. Hackbusch W. Hierarchical matrices: algorithms and analysis / W. Hackbusch // Springer Ser. in Computational Math. — Vol. 49. — 2015. — 511 p.
51. Ha-Duong T. On retarded potential boundary integral equations and their discretisation / T. Ha-Duong // Topics in computational wave propagation. Direct and inverse problems. — Berlin: Springer-Verlag, 2003. — P. 301–336.
52. Hassell M. A new and improved analysis of the time domain boundary integral operators for acoustics / M. Hassell, T. Qiu, T. Sanchez-Vizuet, F.-J. Sayas // Dep. of Math. Sciences. — 2015. — P. 1–22.
53. Hassell M. Convolution quadrature for wave simulations / M. Hassell, F.-J. Sayas. // Numer. Simulation in Physics and Engineering. — 2016. — N 9. — P. 71–75.
54. Hlova A. R. Coupling of Laguerre Transform and Fast BEM for solving Dirichlet initial-boundary value problems for the wave equation / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // J. of Computational and Appl. Math. – 2018. – N 2 (128). – P. 42–60.
55. Hlova A. R. Numerical solution of initial boundary-value problem for homogeneous wave equation with dynamic boundary conditions using Laguerre transform on time variable and boundary element method. / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Y. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // Proceedings of XXVI International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave

Theory (DIPED), 2021, Tbilisi. — IEEE, 2021. — P. 222-227. — https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552285.

56. Hlova A. On Laguerre-Fast-BEM for Robin initial-boundary value problems for the wave equation / A. Hlova, A. Muzychuk // Proceedings of the International Conference “Ukrainian Conference on Applied Mathematics” dedicated to the 100th birth anniversary of Professor Olexandr Kostovskiy, 28-30 September, 2017, Lviv. — Lviv: PAIS, 2017. — P. 59–60.
57. Hlova A.R. On solution of the initial-value problem for homogeneous wave equation with dynamic boundary condition in weighted Lebesgue spaces / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // J. of Numerical and Appl. Math. — 2021. — N 3 (137). — P. 76–98.
58. Hsiao G. C. Boundary integral equations / G. C. Hsiao, W. L. Wendland // Appl. Math. Sciences. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. — 620 p.
59. Hsiao G. C. Time-Domain Boundary Integral Methods in Linear Thermoelasticity / G. C. Hsiao, T. Sánchez-Vizuet // SIAM J.on Math. Analysis –2020.— Vol. 52, Iss. 3. — doi: 10.1137/19M1298652
60. Illyashenko L.N. "Spectral Surface Integral Equation method for plasmonic nanostructures"/ L. N. Illyashenko // 2019 XXIVth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), pp. 40-44, September 2019.
61. Jacobson I. Unified Software Development Process/ Ivar Jacobson, Grady Booch, James Rumbaugh – Addison-Wesley, 1999.
62. Jung B. H. Time and frequency domain solutions of EM problems using integral equations and a hybrid methodology / B. H. Jung, T. K. Sarkar, Y. Zhang et al. — 2010. — 485 p.
63. Keilson J. The bilateral Laguerre transform / J. Keilson, W. Nunn, U. Sumita // Appl. Math. and Computation. — 1981. — Vol. 8. — Iss. 2. —

P. 137–174.

64. Kielhorn L. Convolution quadrature method-based symmetric Galerkin boundary element method for 3-D elastodynamics / L. Kielhorn, M. Schanz // Internat. J. Numer. Methods Engrg. — 2008. — N 76. — P. 1724–1746.
65. Laliena A.R., Sayas F.-J. *Theoretical aspects of the application of convolution quadrature to scattering of acoustic waves*// Numer. Math. –2009. – 112(4). – P. 637-678.
66. Laliena A. R. A distributional version of Kirchhoff's formula / A. R. Laliena, F. J. Sayas // J. of Math. Analysis and Applications. — 2009. — N 1. — P. 197–208.
67. Lions J.L. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications/ J.L.Lions, E.Magenes, vol.1. – Berlin: Springer, 1972. — 374 p.
68. Litynskyy S. On the generalized solution of the initial-boundary value problems with Neumann condition for the wave equation by the use of retarded double layer potential and the Laguerre transform / S. Litynskyy, A. Muzychuk // J. of Computational and Appl. Math. — 2016. — N 2 (122). — P. 21–39.
69. Litynskyy S. On the numerical solution of the initial boundary value problem with Neumann condition for the wave equation by the use of the laguerre transform and boundary elements method / S. Litynskyy, Y. Muzychuk, A. Muzychuk // Acta Mechanica et Automatica, The J. of Bialystok Techn. Univ. — Vol. 10. — N 4. — 2016. — P. 285–290.
70. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. I/C. Lubich // Numerische Mathematik. — 1988. — N 52(2). — P. 129–145.
71. Martin R. C. The Dependency Inversion Principle / R. C. Martin. // C++ Report — SIGS Publications Group. — 1996.
72. MatLab. – https://www.mathworks.com/products/matlab.html.

73. Messner M. Fast Boundary Element Methods in Acoustics / M. Messner. —Verlag der Technischen Universitaet Graz. — 2012.

74. McLean W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations / W. McLean. — Cambridge: Cambridge univ. press, 2000. — 353 p.

75. Muzychuk Y. On the boundary integral equation method for exterior boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Y. Muzychuk // J. of Computational and Appl. Math. — 2014. — N 2 (116) — P. 96–116.

76. Muzychuk Y. A. On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Y. A. Muzychuk, R. S. Chapko // Matematychni Studii. — 2012. — N 1 (38). — P. 12–34.

77. Muzychuk Yu. On the boundary integral equation method for boundary-value problems for a system of elliptic equations of the special type in partially semi-infinite domains/ Yu. Muzychuk, R. Chapko // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2012. – N 11. – P. 20-27 (in Ukrainian).

78. OpenBEM. – http://www.openbem.dk/docs/OpenBEM-VCH-PMJ_IN2010.pdf.

79. PyBEM2D. – https://github.com/BinWang0213/PyBEM2D.

80. Rjasanow S. The fast solution of boundary integral equations / S. Rjasanow, O. Steinbach. — Berlin: Springer, 2007. — 277 p.

81. Saad Y. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems / Y. Saad, M. H. Schultz // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1986. — Vol. 7. — Iss. 3. — P. 856–869.

82. Sauter S. Galerkin method for retarded boundary integral equations with smooth and compactly supported temporal basis functions / S. Sauter,

A. A. Veit // Numer. Math. — 2013. — N 123, — P. 145–176.

83. Sayas F.-J. Retarded potentials and time domain boundary integral equations: a road-map / F.-J. Sayas. — Springer Intern. Publ., 2016. — 241 p.
84. Steinbach O. Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems. Finite and boundary elements / O. Steinbach. — New York: Springer Science, 2008. — 383 p.
85. Ulambator. – https://sourceforge.net/projects/ulambator.
86. WolframAlpha Computational Intelligence – https://www.wolframalpha.com.

Додаток А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові статті у фахових виданнях:

1. Hlova A. R. Coupling of Laguerre Transform and Fast BEM for solving Dirichlet initial-boundary value problems for the wave equation / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // J. of Numerical and Appl. Math. — 2018. — N 2 (128). — P. 42–60.
2. Chapko R. Wave propagation from lateral Cauchy data using a boundary element method / Roman Chapko, B. Tomas Johansson, Yuriy Muzychuk, Andriy Hlova // Wave Motion. – Vol.91, November 2019, Article 102385. – https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102385.
3. Глова А. Р. Чисельне розв'язування початково-крайових задач для хвильового рівняння із застосуванням формули Кірхгофа та перетворення Лаґерра / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук, А. О. Музичук // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2019. – Вип. 27. – С. 18-33.
4. Глова А. Р. Система MultiMathFramework для розв'язування початково-крайових задач з використанням методу граничних елементів та перетворення Лаґерра / А. Р. Глова, О. В. Кір // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2020. – Вип. 28. – С. 27-44.
5. Hlova A.R. On solution of the initial-value problem for homogeneous wave equation with dynamic boundary condition in weighted Lebesgue spaces / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // J. of Numerical and Appl. Math. — 2021. — N 3 (137). — P. 76–98.

Апробація результатів дисертації:

6. Hlova A. On Laguerre-Fast-BEM for Robin initial-boundary value problems for the wave equation / A. Hlova, A. Muzychuk // Proceedings of the International Conference "Ukrainian Conference on Applied Mathematics" dedicated to the 100th birth anniversary of Professor Olexandr Kostovskiy, 28-30 September, 2017, Lviv. — Lviv: PAIS, 2017. — P. 59–60. (*Міжнародна конференція "Ukrainian Conference on Applied Mathematics" присвячена 100-річчю від дня народження проф. Олександра Костовського, м. Львів, Україна, 28-30 вересня 2017 р., форма участі - очна, усна доповідь*).
7. Глова А. Р. Чисельне розв'язування початково-крайової задачі Робіна для однорідного хвильового рівняння / А. Р. Глова // Матеріали Міжнародної студентської наукової конференції з прикладної математики та комп'ютерних наук (СНКПМКН-2018), 2018, Львів. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2018. – С. 19–20. (*Міжнародна студентська наукова конференція з прикладної математики та комп'ютерних наук, м. Львів, Україна, 2018 р., форма участі - очна, усна доповідь*).
8. Глова А. Р. Про застосування потенціалів із запізненням в початково-крайових задачах для хвильового рівняння / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук // Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2018)", 26-28 вересня 2018, Львів. — Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2018. — С. 39–42. (*XXIV Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2018)", м. Львів, Україна, 26-28 вересня 2018 р., форма участі - очна, усна доповідь*).

9. Глова А. Р. Про розв'язування задач для хвильового рівняння з імпедансними крайовими умовами з використанням перетворення Лаґерра і МГЕ / А. Р. Глова, С. В. Літинський, А. О. Музичук // Матеріали XXV Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2019)", 24-27 вересня 2019, Львів. — Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2019. — С. 52–56. (*XXV Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2019)", м. Львів, Україна, 24-27 вересня 2019 р., форма участі - очна, усна доповідь*).
10. Hlova A. R. Numerical solution of initial boundary-value problem for homogeneous wave equation with dynamic boundary conditions using Laguerre transform on time variable and boundary element method. / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Y. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // Proceedings of XXVI International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), 2021, Tbilisi. — IEEE, 2021. — P. 222-227. — https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552285. (*XXVI Міжнародний науковий семінар "Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)", м. Тбілісі, Грузія, 8-10 вересня 2021 р., форма участі - дистанційна, усна доповідь*).
11. Глова А. Р. Про розв'язування залежних від часу граничних інтегральних рівнянь у початково-крайових задачах для хвильового рівняння у вагових просторах Лебега / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук, А. О. Музичук // Матеріали XXVI Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук (APAMCS-2021)", 27-28 вересня 2021, Львів. — Львів: Львівський

національний університет імені Івана Франка, 2021. — С. 80-84. (*XXVI Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук (APAMCS-2021)" присвячена 100-річчю проф. Н.П. Флейшмана, 360-річчю Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, Україна, 27-28 вересня 2021 р., форма участі - дистанційна, усна доповідь*).