Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ГЛОВА АНДРІЙ РОМАНОВИЧ

УДК 004.4:517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО ТА МАТЕМАТИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

122 — Комп'ютерні науки
12 — Інформаційні технології

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____(А. Р. Глова)

Науковий керівник Музичук Анатолій Омелянович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Львів — 2022

АНОТАЦІЯ

Глова А.Р. Розробка програмного та математичного забезпечення для моделювання еволюційних процесів. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки». - Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2022.

Комп'ютерне моделювання, зокрема проведення обчислювальних експериментів, є важливим підходом до вивчення складних процесів та явищ. Такі дослідження, з одного боку, потребують розробки нових та вдосконалення вже відомих математичних моделей, а також вимагають ефективних методів для чисельного розв'язування прикладних задач. З іншого боку, щоб отримати якісні результати необхідно реалізувати відповідне обчислювальне середовище. При цьому складність математичних моделей зумовлює оперування значними обчислювальними ресурсами, вимагаючи розробки нових підходів до побудови програмного забезпечення.

Еволюційні процеси характеризуються неперервною зміною станів системи з бігом часу. У багатьох випадках їхніми математичними моделями є мішані задачі для рівнянь із частинними похідними другого порядку зі сталими коефіцієнтами. У дисертації для побудови розв'язків таких задач застосовано комбінацію методу крайових інтегральних рівнянь (КІР) із перетворенням Лаґерра за часовою змінною.

Перший етап зазначеного підходу полягає у зведенні мішаних задач до еволюційних крайових інтегральних рівнянь (ЕКІР), для чого розв'язок

таких задач подано поверхневими потенціалами, які також залежать від часової змінної. У випадку хвильового рівняння з цією метою використано формулу Кірхгофа (прямий підхід) чи один із хвильових потенціалів простого або подвійного шару (непрямий підхід). Аналогічні підходи можна застосувати для зведення задач теплопровідності до подібних ЕКІР, але вже за допомогою відповідних теплових потенціалів.

Результатом переходу до ЕКІР є зменшення на одиницю розмірності досліджуваної задачі, оскільки треба відшукати невідомі густини поверхневих потенціалів. Ця властивість є актуальною для тривимірних за просторовими координатами задач, особливо при розгляді необмежених областей.

На наступному етапі усі раніше отримані ЕКІР за допомогою перетворення Лаґерра за часовою змінною зведено до послідовностей КІР, які завдяки своїй спеціальній структурі допускають покрокове розв'язування. А саме, на кожному кроці в таких послідовностях інтегральний оператор лівої частини є один і той самий для усіх рівнянь, а права частина рекурентно залежить від розв'язків КІР, знайдених на попередніх кроках. Крім того, оскільки результати перетворення Лаґерра теплових і хвильових потенціалів є подібними, то і отримані КІР також є однотипними.

Розглянутий процес зведення мішаних задач до послідовностей відповідних КІР є подібним для еволюційних задач різних типів. У дисертації основні моменти, які пов'язані зі знаходженням чисельних розв'язків таких задач, продемонстровано на прикладі мішаної задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою. Зокрема подано конкретний вигляд КІР, виведено розрахункові формули для чисельних розв'язків та виконано обґрунтування відповідних математичних аспектів.

Для чисельного розв'язування усіх отриманих КІР застосовано метод

Гальоркіна, а саме його реалізацію у вигляді методу крайових елементів (МКЕ). Комбінація перетворення Лаґерра і МКЕ дає змогу узагальнити обчислювальні схеми для усіх розглянутих у дисертації еволюційних задач і сформулювати функціональні вимоги до розробки спеціалізованого програмного комплексу MultiMathFramework (MMF), придатного до виконання обчислювальних експериментів стосовно нестаціонарних процесів різної природи.

На основі отриманих вимог у дисертації спроєктовано архітектуру фреймворку, яка, з одного боку, враховує спільні властивості обчислювальних схем для різних задач із предметної області, а з іншого – передбачає розширення програмного забезпечення за рахунок нових модулів, які модифікують раніше визначені алгоритми чи реалізують обчислювальні схеми для нових задач.

Для досягнення максимальної гнучкості системи застосовано розподіл програмних модулів на чотири рівні. Кожен із рівнів утворюють програмні модулі, які логічно пов'язані між собою спільним видом функціональності. Разом із тим, залежність між модулями різних рівнів є обмеженою і слабкою. Запропонована архітектура дає змогу модифікувати окремі модулі незалежно від інших частин програми, розширюючи фреймворк на інші класи еволюційних задач.

Перший рівень фреймворку утворюють компоненти, які формують інтерфейси користувача. Зокрема визначено способи введення вхідних даних задачі як із використанням графічного інтерфейсу, так і командного рядка. Їх взаємодію із іншими частинами системи спроєктовано максимально незалежно із використанням проміжного рівня ядра. Користувач застосовує ці компоненти також для запуску процесу обчислень із вибраними параметрами, що зберігаються в окремому конфігураційному файлі задачі.

Крім того, компонентами першого рівня є відповідні інтерфейси для модулів обробки даних. Це, зокрема, інтерфейс для генерування множини крайових елементів, які використовують для наближення межі області і при дискретизації інтегральних операторів у програмній реалізації МКЕ. Також користувачу надано інтерфейси модулів, які дають змогу аналізувати отримані чисельні результати і архівувати їх для подальшого використання. Зазначені інтерфейси передбачають просте внесення змін при розширенні фреймворку на нові задачі.

Рівень ядра є центральною частиною фреймворку. Ядро складається із завантажувача модулів розв'язування задач та бібліотеки базових класів. Головну частину класів становлять абстрактні типи, що визначають базові сутності та основні алгоритми обчислювальних схем, які відповідають задачам із предметної області.

Класи ядра побудовано з дотриманням принципу інверсії залежностей між відповідними програмними абстракціями. Для утворення потрібних залежностей між типами розроблено спеціальний механізм на основі шаблону ін'єкції залежностей. Його налаштування виконують за допомогою конфігураційного файлу. Внаслідок такого підходу ядро не залежить від інших рівнів і є компонентом фреймворку, який не потребує модифікації при розширенні.

У бібліотеці ядра також визначено інфраструктурні елементи фреймворку. З метою забезпечення гнучкості та розділення функціональності типів відповідні базові класи побудовано з використанням шаблонів проєктування Template method, Strategy, Factory method, Bridge.

У фреймворку також окремий рівень обробки даних утворюють компоненти, які задають спільні для усіх задач допоміжні алгоритми, а саме генерування крайових елементів, візуалізацію розв'язків, обчислення їхніх

апостеріорних похибок та конвертування результатів у різні формати даних для взаємодії із зовнішніми системами.

Програмне забезпечення рівня розв'язування задач містить модулі для отримання розв'язків задач, які зареєстровані у фреймворку. Цей програмний код є реалізацією конкретних алгоритмів і чисельних методів, які застосовуються на різних етапах обчислювальної схеми конкретної задачі з предметної області фреймворку. На цьому рівні також впроваджують нові модулі при розширенні фреймворку новими задачами і чисельними методами.

Попри виявлені для задач із предметної області фреймворку загальні закономірності обчислювальних схем, кожна з них має відмінності, які випливають із подання розв'язку задач та вигляду залежних від часової змінної потенціалів. У дисертації детально проаналізовано властивості поверхневих потенціалів та асоційованих із ними крайових операторів, отриманих після застосування перетворення Лаґерра. Також розглянуто апроксимаційні скінченновимірні простори, в яких відповідно до методу Гальоркіна-МКЕ виконано дискретизацію крайових операторів.

Завдяки спроєктованій архітектурі, програмний код, в якому локалізовані відмінності окремих задач, є відносно невеликим за обсягом. В основному це модулі, які відповідають за обчислення матриць отриманих систем алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Оскільки для усіх задач із предметної області ядра поверхневих потенціалів мають особливості при співпадінні аргументів, то для обчислення відповідних елементів матриць СЛАР розроблено алгоритми, основані на адитивному виділенні таких особливостей, та виведено відповідні розрахункові формули.

Після висвітлення основних архітектурних та алгоритмічних аспектів фреймворку розглянуто реалізацію запропонованих підходів на прикладі

побудови модуля розв'язування згаданої раніше задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою. Послідовно показано використання інфраструктурних елементів, реєстрацію задачі та її активацію контейнером залежностей у ядрі фреймворку. Далі продемонстровано застосування базових класів та інтерфейсів ядра з метою конкретизації функціональностей для знаходження наближеного розв'язку, які є специфічними для цієї задачі. Додатково запропоновано допоміжні механізми фреймворку, що доступні при дослідженні різних типів задач.

Окрема увага приділена математичному обґрунтуванню ключових аспектів запропонованих підходів. Для цього введено основні функційні простори, сформульовано задачу у вагових просторах Лебега та визначено поняття сильного розв'язку мішаної задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою. Доведено теореми про існування і єдиність її розв'язку, а також його неперервну залежність від вхідних даних.

З метою демонстрації прикладного застосування розглянутого математичного і програмного забезпечення у завершальній частині дисертації подано результати серії чисельних експериментів для еволюційних задач. Вони підтверджують коректність побудованої теорії та показують ефективність розробленої архітектури фреймворку та його програмної реалізації.

Ключові слова: мішана задача для еволюційного рівняння, перетворення Лаґерра, крайові інтегральні рівняння, метод крайових елементів, архітектура програмного забезпечення, фреймворк, програмний модуль, шаблон проєктування, бібліотека класів, абстракція, інверсія залежностей, ін'єкція залежностей, рефлексія, інтерфейс, об'єктно-орієнтоване програмування.

ABSTRACT

Hlova A.R. Development of the software and mathematical instruments for modelling of evolutionary processes. - Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Dissertation for obtaining a scientific degree of a Ph.D. in specialty 122 “Computer science”. - Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2022.

Computer modeling, in particular conducting computational experiments, is an important approach for studying complex processes and phenomena. On the one hand, such research needs the development of new mathematical models and improvement of already known ones and requires efficient methods for numerical solution of applied problems. On the other hand, it is necessary to implement an appropriate computing environment to obtain quality results. At the same time, the complexity of mathematical models determines the need to operate with significant computing resources and requires new approaches for software development.

Evolutionary processes are characterized by continuous system state changes over time. In many cases, their mathematical models are mixed problems for second order differential equations with constant coefficients. In the dissertation, a combination of boundary integral equations (BIE) method with the Laguerre transform over the time variable is applied to obtain solutions to such problems.

The first stage of this approach consists in reducing mixed problems to evolutionary boundary integral equations (EBIE). The solution to such problems is represented with surface potentials, which also depend on the

time variable. In the case of a wave equation, the Kirchhoff formula (direct approach) or one of the single or double layer wave potentials (indirect approach) is used for this purpose. Analogous approaches can be used to reduce heat problems to similar EBIE but with the help of the corresponding heat potentials.

The result of the transition to EBIE is a reduction of the studied problem by a one-dimensional unit since it is required to find unknown densities of the surface potentials. This property is relevant for three-dimensional problems in spatial coordinates, especially when considering unbounded domains.

At the next stage, with the Laguerre transform over the time variable, all previously obtained EBIE are reduced to the sequences of BIE, which allow step-by-step solution due to their special structure. Namely, at each step in this sequence, the integral operator of the left part is the same for all equations, and the right part recurrently depends on the solutions of BIE, which are found in the previous steps. Furthermore, since the results of the Laguerre transform of heat and wave potentials are similar, the obtained BIE are also of the same type.

The considered process of reduction of mixed problems to sequences of corresponding BIE is similar for evolutionary problems of different types. In the dissertation, the main points, which relate to finding numerical solutions to such problems, are demonstrated in the example of a mixed problem for the wave equation with dynamic boundary condition. In particular, a specific representation of BIE is demonstrated, calculation formulae for numerical solutions are derived and justification of relevant mathematical aspects is performed.

Galerkin method is used to find solutions of all obtained BIE, namely its implementation in the form of boundary element method (BEM). Such

a combination of the Laguerre transform and BEM allows the generalization of computational schemes for all evolutionary problems considered in the dissertation and formulation of functional requirements for the development of specialized software, called MultiMathFramework (MMF), which is suitable for conducting computational experiments regarding various non-stationary processes.

Based on the requirements obtained in the dissertation, the architecture of the framework is designed. On the one hand, it takes into account the common properties of computational schemes for different domain problems, and on the other hand – anticipates the expansion of the software through new modules, which modify previously defined algorithms or implement computational schemes for new problems.

To ensure the maximum flexibility of the system, the division of software modules into four levels is applied. Each of these levels is formed by program modules, which are logically coupled by a common type of functionality. However, the dependency between modules at different levels is limited and weak. The proposed architecture allows the modification of individual modules independently from other parts of the program, extending the framework with other classes of evolutionary problems.

The first level of the framework is constructed from components, which form user interfaces. In particular, methods for entering problem input data using both graphical interface and command line are defined. Their interaction with other parts of the system is designed with a high degree of independence using the intermediate kernel level. The user also applies these components to run the calculation process with the selected parameters, which are stored in a separate problem configuration file.

Furthermore, corresponding interfaces for the data processing modules are

components of the first level. In particular, one of them is an interface for generating a set of boundary elements, which are used to generate a surface approximation and discretize integrated operators in the software implementation of BEM. Also, the user is provided with module interfaces, which allow the analysis of obtained numerical results and their archiving for future use. These interfaces provide the ability to simply apply changes when extending the framework with new problems.

The kernel level is the central part of the framework. It consists of a loader of problem solver modules and a base class library. Abstract types are the main part of classes, which define base entities and the main algorithms of computational schemes, which correspond to the domain problems.

Kernel classes are constructed in compliance with the dependency inversion principle between corresponding program abstractions. A special mechanism is designed to create required dependencies between types, which is based on the dependency injection pattern. Its setup is performed using the configuration file. As a result of this approach, the kernel doesn't depend on other levels and it is a component of the framework, which doesn't require modifications during expansion.

The infrastructure elements of the framework are also defined in the base class library. In order to provide flexibility and separation of functionality for types, the corresponding base classes are built with patterns, such as Template method, Strategy, Factory method, Bridge.

In the framework, a separate data processing level is formed by components, which for all problems define common auxiliary algorithms, namely the generation of boundary elements, visualization of solutions, calculation of their a posteriori errors and conversion of results into different data formats for interaction with external systems.

The software of the problem solver level contains modules for obtaining solutions to the problems, which are registered in the framework. This program code is the implementation of specific algorithms and numerical methods, which are applied at different stages of a computational scheme for a specific domain problem. New modules are also composed at this level when extending the framework with new problems and numerical methods.

Despite the detected general regularities of computational schemes for problems of the framework domain, each of them has differences, which follow from the representation of the solution to problems and the form of time-dependent potentials. The properties of surface potential and associated boundary operators obtained after the application of the Laguerre transform are analyzed in the dissertation in detail. Also, approximation finite spaces are considered, in which the discretization of the obtained boundary operators is performed, according to Galerkin-BEM method.

Due to the designed architecture, the amount of program code, where the differences in individual problems are localized, is relatively small. In particular, these are modules, which are responsible for the calculation of the matrices of the obtained systems of algebraic equations (SLAE). Since the kernels of the surface potentials have singularities when arguments coincide for all domain problems, algorithms based on the additive solving of such singularities are developed to calculate the corresponding elements of the matrices of SLAE and corresponding calculation formulae are derived.

After highlighting the main architectural and algorithmic aspects of the framework, the implementation of the proposed approaches is considered in the example of building a module for solving the previously mentioned problem for the wave equation with dynamic boundary condition. The use of infrastructure elements, registration of the problem and its activation by the dependency

injection container in the framework kernel are consistently shown. Next, the application of base classes and kernel interfaces is demonstrated in order to specify the functionalities for finding an approximate solution, which are specific to this problem. Additionally, auxiliary mechanisms of the framework are proposed, which are available for exploring different types of problems.

Particular attention is paid to the mathematical justification of key aspects of the proposed approaches. For this purpose, the basic functional spaces are introduced, the problem is formulated in Lebesgue weight spaces and the concept of a strong solution to a mixed problem for the wave equation with dynamic boundary condition is defined. The theorems on the existence and uniqueness of its solution, as well as its continuous dependence on the input data, are proved.

In order to demonstrate the application of the considered mathematical instruments and software in the final part of the dissertation, the results of a series of numerical experiments for evolutionary problems are presented. They confirm the correctness of the constructed theory and show the effectiveness of the developed architecture of the framework and its software implementation.

Keywords: mixed problem for evolutionary equation, Laguerre transform, boundary integral equations, boundary element method, software architecture, framework, program module, pattern, class library, abstraction, dependency inversion, dependency injection, reflection, interface, object-oriented programming.

Список публікацій здобувача за темою дисертації.

Статті у виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз даних Web of Science, Scopus:

1. Hlova A.R. Coupling of Laguerre Transform and Fast BEM for solving Dirichlet initial-boundary value problems for the wave equation / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // J. of Numerical and Appl. Math. — 2018. — N 2 (128). — P. 42–60.
2. Chapko R. Wave propagation from lateral Cauchy data using a boundary element method / Roman Chapko, B. Tomas Johansson, Yuriy Muzychuk, Andriy Hlova // Wave Motion. – Vol.91, November 2019, Article 102385. – https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102385.
3. Hlova A.R. On solution of the initial-value problem for homogeneous wave equation with dynamic boundary condition in weighted Lebesgue spaces / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // J. of Numerical and Appl. Math. — 2021. — N 3 (137). — P. 76–98.

Статті у фахових виданнях України:

4. Глова А. Р. Чисельне розв'язування початково-крайових задач для хвильового рівняння із застосуванням формули Кірхгофа та перетворення Лаґерра / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук, А. О. Музичук // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2019. – Вип. 27. – С. 18-33.
5. Глова А. Р. Система MultiMathFramework для розв'язування початково-крайових задач з використанням методу граничних елементів та перетворення Лаґерра / А. Р. Глова, О. В. Кір // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2020. – Вип. 28. – С. 27-44.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Hlova A. On Laguerre-Fast-BEM for Robin initial-boundary value problems for the wave equation / A. Hlova, A. Muzychuk // Proceedings of the International Conference "Ukrainian Conference on Applied Mathematics" dedicated to the 100th birth anniversary of Professor Olexandr Kostovskiy, 28-30 September, 2017, Lviv. — Lviv: PAIS, 2017. — P. 59–60.
7. Глова А. Р. Чисельне розв'язування початково-крайової задачі Робіна для однорідного хвильового рівняння / А. Р. Глова // Матеріали Міжнародної студентської наукової конференції з прикладної математики та комп'ютерних наук (СНКПМКН-2018), 2018, Львів. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2018. – С. 19–20.
8. Глова А. Р. Про застосування потенціалів із запізненням в початково-крайових задачах для хвильового рівняння / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук // Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2018)", 26-28 вересня 2018, Львів. — Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2018. — С. 39–42.
9. Глова А. Р. Про розв'язування задач для хвильового рівняння з імпедансними крайовими умовами з використанням перетворення Лаґерра і МГЕ / А. Р. Глова, С. В. Літинський, А. О. Музичук // Матеріали XXV Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2019)", 24-27 вересня 2019, Львів. — Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2019. — С. 52–56.
10. Hlova A. R. Numerical solution of initial boundary-value problem for homogeneous wave equation with dynamic boundary conditions using Laguerre transform on time variable and boundary element method. /

A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Y. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // Proceedings of XXVI International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), 2021, Tbilisi. — IEEE, 2021. — P. 222-227. — https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552285.

11. Глова А. Р. Про розв'язування залежних від часу граничних інтегральних рівнянь у початково-крайових задачах для хвильового рівняння у вагових просторах Лебега / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук, А. О. Музичук // Матеріали XXVI Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук (APAMCS-2021)", 27-28 вересня 2021, Львів. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2021. — С. 80-84.

ЗМІСТ

Вступ **22**

Розділ 1. **Огляд математичних моделей та формулювання вимог до програмного забезпечення** **30**

1.1. Огляд літератури 30

1.2. Мішана задача для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою 37

1.3. Схема комбінованого методу перетворення Лаґерра та крайових інтегральних рівнянь 37

1.4. Математичні моделі з іншими крайовими умовами 45

1.5. Узагальнені специфікації предметної області 50

1.6. Вимоги до програмного забезпечення, які випливають з математичних моделей 51

1.7. Висновки до розділу 1 53

Розділ 2. **Архітектура та базові типи програмного комплексу** **55**

2.1. Загальна характеристика архітектури фреймворку 55

2.2. Інтерфейс користувача 57

2.2.1. Модуль GUI Manager 58

2.2.2. Модуль Task Calculator 60

2.2.3. Модуль генерування крайових елементів 61

2.3. Ядро фреймворку 64

2.3.1. Бібліотека базових класів та інтерфейсів 64

2.3.2. Компонент Action Manager 66

2.4. Опис базових класів та інтерфейсів ядра фреймворку 70
2.4.1. Визначення загального шаблону розв'язування задачі 70
2.4.2. Базові класи для задання схеми розв'язування задачі 71
2.4.3. Обчислення функцій в класах ядра 72
2.4.4. Обчислення компонентів розв'язку, залежних від просторових координат 73
2.4.5. Задання параметрів задачі та збереження результатів 75
2.4.6. Допоміжні інфраструктурні можливості 77
2.5. Реалізація шаблону ін'єкції залежностей 78
2.6. Рівень розв'язування задачі 80
2.7. Рівень обробки даних 81
2.8. Висновки до розділу 2 85

Розділ 3. **Аналіз та деталізація алгоритму комбінованого методу крайових елементів та перетворення Лаґерра 86**
3.1. Крайові інтегральні рівняння у скінченновимірних просторах 86
3.2. Алгоритми обчислення елементів матриці СЛАР 92
3.3. Висновки до розділу 3 94

Розділ 4. **Програмна реалізація архітектурних рішень для чисельного розв'язування задач 95**
4.1. Загальні властивості модулів розв'язування задач Problem Solver 95
4.2. Реалізація інфраструктурних елементів модуля розв'язування задачі 98
4.2.1. Визначення класу для запуску обчислень задачі . . . 98
4.2.2. Зберігання параметрів та результатів задачі 99
4.2.3. Реєстрація модуля в контейнері залежностей 100

4.2.4. Налаштування модуля розв'язування для виконання команд користувача 100
4.3. Обчислення наближеного розв'язку мішаної задачі 101
4.3.1. Визначення класів для обчислення наближеного розв'язку 101
4.3.2. Визначення загальної схеми обчислення розв'язку задачі 102
4.4. Обчислення просторових компонентів розв'язку та матриці СЛАР 104
4.4.1. Розширення класу для отримання просторових компонент 104
4.4.2. Визначення класу для розв'язування СЛАР 106
4.4.3. Задання стратегій заповнення матриці СЛАР 106
4.4.4. Реалізація основних алгоритмів розв'язування задачі 110
4.5. Додаткові можливості фреймворку при дослідженні задач предметної області 111
4.5.1. Заміна ядер потенціалів 112
4.5.2. Варіативність стратегій заповнення матриць 112
4.5.3. Робота з кількома поверхнями 114
4.5.4. Вимірювання часу обчислень 116
4.5.5. Експорт та візуалізація даних 117
4.6. Висновки до розділу 4 118
Розділ 5. **Обґрунтування математичних моделей** **120**
5.1. Функційні простори 120
5.2. Формулювання мішаної задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою у вагових просторах Лебега . . 125
5.3. Перетворення Лаґерра і Лапласа 126
5.4. Обґрунтування математичних моделей 139

5.4.1. Властивості розв'язку задачі Робіна для еліптичного рівняння з параметром у крайовій умові 140
5.4.2. Побудова розв'язку мішаної задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою (доведення теореми 5.1) 143
5.4.3. Розв'язування системи крайових інтегральних рівнянь відносно даних Коші для задачі Робіна 146
5.4.4. Обґрунтування обчислювальної схеми для мішаної задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою 153
5.5. Висновки до розділу 5 157

Розділ 6. **Аналіз результатів обчислювальних експериментів, отриманих за допомогою фреймворку 158**

6.1. Множина реалізованих задач 158
6.2. Порівняння прямого і непрямого підходів до подання розв'язку мішаної задачі 161
6.2.1. Задача Діріхле: прямий і непрямий підхід з потенціалом простого шару 161
6.2.2. Задача Неймана: прямий і непрямий підхід з потенціалом подвійного шару 163
6.2.3. Задача Неймана: непрямий підхід з потенціалом простого шару 164
6.3. Динамічна заміна алгоритму формування матриці СЛАР . . 166
6.4. Задача з динамічною крайовою умовою 168
6.5. Розширення класу задач за рахунок заміни ядер потенціалів 171
6.5.1. Задачі Діріхле для рівнянь різних типів 171
6.5.2. Задача Діріхле для півпростору з включенням 172

6.6. Розширення функціональності на нові класи задач 174
6.6.1. Задачі акустичної дифракції 175
6.6.2. Задача Коші 178
6.7. Висновки до розділу 6 181

Висновки **182**

Список використаних джерел **184**

Додаток А. **Список публікацій здобувача** **195**

ВСТУП

Актуальність теми. Комп'ютерне моделювання, зокрема проведення обчислювальних експериментів є важливим підходом до вивчення складних процесів та явищ. З одного боку, такі дослідження потребують розробки нових та вдосконалення вже відомих математичних моделей та вимагають ефективних чисельних методів для прикладних задач. З іншого боку, щоб отримати якісні результати необхідно реалізувати відповідне обчислювальне середовище. При цьому складність математичних моделей зумовлює потребу в оперуванні значними обчислювальними ресурсами, що вимагає розробки нових підходів до побудови програмного забезпечення.

Еволюційні процеси характеризуються неперервною зміною станів системи з бігом часу. В даній роботі розглядаємо в основному такі процеси, які можна описати за допомогою рівнянь в частинних похідних другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Їхніми математичними моделями є мішані задачі для телеграфного та хвильового рівнянь. Для побудови розв'язків таких задач застосовано комбінацію методу крайових інтегральних рівнянь (КІР) з перетворенням Лаґерра за часовою змінною. Такий підхід також застосовний і до мішаних задач для інших нестаціонарних рівнянь, зокрема теплопровідності, термо-еластодинаміки тощо.

Відомо, що метод КІР дає змогу зменшити на одиницю розмірність досліджуваної задачі, оскільки вона зводиться до відшукання невідомих величин лише на межі області. Ця властивість є актуальною для тривимірних за просторовими координатами задач, особливо при розгляді необмежених

областей. При розв'язуванні еволюційних задач перехід до еволюційних крайових інтегральних рівнянь (ЕКІР) здійснюють за допомогою залежних від часу відповідних поверхневих чи об'ємних потенціалів. У випадку задач для хвильового рівняння це хвильові потенціали. Їх прикладне використання бере початок у працях [25, 26], де обґрунтовано мішані задачі Діріхле та Неймана для хвильового рівняння та розглянуто знаходження відповідних чисельних розв'язків. З цією метою автори дослідили теоретичні аспекти методу Гальоркіна і зокрема його реалізації у вигляді методу крайових елементів(МКЕ). Причому цей метод був застосований як за часовою, так і за просторовими змінними.

Зазначимо, що безпосереднє використання методу Гальоркіна-МКЕ за усіма змінними вимагає значних обчислювальних ресурсів, оскільки матриці алгебричних систем, які виникають при дискретизації крайових операторів, є повністю заповненими. Також у такому підході для областей зі складною геометрією потрібно використовувати спеціальні ресурсозатратні алгоритми обчислення поверхневих інтегралів з врахуванням так званого ефекту запізнення [46, 82]. Тому сучасні методи базуються на спеціальних підходах щодо врахування залежності розв'язків еволюційних задач від часової змінної.

Один з таких підходів полягає у дискретизації ЕКІР лише за просторовою змінною з наступним застосуванням відомих чисельних методів розв'язування задач Коші. Це зокрема так званий метод квадратури згортки [70, 83], якому знайдено широке застосування у прикладних дослідженнях еволюційних процесів різної природи J. Ballani, L. Banjai, M. Schanz і H. Antes [24], W. L. Kielhorn і M. Schanz [64], A. R. Laliena, F.-J. Sayas [66], M. Messner [73], G. C. Hsiao і T. Sánchez-Vizuet [59].

Інший підхід полягає у застосуванні інтегрального перетворення Фур'є або Лапласа до відповідних еволюційних задач або ЕКІР [44, 47]. Результатом таких перетворень є крайові задачі для еліптичних рівнянь, які на даний час є добре дослідженими. Такий підхід добре підходить для теоретичних досліджень розв'язку задач, однак складність реалізації обернених перетворень обмежує його практичне використання.

Перетворення Лаґерра має конструктивне (у порівнянні з перетвореннями Фур'є і Лапласа) обернене перетворення. Воно полягає в обчисленні ряду за функціями Лаґерра, які утворюють ортонормований базис у цілій шкалі вагових просторів Лебега. Внаслідок такого перетворення нестаціонарна задача зводиться до нескінченної трикутної системи еліптичних задач, а відповідне ЕКІР – до послідовності КІР. Ефективність застосування такого підходу у поєднанні з МКЕ для розв'язування еволюційних задач продемонстровано у працях Й. В. Людкевича, А. О. Музичука [13], Р. М. Пасічника [18], R. Chapko і B. Johansson [35], Р. Б. Скасківа [14], А. О. Музичука і С. В. Літинського [12].

З іншого боку, використання комбінованого МКЕ і перетворення Лаґерра потребує додаткових досліджень у випадку розв'язування мішаних задач зі складними крайовими умовами, зокрема динамічними [57], а також в областях зі складною геометрією [38].

Наслідком складності математичних моделей та чисельних методів є зростання вимог до реалізації відповідного програмного забезпечення (ПЗ). Зазначимо, що відомі спеціалізовані ПЗ для математичних досліджень, такі як пакет MatLab [72] чи база знань та набір алгоритмів WolframAlpha [86], складно безпосередньо використати для реалізації розглянутих підходів. Вони більше підходять для опрацювання та аналізу результатів, отриманих в інших обчислювальних середовищах. Як приклад таких спеціалізо-

ваних середовищ можна навести пакет програм для розв'язування задач електростатики [20], системи для розв'язування задач акустики AcousticBEM [23] та OpenBEM [78]. Існують також більш загальні комплекси для розв'язування задач з використанням МКЕ, такі як Beasy [41], BEM++ [30] та PyBEM2D [79], проте вони мають обмеження в плані гнучкого розширення своїх можливостей.

Разом з тим відзначимо, що обчислювальні схеми комбінованого МКЕ і перетворення Лаґерра в різних мішаних задачах мають спільні характеристики та алгоритми. Тому при застосуванні відповідних технологій програмної інженерії їхня реалізація може утворити основу для розробки спеціалізованого обчислювального середовища для моделювання відповідних еволюційних процесів із можливістю легкого розширення його предметної області.

Отож, з огляду на сказане вище, залишився відкритим перелік питань. По-перше, визначення множини еволюційних задач, до яких є застосовним комбінований МКЕ і перетворення Лаґерра, і виявлення характеристик та алгоритмів, які є спільними для різних задач з предметної області. По-друге, формулювання вимог до розробки обчислювального середовища для проведення чисельних експериментів стосовно еволюційних процесів на основі згаданого методу. По-третє, розробка такого програмного комплексу, який був би придатний до розширення на нові еволюційні задачі за рахунок визначення невеликого обсягу додаткового програмного коду без зміни раніше розроленого. По-четверте обґрунтування розв'язків нових мішаних задач, зокрема з динамічною умовою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дану дисертаційну роботу виконано у Львівському національному університеті імені Івана Франка на кафедрі програмування в рамках науково-

дослідних тем в межах робочого часу «Розроблення інформаційних систем для онлайн навчання. Чисельне моделювання процесів і явищ» та «Чисельне моделювання процесів і явищ. Розроблення програмних засобів для навчання» (номери держреєстрації: 0118U000609, 2018–2020 рр.; 0121U110716, 2021–2023 рр.).

Мета і завдання дослідження. *Метою роботи* є розробка програмного комплексу для чисельного моделювання еволюційних процесів, основаного на перетворенні Лаґерра та методі крайових елементів. Досягнення зазначеної мети передбачає виконання таких *завдань*.

1. Розробити та обґрунтувати обчислювальні схеми математичних моделей деяких еволюційних процесів, зокрема поширення хвиль у тривимірних областях зі складною геометрією.
2. Узагальнюючи обчислювальні схеми математичних моделей, сформувати предметну область програмного комплексу та розробити його архітектуру, орієнтовану на розширення комплексу новими задачами та новими підходами до знаходження чисельних розв'язків еволюційних задач.
3. Розробити бібліотеку базових типів для реалізації обчислювальних схем, основаних на комбінації перетворення Лаґерра і методу крайових елементів, а також розробити бібліотеку типів обчислювального середовища.
4. Розробити (на основі ПЗ комплексу) новий модуль розв'язування мішаної задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою.
5. Продемонструвати закладені в основу програмного комплексу підходи до його розширення на нові класи задач.
6. Використовуючи розроблене програмне і математичне забезпечення, провести обчислювальні експерименти для дослідження чисельних

розв'язків модельних задач з предметної області комплексу.

Об'єкт дослідження — еволюційні мішані задачі та спеціалізовані програмні комплекси для проведення обчислювальних експериментів.

Предмет дослідження — математичні моделі еволюційних процесів, чисельні методи розв'язування, архітектура та програмне забезпечення спеціалізованих комплексів.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі застосовано сучасні підходи до розробки архітектури та програмного забезпечення спеціалізованих програмних комплексів, а також методи математичного та функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Досліджено математичні моделі еволюційних процесів та розроблено підходи до побудови спеціалізованих програмних комплексів, основаних на поєднанні перетворення Лаґерра та методу крайових елементів (МКЕ) для знаходження чисельних розв'язків відповідних мішаних задач. У цьому контексті вперше отримано такі результати:

— узагальнено обчислювальні схеми математичних моделей, які основані на поєднанні перетворення Лаґерра і МКЕ для чисельного розв'язування мішаних еволюційних задач у тривимірних областях зі складною геометрією;

— дотримуючись підходу ін'єкції залежностей з використанням абстрактних типів, розроблено чотирирівневу архітектуру програмного комплексу, яка забезпечує його розширення новими задачами і чисельними методами без переробки існуючого програмного коду;

— відповідно до концепції, закладеної в основу архітектури комплексу, для усіх досліджуваних математичних моделей розроблено модулі розв'язування відповідних мішаних задач і, крім того, побудовано

модифіковані модулі для розв'язування нових класів задач;

— обґрунтовано математичну модель мішаної задачі для однорідного хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою, а також досліджено розв'язки відповідних КІР методом Гальоркіна-МКЕ;

— результатами серії обчислювальних експериментів підтверджено достовірність отриманих теоретичних результатів, а також продемонстровано ефективність розроблених чисельних методів та підходів до розробки програмного забезпечення.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації є внеском у розробку підходів до побудови спеціалізованих програмних комплексів та чисельних методів для розв'язування мішаних задач для рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Розроблене програмне забезпечення може бути використане при моделюванні еволюційних процесів різної природи, зокрема дифракції акустичних та електромагнітних хвиль, поширення тепла. Фреймворк MMF є основою для подальшого розширення обчислювального середовища на нові задачі. Отримані результати містяться у звітах науково-дослідної частини Львівського національного університету імені Івана Франка (2019-2021 рр.).

Особистий внесок здобувача. Результати роботи, наведені в дисертації, отримано автором особисто. Усі публікації видано у співавторстві. В рамках роботи над публікаціями здобувачеві належать такі результати: у праці [7] – розробка архітектури фреймворку для розв'язування мішаних задач; у праці [8] – отримання за допомогою програмного забезпечення чисельного розв'язку задачі з динамічною крайовою умовою та задачі дифракції сферичного акустичного імпульсу, а також часу обчислень блоків матриці СЛАР з використанням методу ACA; у праці [38] – побудова про-

грамного модуля для знаходження розв'язків і дослідження задачі Коші; у праці [54] – отримання чисельного розв'язку задачі Діріхле для півпростору з використанням можливостей програмного фреймворку; у праці [57] – обґрунтування розв'язку задачі з динамічною крайовою умовою.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на міжнародних конференціях: «Ukrainian Conference on Applied Mathematics» (м. Львів – 2017 р.), СНКПМКН–2018 (м. Львів – 2018р.), «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (м. Львів – 2018р., 2019р.), «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук» (м. Львів – 2021р.) та міжнародному семінарі IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED) (м. Тбілісі – 2021 р.).

Публікації. Загалом опубліковано 5 статей [7, 8, 38, 54, 57] у журналах, що входять до переліку фахових видань, затверджених МОН України. Стаття [38] включена до міжнародної наукометричної бази Scopus, статті [54, 57] – до Web of Science. Також видано 5 тез і матеріалів всеукраїнських та міжнародних наукових конференцій [4, 5, 6, 9, 55, 56] ([55] включено до міжнародної наукометричної бази Scopus).

Структура дисертації. Дисертація складається із анотації, вступу, шести розділів із висновками, списку використаних джерел (86 позицій) та додатку із публікаціями здобувача. Загальний обсяг становить 198 сторінок. Робота містить 40 рисунків та 20 таблиць.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ВИМОГ ДО ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

У цьому розділі схематично розглянемо підхід до розв'язування еволюційних задач, який полягає у комбінації перетворення Лаґерра за часовою змінною і методу крайових елементів для наближення функцій від просторових змінних. Для прикладу візьмемо мішану задачу для однорідного хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою. На кожному етапі зазначеного підходу охарактеризуємо основні математичні сутності та пов'язані з ними обчислювальні аспекти, які зустрічатимуться також і при розв'язуванні інших задач.

Після розгляду конкретного прикладу опишемо предметну область для ПЗ, а саме математичні моделі еволюційних задач, які допускають застосування окресленого підходу для знаходження чисельних розв'язків. Як наслідок, сформулюємо загальні вимоги до відповідного ПЗ.

1.1. Огляд літератури

Мішані задачі для хвильового рівняння займають важливе місце в переліку математичних моделей при дослідженні динамічних процесів різної природи. Тому, з одного боку, є актуальною розробка ефективних методів для знаходження чисельних розв'язків таких задач. З іншого боку, успіх досліджень із використанням таких чисельних методів у значній мірі залежить від наявності відповідного обчислювального середовища, яке в силу

складності методів можна віднести до рангу складних систем. Отож розробка відповідних принципів побудови таких середовищ, зокрема архітектури та високопродуктивних алгоритмів, також є актуальною проблемою комп'ютерних наук.

Теоретичне дослідження мішаних задач для хвильового рівняння має давню історію. Різним підходам до формулювання та теоретичного обґрунтування таких задач присвячено монографії [2, 10, 17, 19, 44]. Ріст потужностей обчислювальної техніки забезпечив бурхливий розвиток варіаційно-різницевих і проекційно-сіткових методів стосовно нестаціонарних задач в обмежених областях невисокої розмірності [10, 15, 22]. Зазначимо, що для задач у необмежених просторових областях застосування таких підходів було проблематичним. Відповідно тут розвивалися методи, базовані на теорії хвильових потенціалів, які дають змогу перейти від диференційних задач до еволюційних крайових інтегральних рівнянь (ЕКІР), для яких характерне так зване "запізнення в часі". Зокрема у працях [25, 26] вперше було обґрунтовано метод Гальоркіна, а саме метод крайових елементів (МКЕ) для задач Діріхле та Неймана для хвильового рівняння у загальному 4-вимірному формулюванні. Однак дотепер його застосування обмежується задачами для специфічних випадків, коли вдається понизити обчислювальну складність алгоритму розв'язування за рахунок зменшення розмірності задачі [51].

На даний час можна простежити кілька загальних підходів до чисельного розв'язування мішаних задач для хвильового рівняння, в основі яких є використання ЕКІР. Використання інтегральних рівнянь надає усім таким підходам відомі переваги. В першу чергу, це зменшення на одиницю розмірності задачі шляхом переходу до пошуку невідомих величин лише на межі області. Другою перевагою є універсальність щодо геометрії області,

оскільки достатньо, щоб її межа була ліпшицевою поверхнею.

Згадані підходи різняться врахуванням залежності розв'язку від часової змінної. Зокрема, випадок гармонійних коливань є окремою сферою дослідження, оскільки безпосередньо приводить до крайових задач для еліптичних рівнянь і відповідних КІР [39, 58, 80, 84]. У цьому випадку невідомі величини задані лише на межі області, для їхнього знаходження широко застосовується МКЕ, зокрема у комбінації з асимптотичними методами [33, 60, 62].

Іншим загальним підходом до розв'язування зазначених нестаціонарних задач є застосування до них інтегрального перетворення (ІП) Фур'є чи Лапласа на різних етапах знаходження чисельного розв'язку (див., наприклад, [44, Chapter XVI], [47] та наведені там посилання). Основною перевагою такого підходу є, знову ж таки, зведення вихідної задачі чи залежних від часу ЕКІР до еліптичних крайових задач та відповідних їм КІР [25, 26, 51, 65]. Крім того, образи при таких перетвореннях є аналітичними функціями параметра перетворення, що є основою для проведення теоретичних досліджень різних властивостей відповідних функцій-оригіналів [25, 26, 51, 65]. Зокрема, в такий спосіб вдається обґрунтувати існування та єдиність розв'язку мішаних задач та інтегральних рівнянь у відповідних функційних просторах. Однак зазначимо, що прикладне застосування такого підходу до чисельного розв'язування задач у загальній постановці ускладнене через проблеми реалізації відповідних обернених інтегральних перетворень.

Один із сучасних підходів до знаходження чисельних розв'язків еволюційних задач пов'язаний із методом квадратури згортки (convolution quadrature, CQ) [70], в основі якого є застосування чисельних методів розв'язування специфічних задач Коші, які виникають в просторі

зображень перетворення Лапласа. Теоретичні аспекти цього методу і пов'язаний із ним математичний апарат розглянуто в монографії [83]. Метод CQ виявився ефективним для чисельного розв'язування еволюційних задач різної природи [24, 52, 53, 59, 64].

Інший підхід також пов'язаний із інтегральним перетворенням за часом, але в якого ядром служать елементи послідовності, утвореної з поліномів Лаґерра, за що його називають перетворенням Лаґерра (ПЛ). Якщо з таких елементів утворити ортонормований базис у деяких вагових просторах Лебега, то результатом застосування ПЛ до еволюційної задачі буде крайова задача для нескінченної трикутної системи еліптичних рівнянь, які можна розв'язувати послідовно. Вперше такий підхід до розв'язування задач у деяких канонічних областях був застосований в праці [3]. У праці [13] для задач Діріхле і Неймана для хвильового рівняння було розроблено комбінований метод ПЛ і крайових інтегральних рівнянь. Отримані результати обчислювальних експериментів продемонстрували ефективність цього методу для дослідження хвильових процесів у тривимірних областях зі складною геометрією.

Комбінований метод ПЛ та КІР у праці [18] був застосований безпосередньо до ЕКІР, а у працях [14, 36, 21] також був розроблений для інших типів еволюційних рівнянь. Зазначимо, що результати обчислювальних експериментів [37, 38] свідчать, що цей підхід також дає змогу розв'язувати обернені еволюційні задачі, а також досліджувати поширення хвиль, коли відповідні дані Коші відомі лише на частині межі області.

До зазначених вище переваг інтегральних рівнянь в комбінованому методі додається ще одна. Вона зумовлена тим, що крайовий оператор є той самий для усіх рівнянь послідовності, а права частина кожного з рівнянь рекурентно залежить від розв'язків попередніх рівнянь. В комплексі така

властивість комбінованого методу сприяє його ефективній імплементації. Зазначимо, що для чисельного розв'язування одновимірних КІР успішним виявився метод механічних квадратур (див., наприклад, [34, 37]), використання якого дає змогу ефективно враховувати сингулярності ядер інтегральних операторів.

Задачі у тривимірному просторі у наведених прикладах були розв'язані з використанням методу крайових елементів, детальний розгляд питань, пов'язаних з дискретизацією крайових інтегральних операторів див., наприклад, [68, 12, 11, 69]. В [54] комбінований метод ІП та КІР було поширено на випадок моделювання коливань у півпросторі з включенням, а також запроваджено оптимізацію алгоритмів обчислення матриць, які виникають при дискретизації крайових операторів. Теоретичні аспекти, які стосуються послідовностей КІР, що виникають у крайових задачах Діріхле, Неймана та Робіна для згаданої нескінченної трикутної системи розглянуто в [76].

Програмна реалізація у кожному з випадків застосування комбінованого методу ІП та КІР, а також практика чисельного моделювання виявила низку спільних характеристик та закономірностей. Вони утворюють основу специфікацій для розробки спеціалізованого програмного середовища (фреймворку) для ефективного моделювання динамічних процесів. Побудова такого середовища має враховувати особливості наявних програмних рішень.

Сьогодні одним із ефективних способів чисельного розв'язування КІР є МКЕ. Для його застосування на практиці необхідно передбачити відповідну програмну реалізацію з урахуванням обчислювальної складності методу. В загальному відомі програми для розв'язування задач з використанням МКЕ можна поділити на дві категорії: спеціалізовані програмні комплекси (призначені для дослідження вузького кола мішаних задач) та

бібліотеки і фреймворки (застосовні до широкої множину задач з можливістю подальшого розширення).

Серед вузькоспеціалізованого програмного забезпечення відзначимо системи для розв'язування акустичних задач для рівняння Гельмгольца. Однією з таких є *AcousticBEM* [23], яка містить набір функцій та демонстраційних чисельних експериментів для моделювання усталених коливань з різними крайовими умовами. Пакет програм *OpenBEM* [78], написаних з використанням середовища MatLab [72], дає змогу розв'язувати внутрішні та зовнішні акустичні задачі, а також осесиметричні задачі та задачі для півпростору.

Подібні спеціалізовані комплекси існують також і для інших видів мішаних задач. Наприклад, програма *Ulambator* [85] призначена для розв'язування рівнянь Нав'є-Стокса з використанням МКЕ. *BESLE* [31] – для аналізу механічної поведінки гетерогенних матеріалів з використанням МКЕ для задач еластостатики та еластодинаміки. Ширшу множину задач охоплює *Bempp* [32] – обчислювальна платформа мовою Python на основі МКЕ для розв'язування задач електростатики, акустики та електромагнетизму (підтримує розбиття поверхні на трикутні крайові елементи, імпорт та експорт у різні формати, алгоритми розпаралелювання завдань). Також можна врахувати досвід розробки обчислювального середовища для розв'язування задач електростатики [20].

Разом із розробкою спеціалізованих програмних комплексів виникла ідея побудови загальних бібліотек класів та фреймворків, які можна було б використовувати незалежно від вибраного типу задачі. Однією із перших таких систем стала *Beasy* [41], що використовується для розв'язування задач для рівняння Лапласа, дифузії, хвильового рівняння,

задач лінійної еластостатики та задач еластопластичності. З розвитком об'єктно-орієнтованих мов програмування було запропоновано загальну систему *BEM++* [30] для задач акустики, електромагнетизму та інших, серед особливостей якої варто відзначити високу продуктивність внутрішніх алгоритмів. Відомо також про *PyBEM2D* [79] – бібліотеку класів та інтерфейсів мовою Python з модульною структурою для розв'язування задач з використанням методу крайових елементів для двовимірних геометрій.

Водночас вищезазначене програмне забезпечення має ряд обмежень. Зокрема спеціалізовані системи, такі як *AcousticBEM*, *OpenBEM*, *Ulambator*, *BESLE*, *Bempp*, фокусуються в основному на розв'язуванні чітко окреслених задач або ряду подібних, що моделюють лише визначений тип фізичних явищ. Крім того, в основному вони працюють зі сталими коефіцієнтами як у випадку рівняння Гельмгольца. З іншого боку, більш загальні системи, такі як *BEM++*, *Beasy* надають ряд базових алгоритмів, проте мають недоліки в сенсі розширення предметної області, а *PyBEM2D* розв'язує задачі лише для двовимірних геометрій.

Таким чином, важливою є побудова програмного комплексу, який ефективно враховуватиме особливості сучасних методів розв'язування мішаних задач, зокрема використання комбінації перетворення Лаґерра та МКЕ, а також надаватиме гнучкі програмні конструкції для розширення множини можливих досліджень еволюційних процесів.

1.2. Мішана задача для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою

Нехай $\Omega \in \mathbb{R}^3$ — обмежена область з ліпшицевою поверхнею Γ, $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $\mathbb{R}_0 = [0, +\infty)$, $\Sigma := \Gamma \times \mathbb{R}_+$, $Q := \Omega \times \mathbb{R}_+$, $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0$.

Розглянемо мішану задачу: для заданих $g(x,t)$, $(x,t) \in \Sigma$, і $b(x)$, $x \in \Gamma$, знайти функцію $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, яка задовольняє (в певному сенсі) хвильове рівняння

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{в} \;\; Q, \tag{1.1}$$

разом з початковими умовами

$$u(\cdot, 0) = 0, \quad \partial_t u(\cdot, 0) = 0 \quad \text{в} \;\; \Omega, \tag{1.2}$$

і динамічною крайовою умовою

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} u|_\Sigma + b\, \partial_t u|_\Sigma = g \quad \text{на } \Sigma, \tag{1.3}$$

де ∂_t і $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$ означають похідну за часовою змінною і нормальну похідну відповідно, Δ – оператор Лапласа.

Далі цю задачу називатимемо задачею (**HD**).

1.3. Схема комбінованого методу перетворення Лаґерра та крайових інтегральних рівнянь

1.3.1. Інтегральне зображення розв'язку мішаної задачі. Відомо (див., наприклад, [1, 19, 66]), що за умови достатньо гладкої межі Γ довільний класичний розв'язок $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q}))$ хвильового рівняння (1.1), який задовольняє однорідні початкові умови (1.2) і продовжений нулем на множину $\{(x,t) \,|\, x \in \overline{\Omega},\, t \in (-\infty, 0)\}$, можна виразити формулою Кірхгофа

$$u(x,t) = \mathcal{S}\mu(x,t) - \mathcal{D}\lambda(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1.4}$$

де $\lambda := u|_\Sigma$ і $\mu := \partial_{\boldsymbol{\nu}} u|_\Sigma$,

$$\mathcal{S}\mu(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Gamma \frac{\mu(y, t - |x-y|)}{|x-y|}\, d\Gamma_y, \quad (x,t) \in Q, \tag{1.5}$$

$$\mathcal{D}\lambda(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Gamma \left(\partial_{\boldsymbol{\nu}_y} \frac{\lambda(z, t - |x-y|)}{|x-y|} \right)\Bigg|_{z=y} d\Gamma_y, \quad (x,t) \in Q. \tag{1.6}$$

Пару функцій (λ, μ) називають даними Коші розв'язку u, а вирази $\mathcal{S}\mu$ і $\mathcal{D}\lambda$ — хвильовими потенціалами, відповідно, простого і подвійного шару.

Зазначимо, що у формулі (1.4) розуміємо $\mathcal{S}\mu(x,t) := (\mathcal{S}\mu)(x,t)$, $(x,t) \in Q$, таке саме спрощення використовуємо скрізь у подібних виразах з операторами.

Отож, щоб отримати розв'язок задачі (**HD**), залишається визначити густини потенціалів так, щоб функція u задовольняла крайову умову (1.3).

1.3.2. Зведення мішаної задачі до крайових інтегральних рівнянь. Введемо позначення:

$v^+(x,t) := \lim\limits_{\Omega \ni y \to x \in \Gamma} v(y,t)$, $(x,t) \in \Sigma$, — граничне значення функції $v \in C(Q)$;

$\partial^+_{\boldsymbol{\nu}_x} v(x,t) := \lim\limits_{\Omega \ni y \to x \in \Gamma} \partial_{\boldsymbol{\nu}_x} v(y,t)$, $(x,t) \in \Sigma$, вважаючи, що точка y наближається до межі області вздовж прямої, для якої $\boldsymbol{\nu}_x$ є напрямним вектором, — правильна нормальна похідна функції $v \in C^1(Q)$.

Для граничних значень та нормальних похідних хвильових потенціалів на циліндричній поверхні Σ виконуються співвідношення [66, Chapt.1] :

$$\begin{gathered} \mathcal{S}^+\mu := (\mathcal{S}\mu)^+ = \mathcal{V}\mu, \quad \mathcal{D}^+\lambda := (\mathcal{D}\lambda)^+ = -\frac{1}{2}\lambda + \mathcal{K}\lambda, \\ \partial^+_{\boldsymbol{\nu}} \mathcal{S}\mu = \frac{1}{2}\mu + \mathcal{K}^\top \mu, \quad \partial^+_{\boldsymbol{\nu}} \mathcal{D}\lambda = -\mathcal{W}\lambda \quad \text{на} \quad \Sigma, \end{gathered} \tag{1.7}$$

де

$$\mathcal{V}\mu(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} \frac{\mu(y, t-|x-y|)}{|x-y|}\, d\Gamma_y, \quad (x,t)\in\Sigma, \tag{1.8}$$

$$\mathcal{K}^{\top}\mu(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} \partial_{\boldsymbol{\nu}_x}\frac{\mu(y, t-|x-y|)}{|x-y|}\, d\Gamma_y, \quad (x,t)\in\Sigma, \tag{1.9}$$

$$\mathcal{K}\lambda(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} \left(\partial_{\boldsymbol{\nu}_y}\frac{\lambda(z, t-|x-y|)}{|x-y|}\right)\Bigg|_{z=y} d\Gamma_y, \quad (x,t)\in\Sigma, \tag{1.10}$$

$$\mathcal{W}\lambda(x,t) = \frac{1}{4\pi}\partial_{\boldsymbol{\nu}_x}\int\limits_{\Gamma} \left(\partial_{\boldsymbol{\nu}_y}\frac{\lambda(z, t-|x-y|)}{|x-y|}\right)\Bigg|_{z=y} d\Gamma_y, \quad (x,t)\in\Sigma. \tag{1.11}$$

Запишемо граничне значення від лівої і правої частин рівності (1.4) на Σ, беручи до уваги формули (1.7):

$$\lambda = \mathcal{S}^{+}\mu - \mathcal{D}^{+}\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mathcal{V}\mu + \frac{1}{2}\lambda - \mathcal{K}\lambda \quad \text{на} \ \ \Sigma.$$

Останню з отриманих рівностей можна переписати так

$$\mathcal{V}\mu - \frac{1}{2}\lambda - \mathcal{K}\lambda = 0 \quad \text{на} \ \ \Sigma. \tag{1.12}$$

Зауважимо, що функції λ і μ є взаємно пов'язаними, оскільки вони є даними Коші тієї самої функції u. Тому для цих функцій можна отримати еквівалентну (1.12) рівність, якщо візьмемо правильну нормальну похідну від лівої і правої частин рівності (1.4):

$$\mu = \partial^{+}_{\boldsymbol{\nu}}\mathcal{S}\mu - \partial^{+}_{\boldsymbol{\nu}}\mathcal{D}\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}\mu + \mathcal{K}^{\top}\mu + \mathcal{W}\lambda \quad \text{на} \ \ \Sigma. \tag{1.13}$$

Перепишемо крайову умову (1.3), враховуючи введені вище позначення:

$$\mu + b\,\partial_t\lambda = g \quad \text{на } \Sigma, \tag{1.14}$$

і замість функції μ підставимо сюди її вираз із другої рівності в (1.13). Тоді отримаємо

$$\frac{1}{2}\mu + \mathcal{K}^{\top}\mu + \mathcal{W}\lambda + b\,\partial_t\lambda = g \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{1.15}$$

Рівняння (1.12) і (1.15) разом складають таку систему EKIP для знаходження функцій λ і μ:

$$\begin{cases} \mathcal{V}\mu - \dfrac{1}{2}\lambda - \mathcal{K}\lambda = 0, \\ \dfrac{1}{2}\mu + \mathcal{K}^{\top}\mu + \, b\,\partial_t\lambda + \mathcal{W}\lambda = g \end{cases} \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{1.16}$$

1.3.3. Зведення еволюційних крайових інтегральних рівнянь перетворенням Лаґерра у послідовність крайових інтегральних. Надалі з метою застосування перетворення Лаґерра (ПЛ) вважаємо, що маємо справу з функціями дійсного аргументу (часу), які набувають значення у певних гільбертових просторах.

Нехай X - гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і відповідною нормою $\|\cdot\|_X$. Введемо простір Лебега $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$, який містить функції $f:\mathbb{R}_+\to X$ такі, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} ||v(t)||^2_X\, e^{-\alpha t}dt < \infty,$$

де $\alpha > 0$. Також визначимо простір послідовностей

$$l^2(X) := \big\{\mathbf{v}\in X^\infty \mid \quad \sum_{j=0}^{\infty}\|v_j\|^2_X < +\infty\big\}.$$

Розглянемо функції Лаґерра

$$l_n(t) = \sqrt{\sigma}L_n(\sigma t)e^{-\frac{\beta}{2}t},\ t\in\mathbb{R}_+,\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{1.17}$$

де L_n – поліноми Лаґерра[63], $\sigma > 0$ і $\beta \geqslant 0$ – параметри такі, що $\sigma = \alpha+\beta$. Зазначимо, що функції Лаґерра утворюють ортонормований базис простору $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$.

Тоді перетворенням Лаґерра є відображення $\mathcal{L} : L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X) \to l^2(X)$, що довільній функції $f\in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$ ставить у відповідність послідовність

$\mathbf{f} := (f_0,\ f_1, ...,\ f_k, ...)^\top \in l^2(X)$, елементи якої визначені формулою

$$f_k := \big(\mathcal{L}f\big)_k := \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t)\, l_k(t)\, e^{-\alpha t} dt, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.18}$$

Обернене перетворення Лаґерра полягає в знаходження функції з простору $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ як суми ряду

$$(\mathcal{L}^{-1}\mathbf{h})(t) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k\, l_k(t),\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.19}$$

де $\mathbf{h} := (h_0,\ h_1, ...,\ h_k, ...)^\top \in l^2(X)$.

Нехай довільна векторна функція f є такою, що $f' \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ і $f(0) = 0$. Тоді

$$\big(\mathcal{L}f'\big)_k = \gamma f_k + \sigma \sum_{i=0}^{k-1} f_i, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.20}$$

де $\gamma := \alpha + \beta/2$.

Введемо позначення послідовностей $\boldsymbol{\mu} := \mathcal{L}\mu = \big(\mu_0, \mu_1, ...\big)^\top$ і $\boldsymbol{\lambda} := \mathcal{L}\lambda = \big(\lambda_0, \lambda_1, ...\big)^\top$, які є зображеннями густин хвильових потенціалів (1.5) і (1.6) відповідно. Відомо [12, 68], що тоді цих потенціалів є правильними розвинення :

$$\mathcal{S}\mu(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \bigg(\sum_{i=0}^{j} S_{j-i}\mu_i \bigg) l_j(t) \quad \text{в } \Omega,\ t \in \mathbb{R}_+; \tag{1.21}$$

$$\mathcal{D}\lambda(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \bigg(\sum_{i=0}^{j} D_{j-i}\mu_i \bigg) l_j(t) \quad \text{в } \Omega,\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.22}$$

де величини

$$\begin{aligned} S_k\mu_i(x) &:= \int\limits_{\Gamma} \mu_i(y) e_k(x-y)\, d\Gamma_y, \\ D_k\lambda_i(x) &:= \int\limits_{\Gamma} \lambda_i(y)\, \boldsymbol{\nu}_y \cdot \nabla_y e_k(x-y)\, d\Gamma_y,\ x \in \Omega,\ i, k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

визначені через функції

$$
\begin{aligned}
e_0(z) &:= \frac{e^{-\alpha|z|}}{4\pi\sqrt{\sigma}|z|} l_0(|z|), \\
e_k(z) &:= \frac{e^{-\alpha|z|}}{4\pi\sqrt{\sigma}|z|} (l_k(|z|) - l_{k-1}(|z|)),\ k \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.
\end{aligned} \tag{1.24}
$$

Позначимо

$$
u_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \big(S_{k-i}\mu_i\big)(x) - \sum_{i=0}^{k} \big(D_{k-i}\lambda_i\big)(x),\ x \in \Omega, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.25}
$$

Тоді формула Кірхгофа (1.4) набуде вигляду

$$
u(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) l_k(t), \quad (x,t) \in Q. \tag{1.26}
$$

Подібні розвинення матимемо для виразів заданих формулами (1.8)-(1.11):

$$
\mathcal{V}\mu(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{j} V_{j-i}\mu_i \right) l_j(t) \quad \text{на } \Gamma,\ t \in \mathbb{R}_+; \tag{1.27}
$$

$$
\mathcal{K}\lambda(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{j} K_{j-i}\lambda_i \right) l_j(t) \quad \text{на } \Gamma,\ t \in \mathbb{R}_+; \tag{1.28}
$$

$$
\mathcal{K}^\top\mu(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{j} K^\top_{j-i}\mu_i \right) l_j(t) \quad \text{на } \Gamma,\ t \in \mathbb{R}_+; \tag{1.29}
$$

$$
\mathcal{W}\lambda(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{j} W_{j-i}\mu_i \right) l_j(t) \quad \text{на } \Gamma,\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.30}
$$

де

$$
\begin{aligned}
K_k\lambda_i(x) &:= \int_\Gamma \lambda_i(y)\, \boldsymbol{\nu}_y \cdot \nabla_y e_k(x-y)\, d\Gamma_y, \\
K_k^\top\mu_i(x) &:= \int_\Gamma \mu_i(y)\, \boldsymbol{\nu}_x \cdot \nabla_x e_k(x-y)\, d\Gamma_y,\ x \in \Omega,\ i,k \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned} \tag{1.31}
$$

$$V_k\mu_i(x) := \int\limits_{\Gamma} \mu_i(y) e_k(x-y)\, d\Gamma_y,$$

$$W_k\lambda_i(x) := \boldsymbol{\nu}_x \cdot \lim_{x'\to x} \nabla_{x'} \int\limits_{\Gamma} \lambda_i(y)\, \boldsymbol{\nu}_y \cdot \nabla_y e_k(x-y)\, d\Gamma_y,\ x\in\Gamma,\ i,k\in\mathbb{N}_0. \tag{1.32}$$

Застосуємо ПЛ до системи ЕКІР (1.16), враховуючи розвинення виразів з крайовими операторами та формулу (1.20). Тоді отримаємо таку послідовність систем, які складаються з двох КІР

$$A_0\phi_k = \psi_k - \sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i}\phi_i \ \text{ на } \Gamma, \ \ k\in\mathbb{N}_0, \tag{1.33}$$

де $\phi_k := (\mu_k, \lambda_k)^\top$, $\psi_k := (0, g_k)^\top$,

$$A_0 := \begin{pmatrix} V_0 & -\frac{1}{2}I_1 - K_0 \\ \frac{1}{2}I_2 + K_0^\top & b\gamma I_1 + W_0 \end{pmatrix}, \ \ A_j := \begin{pmatrix} V_j & -K_j \\ K_j^\top & b\sigma I_1 + W_j \end{pmatrix}, \ j\in\mathbb{N}. \tag{1.34}$$

Тут і далі під I_1 і I_2 розуміємо оператори ідентичності у функційних просторах, де задані функції μ_k і λ_k відповідно, а також вважаємо, що вираз із підсумовуванням рівний нулеві, якщо значення його верхнього індексу менше значення нижнього, тобто з (1.33) при $k=0$ маємо

$$A_0\phi_0 = \psi_0 \ \text{ на } \Gamma. \tag{1.35}$$

Розв'язуючи покроково для послідовних значень $k\in\mathbb{N}_0$ систему (1.33), матимемо змогу використовувати знайдені функції μ_k та λ_k для наближення хвильових потенціалів $\mathcal{S}\mu$ і $\mathcal{D}\lambda$ за формулами (1.21) і (1.22) відповідно, а також обчислювати за формулою (1.25) вирази $u_k(x),\ x\in\Omega$, які є коефіцієнтами розвинення (1.26) шуканого розв'язку задачі (**HD**). Вибираючи

(з певних міркувань) деяке натуральне число N, скінчену суму

$$\widetilde{u}^N(x,t) := \sum_{k=0}^{N} u_k(x) l_k(t), \quad (x,t) \in Q. \tag{1.36}$$

вважатимемо наближеним розв'язок задачі (**HD**).

1.3.4. Чисельна схема у скінченновимірних просторах. На кожному кроці систему КІР (1.33) розв'язуємо методом Гальоркіна-МКЕ, використовуючи скінченновимірні простори $S_h^0(\Gamma)$ і $S_h^1(\Gamma)$ з базовими функціями $\{\varphi_l^0\}_{l=1}^{M}$ і $\{\varphi_l^1\}_{l=1}^{M^*}$ відповідно, де h – параметр дискретизації, параметри M і M^* означають вимір відповідного простору (побудова базисних функцій описана у розділі 3).

Апроксимуємо невідомі функції μ_k і λ_k у відповідних скінченновимірних просторах такими функціями

$$\mu_k^h := \sum_{l=1}^{M} \mu_l^k \varphi_l^0 \in S_h^0(\Gamma), \quad k \in N_0, \tag{1.37}$$

$$\lambda_k^h := \sum_{l=1}^{M^*} \lambda_l^k \varphi_l^1 \in S_h^1(\Gamma), \quad k \in N_0, \tag{1.38}$$

де невідомі коефіцієнти апроксимації розглядаємо як елементи векторів $\boldsymbol{\mu}^k \in \mathbb{R}^M$ і $\boldsymbol{\lambda}^k \in \mathbb{R}^{M^*}$. Тоді після підстановки наближень (1.37) і (1.38) у послідовність КІР (1.33) чисельна схема методу Гальоркіна-МКЕ матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_0^h \boldsymbol{\mu}^k + \big(-\dfrac{1}{2}\mathbf{M}^h - \mathbf{K}_0^h\big)\boldsymbol{\lambda}^k = -\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{V}_{k-i}^h \boldsymbol{\mu}^i + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{K}_{k-i}^h \boldsymbol{\lambda}^i, & (1.39а) \\ \big(\dfrac{1}{2}(\mathbf{M}^\top)^h + (\mathbf{K}_0^\top)^h\big)\boldsymbol{\mu}^k + \big(b\gamma \mathbf{Q}^h + \mathbf{W}_0^h\big)\boldsymbol{\lambda}^k = \\ \qquad = (\mathbf{M}^\top)^h \mathbf{g}^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{K}_{k-i}^\top)^h \boldsymbol{\mu}^i - \sum_{i=0}^{k-1} \big(b\sigma \mathbf{Q}^h + \mathbf{W}_{k-i}^h\big)\boldsymbol{\lambda}^i, \quad k \in N_0, & (1.39б) \end{cases}$$

де $\mathbf{g}^k \in \mathbb{R}^M$ – вектор коефіцієнтів апроксимації функції g у просторі $S_h^0(\Gamma)$, а великі літери з позначкою h означають дискретний аналог (матрицю відповідного розміру) крайового інтегрального оператора. Наприклад, $\mathbf{V}_0^h$ і $\mathbf{V}_i^h$ позначають блоки матриці СЛАР, які виникають після застосування до k-ої системи КІР у послідовності (1.33) методу Гальоркіна-МКЕ з врахуванням наближення (1.37) для густин $\mu_k,\ k \in \mathbb{N}_0$. Розрахункові формули для елементів таких матриць подано у розділі 3.

Отож, отримали послідовність СЛАР для знаходження пар векторів $(\boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{M^*}$ для наближень пар функцій (μ_k, λ_k), які розглядаємо для послідовних значень $k \in \mathbb{N}_0$.

1.4. Математичні моделі з іншими крайовими умовами

Покажемо, що поєднання перетворення Лаґерра за часовою змінною з методом Гальоркіна-МКЕ при розв'язуванні мішаних задач для хвильового рівняння з іншими крайовими умовами приводить до послідовностей СЛАР, подібних до (1.39).

У випадку задачі з крайовою умовою Діріхле

$$u|_\Sigma = g \quad \text{на } \Sigma, \tag{1.40}$$

де g — задана функція, безпосередньо з відношення (1.12) матимемо ЕКІР

$$\mathcal{V}\mu = \frac{1}{2}g + \mathcal{K}g \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{1.41}$$

відносно невідомої густини μ. Результатом ПЛ для такого рівняння буде послідовність КІР

$$V_0\mu_k = \frac{1}{2}g_k + \sum_{i=0}^{k-1} K_{k-i}g_i - \sum_{i=0}^{k-1} V_{k-i}\mu_i \ \text{ на } \Gamma, \ \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.42}$$

Після дискретизації крайових операторів згідно методу Гальоркіна-МКЕ матимемо, враховуючи наближення (1.37), таку СЛАР

$$\mathbf{V}_0^h \boldsymbol{\mu}^k = \frac{1}{2}\mathbf{M}^h \mathbf{g}^k + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{K}_{k-i}^h \mathbf{g}^i - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{V}_{k-i}^h \boldsymbol{\mu}^i, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.43}$$

Для задачі з умовою Неймана

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} u|_\Sigma = g \quad \text{на } \Sigma, \tag{1.44}$$

де g — задана функція, з відношення (1.13) прийдемо до ЕКІР

$$\mathcal{W}\lambda = \frac{1}{2}g - \mathcal{K}^\top g \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{1.45}$$

відносно невідомої густини λ. Аналогічно до попереднього випадку після застосування ПЛ прийдемо до послідовності КІР

$$W_0 \lambda_k = \frac{1}{2} g_k - \sum_{i=0}^{k-1} K_{k-i}^\top g_i - \sum_{i=0}^{k-1} W_{k-i}\lambda_i \ \text{ на } \Gamma, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.46}$$

яка у скінченновимірному просторі матиме вигляд

$$\mathbf{W}_0^h \boldsymbol{\lambda}^k = \frac{1}{2}(\mathbf{M}^\top)^h \mathbf{g}^k - \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{K}_{k-i}^\top)^h \mathbf{g}^i - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{W}_{k-i}^h \boldsymbol{\lambda}^i, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.47}$$

Зазначимо, що оператори V_0 і W_0, як і A_0, є еліптичним в спеціальних функційних просторах, тобто можемо застосувати метод Гальоркіна-МКЕ для послідовного знаходження невідомих коефіцієнтів розвинення густин хвильових потенціалів у кожному з випадків.

За аналогією з еліптичними крайовими задачами (див., наприклад, [58]), перехід до ЕКІР шляхом подання розв'язку формулою Кірхгофа називають прямим. Назва зумовлена тим, що густини потенціалів мають сенс даних Коші для цього розв'язку. Альтернативний підхід полягає у використанні лише одного з хвильових потенціалів для зображення

розв'язку задачі. Такий підхід називають непрямим, оскільки в цьому випадку невідомі функції не мають зазначеного сенсу.

Щоб після перетворення Лаґерра отримувати послідовності КІР, які асоційовані з еліптичними операторами, для зображення розв'язку задачі Діріхле використовують хвильовий потенціал простого шару

$$u = \mathcal{S}\mu \quad \text{в } Q, \tag{1.48}$$

а для Неймана – подвійного

$$u = \mathcal{D}\lambda \quad \text{в } Q. \tag{1.49}$$

Тоді для задачі Діріхле матимемо таке ЕКІР

$$\mathcal{V}\mu = g \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{1.50}$$

і відповідну послідовність КІР у просторі зображень ПЛ

$$V_0\mu_k = g_k - \sum_{i=0}^{k-1} V_{k-i}\mu_i \ \text{ на } \Gamma, \ \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.51}$$

Її дискретний аналог матиме вигляд

$$\mathbf{V}_0^h\boldsymbol{\mu}^k = \mathbf{M}^h\mathbf{g}^k - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{V}_{k-i}^h\boldsymbol{\mu}^i, \ \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.52}$$

Для задачі Неймана отримаємо

$$\mathcal{W}\lambda = g \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{1.53}$$

звідки після ПЛ матимемо послідовність КІР

$$W_0\lambda_k = g_k - \sum_{i=0}^{k-1} W_{k-i}\lambda_i \ \text{ на } \Gamma, \ \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.54}$$

яка після дискретизації крайових операторів породжує таку послідовність СЛАР

$$\mathbf{W}_0^h \boldsymbol{\lambda}^k = (\mathbf{M}^\top)^h \mathbf{g}^k - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{W}_{k-i}^h \boldsymbol{\lambda}^i, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.55}$$

Розглянемо ще одну мішану задачу, яку називатимемо задачею Коші [38], коли на частині $\Gamma_1 \subset \Gamma$ межової поверхні дані Коші невідомі, натомість на іншій частині $\Gamma_2 := \Gamma \setminus \overline{\Gamma_1}$ є відомими як слід, так і нормальна похідна розв'язку

$$u|_{\Sigma_2} = f_2, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}} u|_{\Sigma_2} = g_2 \quad \text{на } \Sigma_2 := \Gamma_2 \times \mathbb{R}_+, \tag{1.56}$$

де g_2 і $f_2(x,t)$ – задані функції. Приклад такої геометрії див. на рис. 6.9.

Подамо розв'язок у вигляді хвильового потенціалу простого шару

$$u(x,t) = \mathcal{S}\mu(x,t) := \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\mu_1(y, t - |x-y|)}{|x-y|} \, d\Gamma_y + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\mu_2(y, t - |x-y|)}{|x-y|} \, d\Gamma_y, \tag{1.57}$$

Розглядаючи на Σ_2 слід та нормальну похідну

$$\mathcal{S}^+\mu = \mathcal{V}\mu, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}}^+ \mathcal{S}\mu = \frac{1}{2}\mu + \mathcal{K}^\top \mu,$$

з крайових умов (1.56) отримаємо такі ЕКІР

$$\begin{cases} \mathcal{V}\mu = f_2, \\ \frac{1}{2}\mu + \mathcal{K}^\top \mu = g_2 \end{cases} \quad \text{на} \quad \Sigma_2. \tag{1.58}$$

Внаслідок застосування ПЛ матимемо послідовність систем КІР

$$A_0 \mu_k = \psi_k - \sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i} \mu_i \ \text{ на } \Gamma_2, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.59}$$

де

$$A_0 := \begin{pmatrix} V_0 \\ \frac{1}{2} I_2 + K_0^\top \end{pmatrix}, \quad A_j := \begin{pmatrix} V_j \\ K_j^\top \end{pmatrix}, \ j \in \mathbb{N}. \tag{1.60}$$

$$\psi_k := (f_{k,2}, g_{k,2})^\top, \quad \mu_k = \begin{cases} \mu_{k,1} & \text{на} \quad \Gamma_1 \\ \mu_{k,2} & \text{на} \quad \Gamma_2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.61}$$

$$V_k \mu_i(x) = V_{k,1}\mu_{i,1}(x) + V_{k,2}\mu_{i,2}(x), x \in \Gamma_2,\ i,k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.62}$$

$$V_{k,m}\mu_{i,m}(x) := \int\limits_{\Gamma_m} \mu_{i,m}(y) e_k(x-y)\, d\Gamma_{m,y},\ x \in \Gamma_2,\ i,k \in \mathbb{N}_0,\ m = 1,2, \tag{1.63}$$

$$K_k^\top \mu_i(x) = K_{k,1}^\top \mu_{i,1}(x) + K_{k,2}^\top \mu_{i,2}(x), x \in \Gamma_2,\ i,k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.64}$$

$$K_{k,m}^\top \mu_{i,m}(x) := \int\limits_{\Gamma_m} \mu_{i,m}(y)\, \boldsymbol{\nu}_x \cdot \nabla_x e_k(x-y)\, d\Gamma_{m,y}\ x \in \Gamma_2,\ i,k \in \mathbb{N}_0,\ m = 1,2. \tag{1.65}$$

Будуючи, як раніше, апроксимаційні простори і використовуючи наближення густин

$$\mu_{k,m}^h := \sum_{l=1}^{M} \mu_l^{m,k} \varphi_l^0 \in S_{h_m}^0(\Gamma_m), \quad k \in N_0,\ \ m = 1,2, \tag{1.66}$$

отримаємо з (1.59) такі співвідношення Гальоркіна-МКЕ

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{0,1}^h \boldsymbol{\mu}_1^k + \mathbf{V}_{0,2}^h \boldsymbol{\mu}_2^k = \mathbf{M}^h \mathbf{f}_2^k - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \mathbf{V}_{k-i,1}^h \boldsymbol{\mu}_1^k - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \mathbf{V}_{k-i,2}^h \boldsymbol{\mu}_2^k, & (1.67а) \\ (\mathbf{K}_{0,1}^\top)^h \boldsymbol{\mu}_1^k + (\frac{1}{2}(\mathbf{M}^\top)^h + (\mathbf{K}_{0,2}^\top)^h)\boldsymbol{\mu}_2^k = \\ = (\mathbf{M}^\top)^h \mathbf{g}_2^k - \sum\limits_{i=0}^{k-1} (\mathbf{K}_{k-i,1}^\top)^h \boldsymbol{\mu}_1^k - \sum\limits_{i=0}^{k-1} (\mathbf{K}_{k-i,2}^\top)^h \boldsymbol{\mu}_2^k, \quad k \in N_0, & (1.67б) \end{cases}$$

де $\boldsymbol{\mu}_m^k := \{\mu_{m,l}^k\}_{l=1}^{M_m}$, $m = 1,2$, $\mathbf{f}_2^k \in \mathbb{R}_2^M$, $\mathbf{g}_2^k \in \mathbb{R}_2^M$ – вектори коефіцієнтів апроксимації функцій f_2 та g_2 у просторі $S_{h_2}^0(\Gamma_2)$ відповідно, а елементи матричних блоків обчислюють за тими ж формулами, що і в (1.39), але по поверхнях $\Gamma_m,\ m = 1,2$.

1.5. Узагальнені специфікації предметної області

Розглянуті у цьому розділі математичні моделі, які основані на мішаних задачах для однорідного хвильового рівняння з однорідними початковими умовами, дають змогу з'ясувати загальні характеристики відповідних чисельних схем та алгоритмів, що лежатимуть в основі ПЗ для розв'язування кожної із цих задач. Зазначимо, що комбінацію ПЛ з методом Гальоркіна-МКЕ також можна застосувати і до еволюційних задач для інших нестаціонарних рівнянь, зокрема телеграфного рівняння та рівняння теплопровідності(див., наприклад, [14, 21, 36, 37]).

Множину усіх еволюційних задач, що складають предметну область для нашого спеціалізованого програмного комплексу, будемо формально задавати у вигляді задачі для однорідного диференціального рівняння в частинних похідних 2-го порядку

$$a_1\partial_t^2 u + a_2\partial_t u + a_3 u - \Delta u = 0 \quad \text{в} \quad Q, \tag{1.68}$$

з однорідними початковими умовами (1.2) і крайовою умовою

$$b_1\partial_{\boldsymbol{\nu}} u|_\Sigma + b_2\partial_t u|_\Sigma + b_3 u|_\Sigma = g \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{1.69}$$

де $a_i, b_i,\ i = \overline{1,3}$ — сталі. Тоді розглянуті раніше моделі можна отримати з цієї абстрактної задачі при відповідних значеннях параметрів. Зокрема задачу (**HD**) трактуємо як один з варіантів при $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0$. Для цієї задачі у розділі 5 доведено існування та єдиність розв'язку, а в розділі 3 отримано усі розрахункові формули чисельної схеми.

Зауважимо, що ПЛ зводить еволюційне рівняння (1.68) до рівняння еліптичного типу з невідомими, залежними лише від просторових координат. Із задачами для такого типу рівнянь будемо пов'язувати також випадок,

коли рівняння (1.68) при $a_1 = a_2 = 0$ є еліптичним і невідома функція не залежить від часової змінної.

Отож, використовуючи прямий та непрямий підходи комбінованого методу ПЛ і КІР для чисельного розв'язування усіх зазначених мішаних задач, завжди приходимо до подібних за структурою послідовностей КІР, які володіють такими спільними властивостями:

— усі рівняння послідовності мають той самий інтегральний оператор у лівій частині;
— цей інтегральний оператор еліптичний у відповідних просторах[58], що є передумовою для розробки ефективних чисельних методів для розв'язування еволюційних задач;
— усі рівняння послідовності мають рекурентно залежні праві частини.

Зазначені характеристики мають важливе значення для побудови ефективних алгоритмів чисельного розв'язування мішаних задач у тривимірних за просторовими змінними областях.

1.6. Вимоги до програмного забезпечення, які випливають з математичних моделей

Усе ПЗ, яке реалізує алгоритми розглянутих обчислювальних схем у відповідному обчислювальному середовищі, називатимемо "фреймворком". Будемо використовувати для нього також назву MultiMathFramework (скорочено MMF) як назву програмного продукту.

Покладемо в основу концепції фреймворку дві властивості. По-перше, з огляду на обчислювальну складність математичних моделей, цей фреймворк має бути ефективним засобом для проведення обчислювальних експериментів в рамках моделювання еволюційних процесів. По-друге – архіте-

ктура фреймворку має забезпечувати його просту розширюваність на нові еволюційні задачі без переробки раніше розроблених підсистем.

Розглянуті математичні моделі еволюційних процесів визначають множину вимог до фреймворку. Відповідно до загальноприйнятої класифікації [61], розглядаємо три категорії вимог: функціональні, нефункціональні та обмеження.

1.6.1. Функціональні вимоги. Функціональні вимоги визначають обчислення відповідних атрибутів чисельного розв'язку:

1. *Вибір конкретної задачі (із заданого переліку типів еволюційних чи стаціонарних задач) і введення її вхідних даних.* В інтерфейсі користувача (графічному чи командного рядка) передбачити зберігання вхідних та обчислених даних з метою повторного використання.
2. *Знаходження чисельного розв'язку конкретної задачі.* Це є основною функцією системи.
3. *Систематизоване зберігання результатів обчислень.* Дані, які отримані на визначених етапах обчислення розв'язку, зберігаються у спеціальних репозиторіях. Формати даних мають забезпечувати можливість їхнього подальшого використання у фреймворку, або поза ним після експорту.
4. *Аналіз чисельного розв'язку* шляхом обчислення апостеріорних похибок, зокрема абсолютної та відносної похибок, порядку збіжності.
5. *Візуалізація отриманих розв'язків за допомогою графіків та таблиць.*
6. *Генерування геометрії області* та дискретизація межової поверхні крайовими елементами з відповідними режимами зберігання геометричних даних та візуалізації.

1.6.2. Нефункціональні вимоги. Нефункціональні вимоги стосуються атрибутів, які характеризують архітектуру фреймворку та якість чисельних розв'язків: похибки розв'язків на різних етапах обчислень, швидкість обчислень, зручність використання ПЗ.

1. *Архітектура фреймворку має забезпечувати його розширення на нові задачі та нові чисельні методи без зміни раніше розробленого коду.*
2. *Мінімізація часу розв'язування задачі* за рахунок технічних прийомів, що сприяють покращенню швидкості обчислення задачі, наприклад, кешування проміжних результатів для зберігання просторових компонент чисельного розв'язку задачі, використання багатопотоковості для паралельного обчислення елементів матриць.
3. *Обробка виняткових ситуацій в процесі виконання задачі* для взаємодії із користувачем та уникнення пошкодження стану програми.
4. *Зручність у використанні.* Взаємодія користувача із системою має бути простою та зрозумілою на усіх етапах використання.

1.6.3. Обмеження. Обмеження визначають рамки для прийняття рішень під час проведення чисельних експериментів. Зокрема вони стосуються використання певних технологій, бібліотек чи системних компонентів для реалізації ПЗ. На даний момент основними технологіями і бібліотеками, використаними у фреймворку MMF, є .NET Framework, Windows Forms, WPF, Python, Qt framework, Matplotlib

1.7. Висновки до розділу 1

Чисельні схеми розв'язування розглянутих еволюційних задач, які отримані шляхом поєднання перетворення Лаґерра та МКЕ, мають подібну структуру та оперують аналогічними наборами даних. Ці

обставини є підставою для формального узагальнення математичних моделей з метою побудови ієрархій відповідних абстрактних типів (класів та інтерфейсів). Вони разом із програмними засобами, що забезпечуватимуть обчислювальне середовище фреймворку, будуть утворювати основу (ядро) MMF. Тоді для реалізації конкретної обчислювальної схеми залишатиметься лише розробка програмного коду, який характерний лише відповідній задачі.

РОЗДІЛ 2
АРХІТЕКТУРА ТА БАЗОВІ ТИПИ ПРОГРАМНОГО КОМПЛЕКСУ

У цьому розділі розглянемо архітектурні, алгоритмічні та програмні рішення, які випливають із сформульованих раніше вимог до розробки фреймворку, який давав би змогу проводити чисельне моделювання еволюційних процесів різної природи у тривимірних просторових областях.

2.1. Загальна характеристика архітектури фреймворку

Проєктуючи архітектуру фреймворку MMF, дотримуємося таких двох ключових положень:

1. *Кожна задача є окремою сутністю*, яка володіє власним набором значень параметрів обчислювальної схеми та середовища, використовує характерні для цієї задачі алгоритми та їхню реалізацію.
2. *Усі задачі із предметної області мають подібні характеристики та алгоритми.* Це стосується дискретизації крайових операторів, алгоритмів чисельного інтегрування, знаходження елементів СЛАР, обчислення функцій Лаґерра та ін.

Згідно з першим положенням задачу розглядаємо як окремий компонент системи, що динамічно підвантажується на етапі виконання. Друге положення зумовлює розробку бібліотеки загальних алгоритмів, яка буде спільно використовуватись різними компонентами обчислювальної схеми.

Фреймворк розглядаємо як спеціалізовану систему, програмний код якої розподілено по таких рівнях (рис. 2.1):

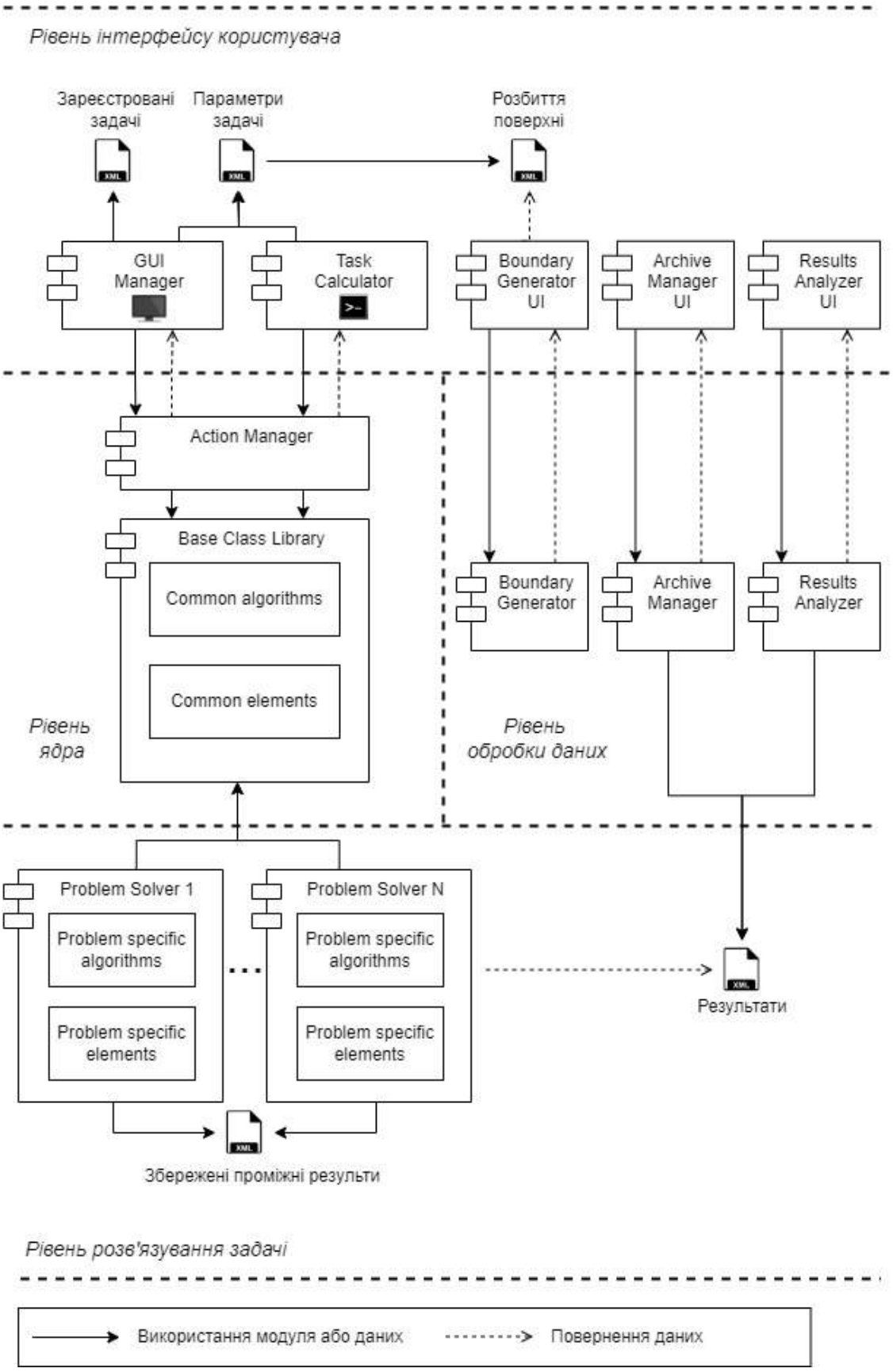

Рис. 2.1. Архітектура MultiMathFramework

— рівень інтерфейсу користувача;
— рівень ядра;
— рівень розв'язування задачі;
— рівень обробки даних.

Рівні групують пов'язані між собою модулі програмного коду, які мають спільне призначення, на рис. 2.1 вони відділені пунктирними лініями. Така архітектура забезпечує, з одного боку, логічну зв'язність модулів в межах кожного рівня, з іншого – належне розділення сутностей фреймворку.

Мінімальна взаємозалежність ПЗ із різних рівнів забезпечує незалежний подальший розвиток конкретних компонентів фреймворку. Наприклад, інтерфейс користувача комунікує лише із модулями ядра фреймворку та не залежить від компонентів розв'язування окремих еволюційних задач. Це дає змогу розробляти як графічний інтерфейс користувача без внесення змін до компонентів, що відповідають за отримання результатів задачі, так і навпаки – модифікувати чи додавати нові компоненти, які безпосередньо реалізують конкретні обчислювальні схеми чи алгоритми.

2.2. Інтерфейс користувача

Для керування обчисленнями в MMF передбачено два компоненти:

1) GUI Manager здійснює вибір потрібної реалізації задачі та запускає її на виконання після налаштування потрібних параметрів;
2) Task Calculator виконує запуск із командного рядка обчислення розв'язку конкретної задачі у фоновому режимі.

Оскільки усі характеристики задачі, яку розв'язує модуль Problem Solver, знаходяться у конфігураційному файлі, користувач фреймворку може в довільний спосіб змінювати і підбирати потрібні інтерфейси без

внесення змін до інших компонентів.

2.2.1. Модуль GUI Manager. GUI Manager – це окремий модуль, який надає користувачеві графічний інтерфейс для взаємодії з фреймворком. На діаграмі послідовностей 2.2 зображено покрокову взаємодію з локальними модулями та ядром для виконання різних етапів розв'язування конкретної задачі:

— вибір конкретної задачі із переліку зареєстрованих у MMF задач;
— задання значень відповідних параметрів вибраної задачі;
— запуск обчислень розв'язків задачі;
— перегляд та збереження отриманого чисельного розв'язку.

Першим кроком є зчитування переліку зареєстрованих у MMF задач, які є доступними для розв'язування. Цей перелік разом з основними атрибутами задач зберігається у конфігураційному файлі TaskConfig.xml, шлях до якого міститься в GUI Manager. Перевагами такого підходу є перетворення даних з використанням механізму десеріалізації та гнучкість налаштування фреймворку.

Кожній задачі у конфігураційному файлі TaskConfig.xml відповідає елемент <task> (див. табл. 2.1). GUI Manager передає його атрибути модулям ядра. Реєстрація модуля Problem Solver зводиться до додавання у файл TaskConfig.xml нового елемента <task>, а для вилучення задачі з переліку достатньо видалити відповідний елемент <task>.

Наступним кроком є задання значень параметрів задачі. У рамках фреймворку кожна задача характеризується трьома множинами:

— вхідні дані, які конкретизують математичне формулювання задачі;
— параметри усіх чисельних методів;
— параметри алгоритмів опрацювання чисельних розв'язків.

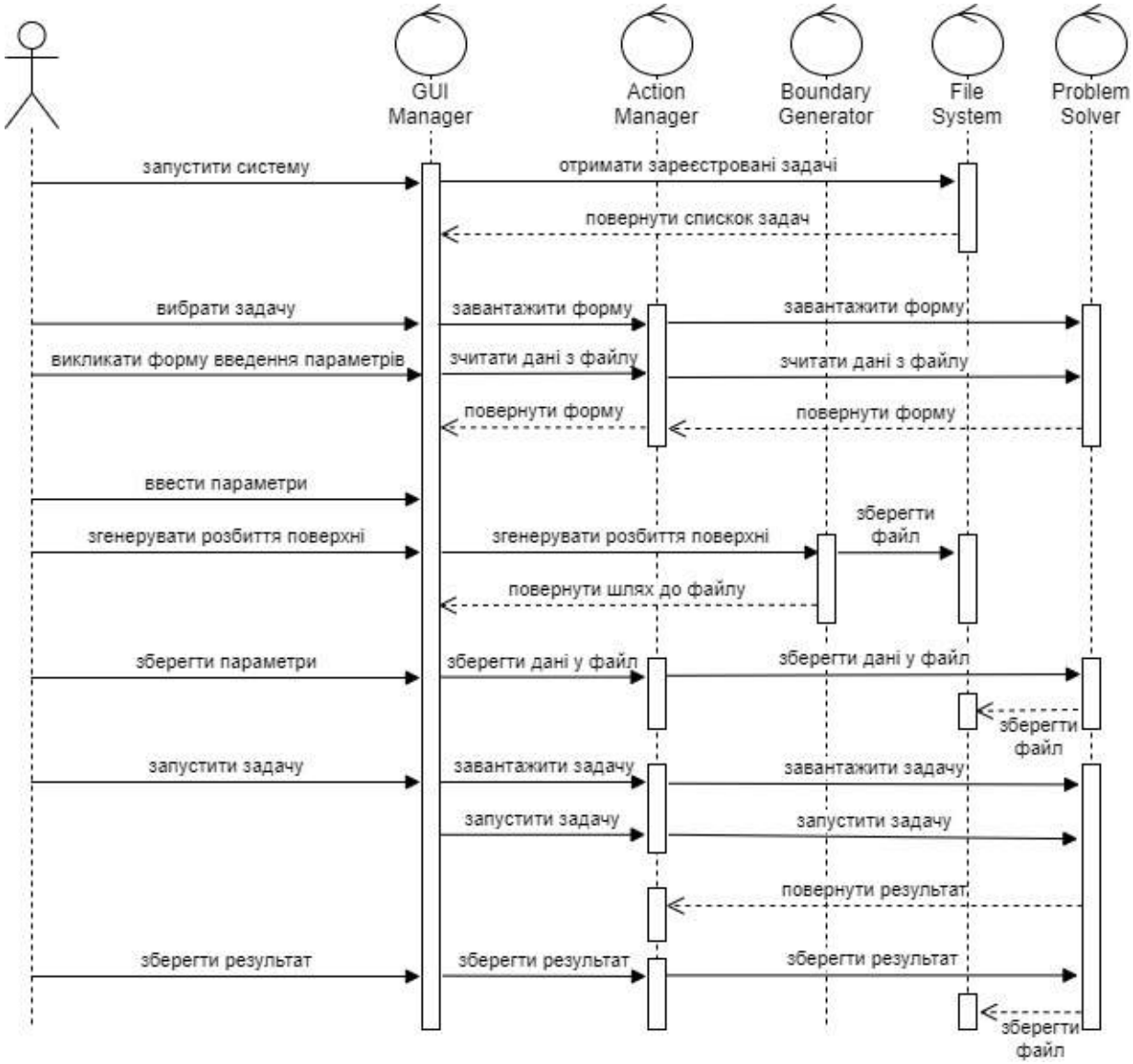

Рис. 2.2. Діаграма послідовностей при використанні GUI Manager.

Для введення значень параметрів задачі GUI Manager ініціює виклик форми, асоційованої з конкретною задачею. Оскільки задачі відрізняються вхідними даними, то відповідна форма введення даних визначена для конкретного модуля Problem Solver. Вона наслідує базову форму, задану в ядрі, саме її інтерфейс використовує GUI Manager. На етапі виконання, GUI Manager зчитує назву класу форми та збірку згідно з атрибутами елемента <form> (табл. 2.1) і за допомогою механізму рефлексії відповідна форма завантажується із модуля Problem Solver. Такий підхід дає змогу уникнути

Таблиця 2.1

Основні елементи конфігураційного файлу системи

Елемент	Елемент вищого рівня	Атрибути	Опис
<tasks>	-	-	кореневий елемент xml-файлу
<task>	<tasks>	name description filename	містить назву, опис задачі та посилання на її конфігураційний файл відповідно
<form>	<task>	classname assembly	містить назву класу та збірки, де розташована форма введення вхідних параметрів задачі

прямої залежності користувацького інтерфейсу від модуля Problem Solver.

GUI Manager також взаємодіє з компонентом Boundary Generator, що відповідає за генерування та візуалізацію розбиття геометричних поверхонь на крайові елементи. Результатом роботи цього компонента є xml-файл (див. табл. 2.2). Problem Solver працює напряму із файлом розбиття поверхні. Детальніше розглянемо Boundary Generator у підрозділі 2.2.3.

Після введення параметрів задачі користувач через GUI Manager запускає обчислення розв'язку. Результати задачі повертаються до GUI Manager, після чого їх можна зберегти у xml та MS Excel форматах, а також зберегти в Archive Manager для подальшого аналізу.

2.2.2. Модуль Task Calculator. Це альтернативний спосіб для запуску через інтерфейс командного рядка однієї програми, що реалізує

розв'язування конкретної задачі. Task Calculator використовують для обчислень у фоновому режимі розв'язків кількох задач, послідовність дій зображено на рис. 2.3.

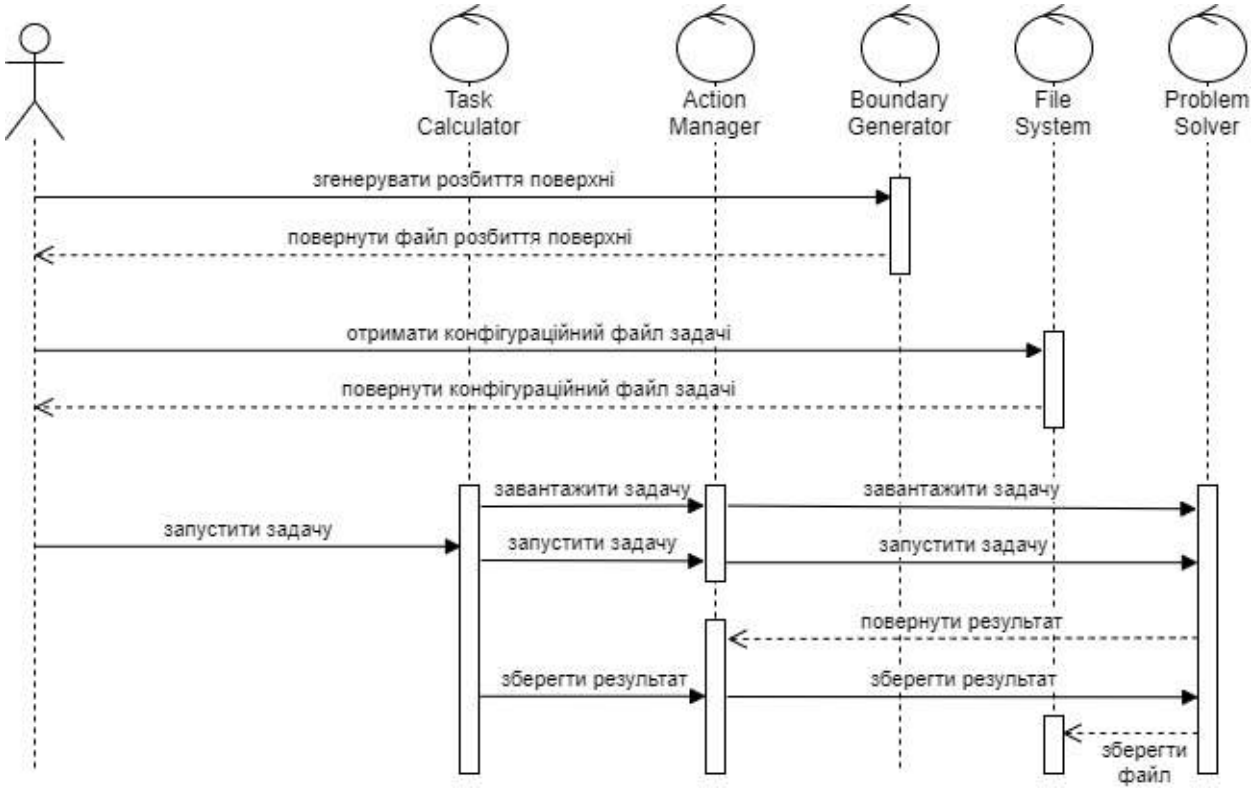

Рис. 2.3. Діаграма послідовностей при використанні Task Calculator

При запуску Task Calculator необхідно вказати три параметри:

— шлях до конфігураційного файлу задачі;

— шлях до файлу із результатами, що створиться після завершення процесу обчислень;

— шлях до файлу, що міститиме проміжні записи про процес розв'язування задачі (логи).

Згідно таких налаштувань програма напряму звертається до ядра MMF, яке вибирає потрібний модуль розв'язування задачі.

2.2.3. Модуль генерування крайових елементів. Boundary Generator виконує апроксимацію трикутними крайовими елементами

(див. розділ 3) межі області, яка може бути комбінацією кількох базових поверхонь. Першим етапом є задання параметрів геометричних фігур за допомогою відповідної форми з ієрархії SurfaceLayout (рис. 2.4). Тут застосовано шаблон проєктування *Strategy* [48] для підтримки нових типів поверхонь. Генерування поверхні виконується за допомогою класів, похідних від SurfaceGenerator (рис. 2.5).

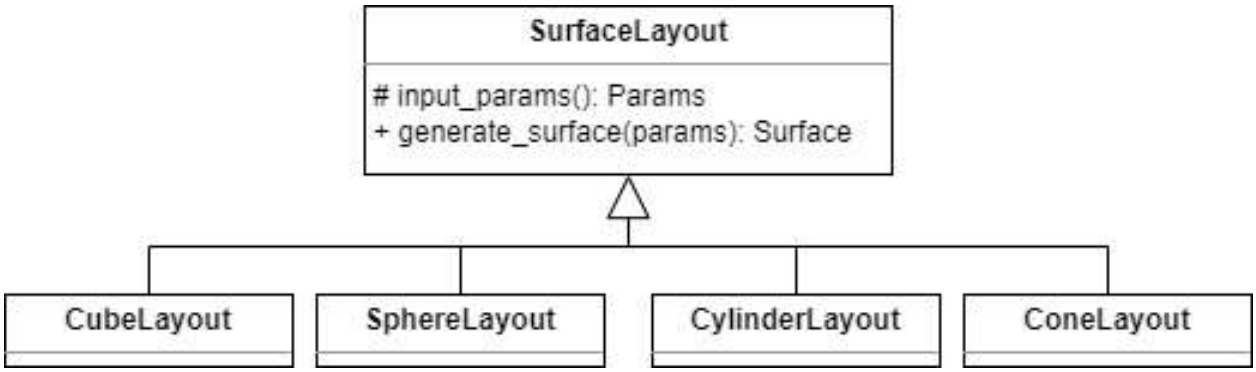

Рис. 2.4. Діаграма класів UI-компонент модуля BoundaryGenerator

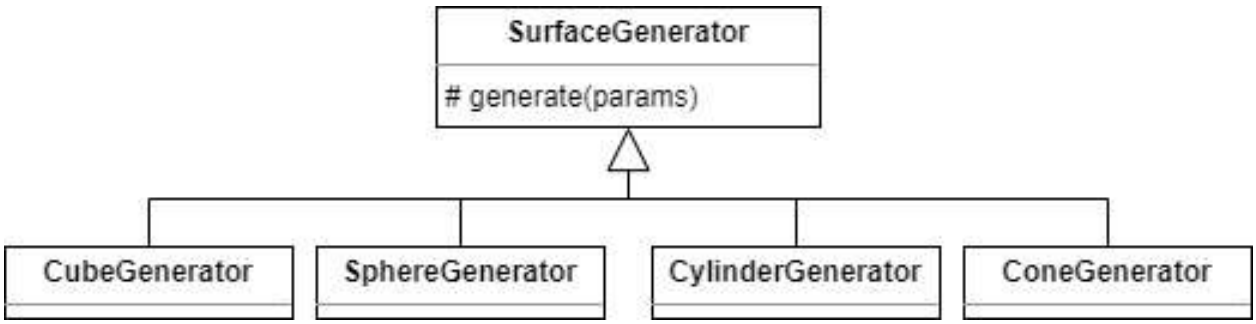

Рис. 2.5. Діаграма класів-генераторів поверхонь

З метою інтероперабельності з іншими модулями для зберігання згенерованих геометричних даних використано xml-формат. Структура набору точок, що формують крайові елементи та їх нормалі, подана в табл. 2.2. У ядрі ці дані десеріалізуються в об'єкт типу BoundarySurface. Окрім генерування xml-файлу Boundary Generator підтримує tex-формат і експорт розбиття у вигляді зображення засобами Python.

Таблиця 2.2

Основні елементи xml-файлу розбиття поверхні

Елементи	Елемент вищого рівня	Опис
<Root>	-	кореневий елемент xml-файлу
<Points>	<Root>	визначає множину вузлів тріангуляції
<Point3D>	<Points>	визначає окрему точку у тривимірному просторі
<X1>, <X2>, <X3>	<Point3D>	визначає одну із координат точки в тривимірному просторі
<Elements>	<Root>	визначає множину крайових елементів
<Element>	<Elements>	визначає крайовий елемент
<IndicesOfPoints>	<Element>	визначає множину індексів точок зі списку <Points>
<int>	<IndicesOfPoints>	визначає індекс точки зі списку <Points>
<Normal>	<Element>	визначає вектор нормалі до крайового елемента
<X1>, <X2>, <X3>	<Normal>	визначає одну із координат вектора нормалі

2.3. Ядро фреймворку

Ядро є фундаментальною частиною MMF, яка охоплює таке ПЗ:

— *бібліотека базових класів та інтерфейсів (Base Class Library)*, необхідних для побудови модуля розвязування задачі;

— *компонент Action Manager*, що відповідає за ініціалізацію та запуск обчислення розв'язку на основі даних з інтерфейсу користувача.

2.3.1. Бібліотека базових класів та інтерфейсів. Відповідно до призначення, класи утворюють кілька множин:

— класи для знаходження поверхневих інтегралів та елементів матриць, що виникають внаслідок застосування МКЕ;

— класи для обчислення значень ядер потенціалів для різних типів задач, наприклад, хвильового рівняння чи рівняння теплопровідності;

— класи для визначення геометрії поверхонь (робота з точками, нормалями, векторами, трикутними і прямокутними крайовими елементами та розбиттям поверхні в цілому);

— класи для знаходження поліномів і функцій Лаґерра;

— класи кусково-сталих і кусково-лінійних базисних функцій;

— класи для обчислення рядів функцій;

— класи для застосування алгоритму ACA при обчисленні СЛАР;

— інфраструктурні елементи – базові класи та інтерфейси, які задають структуру модуля розв'язування задачі;

— допоміжні компоненти, необхідні для реалізації алгоритмів у вищезазначених сутностях.

Детальний опис основних класів ядра див. у підрозділі 2.4.

Архітектура бібліотеки подана на рис. 2.6, а в табл. 2.3 перелічено її підмодулі. Бібліотека побудована за принципом *DRY* [49], уникаючи ду-

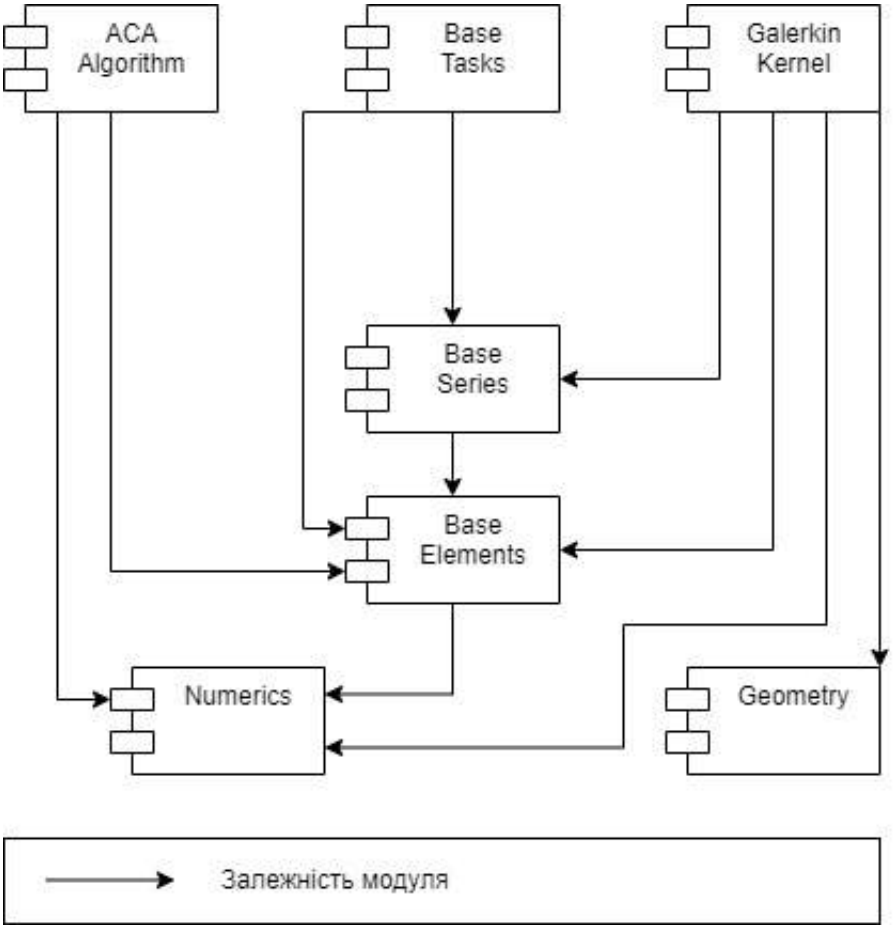

Рис. 2.6. Архітектура бібліотеки базових класів MMF

блювання коду і, разом з тим, надаючи змогу повторно використовувати базові класи ядра в реалізаціях алгоритмів розв'язування різних еволюційних та еліптичних задач. Проєктування ядра виконано із дотриманням принципів ациклічності стабільних залежностей та стабільності абстракцій [16].

Архітектура бібліотеки характеризується невеликою кількістю зв'язків між її підмодулями. Найвищому рівню абстрагування відповідають базові модулі BaseElements, Geometry та Numerics, вони мають найменшу кількість вихідних зв'язків. Натомість класи у підмодулях GalerkinKernel, ACAAlgorithm, BaseTasks або самі визначають конкретизовані сутності предметної області, або служать основою поліморфного кластера.

Таблиця 2.3

Підмодулі бібліотеки базових класів ядра MMF

Підмодуль	Опис
BaseElements	містить базові інфраструктурні елементи, необхідні для побудови модуля розв'язування задачі, а також базові сутності для реалізації основних алгоритмів у інших підмодулях
BaseTasks	містить початкові реалізації класів із підмодуля BaseElements для побудови модуля розв'язування
BaseSeries	містить класи для знаходження рядів та обчислення поліномів Лаґерра
GalerkinKernel	містить класи для обчислення ядер потенціалів, базисних функцій, поверхневих інтегралів та елементів матриць для МКЕ
Geometry	містить елементи для визначення розбиття поверхні
ACAAlgorithm	містить реалізацію алгоритму ACA для обчислення матриці СЛАР
Numerics	містить допоміжні алгоритми для проведення математичних обчислень

2.3.2. Компонент Action Manager. Action Manager виконує роль посередника між інтерфейсом користувача і рівнем розв'язування задачі (див рис. 2.7). Його основні відкриті методи подано у табл. 2.4.

Як видно з діаграм послідовностей 2.2 і 2.3, користувач звертається до Action Manager для завантаження задачі. При цьому метод LoadTask отримує її назву та шлях до конфігураційного файлу із TaskConfig.xml та за допомогою додаткових класів створює відповідний об'єкт для розв'язування

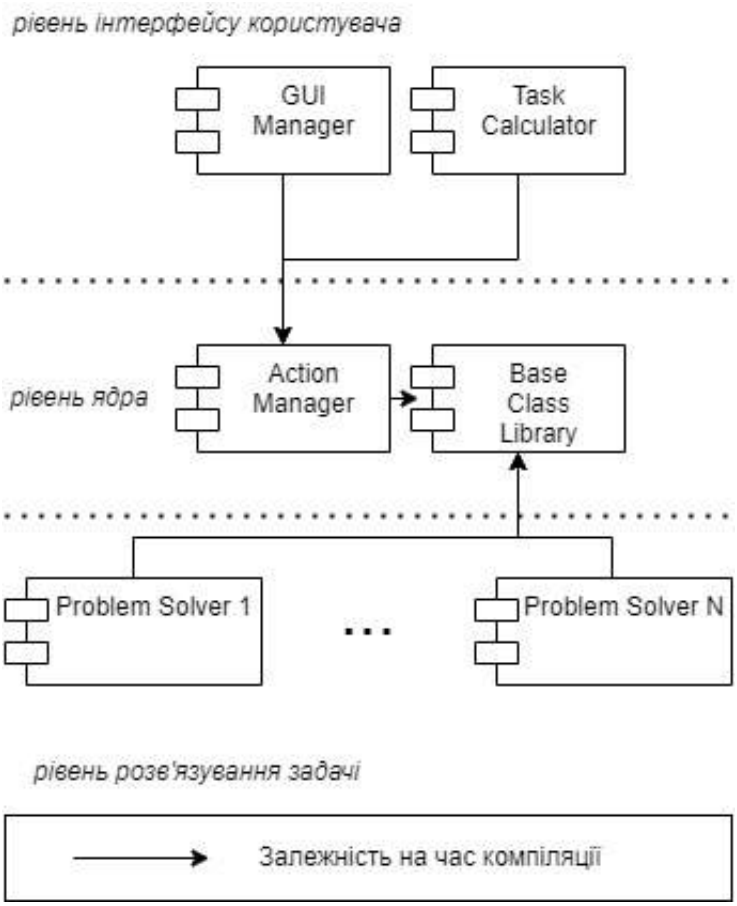

Рис. 2.7. Залежності між модулями системи MMF

задачі. З метою економії обчислювальних ресурсів використано механізм кешування даних у внутрішній хеш-таблиці. Під час повторного запуску обчислень фреймворк знову передає назву задачі і здійснює пошук уже створеного об'єкта у хеш-таблиці. Складність такого процесу становить O(1), оскільки назва є ключем у вищезазначеній структурі даних.

Щоб забезпечити незалежність ядра від окремих модулів розв'язування, розроблено механізм утворення об'єкта задачі без прямого посилання на неї (див. підрозділі 2.5). Він реалізує шаблон ін'єкції залежностей, згідно якого під час завантаження задачі Action Manager отримує з конфігураційного файлу задачі назви потрібного типу і збірки та створює об'єкт задачі засобами рефлексії платформи .NET. Структура

Таблиця 2.4

Відкриті методи класу Action Manager

Метод	Опис
LoadTask(taskName: string, taskFileName: string): void	створює об'єкт класу для розв'язування задачі на основі конфігураційного файлу задачі та додає його у хеш-таблицю
UnloadTask(taskName: string): void	видаляє об'єкт класу задачі із хеш-таблиці
RunTask(taskName: string): void	запускає основний алгоритм розв'язування задачі
CancelTask(): void	зупиняє задачу, що розв'язується
ClearTasks(): void	очищує хеш-таблицю об'єктів розв'язування задачі
GetTaskProgress(): double	повертає прогрес виконання обчислень
GetTaskInputData(taskName: string): void	повертає параметри задачі із її конфігураційного файлу
SaveTaskResults(taskName: string): void	зберігає результати задачі
GetTaskResultData(taskName: string): ResultData	повертає результати задачі у вигляді об'єкта Result

конфігураційного файлу основана на схемі (табл. 2.5).

Зазначимо, що рефлексія в .NET не є найшвидшим рішенням для ство-

Таблиця 2.5

Основні елементи конфігураційного файлу задачі

Елемент	Елемент вищого рівня	Атрибути	Опис
<task>	-	name description assembly classname	кореневий елемент xml-файлу, містить назву та опис задачі, назву класу та збірки для алгоритму розв'язування задачі
<input_data>	<task>	assembly classname	містить список параметрів задачі, а також вказує на назву класу та збірки для об'єкту, що зберігає параметри
<param>	<input_data>	name value	містить назву та значення окремого параметра задачі
<result_data>	<task>	assembly classname	містить назву класу та збірки для об'єкту, що зберігає результати задачі

рення об'єктів певного типу, проте в такому випадку усувається пряма залежність між ядром фреймворку та іншими рівнями під час компіляції (рис. 2.7). Крім того, такий підхід дає змогу динамічно під'єднувати нові задачі до системи MMF на етапі її виконання.

2.4. Опис базових класів та інтерфейсів ядра фреймворку

2.4.1. Визначення загального шаблону розв'язування задачі. Усі обчислювальні схеми задач із предметної області MMF відповідають такому загальному алгоритму:

1) ініціалізація параметрів задачі;
2) формування матричних блоків СЛАР, її розв'язування і обчислення наближеного розв'язку;
3) обробка результатів задачі.

Тому уніфікований алгоритм знаходження чисельних розв'язків можна задати за відомим шаблоном проєктування *Template method* [48]. Для цього в ядрі MMF визначено ієрархію класів Task (рис. 2.8), які відповідають за запуск обчислень. Вони реалізовують інтерфейс ITask, який надає чотири методи (табл. 2.6), що формують структуру основного алгоритму розв'язування задачі. Усі класи-реалізації цього інтерфейсу надають реалізації відповідних методів, які притаманні конкретній задачі.

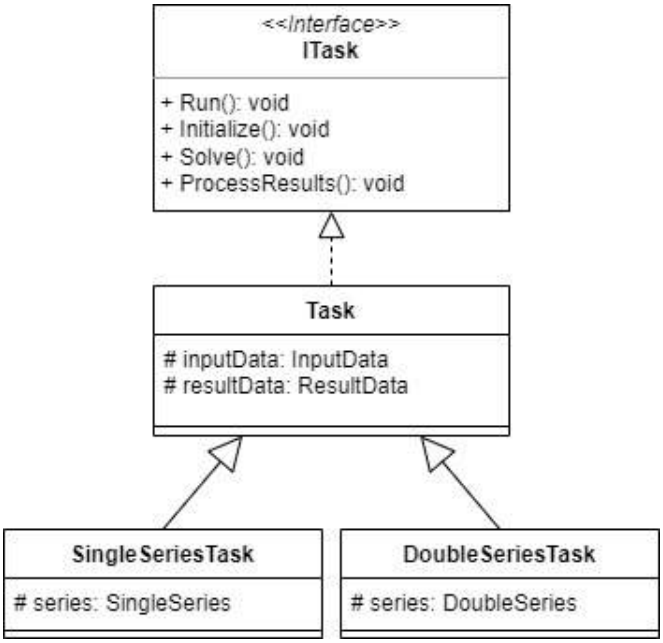

Рис. 2.8. Ієрархія класів Task для основного алгоритму розв'язування

Таблиця 2.6

Методи інтерфейсу ITask

Метод	Опис
Run(): void	призначений для запуску процесу розв'язування задачі
Initialize(): void	призначений для ініціалізації параметрів задачі із конфігураційного файлу
Solve(): void	призначений для знаходження чисельного розв'язку задачі
ProcessResults(): void	призначений для збереження та обробки результатів задачі

Початковою реалізацією інтерфейсу ITask є абстрактний клас Task, що містить поля inputData та resultData, необхідні для збереження параметрів задачі та її результатів відповідно. Тут в рамках *Template Method* імплементовано метод Run, що складається із послідовності викликів Initialize, Solve та ProcessResults (рис. 2.9). Ці методи є віртуальними, завдяки чому використовуються можливості поліморфізму для виконання специфічних програмних інструкцій у похідних класах. З іншого боку, якщо для розв'язування задачі необхідно опустити певні кроки, достатньо перевизначити лише потрібні методи.

2.4.2. Базові класи для задання схеми розв'язування задачі. Класи Task, SingleSeriesTask та DoubleSeriesTask розроблено як базові для реалізацій основного алгоритму розв'язування в модулі Problem Solver. Похідні від Task класи SingleSeriesTask та DoubleSeriesTask відрізняються структурою ряду, що виникає при отриманні чисельного розв'язку задачі, а також фактичним типом вхідних параметрів та результатів задачі.

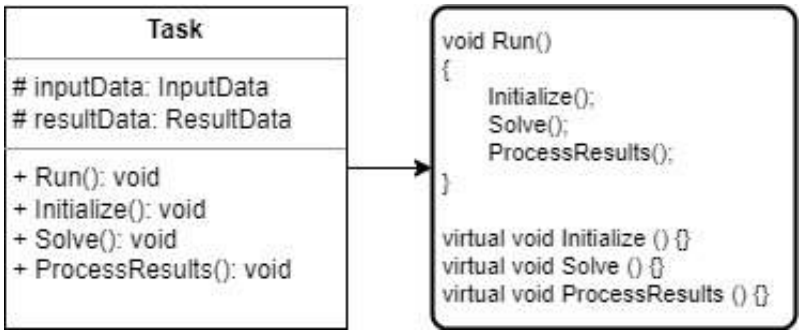

Рис. 2.9. Базова реалізація методів класу Task

У класі DoubleSeriesTask використано об'єкт класу DoubleSeries (рис. 2.10), що визначає частинну суму деякого розвинення, зокрема в ряд Лаґерра (див., наприклад, формулу (1.36)). У цьому випадку кожен доданок обчислюють як добуток значень двох функцій з відповідними значеннями аргументів. Натомість, клас SingleSeriesTask використовує об'єкт класу SingleSeries (рис. 2.10) для обчислення частинної суми ряду, елементами якого є значення деякої функції. Зокрема, з використанням SingleSeriesTask знайдено чисельні розв'язки еліптичних задач.

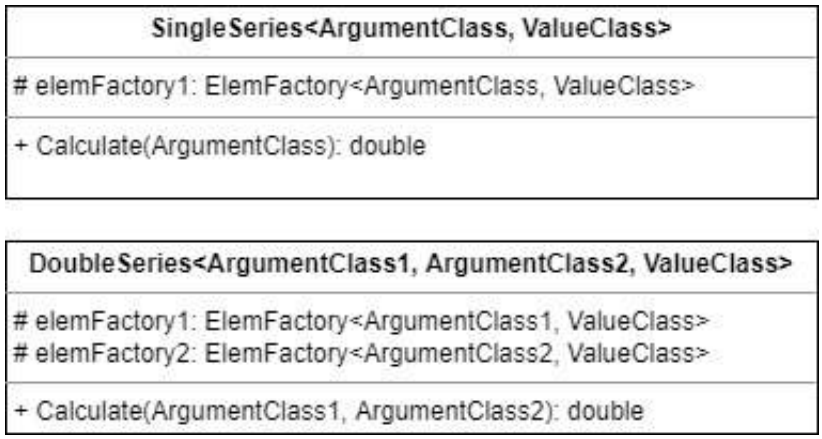

Рис. 2.10. Порівняння класів SingleSeries і DoubleSeries

2.4.3. Обчислення функцій в класах ядра. З метою забезпечення високого рівня абстрагування, обчислення функцій у ядрі організовано згідно шаблону проєктування *Factory method* [48]. Для цього у фреймвор-

ку передбачено абстрактний клас ElemFactory (рис. 2.11). Він відповідає за створення об'єкта типу Elem, що зберігає значення функції для певного типу аргументу. Такий підхід дає змогу

— винести обчислення функцій за межі класу, який її використовує;

— підставляти різні функції в залежні від абстракцій компоненти.

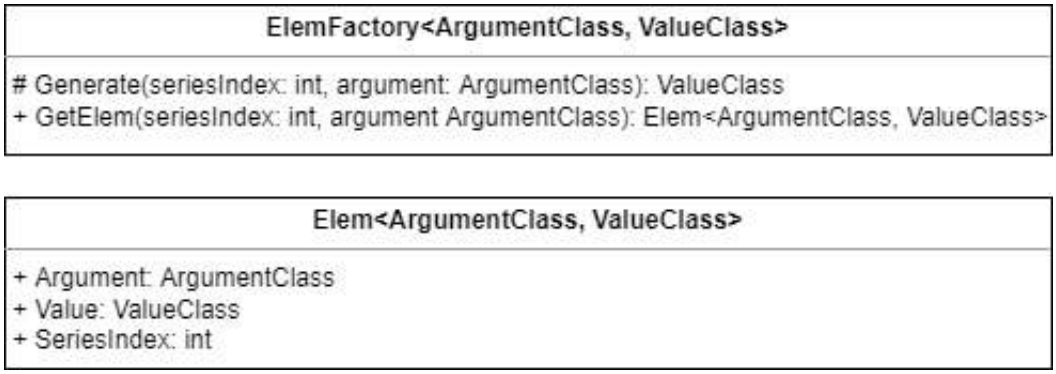

Рис. 2.11. Структура класів ElemFactory та Elem

В класі ElemFactory задано віртуальний метод Generate. Він повертає значення функції, задане шаблонним типом ValueClass, для аргументу, тип якого заданий параметром ArgumentClass. Крім того, клас ElemFactory визначає обчислення послідовності функцій, наприклад, функцій Лаґерра, за значенням їхнього індексу в аргументі seriesIndex (рис. 2.11). Також у класі ElemFactory передбачено відкритий метод GetElem, який є обгорткою навколо захищеного методу Generate. Цей підхід використано для доповнення обчислення функції додатковим кодом, наприклад, для логування часу.

2.4.4. Обчислення компонентів розв'язку, залежних від просторових координат. Класи ядра, які обчислюють компоненти u_i, $i \in \overline{0, N}$, для розвинення наближеного розв'язку, розроблено максимально гнучко з метою незалежності їхніх алгоритмів від конкретних чисельних методів. З цією метою ядро MMF містить допоміжний клас UnFactory (рис. 2.12) з двома полями-посиланнями на об'єкт параметрів задачі, які збере-

жені у її конфігураційному файлі, а також на об'єкт інтерфейсу ISolver для отримання розв'язків СЛАР.

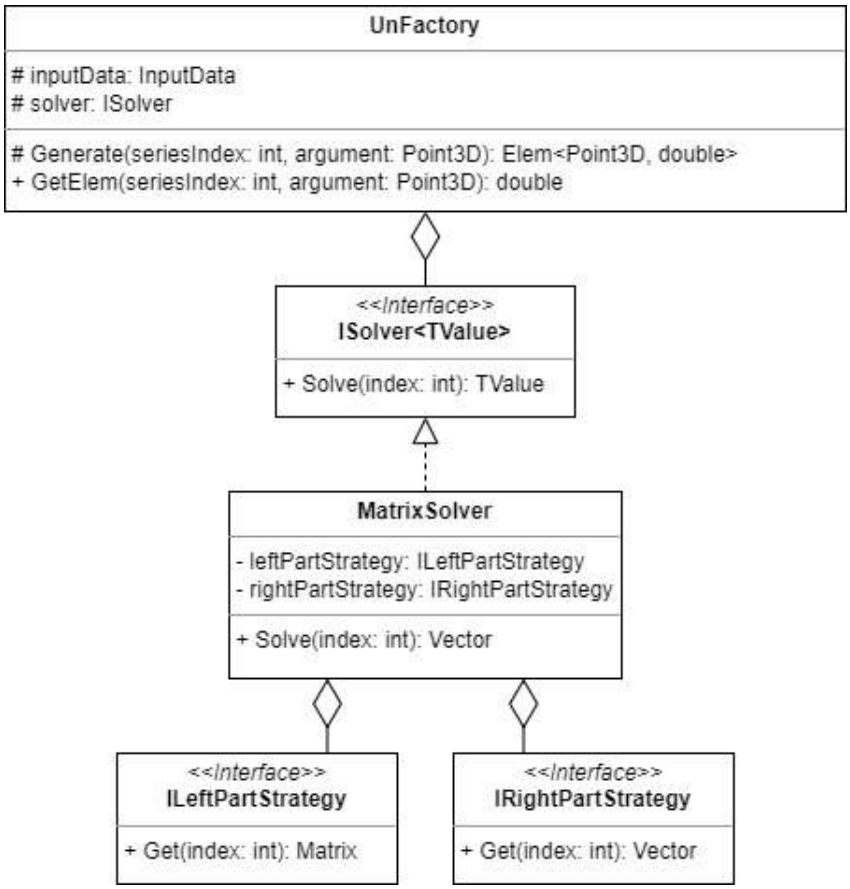

Рис. 2.12. Діаграма класів для отримання просторових компонент розв'язку.

Клас UnFactory – це загальна абстракція згідно шаблону проєктування *Strategy* [48]. Конкретну стратегію, що реалізує інтерфейс ISolver, клас UnFactory використовує на етапі виконання програми.

В ядрі імплементацією інтерфейсу ISolver є клас MatrixSolver (рис. 2.12). Він визначає алгоритм розв'язування СЛАР при застосуванні методу Гальоркіна-МКЕ. Зазначимо, що способи заповнення лівої та правої частин матриці СЛАР можуть бути різними залежно від вибраного чисельного методу. Для врахування цієї обставини в MatrixSolver знову застосовано шаблон проєктування Strategy та

визначено типи ILeftPartStrategy та IRightPartStrategy (рис. 2.12). Реалізації зазначених інтерфейсів можна динамічно змінювати залежно від способу обчислення елементів матриць.

2.4.5. Задання параметрів задачі та збереження результатів. Загальний алгоритм методу Run передбачає також ініціалізацію параметрів задачі у кроці Initialize (рис. 2.9) за допомогою типу InputData (рис. 2.13). Ядро зчитує дані із конфігураційного файлу задачі і десеріалізує їх в об'єкт похідного від InputData класу, який є частиною Problem Solver. Додатково в ядрі також задано похідні класи SingleSeriesInputData і DoubleSeriesInputData, які визначають інтервали спостереження і кроки для просторових та часової координат відповідно.

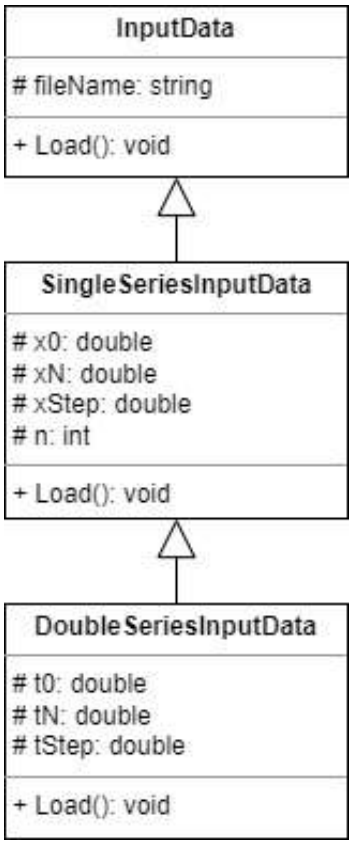

Рис. 2.13. Діаграма класів для зберігання параметрів задачі

Під час завантаження даних в методі Initialize ядро десеріалізує

структуровану інформацію про поверхню (табл. 2.2) в об'єкт класу BoundarySurface (рис. 2.14). Щоб задати загальний спосіб подання різних типів крайових елементів, в ядрі визначено інтерфейс IBoundaryElement. Він надає список властивостей і методів, які потрібно реалізувати, щоб тип крайового елемента був сумісним із BoundarySurface. На даний момент в ядрі визначено дві реалізації IBoundaryElement – BoundaryElementTriangle і BoundaryElementRectangle для трикутних і прямокутних елементів відповідно.

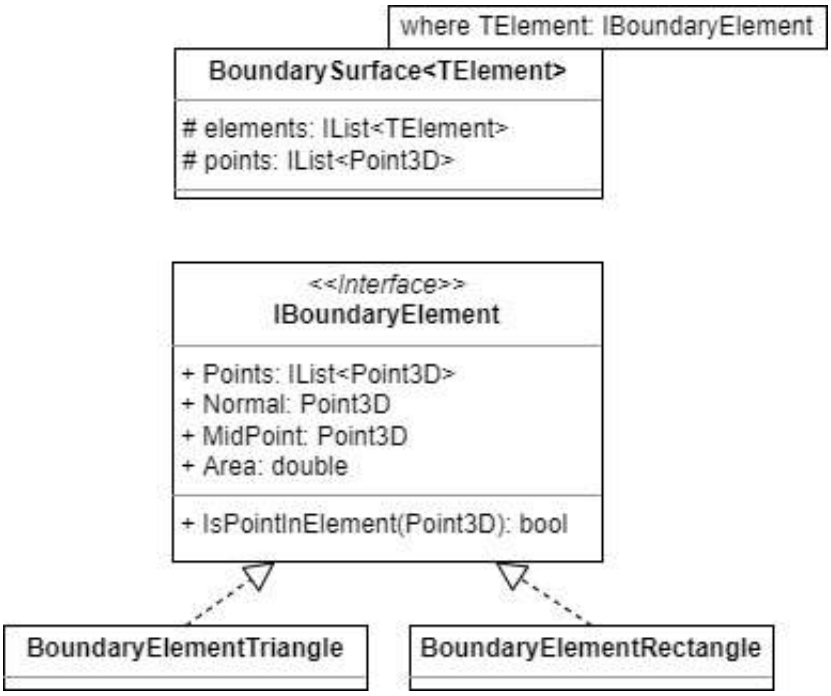

Рис. 2.14. Класи ядра для визначення розбиття поверхні

Для зберігання розв'язків задачі в ядрі визначено ієрархію типів ResultData (рис. 2.15). ResultSingleData, ResultDataData, ResultTripleData і ResultQuadrupleData призначені для роботи із результатами, які залежать від різної кількості координат – від однієї до чотирьох відповідно.

Виконання кроку Solve в методі Run передбачає додавання поточкових значень розв'язку у вигляді об'єктів типу ResultElem (рис. 2.16) за

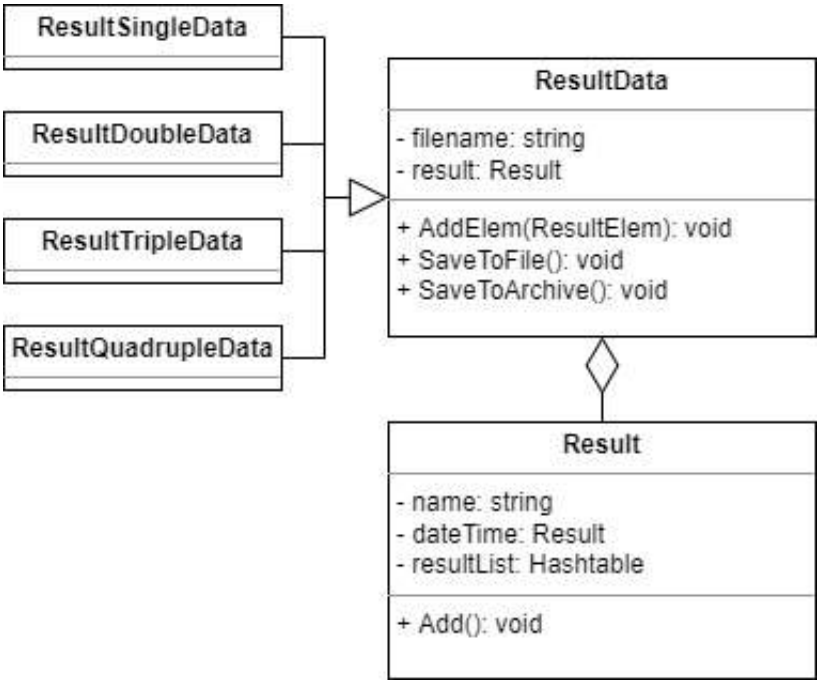

Рис. 2.15. Класи ядра для збереження результатів

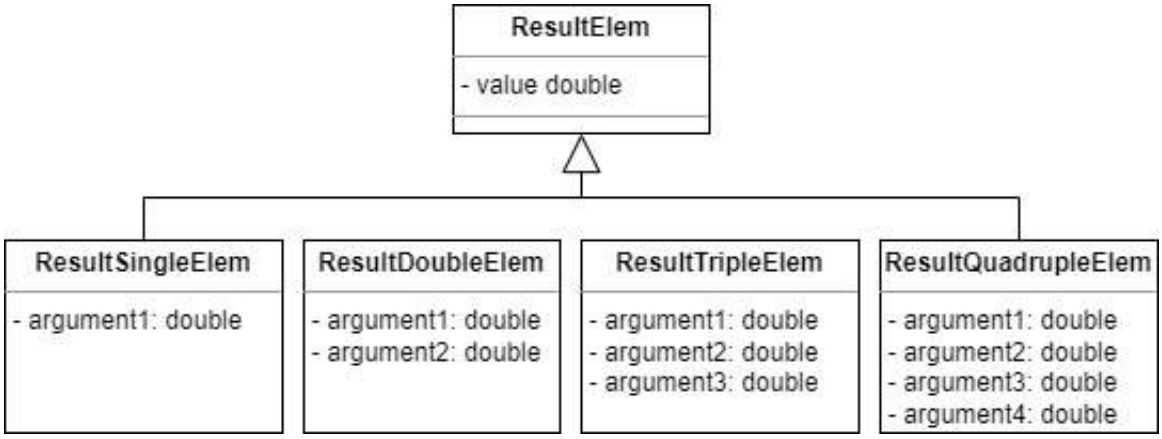

Рис. 2.16. Класи ядра для подання значень розв'язку

допомогою методу AddElem. Оскільки даний метод працює із базовим типом ResultElem, то в коді методу AddElem кожного із похідних класів ResultData визначено додаткову валідацію на допустимий тип вхідного параметра.

2.4.6. Допоміжні інфраструктурні можливості. Для контролю за часом виконання окремих алгоритмів в ядрі передбачено допоміжні ін-

фраструктурні можливості. Оскільки технологія обчислення часу може змінюватись незалежно від способу запису отриманої інформації у потік даних, то ця обставина врахована відповідно до шаблон проєктування *Bridge* [48]. В рамках цього шаблону визначено клас TimeLogger (2.17), що реалізує інтерфейс ITimeLogger і використовує об'єкт типу ITimeLogWriter для запису даних у заданий потік.

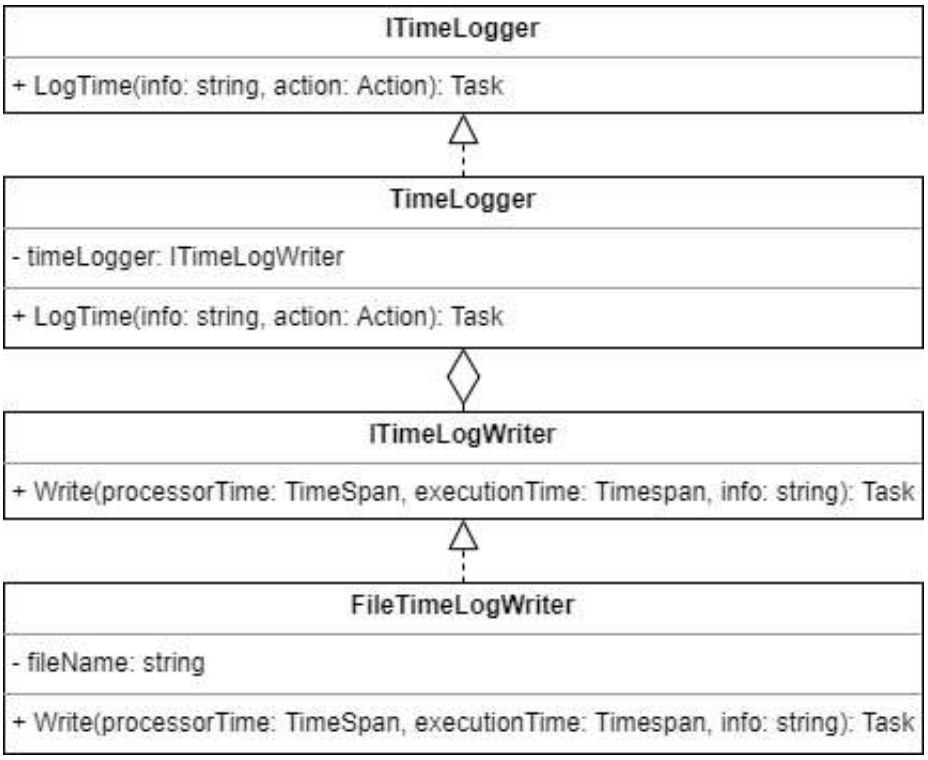

Рис. 2.17. Класи ядра для логування часу виконання програмного коду

2.5. Реалізація шаблону ін'єкції залежностей

Щоб розширення MMF на нові задачі не вимагали внесення змін у програмний код компонента Action Manager, використано принцип *інверсії залежностей* [71], згідно з яким зв'язки між компонентами встановлюються так, щоб абстракції не залежали від реалізацій. Наслідком такого підходу є розроблена архітектура MMF, в якій

абстракції ITask, ElemFactory, UnFactory, ISolver, ILeftPartStrategy, IRightPartStrategy, InputData та ResultData визначені на рівні ядра. Усі вони не залежать від конкретних реалізацій, що містяться безпосередньо у модулі Problem Solver (див. рис. 2.7).

У MMF реалізація принципу інверсії залежностей виконана відповідно до шаблону *ін'єкції залежностей* (Dependency Injection) [42], що дає змогу забезпечити компоненти їх залежностями та відокремити процес створення об'єктів від використання. Розглянемо складові даного шаблону:

— контейнер залежностей (зберігає список визначених залежностей і вбудовує їх);
— залежність (сервіс);
— клієнт.

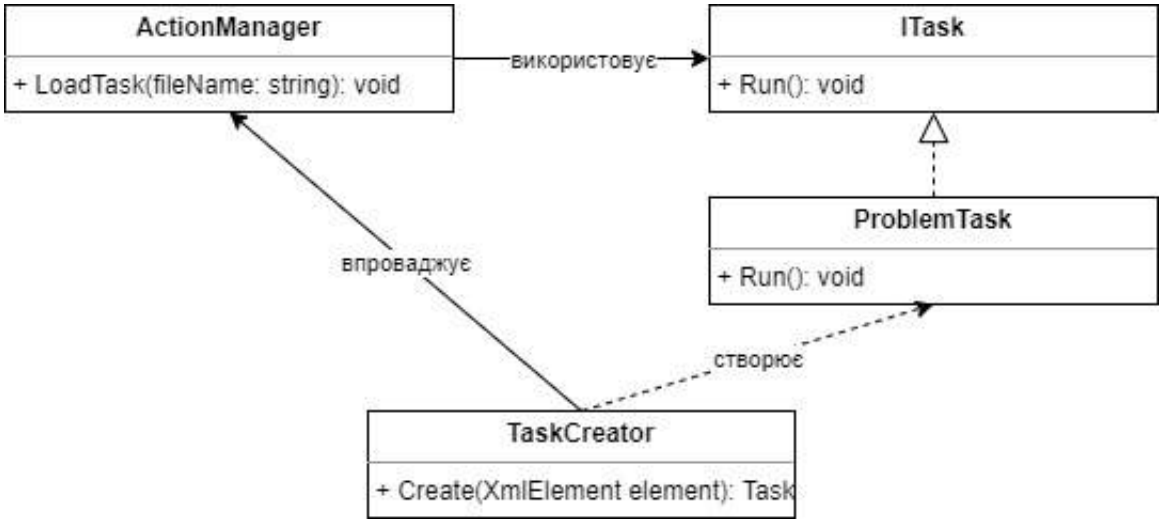

Рис. 2.18. Ін'єкція залежностей в системі MMF

Роль контейнера залежностей фреймворку виконує клас TaskCreator (рис. 2.18). На етапі виконання програми він отримує посилання на конфігураційний файл зі списку або з параметра командного рядка та засобами рефлексії створює клас-реалізацію інтерфейсу ITask відповідно до вибраної задачі. Клієнтським компонентом в даному випадку є Action Manager.

Він використовує абстракцію ITask (залежність), яку клас TaskCreator під час виконання замінює на конкретну реалізацію з модуля Problem Solver.

Зазначимо, що відомі технологічні рішення, зокрема стандартний DI фреймворк у .NET, виконують налаштування контейнера згідно з прописаними залежностями безпосередньо у програмному коді. Це забезпечує безпеку типів і перевірку їх на етапі компіляції. В контексті системи MMF отримання залежностей із xml-файлу налаштувань надає певні переваги, зокрема усуває залежність на етапі компіляції між ядром системи та класами модуля розв'язування, а також забезпечує пізнє зв'язування.

Оскільки завантаження об'єкта задачі є ресурсозатратним процесом, то з метою повторного використання його заносять у внутрішню хеш-таблицю TaskCreator. Вона існує впродовж усього часу виконання фреймворку, а отже всі залежності, які там збережено, формально мають тривалість життя Singleton. Задачу можна також від'єднати і наново завантажити з новими параметрами, що видалить її із хеш-таблиці та створить новий об'єкт.

Зазначимо, що абстракції ITask відповідають різні імплементації з однаковим шаблонним методом Run, тому застосування ін'єкції залежностей можна трактувати також в сенсі шаблону проєктування it Strategy, де окремі стратегії для розв'язування задачі вбудовуються в Action Manager контейнером залежностей.

2.6. Рівень розв'язування задачі

Нагадаємо, що в MMF кожна еволюційна чи еліптична задача є окремою програмною сутністю, яка інкапсулює специфічні алгоритми обчислення розв'язків у відповідному модулі Problem Solver (див. рис. 2.1). Оскільки модулі Problem Solver мають спільне функціональне призначення, то їх

локалізуємо на одному рівні.

Отож, *рівень розв'язування задачі* є окремою частиною системи MMF, де на основі бібліотеки базових класів та інтерфейсів ядра виконується побудова та інтегрування в конкретні модулі Problem Solve алгоритмів отримання чисельного розв'язку конкретної задачі. Відкриті інтерфейси формують загальний шаблон, який визначає структуру цього модуля. Реалізація цих інтерфейсів може бути виконана довільним способом відповідно до схеми розв'язування задачі і передбачає:

— створення конфігураційного файлу задачі;
— створення форми введення параметрів задачі та алгоритмів їх обробки;
— формування лівої та правої частин СЛАР;
— розв'язування СЛАР;
— обчислення наближених значень розв'язку в точках спостереження;
— реєстрацію задачі у конфігураційному файлі TaskConfig.xml.

Покрокову розробку модуля Problem Solve розглянемо у розділі 4.

2.7. Рівень обробки даних

Аналіз результатів є окремим етапом загального процесу розв'язування задачі і виконується за допомогою модулів *рівня обробки даних*:

— *Boundary Generator* – генерування крайових елементів;
— *Archive Manager* – архівування результатів;
— *Results Analyzer* – аналіз результатів.

Функції модуля Boundary Generator описано у підрозділі 2.2.3, тому зараз розглянемо модулі Archive Manager і Results Analyzer.

Архів результатів призначений для обробки даних, отриманих внаслідок роботи модуля Problem Solve. Основними завданнями компонента є:

— відображення списку доступних результатів задач;
— перегляд параметрів задачі;
— побудова графіків чисельного розв'язку в 2D та 3D режимах;
— експорт у MS Excel та HTML формати;
— генерування програмного коду для використання в системах MatLab та Mathematica.
— отримання скриптів для запуску анімації розв'язку в часі у MatLab;
— виклик аналізатора результатів.

Цей модуль є незалежним від інших складових MMF, його спроєктовано як цілком автономний компонент фреймворку, з яким можна працювати через GUI Manager або запустити окремим процесом.

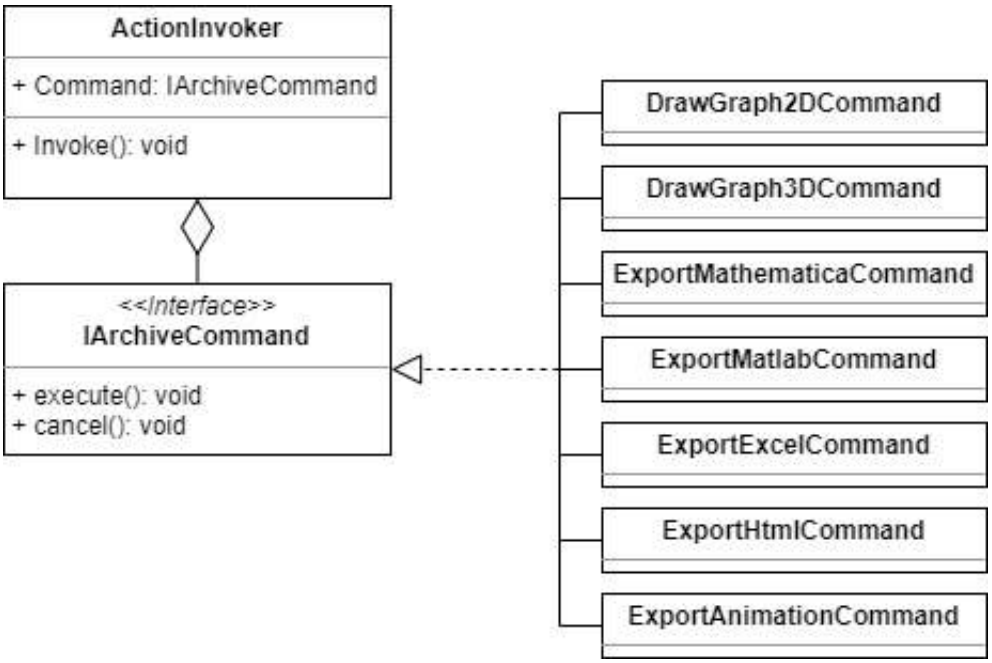

Рис. 2.19. Діаграма класів-команд для обробки дій архіву

Архів підвантажує список отриманих розв'язків задач зі спеціальної папки на машині користувача, яка поділена на окремі каталоги для кожної із розв'язаних задач. Всередині цих каталогів містяться xml-файли результатів, згенеровані об'єктом класу ResultData за допомогою методу

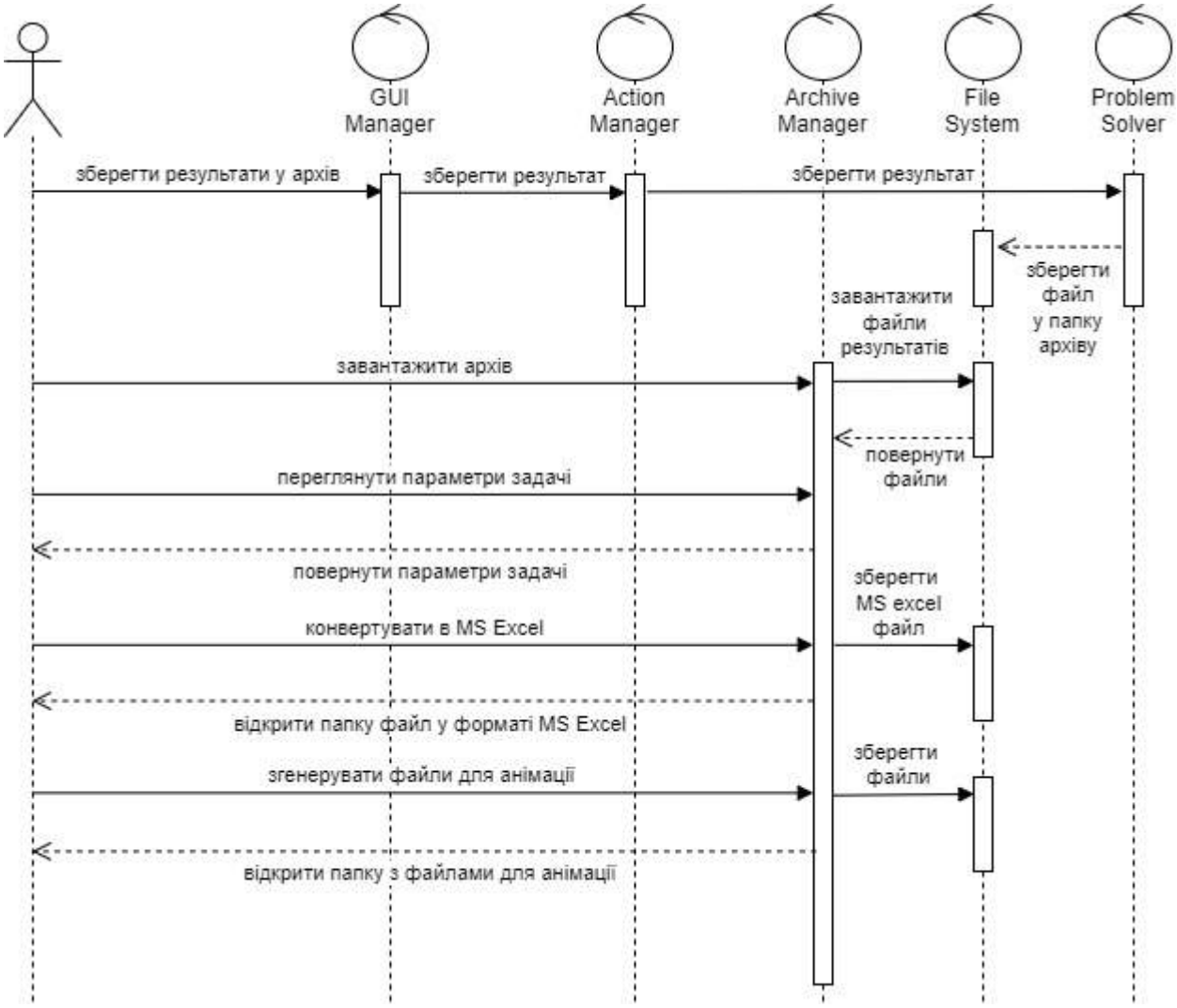

Рис. 2.20. Приклад взаємодії користувача із архівом результатів

SaveToArchive. Основні внутрішні елементи цих файлів подано в табл. 2.7.

Оскільки функції Archive Manager передбачають специфічні алгоритми, то дію над конкретним результатом задачі інкапсульовано у об'єкті класу-команди згідно шаблону проєктування *Command* [48]. Далі, на етапі виконання програми, архів за допомогою класу ActionInvoker (рис. 2.19) викликає відповідний обробник для опрацювання вихідних даних задачі. Приклад взаємодії користувача із Archive Manager подано на рис. 2.20.

Results Analyzer є спеціальним модулем MMF, який призначений для знаходження апостеріорних похибок чисельного розв'язку (6.3), (6.5) та

Таблиця 2.7

Основні елементи файлу результатів задачі

Елемент	Елемент вищого рівня	Атрибути	Опис
<root>	-	host_date	кореневий елемент xml-файлу, містить дату і час отримання розв'язку задачі
<input_data>	<root>	-	містить список параметрів задачі із її конфігураційного файлу
<param>	<input_data>	name value	містить назву та значення окремого параметра задачі
<output_data>	<root>	task_name class_name	містить назви задачі та класу об'єкту, що зберігає результати
<elem>	<output_data>	value argument1 argument2 argument3	містить значення розв'язку (value) в точці, що сформована з координат argument1, argument2, argument3 (відсутня у випадку еліптичної задачі)

передбачуваного порядку збіжності (6.4), (6.6).

Для аналізу спочатку завантажують xml-файли із чисельними

розв'язками задачі та файл з аналітичним розв'язком. Тоді аналізатор виконує обчислення похибок та порядку збіжності і зберігає результати у внутрішньому об'єкті компонента. Зазначимо, що файли чисельного і аналітичного розв'язків мають відповідати структурі, наведеній у табл. 2.7. Отримані похибки можна експортувати до MS Excel та tex файлів у вигляді таблиці. Крім того, можна візуалізувати чисельні результати у вигляді різних графіків.

2.8. Висновки до розділу 2

Аналіз сутностей предметної області фреймворку дає змогу визначити для нього чотирирівневу архітектуру. Кожен рівень формують логічно пов'язані між собою одиниці програмного коду – модулі. Для їх організації і вирішення типових конфігурацій застосовано відповідні шаблони проєктування. Разом з тим, зв'язки між модулями різних рівнів є мінімізовані. Такий підхід забезпечує MMF необхідною гнучкістю з чітко встановленими залежностями.

Ядро – центральний компонент системи – надає множину готових алгоритмів, а також визначає інтерфейси, що формують програмний каркас для побудови модулів розв'язування еволюційних задач. Такий підхід дає змогу легко модифікувати вже реалізовані алгоритми та методи, а також розширювати фреймворк на розв'язування нових задач.

РОЗДІЛ 3
АНАЛІЗ ТА ДЕТАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ КОМБІНОВАНОГО МЕТОДУ КРАЙОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАҐЕРРА

Розроблена у розділі 2 архітектура фреймворку є результатом уніфікації обчислювальних схем, які виникають при застосуванні розглянутого підходу до розв'язування еволюційних задач. Цей розділ присвячений алгоритмам і розрахунковим формулам, які задають обчислення матриць систем лінійних алгебраїчних рівнянь при застосуванні методу крайових елементів до конкретних крайових задач.

3.1. Крайові інтегральні рівняння у скінченновимірних просторах

Зупинимося детальніше на процесі дискретизації крайових операторів, які фігурують в загальних обчислювальних схем комбінованого методу.

Розглянемо послідовність КІР (1.33). У розділі 5 буде показано (див. доведення леми 5.3), що матричний оператор A_0 є коерцитивним в деякому функційному просторі. Це дає змогу чисельно розв'язувати кожну їз систем КІР у послідовності (1.33), використовуючи метод Гальоркіна. Згідно цього методу, рівняння системи (1.33) для знаходження невідомих μ_k та λ_k при

довільному $k \in \mathbb{N}_0$ мають вигляд:

$$\begin{cases} \langle v, V_0\mu_k\rangle_{1/2} + \langle v, (-\frac{1}{2}I_1 - K_0)\lambda_k\rangle_{1/2} = \\ = -\big\langle v, \sum\limits_{i=0}^{k-1} V_{k-i}\mu_i\big\rangle_{1/2} + \big\langle v, \sum\limits_{i=1}^{k-1} K_{k-i}\lambda_i\big\rangle_{1/2}, & (3.1а) \\ \langle (\frac{1}{2}I_2 + {K_0}^{\top})\mu_k, w\rangle_{1/2} + \langle (b\gamma I_1 + W_0)\lambda_k, w\rangle_{1/2} = \\ = \langle g_k, w\rangle_{1/2} - \big\langle \sum\limits_{i=0}^{k-1} {K_{k-i}}^{\top}\mu_i, w\big\rangle_{1/2} - \big\langle \sum\limits_{i=0}^{k-1} (b\sigma I_1 + W_{k-i})\lambda_i, w\big\rangle_{1/2}, & (3.1б) \end{cases}$$

де (v, w) — пари пробних функцій. Тут, як і в подібних послідовностях рівнянь, вважаємо, що пари функцій (μ_j, λ_j) з номерами $j = \overline{0, k-1}$ вже знайдено на попередніх кроках.

Для безпосередньої реалізації методу Гальоркіна використаємо метод крайових елементів (МКЕ). Введемо для цього скінченновимірні простори, дотримуючись позначень [45, 84]. Будемо розглядати деяке наближення поверхні Γ багатогранником $\Gamma_{\widetilde{M}} = \bigcup_{l=1}^{\widetilde{M}} \overline{\tau}_l$, утвореним за допомогою трикутних крайових елементів $\{\tau_l\}_{l=1}^{\widetilde{M}}$, заданих вершинами $\{x^{[l_1]}, x^{[l_2]}, x^{[l_3]}\} \in \Gamma$, $\widetilde{M}$ — кількість крайових елементів. Вважаємо, що поверхня $\Gamma_{\widetilde{M}}$ замкнена, а M^* — загальна кількість її вершин, які мають глобальну нумерацію $\{x_k\}_{k=1}^{M^*}$.

З трикутниками кожною точкою x_k пов'язуємо множину $\mathcal{I}(k)$ номерів усіх трикутників, які мають вершину у цій точці. Також кожен крайовий елемент τ_l асоційований з множиною $J(l)$, яка складена з номерів усіх його вершин x_k. Відповідно до прийнятої термінології, величина $h := \max\limits_{l=\overline{1,\widetilde{M}}} \big[\int_{\tau_l} \mathrm{d}s\big]^{1/2}$ є параметром апроксимації.

Розглянемо множину $\big\{\varphi_l^0\big\}_{l=1}^{M}$, складену з лінійно незалежних на $\Gamma_{\widetilde{M}}$

кусково-сталих функцій

$$\varphi_l^0(x) = \begin{cases} 1, & x \in \tau_l, \\ 0, & x \notin \tau_l. \end{cases}$$

Їхня лінійна оболонка $S_h^0(\Gamma) := \operatorname{span}\left\{\varphi_l^0\right\}_{l=1}^{M}$ утворює скінченновимірний простір, вимірність якого дорівнює кількості граничних елементів: $M = \widetilde{M}$.

Для побудови базису з кусково-лінійних функцій будемо використовувати функції $\phi_1^1(\xi) = 1-\xi_1-\xi_2$, $\phi_2^1(\xi) = \xi_1$ і $\phi_3^1(\xi) = \xi_2$, задані на трикутнику $\tau := \{\xi := (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < \xi_1 < 1, \ 0 < \xi_2 < 1 - \xi_1\}$. Зазначимо, що кожен крайовий елемент можна відобразити лінійним перетворенням на трикутник τ.

Утворимо множину функцій $\left\{\varphi_i^1\right\}_{i=1}^{M^*}$ [45], об'єднуючи локальні функції ϕ_k^1 ($k \in \{1, 2, 3\}$), які визначені на трикутних елементах зі спільною вершиною x_i і мають у цій вершині значення 1. Позначимо об'єднання таких трикутників $\tau_i^* := \operatorname{supp}\varphi_i^1 = \bigcup_{l\in\mathcal{I}(i)} \overline{\tau}_l, \ i = \overline{1, M^*}$. Лінійну оболонку таких функцій позначимо $S_h^1(\Gamma) := \operatorname{span}\left\{\varphi_l^1\right\}_{l=1}^{M^*}$. Зазначимо, що вимірність такого побудованого простору дорівнює кількості вершин M^*.

У побудованих скінченновимірних просторах невідомі функції μ_k і λ_k апроксимуємо відповідними базисними функціями

$$\mu_k^h = \sum_{l=1}^{M} \mu_l^k \varphi_l^0 \in S_h^0(\Gamma), \quad k \in N_0, \tag{3.2}$$

$$\lambda_k^h = \sum_{l=1}^{M^*} \lambda_l^k \varphi_l^1 \in S_h^1(\Gamma), \quad k \in N_0, \tag{3.3}$$

де коефіцієнти апроксимації розглядаємо як елементи векторів $\boldsymbol{\mu}^k \in \mathbb{R}^M$ і $\boldsymbol{\lambda}^k \in \mathbb{R}^{M^*}$. Тоді, використовуючи у рівностях (3.1а) і (3.1б) в ролі пробних функцій елементи базису у відповідному скінченновимірному просторі, отримаємо СЛАР (1.39).

Беручи до уваги вигляд базисних функцій у скінченновимірних просторах, отримаємо такі формули для елементів матричних блоків у рівнянні (1.39а):

$$V_i^h[m,l] = \int\limits_{\tau_m}\int\limits_{\tau_l} e_i(x-y)\,ds_y\,ds_x, \quad i=\overline{0,k}, \quad m,l=\overline{1,M}, \tag{3.4}$$

$$M^h[m,j] = \int\limits_{\tau_m} \varphi_j^1(x)\,ds_x, \quad m=\overline{1,M}, \quad j=\overline{1,M^*}, \tag{3.5}$$

$$K_i^h[m,j] = \int\limits_{\tau_m}\int\limits_{\tau_j^*} \frac{\partial e_i(x-y)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\varphi_j^1(y)\,ds_y\,ds_x, \quad i=\overline{0,k}, \quad m=\overline{1,M}, \quad j=\overline{1,M^*}. \tag{3.6}$$

де e_i визначені за формулою (1.24). Зауважимо, що елементи $V_0^h[m,m]$, $K_0^h[m,m]$ і $K_1^h[m,m]$ мають інтегровну особливість, підхід до обчислення таких інтегралів описано у підрозділі 3.2.

Для елементів $\mathbf{W}_0^h$ використовують техніку, яка полягає в заміні похідних вздовж нормалі на похідні в дотичних до Γ площинах (див.[45, 80]). Тоді з рівняння (1.39б) отримаємо такі формули

$$\begin{aligned} W_0^h[r,j] = &\int\limits_{\tau_r^*}\int\limits_{\tau_j^*} e_0(x-y)\Big(\mathbf{rot}_\Gamma\varphi_j^1(y), \mathbf{rot}_\Gamma\varphi_r^1(x)\Big)\,ds_y\,ds_x + \\ &+\gamma^2\int\limits_{\tau_r^*}\int\limits_{\tau_j^*} e_0(x-y)\varphi_j^1(y)\varphi_r^1(x)\Big(\boldsymbol{\nu}(x),\boldsymbol{\nu}(y)\Big)\,ds_y\,ds_x, \quad r,j=\overline{1,M^*}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$W_i^h[r,j] = \int\limits_{\tau_r^*}\int\limits_{\tau_j^*} e_i(x-y)\Big(\mathbf{rot}_\Gamma\varphi_j^1(y), \mathbf{rot}_\Gamma\varphi_r^1(x)\Big)\,ds_y\,ds_x +$$
$$+\gamma^2\int\limits_{\tau_r^*}\int\limits_{\tau_j^*} e_i(x-y)\varphi_j^1(y)\varphi_r^1(x)\Big(\boldsymbol{\nu}(x), \boldsymbol{\nu}(y)\Big)\,ds_y\,ds_x +$$
$$+\sigma\sum_{l=0}^{i-1}(2\gamma+\sigma(i-l-1))\int\limits_{\tau_r^*\cap\tau_j^*} e_i(x-y)\varphi_j^1(y)\varphi_r^1(x)\Big(\boldsymbol{\nu}(x), \boldsymbol{\nu}(y)\Big)\,ds_y\,ds_x$$
$$i=\overline{1,k},\quad r,j=\overline{1,M^*}, \tag{3.8}$$

де

$$\mathbf{rot}_\Gamma\varphi_j^1(y) = \boldsymbol{\nu}_y \times \nabla_y\tilde{\varphi}_j{}^1(y), y\in\Gamma, \tag{3.9}$$

вектор, які лежить у дотичній до Γ площині (див.[80]).

Для інших блоків з рівняння (1.39б) матимемо ще такі формули:

$$(K_i^\top)^h[r,l] = \int\limits_{\tau_r^*}\varphi_r^1(x)\int\limits_{\tau_l}\frac{\partial e_i(x-y)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,ds_y\,ds_x = (K_i^h)^\top[r,l] = K_i^h[l,r],$$
$$i=\overline{0,k},\quad r=\overline{1,M^*},\quad l=\overline{1,M} \tag{3.10}$$

$$(M^\top)^h[r,l] = \int\limits_{\tau_l}\varphi_r^1(x)\,ds_x = M^h[l,r],\quad r=\overline{1,M^*},\quad l=\overline{1,M} \tag{3.11}$$

$$Q^h[r,j] = \int\limits_{\tau_r^*\cap\tau_j^*}\varphi_r^1(x)\varphi_j^1(x)\,ds_x,\quad r,j=\overline{1,M^*}. \tag{3.12}$$

Зауважимо, що для мішаних задач з іншими крайовими умовами дискретизацію крайових операторів можна виконати з допомогою аналогічної процедури. У випадку задач Діріхле і Неймана лише одна з густин є невідомою – μ або λ відповідно. Тому у прямому підході після апроксимації густин у відповідному базисі МКЕ для знаходження невідомих коефіцієнтів апроксимації знову приводить до СЛАР, яка за структурою подібна до системи (1.39). Зокрема після дискретизації рівняння (1.42), яке відповідає

задачі Діріхле, СЛАР матиме вигляд

$$\mathbf{V}_0^h \boldsymbol{\mu}^k = \frac{1}{2}\mathbf{M}^h \boldsymbol{\lambda}^k + \sum_{i=0}^{k} \mathbf{K}_{k-i}^h \boldsymbol{\lambda}_i - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{V}_{k-i}^h \boldsymbol{\mu}^i, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.13}$$

У випадку задачі Неймана в результаті застосування МКЕ до рівняння (1.46) отримаємо таку СЛАР :

$$\mathbf{W}_0^h \boldsymbol{\lambda}^k = \frac{1}{2}\mathbf{M}^{\top h} \boldsymbol{\mu}^k - \sum_{i=0}^{k} \mathbf{K}_{k-i}^{\top h} \boldsymbol{\mu}^i - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{W}_{k-i}^h \boldsymbol{\lambda}^i, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.14}$$

Легко бачити, що реалізація за допомогою МКЕ непрямого підходу для задач Діріхле і Неймана даватиме СЛАР, які подібні до відповідних аналогів у прямому підході. Відзначимо також, що в усіх випадках отримані однакові матричні блоки обчислюють за однією формулою.

Зауважимо, що характерною рисою послідовностей СЛАР, отриманих комбінованим методом ПЛ і МКЕ, є можливість ефективно організувати процес обчислення коефіцієнтів апроксимації густин. У кожній обчислювальній схемі після дискретизації крайових операторів приходимо до послідовності СЛАР, в яких змінюється лише права частина. Тому саму матрицю після обчислення її блоків зберігають і використовують на усіх ітераційних кроках. Цей прийом суттєво зменшує час розв'язування задачі.

Зазначимо також, що обчислення елементів матриці СЛАР є достатньо ресурсозатратним процесом, оскільки згідно методу Гальоркіна обчислення білінійних форм зводиться до 4-кратних інтегралів. Як продемонстрували результати обчислень [54], при великій кількості невідомих можна досягти суттєвого виграшу часу обчислень за рахунок використання алгоритму адаптивної перехресної апроксимації (ACA) [29, 50].

3.2. Алгоритми обчислення елементів матриці СЛАР

Розглянемо обчислення елементів матриці СЛАР на прикладі системи (1.39), оскільки її блоки зустрічаються також і в інших обчислювальних схемах.

Розглянемо елемент матриці СЛАР (3.4) при $i = 0$. Коли $m = l$, то точки x та y знаходяться на одному крайовому елементі. Тому в цьому випадку ядро матиме інтегровну особливість, яку враховуємо за допомогою так званої процедури адитивного виділення особливості [13]. Для цього запишемо елемент матриці у вигляді

$$V_0^h[m,l] = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\tau_m} \left(\int\limits_{\tau_l} \frac{1}{|x-y|}\, ds_y + \int\limits_{\tau_l} \frac{e^{-\gamma|x-y|}-1}{|x-y|}\, ds_y \right) ds_x, \quad m,l = \overline{1,M}. \tag{3.15}$$

Перший доданок підінтегрального виразу (3.15) можна знайти аналітично за допомогою відомих формул [13, 80]. У другому доданку можемо довизначити по неперервності значення підінтегральної функції в нулі, тому для його обчислення застосуємо квадратурну формулу Гауса [80].

Оскільки елементи блоку $\mathbf{M}^h$ не мають особливостей, використовуватимемо квадратурну формулу Гауса для їх знаходження [80].

Розглянемо елемент (3.6) при $i = 0$. Згідно з формулою (3.6), ядро має інтегровну особливість при $m = j$ [13]. Аналогічно до знаходження елементів блоку $\mathbf{V}_0^h$ розіб'ємо підінтегральний вираз зовнішнього інтегралу на два доданки у вигляді

$$K_0^h[m,j] = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\tau_m} \Big(\int\limits_{\tau_j^*} \frac{(x-y, \boldsymbol{\nu}(y))}{|x-y|^3} \varphi_j^1(y)\, ds_y + \tag{3.16}$$

$$+ \int\limits_{\tau_j^*} \Big((1+\gamma|x-y|)e^{-\gamma|x-y|} - 1 \Big) \frac{(x-y, \boldsymbol{\nu}(y))}{|x-y|^3} \varphi_j^1(y)\, ds_y \Big)\, ds_x$$

$$m = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, M^*}.$$

Перший доданок обчислимо аналітично [13, 80]. Оскільки в другому доданку можна доповнити підінтегральну функцію по неперервності в нулі, знайдемо інтеграл із використанням квадратурної формули Гауса [80].

Перейдемо до знаходження елементів блоку $\mathbf{W}_0^h$. Перший доданок у формулі (3.7) обчислимо за тим самим алгоритмом, що і при знаходженні елементів блоку $\mathbf{V}_0^h$, врахувавши наявність інтегровної особливості та можливості винесення скалярного добутку $\Big(\mathbf{rot}_{\tau_m}\varphi_j^1, \mathbf{rot}_{\tau_k}\varphi_r^1\Big)$ з-під інтегралу.

Для другого доданку маємо інтегровну особливість у ядрі при $r = j$, тому знову застосуємо адитивне виділення особливості [13] і запишемо

$$\begin{aligned} C_0^h[r,j] = \gamma^2 \int\limits_{\tau_r^*} \Big(\int\limits_{\tau_j^*} \frac{1}{|x-y|} \varphi_j^1(y)\varphi_r^1(x) \Big(\boldsymbol{\nu}(x), \boldsymbol{\nu}(y)\Big)\, ds_y + \\ + \int\limits_{\tau_j^*} \frac{e^{-\gamma|x-y|}-1}{|x-y|} \varphi_j^1(y)\varphi_r^1(x) \Big(\boldsymbol{\nu}(x), \boldsymbol{\nu}(y)\Big)\, ds_y \Big)\, ds_x, \quad r, j = \overline{1, M^*}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

У першому доданку із формули (3.17) винесемо скалярний добуток векторів нормалей з-під інтегралів з урахуванням того, що нормалі є сталими в межах одного крайового елемента. В результаті його обчислення зведеться до знаходження інтегралу

$$C(\tau_m, x) = \int\limits_{\tau_m} \frac{1}{|x-y|} \varphi_j^1(y)\, ds_y, \tag{3.18}$$

Відомо, що такий інтеграл можна обчислити аналітично (див. [80]). Для другого доданку використаємо квадратурну формулу Гауса.

Знаходження елементів блоку $\mathbf{Q}^h$ виконуватимемо за допомогою квадратурної формули Гауса, враховуючи інтеграли по тих елементах, на яких одночасно визначені кусково-лінійні функції φ_r^1 та φ_j^1 відповідно.

3.3. Висновки до розділу 3

Обчислювальна схема для задачі (**HD**) містить усі математичні об'єкти, які зустрічаються у схемах інших задач предметної області фреймворку. Отож, розглянуті в цьому розділі розрахункові формули доповнюють усі схеми з першого розділу, тобто вже можна приступати до розробки модулів розв'язування відповідних задач.

РОЗДІЛ 4
ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АРХІТЕКТУРНИХ РІШЕНЬ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Отримані у попередньому розділі розрахункові формули дають змогу реалізувати методи інтерфейсів MMF з рівня розв'язування задачі (див. рис. 2.1), щоб завершити побудову модуля Problem Solver для знаходження розв'язку конкретної задачі. Очевидно, що для кожної із задач предметної області така реалізація матиме свої особливості, в той час як послідовність етапів цієї реалізації буде однаковою для усіх задач.

Продемонструємо основні етапи створення зазначених програм на прикладі модуля розв'язування задачі (**HD**). Зазначимо, що розробка таких модулів для інших задач виконується у такий самий спосіб.

4.1. Загальні властивості модулів розв'язування задач Problem Solver

Фреймворк MMF містить набір готових модулів, які реалізують обчислювальні схеми двох категорій:

— з використанням формули Кірхгофа для хвильового рівняння або аналогу третьої формули Гріна для еліптичного рівняння (прямий підхід);
— з використанням відповідного потенціалу простого або подвійного шару (непрямий підхід).

Обираючи для конкретної задачі потрібне зображення розв'язку, отримаємо відповідні інтегральні рівняння, які після дискретизації стають основою для подальшої реалізації модуля розв'язування задачі Problem Solver.

У табл. 4.1 подано множину задач фреймворку згідно із зазначеною класифікацією. Тут позначення інтегральних операторів взято з розділу 1. У другій колонці подано інтегральні рівняння, причому у виразах із подвійними знаками $\pm$ і $\mp$ верхній стосується внутрішньої задачі, нижній — зовнішньої. Для еволюційних задач наведено ЕКІР, оскільки вони моделюють нестаціонарні процеси, для еліптичних – КІР. У третій колонці вказано тип та відповідні значення параметрів формальної задачі (1.68) – (1.69).

Як було зазначено раніше, підхід до розробки ПЗ, який базується на інтерфейсах, має такі переваги:

— уніфікація взаємодії ядра та модуля розв'язування задачі;
— встановлення додаткового рівня контролю за відповідністю програмного коду заданій архітектурі.

Разом з тим, інтерфейсні обмеження накладаються лише на базову конструкцію модуля. Далі реалізація інтерфейсів ядра відбувається відповідно до обчислювальних формул конкретної задачі. В основному це стосується алгоритмів обчислення матриці СЛАР та компонування її розв'язків для отримання кінцевого чисельного результату. Зауважимо, що зазначену реалізацію можна виконувати з використанням інших мов програмування платформи .NET. У такому випадку обробка низькорівневих виняткових ситуацій, що виникають у коді реалізації інтерфейсів, є частиною технічних рішень розробника.

Відзначимо, що бібліотека базових класів ядра визначає також набір готових рішень для обчислення матриць відповідних СЛАР. Причому програмні компоненти обчислення потенціалів спроєктовано максимально незалежно від компонентів, які задають їхні ядра. Це спрощує процес додавання до системи нових класів подібних задач, наприклад, для рівняння теплопровідності або телеграфного рівняння.

Таблиця 4.1

Множина реалізованих задач

$a_1\partial_t^2 u + a_2\partial_t u + a_3 u - \Delta u = 0$ в Q		
$b_1\partial_{\boldsymbol{\nu}} u\|_\Sigma + b_2\partial_t u\|_\Sigma + b_3 u\|_\Sigma = g$ на Σ		
Еволюційні задачі $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0$		
Подання розв'язку	ЕКІР	Тип задачі
Формула Кірхгофа, $u = \mathcal{S}\mu - \mathcal{D}\lambda$	$\mathcal{V}\mu = \pm\frac{1}{2}g + \mathcal{K}g$	задача Діріхле, $b_1 = b_2 = 0$
	$\mathcal{W}\lambda = \pm\frac{1}{2}g - \mathcal{K}^\top g$	задача Неймана, $b_2 = b_3 = 0$
	$\begin{cases} \mathcal{V}\mu \mp \dfrac{1}{2}\lambda - \mathcal{K}\lambda = 0 \\ \pm\dfrac{1}{2}\mu + \mathcal{K}^\top\mu + b\,\partial_t\lambda + \mathcal{W}\lambda = g \end{cases}$	задача з динамічною крайовою умовою, $b_3 = 0$
Хвильовий потенціал простого шару, $u = \mathcal{S}(\mu)$	$\mathcal{V}\mu = g$	задача Діріхле, $b_1 = b_2 = 0$
	$\pm\frac{1}{2}\mu + \mathcal{K}^\top\mu = g$	задача Неймана, $b_2 = b_3 = 0$
	$\begin{cases} \mathcal{V}\mu = f \\ \mp\frac{1}{2}\mu + \mathcal{K}^\top\mu = g \end{cases}$	задача Коші, $u\|_\Sigma = f, \partial_{\boldsymbol{\nu}} u\|_\Sigma = g$
Хвильовий потенціал подвійного шару, $u = \mathcal{D}(\lambda)$	$\mp\frac{1}{2}\lambda + \mathcal{K}\lambda = g$	задача Діріхле, $b_1 = b_2 = 0$
	$\mathcal{W}\lambda = g$	задача Неймана, $b_2 = b_3 = 0$

Еліптичні задачі $a_1 = a_2 = 0$		
Подання розв'язку	КІР	Тип задачі
3-я формула Гріна, $u_0 = S_0\mu_0 - D_0\lambda_0$	$V_0\mu_0 = \pm\frac{1}{2}g_0 + K_0 g_0$	задача Діріхле, $b_1 = b_2 = 0$
	$W_0\lambda_0 = \pm\frac{1}{2}g_0 - K_0^\top g_0$	задача Неймана, $b_2 = b_3 = 0$
	$\begin{cases} V_0\mu_0 \mp \frac{1}{2}\lambda_0 - K_0\lambda_0 = 0 \\ \pm\frac{1}{2}\mu_0 + K_0^\top\mu_0 + b\gamma\lambda_0 + W_0\lambda_0 = g_0 \end{cases}$	задача з динамічною крайовою умовою, $b_3 = 0$
Потенціал простого шару, $u_0 = S_0\mu_0$	$V_0\mu_0 = g_0$	задача Діріхле, $b_1 = b_2 = 0$
	$\pm\frac{1}{2}\mu_0 + K_0^\top\mu_0 = g_0$	задача Неймана, $b_2 = b_3 = 0$
	$\begin{cases} V_0\mu_0 = f_0 \\ \mp\frac{1}{2}\mu_0 + K_0^\top\mu_0 = g_0 \end{cases}$	задача Коші, $u\|_\Gamma = f_0, \partial_{\boldsymbol{\nu}} u\|_\Gamma = g_0$
Потенціал подвійного шару, $u_0 = D_0\lambda_0$	$\mp\frac{1}{2}\lambda_0 + K_0\lambda_0 = g_0$	задача Діріхле, $b_1 = b_2 = 0$
	$W_0\lambda_0 = g_0$	задача Неймана, $b_2 = b_3 = 0$

Далі опишемо процес побудови модуля розв'язування задачі (**HD**).

4.2. Реалізація інфраструктурних елементів модуля розв'язування задачі

4.2.1. Визначення класу для запуску обчислень задачі. Першим етапом побудови модуля Problem Solver є визначення його інфраструктурних компонентів. Нагадаємо (див. табл. 2.6 у розділі 2), що ядро MMF використовує інтерфейс ITask як абстракцію для запуску алгоритму обчислення розв'язку задачі, а також надає три базові класи Task, SingleSeriesTask і DoubleSeriesTask, які реалізують інтерфейс ITask. Клас DoubleSeriesTask визначає обчислення розв'язку за формулою (1.36) як частинну сумою ряду, складеного із попарних добутків значень просторових компонент у заданій точці $x \in \Omega$ та значень функцій Лаґерра в момент часу $t \in \mathbb{R}_+$. Тому для задачі (**HD**) утворюємо похідний клас DynamicConditionsTask (рис. 4.1).

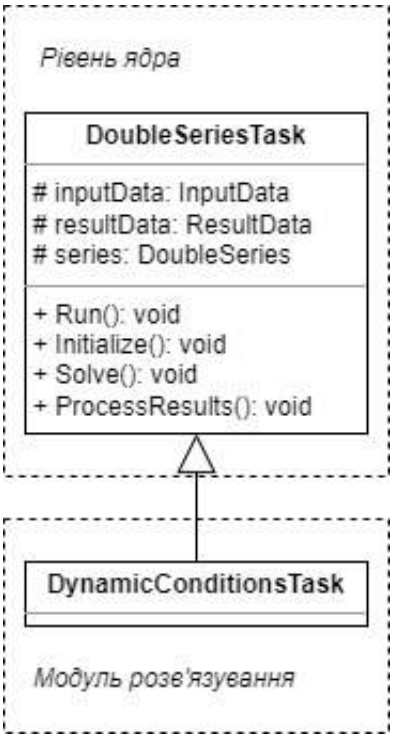

Рис. 4.1. Діаграма класів для запуску розв'язування задачі

4.2.2. Зберігання параметрів та результатів задачі. Поле inputData класу DynamicConditionsTask інкапсулює параметри задачі (**HD**). Очевидно, що його тип InputData не містить усіх необхідних параметрів, тому треба створити новий клас DynamicConditionsInputData (див. рис. 4.2), похідний від DoubleSeriesInputData (рис. 2.13), для зберігання специфічних параметрів. Визначимо в цьому класі нові поля для параметрів перетворення Лаґерра σ та α, а також параметр b з крайової умови (1.3) і перевизначимо алгоритм заповнення цих полів в методі LoadFromXml, що передбачає зчитування даних із елементів <param> конфігураційного файлу задачі (див. табл. 2.5).

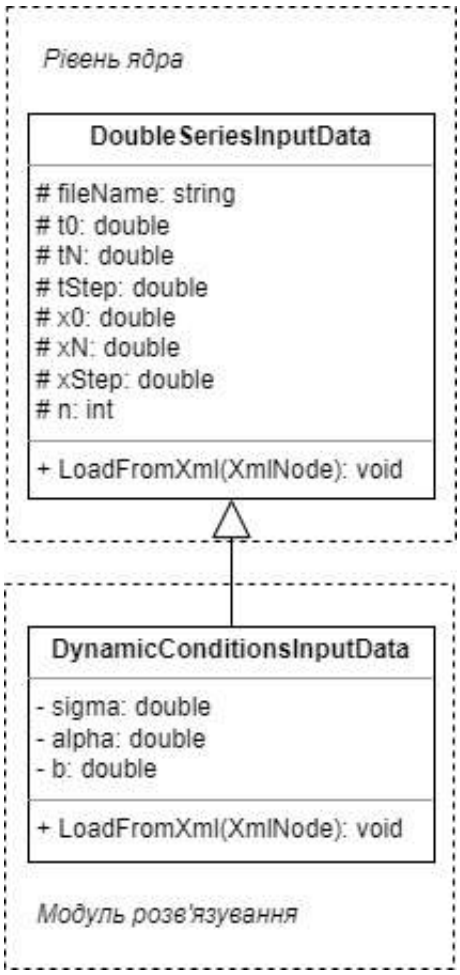

Рис. 4.2. Діаграма класів для збереження параметрів задачі

Такий самий підхід використаємо і для зберігання інформації про результати задачі у внутрішньому полі resultData, використовуючи клас ResultDoubleData (рис. 2.15) з ядра.

4.2.3. Реєстрація модуля в контейнері залежностей. Налаштуємо контейнер залежностей ядра MMF для правильної побудови об'єкта класу DynamicConditionsTask і отримання значень полів inputData і resultData під час виконання програми. З цією метою у конфігураційному файлі задачі визначимо згідно схеми, наведеної в табл. 2.5, такі дані:

— атрибути assembly і classname для елементів <task>, <input_data> та <result_data>.

— нові вкладені елементи <param>, де визначимо назви полів і початкові значення параметрів із класу DynamicConditionsInputData

Внаслідок цього, модуль розв'язування стане сумісним із вбудованим контейнером залежностей системи MMF.

4.2.4. Налаштування модуля розв'язування для виконання команд користувача. Взаємодіючи з GUI Manager, користувач задає значення параметрів задачі за допомогою відповідної форми. Оскільки GUI Manager не містить посилань на конкретні модулі розв'язування, а ядро працює лише з абстракціями, то щоб отримувати конкретну форму, треба виконати послідовність налаштувань.

1. *Визначимо новий клас DynamicConditionsTaskForm, похідний від DoubleSeriesTaskForm.*

   Вибір DoubleSeriesTaskForm зумовлений попереднім використанням класів DoubleSeriesTask і DoubleSeriesInputData. Він містить числові поля для задання цих інтервалів за часовою та просторовою

змінними, а також логіку завантаження файлу розбиття поверхні DoubleSeriesTaskForm є розширеною версією базового класу TaskForm, який ядро застосовує для отримання екземпляру форми із модуля розв'язування.

2. *Перевизначимо методи ReadFromXml та WriteToXml для зчитування початкових параметрів задачі із її конфігураційного файлу та запису значень, введених користувачем у формі, відповідно.*

   В результаті, отримаємо повністю налаштовані алгоритми обробки параметрів задачі через компонент GUI Manager.

3. *Додамо задачу у конфігураційний файл системи TaskConfig.xml* (див. табл. 2.1). Для цього вставимо новий елемент <task>, задамо шлях до файлу налаштувань задачі у атрибуті filename елемента <task>, задамо назву типу і збірки для завантаження форми засобами рефлексії у атрибутах classname і assembly елемента <form>.

4.3. Обчислення наближеного розв'язку мішаної задачі

Модуль задачі містить, в основному, реалізацію чисельної схеми комбінованого методу у вигляді програмного коду конкретних алгоритмів знаходження її наближеного розв'язку.

4.3.1. Визначення класів для обчислення наближеного розв'язку. При створенні об'єкту задачі DynamicConditionsTask (рис. 4.1) контейнер залежностей MMF ініціалізує об'єкти типу DynamicConditionsInputData і ResultDoubleData та передає їх як параметри конструктора. Отож, у класі DynamicConditionsTask залишається визначити алгоритми побудови об'єкта типу DoubleSeries, що задає відповідну множину елементів ряду для обчислення наближеного

розв'язку за формулою (1.36).

Як видно з діаграми класів на рис. 2.10, DoubleSeries містить всередині два поля типу ElemFactory. Вони задають алгоритми знаходження функцій, які можуть мати різні типи аргументів, але однакові типи значень. Завдяки цій особливості, метод Calculate класу DoubleSeries безпечно виконує множення значень і обчислює суму отриманих значень.

Відповідно до формули (1.36), задамо обчислення функцій Лаґерра $l_i(t)$ та просторових компонент $u_i(x)$ за допомогою двох окремих об'єктів фабрик, що наслідують тип ElemFactory.

1. *Для функцій Лаґерра застосуємо стандартний клас LaguerreFactory, який є частиною бібліотеки базових класів ядра фреймворку.*
2. *Знаходження просторових компонент задаємо новим класом DynamicConditionsUnFactory.*

   Він наслідує базовий клас ядра UnFactory (рис. 2.12), який передбачає визначення стратегій ILeftPartStrategy та IRightPartStrategy для заповнення лівої і правої частин СЛАР відповідно. Зазначимо, що для побудови матриці СЛАР необхідно розширити клас DynamicConditionsUnFactory додатковими об'єктами, що обчислюють окремі елементи її блоків. Можливості фреймворку для визначення таких об'єктів детальніше розглянемо в наступному підрозділі.

Отож, отримаємо ієрархію класів, зображену на рис. 4.3.

4.3.2. Визначення загальної схеми обчислення розв'язку задачі. Нагадаємо, що для обчислення розв'язку задачі треба виконати метод Run (див. рис. 2.9), який заданий інтерфейсом ITask. Цей метод запрограмований згідно шаблону проєктування *Template Method*, і задає послідовність викликів таких методів (див. табл. 2.6) Initialize, Solve і ProcessResults.

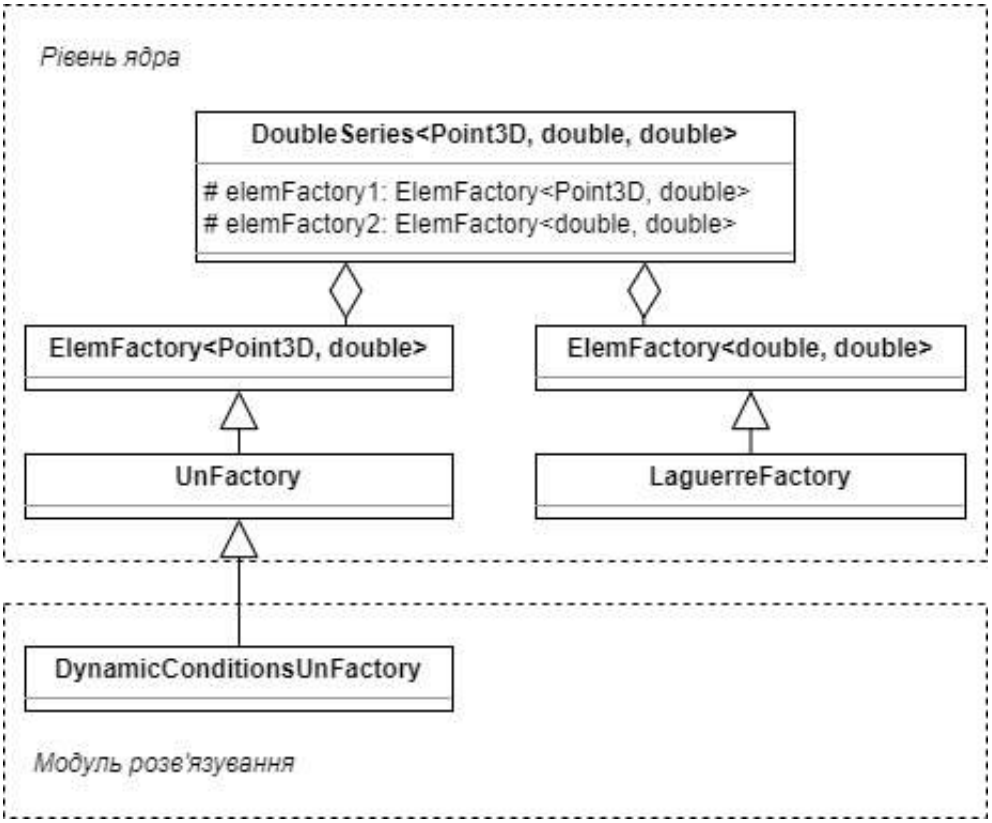

Рис. 4.3. Діаграма класів для обчислення наближеного розв'язку задачі

У даному випадку крок *Initialize* міститиме програмний код для:

1) створення об'єкта LaguerreFactory із бібліотеки класів ядра;
2) ініціалізації стратегій заповнення лівої і правої частин СЛАР та передачі їх класу MatrixSolver із бібліотеки ядра;
3) створення об'єкта DynamicConditionsUnFactory для знаходження компонентів (1.36);
4) створення об'єкта DoubleSeries із передачею в конструктор об'єктів типу LaguerreFactory і DynamicConditionsUnFactory.

Зазначимо, що модулі розв'язування для інших задач визначають власні алгоритми заповнення внутрішніх полів.

Для побудови алгоритму знаходження чисельного розв'язку задачі в кроці *Solve* передбачимо такі дії:

1) ітерування за часовою змінною і за кожною з просторових координат

точок інтервалу, визначеного в об'єкті inputData;

2) обчислення наближеного розв'язку з використанням об'єкту типу DoubleSeries під час кожної ітерації;
3) збереження значення розв'язку для певної точки часу-простору в об'єкті resultData.

На завершальному етапі в кроці *ProcessResults* використаємо механізм базового класу DoubleSeriesTask для збереження поточкових значень розв'язку у xml-файл. Тут також можна додатково задати специфічні алгоритми для обробки результатів і виведення даних.

4.4. Обчислення просторових компонентів розв'язку та матриці СЛАР

На цьому кроці ядро надає лише програмний каркас для задання коду знаходження компонент u_i. Зокрема треба розробити власні алгоритми формування матриці СЛАР, враховуючи особливості задачі. Далі розділимо цей процес на декілька етапів.

4.4.1. Розширення класу для отримання просторових компонент. Відповідно до формули (1.25), розширимо клас DynamicConditionsUnFactory додатковими полями (рис. 4.4)

— vIntegral типу VIntegral для компонент S_i;
— kIntegral типу KIntegral для компонент D_i.

Оскільки вони є тісно пов'язаними з алгоритмом обчислення u_i, задамо відношення композиції між ними і класом DynamicConditionsUnFactory.

Класи VIntegral та KIntegral є частиною ядра. При їх проєктуванні необхідно не лише задати обчислення за певними формулами, а й визначити спосіб використання цих класів для інших задач із предметної обла-

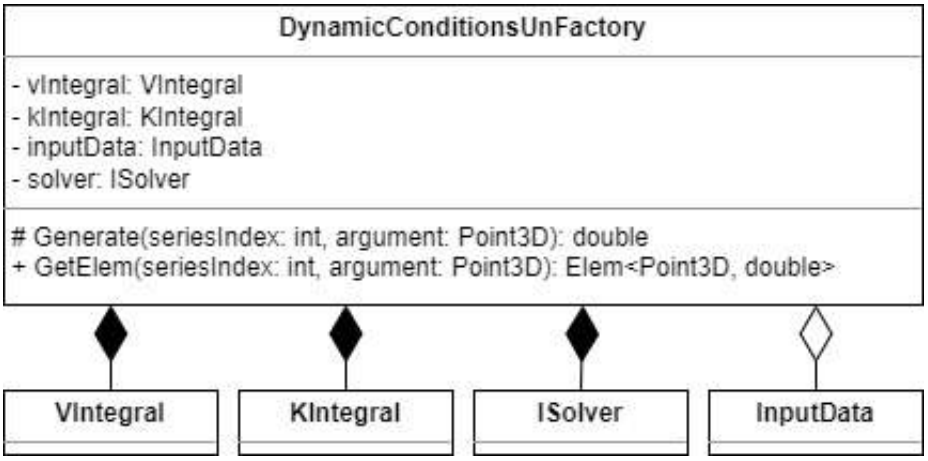

Рис. 4.4. Клас DynamicConditionsUnFactory для знаходження компонент u_i

сті. Для вирішення цієї проблеми ядра потенціалів задано базовим класом ElemFactory у класах VIntegral та KIntegral. Таким чином, дані класи залежать від абстракцій, що спрощує їх повторне застосування.

Класи VIntegral та KIntegral містять додатково посилання на розбиття поверхні та об'єкти analyticIntegral і numericalIntegral. Останні дають змогу отримати значення інтегралу із використанням алгоритмів адитивного виділення особливостей [80]. Враховуючи можливість застосування цих класів для інших задач, аналітичну частину analyticIntegral спроєктовано як зовнішній параметр конструктора. На рис. 4.5 зображено внутрішню будову класу VIntegral. Клас KIntegral має аналогічну структуру.

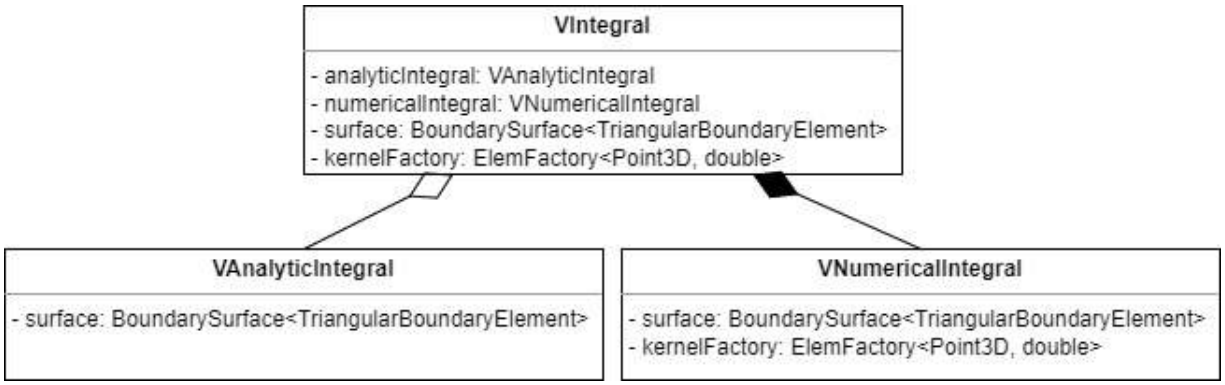

Рис. 4.5. Клас VIntegral

4.4.2. Визначення класу для розв'язування СЛАР. Основним кроком ініціалізації класу DynamicConditionsUnFactory є визначення алгоритму розв'язування СЛАР. Для цього в базовому класі UnFactory передбачено об'єкт типу ISolver. Використаємо клас MatrixSolver (див. рис. 2.12) із бібліотеки ядра фреймворку як початкову реалізацію ISolver. Він приймає об'єкти типу ILeftPartStrategy та IRightPartStrategy для заповнення СЛАР і надає можливість отримання розв'язку СЛАР у вигляді вектора для певного індексу i послідовності компонентів u_i.

Щоб врахувати специфіку СЛАР (1.39), створимо похідний клас DynamicConditionsMatrixSolver. Для оптимізації обчислень, виділимо дві ключові властивості.

1. Оскільки матриця СЛАР у лівій частині СЛАР не змінюється при обчисленні всіх компонентів u_i, будемо зберігати її у внутрішньому полі типу Matrix.
2. Отримані на кожному кроці розв'язки СЛАР зберігатимемо у списку векторів.

В результаті отримаємо ієрархію класів, зображену на рис. 4.6.

4.4.3. Задання стратегій заповнення матриці СЛАР. Головним етапом ініціалізації в класі DynamicConditionsMatrixSolver є визначення стратегій для обчислення лівої і правої частин СЛАР. Ядро надає лише інтерфейси ILeftPartStrategy та IRightPartStrategy, які необхідні для отримання відповідних об'єктів на конкретному кроці обчислювальної схеми. Реалізуємо ці інтерфейси новими класами DynamicConditionsLeftStrategy і DynamicConditionsRightStrategy.

Займемося організацією СЛАР (1.39). Її матриця складена із чотирьох блоків, кожен з яких має власні алгоритми обчислення елементів. У стра-

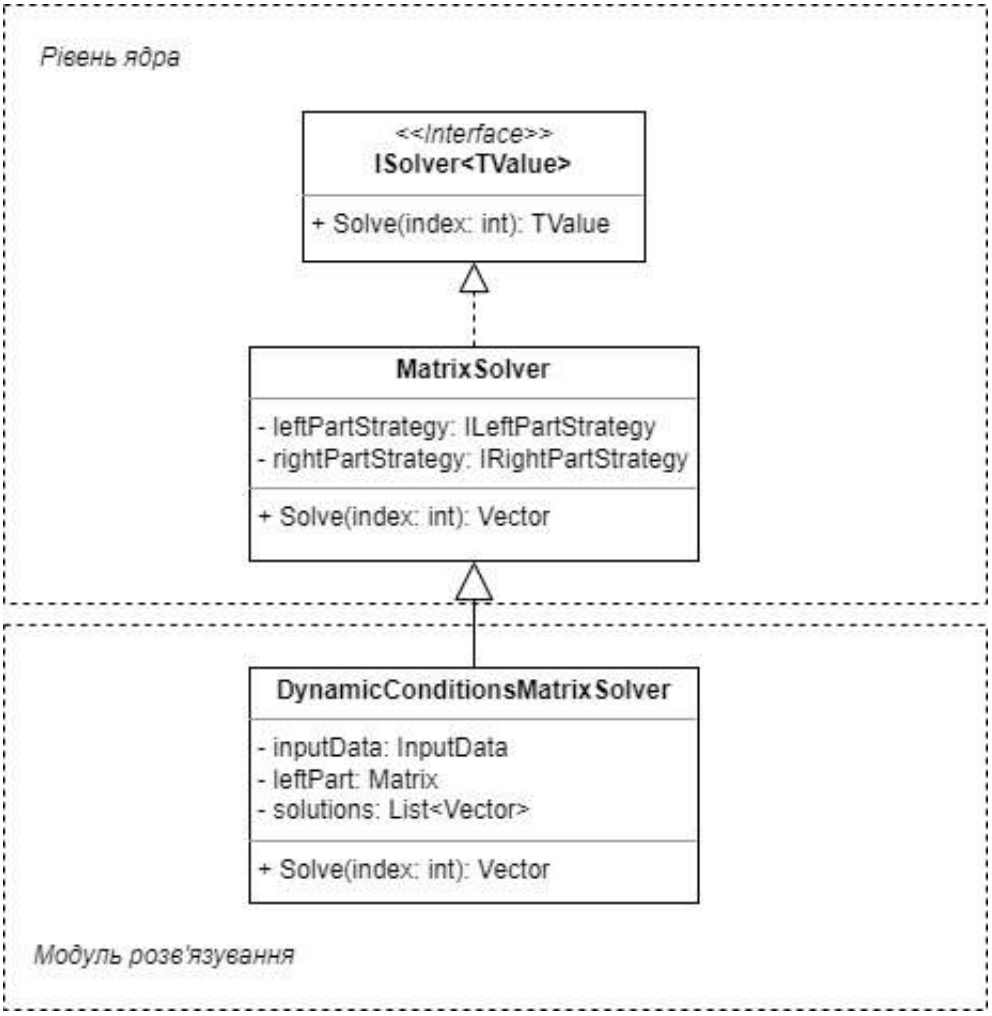

Рис. 4.6. Клас DynamicConditionsMatrixSolver для обчислення СЛАР

тегіях заповнення лівої і правої частин СЛАР для них передбачимо окремі поля, асоційовані зі спеціальними класами-фабриками (рис. 4.7). Кожна така фабрика визначена в ядрі фреймворку і задає алгоритми обчислення елементів відповідного блоку (див. табл. 4.2).

Необхідність побудови окремих класів-фабрик слідує з вигляду формул знаходження елементів матриці та специфічних методів виділення особливостей для обчислення поверхневих інтегралів. Разом з тим, з метою подальшого розширення системи та введення нових сутностей уніфікуємо інтерфейс таких класів. Спільним рисами фабрик для знаходження матричних елементів є:

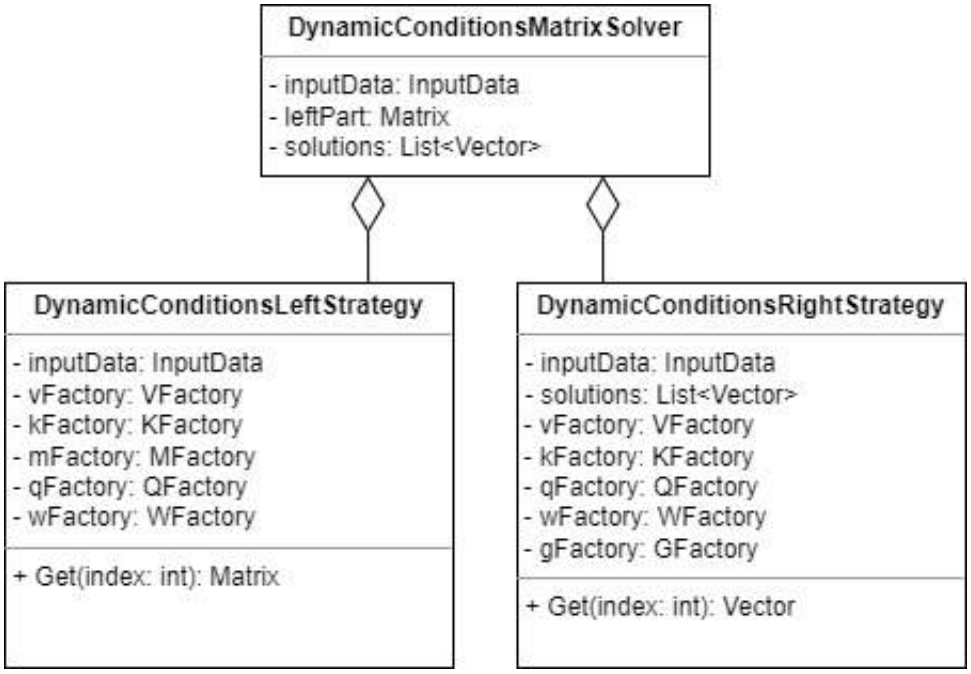

Рис. 4.7. Клас DynamicConditionsLeftStrategy та DynamicConditionsRightStrategy для формування лівої і правої частин СЛАР відповідно

Таблиця 4.2

Відповідність класів-фабрик і елементів матриці СЛАР

Клас	Елемент матриці СЛАР
VFactory	$V_i^h[m,l]$
KFactory	$K_i^h[m,j]$, $(K_i^\top)^h[r,l]$
MFactory	$M^h[m,j]$, $(M^\top)^h[r,l]$
QFactory	$Q^h[r,j]$
WFactory	$W_i^h[r,j]]$

— обчислення значень для певного рядка і стовпця;

— використання розбиття поверхні при інтегруванні;

— обчислення інтегралів відповідно до заданого ядра потенціалу.

Зважаючи на це, у ядрі визначено спеціальний базовий клас MatrixElementFactory, похідний від ElemFactory, який повертає значення

елемента матриці для певного індексу рядка і стовпця. Він містить посилання на розбиття поверхні та на фабрику для обчислення ядра. Далі конкретні класи, наприклад тип VFactory, наслідують MatrixElementFactory та інкапсулюють власні алгоритми отримання значень інтегралів (рис. 4.8).

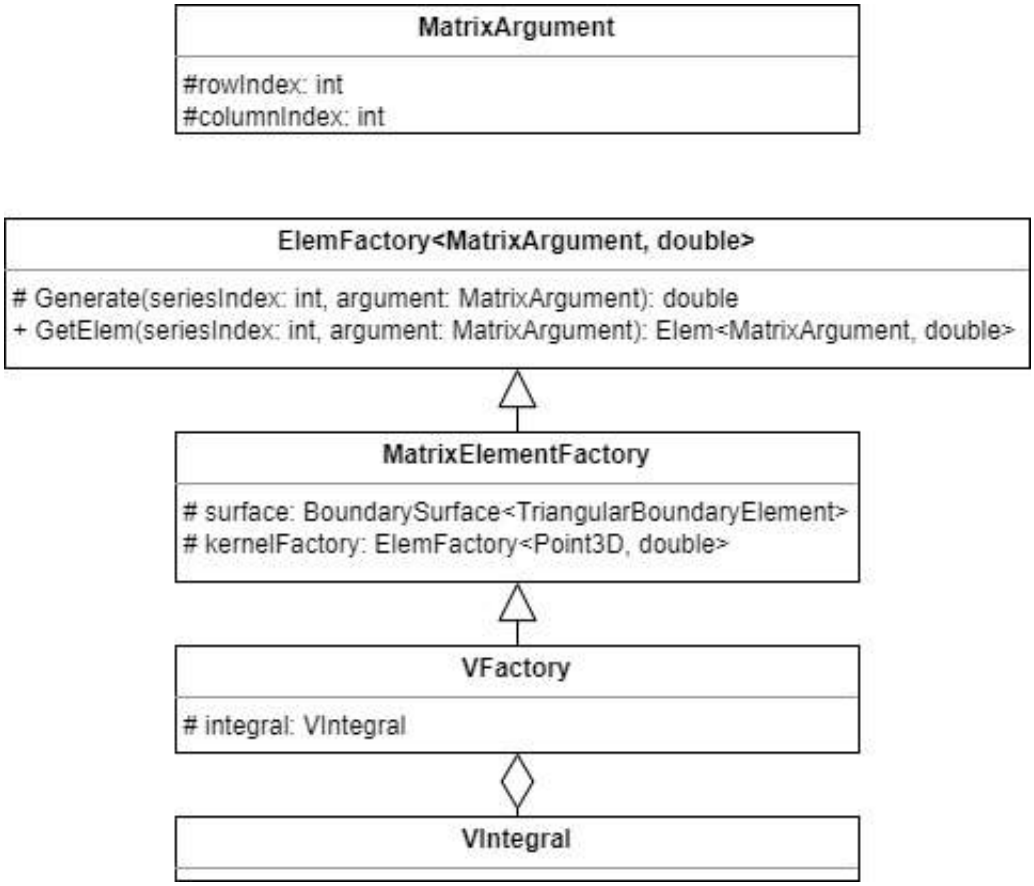

Рис. 4.8. Приклад ієрархії класів для знаходження матричного елементи V_i

Після визначення основних полів, що задають елементи матриці СЛАР, у стратегії для формування її правої частини додатково введемо поле gFactory для обчислення апроксимованих функцій g із крайової умови (1.3) та поле solutions, що містить розв'язки СЛАР із попередніх ітерацій алгоритму для забезпечення рекурентного процесу обчислень. Отож, маємо всі необхідні програмні структури для розв'язування СЛАР.

4.4.4. Реалізація основних алгоритмів розв'язування задачі. В методах Get зі стратегій для отримання правої і лівої частин СЛАР задамо алгоритми формування матриці. Зазначимо, що з метою забезпечення їх варіативності в модулі розв'язування можна також передбачити додаткові стратегії, що відрізнятимуться способом формування СЛАР. Наприклад, для наявних задач із предметної області системи визначено стратегії із можливістю

— багатопотокового обчислення елементів;

— додатковим кешуванням у файл;

— застосуванням методу ACA;

Оскільки розв'язування задачі з динамічною крайовою умовою (1.1) – (1.3) вимагає значних обчислювальних ресурсів, використаємо клас Parallel в .NET для багатопотокового знаходження елементів матриці СЛАР.

Тепер перейдемо до реалізації методу Solve класу DynamicConditionsMatrixSolver. В рамках нього виконаємо такі дії:

1) перевірку об'єкта leftPart на наявність матриці лівої частини СЛАР;
2) виклик методу Get із DynamicConditionsLeftStrategy у випадку неініціалізованого об'єкту leftPart та збереження матриці лівої частини у полі leftPart;
3) виклик методу Get із DynamicConditionsRightStrategy;
4) використання чисельного методу розв'язування СЛАР на основі отриманих лівих і правих частин;
5) збереження розв'язку СЛАР у списку векторів solutions;
6) повернення вектора розв'язку для поточної ітерації.

Зазначимо, що для розв'язування СЛАР використовуватимемо ітераційний метод узагальнених мінімальних нев'язок з перезапусками GMRES [81], який є частиною бібліотеки базових класів ядра фреймворку.

Завершальним етапом програмної реалізації алгоритмів модуля Problem Solver є визначення методу Generate у класі DynamicConditionsUnFactory. Для цього

— згідно з формулою (1.36) підставимо дискретизовані значення густин потенціалів із розв'язаної СЛАР та використаємо об'єкти типу VIntegral та KIntegral;

— врахуємо співвідношення стрибка потенціалу подвійного шару у тих точках, що належать межі поверхні.

Додатково у класі DynamicConditionsUnFactory передбачено поле для зберігання отриманих компонент u_i з метою проведення подальших досліджень їх апостеріорних похибок та порядку збіжності.

Отриманий модуль Problem Solver повністю готовий для виконання команд користувача, які можуть надходити як з графічного інтерфейсу, так і з командного рядка. Розробка модулів розв'язування для інших мішаних задач для хвильового рівняння відповідно до розглянутих у розділі 1 моделей була виконана за такою самою послідовністю кроків. У такий самий спосіб можна розширювати фреймворк MMF для розв'язування аналогічних мішаних задач для інших еволюційних рівнянь.

4.5. Додаткові можливості фреймворку при дослідженні задач предметної області

У попередніх підрозділах наведено базові принципи та структурні елементи, що використовуються при побудові модуля розв'язування задачі (**HD**). Розглянемо можливості фреймворку для розширення досліджень, які успішно реалізовані для інших класів задач.

4.5.1. Заміна ядер потенціалів. Фреймворк MMF визначає ядро потенціалу як зовнішній параметр типу ElemFactory, який передається в клас для обчислення поверхневих потенціалів. Це дає змогу абстрагуватись від конкретного виду ядра і динамічно змінювати його на етапі виконання програми. Зокрема, так можна зробити у випадку задачі Діріхле для півпростору з включенням (див. приклад 6.8 розділу 6). Тут компоненти поверхневих потенціалів використовують в ролі ядер елементи спеціальної функційної послідовності [77], яку можна розглядати як аналог функції Гріна для деякої нескінченної системи еліптичних рівнянь у півпросторі.

Побудова модуля Problem Solver для такої задачі вимагає ще такої підготовки:

— задання у похідному від InputData класі площини, що обмежує півпростір (з метою спрощення передбачено лише один параметр z, що вказує на розташування площини xy відносно осі OZ);
— визначення функції Гріна за допомогою класу, похідного від ElemFactory і передача її через параметр відповідних класів для обчислення елементів матриці СЛАР.

Зазначимо, що такий підхід можна використовувати і для інших задач, що мають схожі за структурою КІР та відрізняються типом ядер потенціалів, наприклад для рівняння теплопровідності.

4.5.2. Варіативність стратегій заповнення матриць. У модулі Problem Solver можна змінювати спосіб заповнення матриці СЛАР завдяки імплементації шаблону проєктування *Strategy* [48].

Використання такого підходу дає змогу зручно розширювати систему за допомогою

1) додавання нових стратегій для різних КІР;

2) додавання нових стратегій для різних алгоритмів формування матриці СЛАР.

Розглянемо реалізацію зазначених рішень для наявних задач системи.

4.5.2.1. Додавання нових стратегій для КІР різної структури. Відповідно до табл. 4.1 усі модулі системи побудовано на основі певних КІР. Очевидно, що не існує загального алгоритму формування матриць для різних типів задач. Звідси випливає необхідність його інкапсуляції в окремих класах-стратегіях. Кожен модуль розв'язування має власні реалізації інтерфейсів ILeftPartStrategy і IRightPartStrategy, які фактично є головною відмінністю програмної моделі задачі.

Описану особливість можемо побачити, зокрема, в імплементаціях модулів розв'язування для задач Неймана із використанням прямого та непрямого підходів (рис. 4.9). Тут класи-стратегії відрізняються кількістю і типом внутрішніх полів, що впливає на спосіб формування матриці СЛАР та її розмірність.

4.5.2.2. Додавання нових стратегій для різних алгоритмів формування матриці СЛАР. Іншим варіантом розширення системи є введення нових стратегій заповнення матриці СЛАР в межах одного модуля. Це зручно використовувати у випадках, коли для фіксованої структури КІР необхідно передбачити різні алгоритми її формування. Класичним прикладом цього в системі MMF є застосування методу ACA. Для його реалізації в модулях виконано такі кроки:

— додано нові параметри useLeftACA, useRightACA, що відповідають за вибір стратегії для методу ACA, у форму введення параметрів задачі та похідний клас від InputData;

— додано параметр accuracy для задання точності методу;

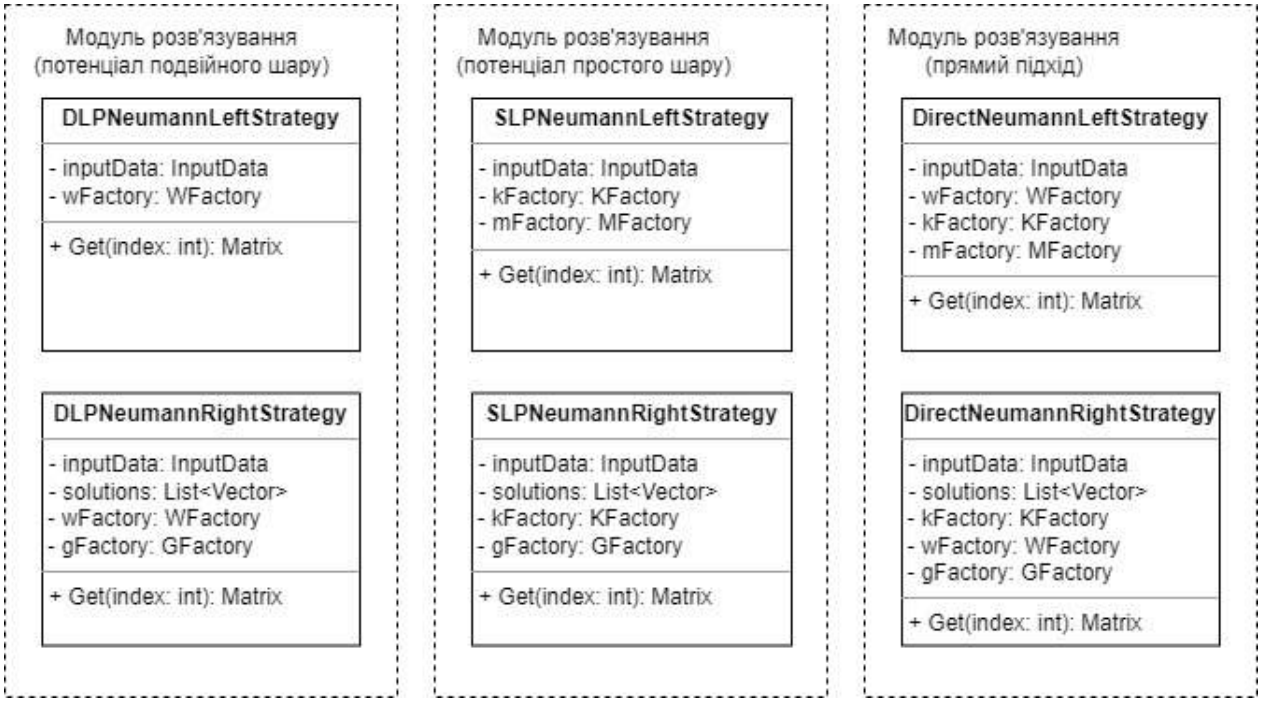

Рис. 4.9. Модулі розв'язування для задач Неймана із відповідними класами стратегій

— визначено нові стратегії, що використовують клас ACA ядра фреймворку та вищезазначені параметри для формування матриці.

Метод ACA в межах системи MMF використано в модулях розв'язування задач Діріхле та Неймана з використанням непрямого підходу. Діаграму класів-стратегій для задачі Неймана із прикладу 6.4 наведено на рис. 4.10.

Зазначимо, що стратегії заповнення матриці СЛАР можуть також визначати певну додаткову логіку. Наприклад, для чисельних експериментів задачі з динамічною крайовою умовою (1.1) – (1.3) передбачено можливість обчислення окремих блоків матриці та порівняння швидкості їх отримання з послідовним знаходженням елементів та використанням методу ACA.

4.5.3. Робота з кількома поверхнями. Нагадаємо, що базові реалізації класів для обчислення поверхневих потенціалів та матриці СЛАР містять посилання на розбиття поверхні, визначене за допомогою класу

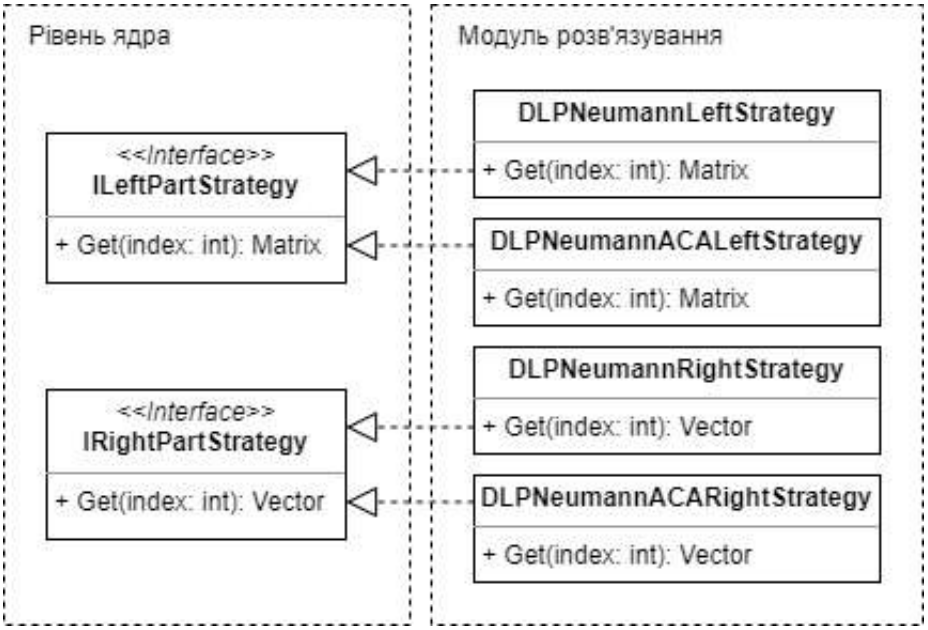

Рис. 4.10. Діаграма класів-стратегій модуля задачі Неймана з використанням потенціалу подвійного шару

BoundarySurface (рис. 2.14). Для розширення можливостей базових класів ядра створено окремий модуль в системі MMF, в якому

— додано логіку завантаження поверхні із файлу розбиття з використанням класу MultiSurfaceLoader ядра на етапі ініціалізації основного алгоритму задачі;
— перевизначено класи для обчислення елементів матриці СЛАР з урахуванням другої поверхні (рис. 4.11).

На етапі ініціалізації модуля Problem Solver фреймворк зчитує дані з файлу поверхні та заповнює відповідне поле у об'єкті параметрів задачі. Зазначимо, що в модулі BoundaryGenerator можна згенерувати розбиття межі області, складеної з довільної кількості поверхонь (див., наприклад, задачу Коші із прикладу 6.11).

Далі, на етапі виконання фреймворк

1) зчитує поверхні із файлу за допомогою класу MultiSurfaceLoader, який

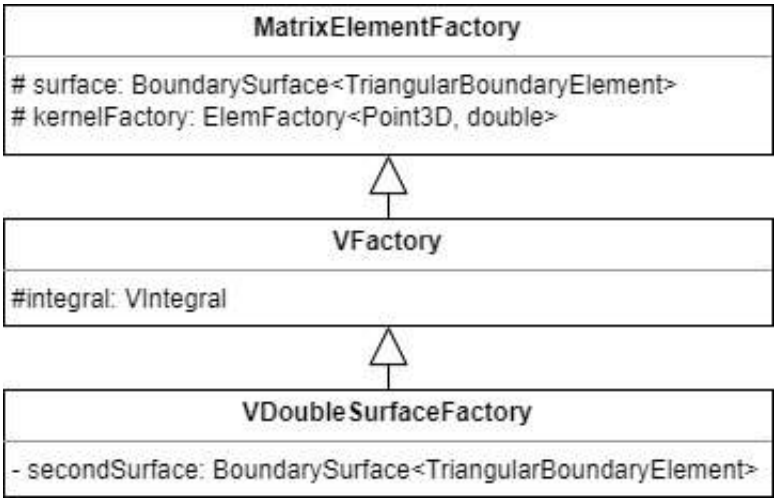

Рис. 4.11. Приклад ієрархії класів для знаходження матричного елемента V_i з урахуванням другої поверхні

повертає список із двох об'єктів BoundarySurface;

2) використовує перший об'єкт для обчислення зовнішнього інтегралу у власному методі Generate;
3) передає другий об'єкт у базовий клас ядра для отримання значення внутрішнього інтегралу.

Таку схему роботи з декількома поверхнями можна використовувати і для інших задач системи MMF.

4.5.4. Вимірювання часу обчислень. Важливою проблемою розв'язування задач є розробка ефективних чисельних методів, які дають змогу отримати коректні результати при оптимальному використанні обчислювальних ресурсів. Для цього необхідно передбачити спосіб знаходження кількісних характеристик ефективності процесу розв'язування задачі.

Ядро фреймворку надає інтерфейс ITimeLogger (рис. 2.17), який зручно використовувати для логування тривалості виконання програмної функції. Його базова реалізація TimeLogger передбачає виконання таких кроків:

1) обчислення процесорного часу перед входженням у функцію;
2) отримання процесорного часу після виходу з функції;
3) запис знайденої різниці у вибраний потік даних.

Важливо, що метод LogTime класу TimeLogger знаходить час на основі властивості UserProcessorTime в .NET. Це дає змогу отримати тривалість виконання лише програмного коду фреймворку без врахування специфічних функцій операційної системи.

З іншого боку, величина UserProcessorTime не є точним показником часу і залежить від кількості ядер процесора та можливостей розпаралелення задач. Тому значення, отримані класом TimeLogger варто використовувати для відносного порівняння тривалості функцій.

Можливості класу TimeLogger застосовано при розв'язуванні задачі Діріхле та дослідженні часу обчислення лівої та правої частин СЛАР у випадку використання прямого і непрямого підходів. Для цього у відповідних стратегіях

— винесено формування частин СЛАР в окремі функції;
— в основному методі Get використано клас TimeLogger, що викликає функції, створені на попередньому кроці.

Таким чином, для серії чисельних експериментів, наведених у прикладі 6.1 розділу 6, отримано час формування матриці СЛАР.

4.5.5. Експорт та візуалізація даних. Для візуалізації розв'язків в системі MMF реалізовано окремий компонент Archive Manager на рівні обробки даних. Однією з його особливостей є експорт даних для відображення анімації результатів за допомогою середовища MATLAB. В цьому випадку використання зовнішньої системи зумовлено

— наявністю стабільних і відтестованих бібліотек для створення анімації

у форматі відео;

— необхідністю уникнути зайвих помилок, враховуючи складність реалізації власного механізму візуалізації.

Таким чином, завданням Archive Manager є побудова скриптів, готових для запуску в середовищі MATLAB.

В рамках процесу генерування скриптів компонент Archive Manager виконує таку послідовність кроків:

1) створює нову папку для збереження результатів обробки вихідних даних задачі;
2) розбиває файл із поточковими значеннями розв'язку на окремі файли для кожного моменту часу t та розміщує їх у підкаталозі data;
3) створює файли, що містять інформацію про інтервали точок спостереження та кількість кадрів;
4) копіює основний скрипт для виконання у MATLAB із ядра системи до створеної папки.

Після цього достатньо лише встановити MATLAB і запустити згенерований скрипт у даному середовищі. В результаті отримаємо анімацію розв'язку в кожен момент часу t з можливістю подальшого збереження у відеоформаті.

4.6. Висновки до розділу 4

Отже, розроблена архітектура фреймворку, а також базові класи та інтерфейси ядра разом формують зручний інструментарій для введення нових задач в систему.

Аналогічно розробці модуля Problem Solver для мішаної задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою у фреймворку реалізова-

но такі ж модулі для інших задач предметної області. Вони відрізняються типом вхідних параметрів та програмною моделлю КІР. Підключення нового модуля до системи є результатом чіткого визначення інфраструктурних елементів, що наслідують загальні абстракції ядра фреймворку. Це забезпечує стабільну роботу системи та перевірку її модулів на відповідність правилам, заданим на рівні ядра.

РОЗДІЛ 5
ОБҐРУНТУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

У цьому розділі обґрунтуємо деякі математичні аспекти обчислювальних схем, які розроблені у попередніх розділах для знаходження наближених розв'язків досліджуваних задач комбінованим МКЕ і ПЛ. Зазначимо, що задачі з крайовими умовами Діріхле чи Неймана обґрунтовано у працях [12, 68, 75].

5.1. Функційні простори

Введемо відповідні функційні простори для математичних моделей досліджуваних задач.

Нехай X – комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і породженою ним нормою $\|\cdot\|_X$. Позначимо через $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ лінійний простір, що складається з фінітних нескінченно диференційовних функцій $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ і визначимо $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; X)$ – простір лінійних неперервних відображень $F : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to X_w$, де X_w – лінійний простір X зі слабкою топологією, які називатимемо узагальненими векторними функціями. Для цього простору позначимо дію $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; X)$ на $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ у вигляді $\langle F, \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R})}$. Для будь-якої $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; X)$ та довільного $m \in \mathbb{N}$ похідну $F^{(m)}$ визначимо як

$$\langle F^{(m)}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = (-1)^m \langle F, \varphi^{(m)}\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Звідси легко бачити, що узагальнені векторні функції є нескінченно диференційовні.

Розглянемо лінійний простір $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; X)$, елементами якого є вимірні

функції $f : \mathbb{R} \to X$ такі, що для довільного обмеженого інтервалу $I \subset \mathbb{R}$ їх звуження на I належить $L^1(I; X)$, тобто $\int_I \|f(t)\|_X \, dt < \infty$. Для довільної функції $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; X)$ визначимо відображення

$$\langle F_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\, \varphi(t)\, dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{5.1}$$

що є елементом простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; X)$. Відображення (5.1) є ін'єктивним, що дає змогу ототожнити $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; X)$ з його образом в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; X)$. Звідси випливає, що $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; X) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}; X)$.

Введемо $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+; X)$ як підпростір простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; X)$, що містить ті елементи $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; X)$, для яких $\operatorname{supp} F \subset [0, +\infty)$. Звідси можемо побачити, що для функцій $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; X)$ виконується $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+; X)$ тоді і лише тоді, коли $f(t) = 0$ для $t \in (-\infty, 0)$. Простір функцій $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; X)$, які належать $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+; X)$, тобто $f(t) = 0$ для $t \in (-\infty, 0)$, позначатимемо через $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; X)$.

Нехай $\alpha > 0$ – довільне фіксоване число. Розглянемо лінійний простір $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$, елементами якого є функції $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; X)$ такі, що $\int_{\mathbb{R}_+} \|f(t)\|^2_X \, e^{-\alpha t} \, dt < \infty$. Даний простір є гільбертовим зі скалярним добутком і породженою ним нормою:

$$(f, g)_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)} = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \big(f(t), g(t)\big)_X \, e^{-\alpha t} \, dt, \quad \|f\|_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)} = \big[(f, f)_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)}\big]^{1/2}. \tag{5.2}$$

Оскільки $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ як підпростір простору $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; X)$ можна ототожнити з відповідним підпростором простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+; X)$, то похідні $f^{(k)}$ функцій f з простору $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ розглядатимемо в сенсі простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; X)$, де k – будь-яке натуральне число.

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для довільного

$m \in \mathbb{N}$ введемо ваговий простір Соболєва

$$H^m_\alpha(\mathbb{R}_+; X) := \{f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X) |\ f^{(k)} \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X),\ k = \overline{1, m}\}, \tag{5.3}$$

та визначимо скалярний добуток

$$(f, g)_{H^m_\alpha(\mathbb{R}_+;X)} = \sum_{k=0}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \left(f^{(k)}(t), g^{(k)}(t)\right)_X e^{-\alpha t} dt,$$

і стандартну норму

$$\|f\|_{H^m_\alpha(\mathbb{R}_+;X)} = \left[\sum_{k=0}^{m} ||f^{(k)}||^2_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)}\right]^{1/2}. \tag{5.4}$$

Відомо, що для будь-якої функції $f \in H^m_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ та довільної точки $t_0 \in [0, +\infty)$ існують сліди $f(t_0) \in X, ..., f^{(m-1)}(t_0) \in X$, причому $f(0) = 0, ..., f^{(m-1)}(0) = 0$.

Тепер розглянемо простори функцій, визначених в області Ω. Нехай $\mathcal{D}(\Omega)$ – лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ і $\mathcal{D}'(\Omega)$ – простір лінійних неперервних функціоналів $F : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$. Елементи цього простору називатимемо узагальненими функціями, заданими на Ω. Аналогічно до простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; X)$ визначимо дію $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ на елемент $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ як $\langle F, \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)}$.

Для довільного $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n_0$ і узагальненої функції $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ отримаємо співвідношення для похідної $D^\beta F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ у вигляді

$$\langle D^\beta F, \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = (-1)^{|\beta|} \langle F, D^\beta \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5.5}$$

Далі визначимо $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ як простір функцій, таких що для будь-якого компакту $K \subset \Omega$ їх звуження $f|_K$ на K належить простору $L^1(K)$. Легко бачити, що функціонал $F_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, визначений за формулою

$$\langle F_f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} f(x)\, \varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{5.6}$$

належить простору $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Згідно з лемою Дюбуа-Раймона відображення (5.6) простору $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ в простір $\mathcal{D}'(\Omega)$ є ін'єктивним. Таким чином простір $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ можна ототожнити з його образом, що є лінійним підпростором простору $\mathcal{D}'(\Omega)$. Звідси маємо, що $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Нехай $L^2(\Omega)$ – лінійний простір, елементами якого є функції $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, такі що $\int_\Omega |v(x)|^2\,dx < \infty$. В цьому просторі введемо скалярний добуток з відповідною нормою

$$(v,w)_0 := \int\limits_\Omega v(x)\overline{w}(x)\,dx, \quad \|v\|_0 := \left[(v,v)_{L^2(\Omega)}\right]^{1/2}.$$

Далі під похідною функції з простору $L^2(\Omega)$ розумітимемо похідну цієї функції як елемента простору $\mathcal{D}'(\Omega)$, визначену за правилом (5.5).

Розглянемо простір Соболєва

$$H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \mid v_{x_i} \in L^2(\Omega),\ i = \overline{1,n}\}.$$

Цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(v,w)_1 := (v,w)_0 + [v,w] \equiv \int\limits_\Omega \left(v(x)\overline{w(x)} + \nabla v(x)\overline{\nabla w(x)}\right)dx,$$

де

$$[v,w] := \int\limits_\Omega \nabla v(x)\overline{\nabla w(x)}dx \equiv \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega v_{x_j}(x)\overline{w_{x_j}(x)}\,dx,$$

і відповідною нормою

$$\|v\|_1 = \left[\|v\|_0^2 + [v,v]\right]^{1/2}.$$

Введемо ще один простір

$$H^1(\Omega,\Delta) := \{v \in H^1(\Omega) \mid \Delta v \in L^2(\Omega)\}.$$

Він також є гільбетовим зі скалярним добутком

$$(v,w)_2 := (v,w)_1 + (\Delta v, \Delta w)_0 \equiv \int\limits_{\Omega} \left[v(x)\overline{w(x)} + \nabla v(x)\overline{\nabla w(x)} + \Delta v(x)\overline{\Delta w(x)} \right] dx$$

і відповідною нормою

$$\|v\|_2 := \left[\|v\|_1^2 + \|\Delta v\|_0^2 \right]^{1/2}, \quad v \in H^1(\Omega, \Delta). \tag{5.7}$$

Розглянемо оператор $A : H^1(\Omega, \Delta) \to L^2(\Omega)$, який визначений за правилом $Av = \Delta v,\ v \in H^1(\Omega, \Delta)$. Цей оператор є лінійним і замкненим. Далі його позначатимемо через Δ.

Позначимо через $H^{1/2}(\Gamma)$ простір Соболєва, складений з функцій простору $L^2(\Gamma)$, що мають похідні порядку $1/2$ (детальніше див., напр. [67, §7.3 в Розділі 1]), а через $H^{-1/2}(\Gamma)$ – спряжений до нього простір. Позначатимемо норму в просторі $H^{1/2}(\Gamma)$ через $\|\cdot\|_{1/2}$, норму в просторі $H^{-1/2}(\Gamma)$ — через $\|\cdot\|_{-1/2}$, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2}$ — дію елемента простору $H^{-1/2}(\Gamma)$ на елемент простору $H^{1/2}(\Gamma)$.

Відомо, що існує лінійний неперервний і сюр'єктивний *оператор сліду* $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$, що є продовженням за неперервністю оператора $\widetilde{\gamma}_0 : C^1(\overline{\Omega}) \to C(\Gamma)$, визначеного за правилом: $\widetilde{\gamma}_0 v = v|_\Gamma,\ v \in C^1(\overline{\Omega})$. Крім того, для довільної функції $v \in H^1(\Omega)$ існує стала $C_1 > 0$ така, що

$$||\gamma_0 v||_{1/2} \leqslant C_1 ||v||_1, \quad v \in H^1(\Omega). \tag{5.8}$$

Також розглянемо оператор взяття нормальної похідної (в слабкому сенсі) $\gamma_1 : H^1(\Omega, \Delta) \to H^{-1/2}(\Gamma)$, що визначений тотожністю

$$\langle \gamma_1 v, \gamma_0 w \rangle_{1/2} = (\Delta v, w)_0 + [v, w], \quad v \in H^1(\Omega, \Delta),\ w \in H^1(\Omega).$$

Відображення $\gamma_1 : H^1(\Omega, \Delta) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ є неперервним і для гладких функцій $v \in C^1(\overline{\Omega})$ виконується $\gamma_1 v = \partial_\nu v|_\Gamma$ [40, Лема 3.2]. Звідси маємо

формулу Гріна

$$(\Delta v, w)_0 = \langle \gamma_1 v, \gamma_0 w \rangle_{1/2} - [v, w], \quad v \in H^1(\Omega, \Delta),\ w \in H^1(\Omega), \tag{5.9}$$

і нерівність

$$\|\gamma_1 v\|_{-1/2} \leqslant C_2 \|v\|_2, \quad v \in H^1(\Omega, \Delta), \tag{5.10}$$

де $C_2 > 0$ — деяка стала.

Для векторозначних функцій розглядатимемо оператори $\widetilde{\gamma_0} : L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)) \to L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ і $\widetilde{\gamma_1} : L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega, \Delta)) \to L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ визначені як $\widetilde{\gamma_0} u(t) := \gamma_0(u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+$, і $\widetilde{\gamma_1} u(t) := \gamma_1(u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+$, відповідно. Далі писатимемо γ_0 і γ_1 замість $\widetilde{\gamma_0}$ і $\widetilde{\gamma_1}$.

Твердження 5.1 ([57]). ***1°*** *Якщо* $u \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$, *то* $\gamma_0 u \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ *і оператор* γ_0 *є неперервним на* $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$.

2° *Якщо* $u \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega, \Delta))$, *то* $\gamma_1 u \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ *і оператор* γ_1 *є неперервним на* $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega, \Delta))$.

3° *Крім того, коли* $u \in H^2_\alpha(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap H^1_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$, *то* $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\Omega))$ *і* $u' \in C(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, *причому* $u(t) = 0$, $u'(t) = 0$ *при* $t \leqslant 0$.

Твердження 5.2 ([57]). *Якщо* $u \in H^1_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$, *то*

$$\gamma_0 u \in H^1_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma)) \quad i \quad (\gamma_0 u)' = \gamma_0 u'. \tag{5.11}$$

5.2. Формулювання мішаної задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою у вагових просторах Лебега

Розглянемо задачу (**HD**) у вагових просторах Лебега, складених з векторних функцій дійсного аргументу.

Означення 5.1. Для заданих $g \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ і $b \in L^\infty(\Gamma)$ сильним розв'язком задачі (**HD**) називаємо функцію

$$u \in H^2_\alpha(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap H^1_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)) \cap L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega, \Delta)), \tag{5.12}$$

для якої правильні рівності

$$u''(t) - \Delta u(t) = 0 \quad \text{в} \quad L^2(\Omega), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5.13}$$

$$\gamma_1 u(t) + b\,(\gamma_0 u(t))' = g(t) \quad \text{в} \quad H^{-1/2}(\Gamma), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{5.14}$$

Твердження 5.3 ([57])**.** *Задача (**HD**) має не більше одного сильного розв'язку.*

Надалі вважатимемо, що функція $b \in L^\infty(\Gamma)$ є невід'ємною на Γ.

Теорема 5.1 ([57])**.** *Нехай $g \in H^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$. Тоді існує сильний розв'язок задачі (**HD**). Крім того, він задовольняє оцінку*

$$\|u\|_{H^2_\alpha(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega))} + \|u\|_{H^1_\alpha(\mathbb{R}_+;H^1(\Omega))} + \|u\|_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;H^1(\Omega,\Delta))} \leqslant C_3 \|g\|_{H^2_\alpha(\mathbb{R}_+;H^{-1/2}(\Gamma))}, \tag{5.15}$$

де C_3 – стала, яка залежить лише від вхідних параметрів.

Доведення цієї теореми наведено далі.

5.3. Перетворення Лаґерра і Лапласа

Обрана шкала вагових просторів Лебега підходить для дослідження залежних від часу величин за допомогою перетворень Лаґерра і Лапласа. Зокрема перетворення Лаґерра приводить ЕКІР до послідовності КІР (див. розділ 1.2), для яких можна розробити ефективні алгоритми чисельного розв'язування.

Твердження 5.4 ([12]). *Перетворення Лаґерра* $\mathcal{L} : L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X) \to l^2(X)$, *визначене формулою* (1.18), *є ін'єктивним і його образом є простір* $l^2(X)$, *причому*

$$||f||_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} ||f_k||^2_X. \tag{5.16}$$

Крім того, для довільної функції $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ *маємо рівність* $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}f = f$, *де* $\mathcal{L}^{-1} : l^2(X) \to L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ *– обернене відображення до* $\mathcal{L}$, *яке довільній послідовності* $\mathbf{h} = (h_0, h_1, ..., h_k, ...)^T$ *ставить у відповідність функцію* h *за формулою* (1.19)

Оскільки перетворення Лаґерра і Лапласа можуть бути визначеними на тих самих вагових просторах Лебега, використаємо перетворення Лапласа для обґрунтування задачі (**HD**).

Спочатку наведемо потрібні нам властивості перетворення Лапласа. Розглянемо лінійний простір $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, елементами якого є нескінченно диференційовні функції $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такі, що

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |t|^k |\psi^{(m)}(t)| < \infty \quad \text{для будь-яких} \quad k, m \in \mathbb{N}_0.$$

Відомо, що послідовність $\{\psi_n\}$ збігається до ψ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ тоді, коли

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} (1 + |t|)^k |\psi_n^{(m)}(t) - \psi^{(m)}(t)| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{для будь-яких} \quad k, m \in \mathbb{N}_0.$$

Також визначимо $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$ – лінійний простір лінійних та неперервних відображень $G : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to X$.

Елементи простору $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ називають швидко спадаючими функціями, а елементи простору $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$ – повільно зростаючими узагальненими векторними функціями. Це пов'язано з тим, що елемент $G_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$ визначений за правилом

$$\langle G_g, \psi\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} := \int\limits_{\mathbb{R}} g(t)\,\psi(t)\,dt, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{5.17}$$

відповідає функції $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; X)$ такій, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|g(t)\|_X (1+|t|)^{-s}\, dt < \infty, \quad \text{де} \;\; s = s(g) \geqslant 0 \;\; - \;\; \text{деяке число.} \tag{5.18}$$

Позначимо дію елемента $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$ на елемент простору $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ як $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. Функції $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; X)$, що задовольняють умову (5.18) утворюють лінійний простір, який згідно з відображенням (5.17) можна ототожнити з підпростором простору $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$.

Дамо означення перетворенню Фур'є для елементів простору $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$ (детальніше див.[2, 44]). Для цього спочатку розглянемо означення Фур'є для функцій з простору $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, згідно з яким перетворенням Фур'є довільної функції $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ називатимемо функцію $\widetilde{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, визначену за правилом

$$\widetilde{\psi}(\eta) = \mathfrak{F}[\psi](\eta) \equiv \mathfrak{F}_{t\to\eta}[\psi(t)](\eta) := \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(t)\, e^{-i\eta t}\, dt, \quad \eta \in \mathbb{R}. \tag{5.19}$$

Відомо, що відображення $\mathfrak{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ є ізоморфізмом.

Аналогічно визначаємо перетворення Фур'є $\mathfrak{F}[g] : \mathbb{R} \to X$ для довільних функцій $g \in L^1(\mathbb{R}; X)$

$$\widetilde{g}(\eta) = \mathfrak{F}[g](\eta) \equiv \mathfrak{F}_{t\to\eta}[g(t)](\eta) := \int\limits_{\mathbb{R}} g(t)\, e^{-i\eta t}\, dt, \quad \eta \in \mathbb{R}. \tag{5.20}$$

Тепер розглянемо перетворення Фур'є для довільного елемента $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$. Визначимо його як елемент $\mathfrak{F}[G] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$ такий, що

$$\langle \mathfrak{F}[G], \psi \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} := \langle G, \mathfrak{F}[\psi] \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{5.21}$$

Можна показати, що якщо $G = g \in L^1(\mathbb{R}; X)$, то з (5.21) випливає (5.20) і навпаки.

Нехай $\omega \in \mathbb{R}$ – довільне число. Введемо простір

$$\mathcal{D}'(\omega, \mathbb{R}_+; X) := \big\{ F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+; X) \mid e^{-\xi \cdot} F(\cdot) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+; X) \quad \forall\, \xi > \omega \big\},$$

де $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+;X) := \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+;X) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R};X)$. Зокрема, елементами простору $\mathcal{D}'(\omega,\mathbb{R}_+;X)$ є функції $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;X)$ такі, що

$$e^{-\xi\cdot} f(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+;X) \quad \forall\, \xi > \omega. \tag{5.22}$$

Нехай $\Pi_\omega := \{p = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p = \xi > \omega\}$. Перетворенням Лапласа функції $G \in \mathcal{D}'(\omega,\mathbb{R}_+;X)$ називають функцію $\widehat{G} : \Pi_\omega \to X$, визначену за правилом

$$\widehat{G}(\xi + i\eta) \equiv \widehat{G}(p) = \mathfrak{L}[G](p) := \mathfrak{F}_{t\to\eta}[e^{-\xi t}G(t)](\xi + i\eta). \tag{5.23}$$

Тоді обернене перетворення Лапласа матиме вигляд

$$G(t) = e^{\xi t}\mathfrak{F}^{-1}_{\eta\to t}[\widehat{G}(\xi + i\eta)](t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{5.24}$$

Перетворення Лапласа для функцій $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;X)$, що задовольняють умову (5.22), визначимо як

$$\widehat{f}(p) = \mathfrak{L}[f](p) := \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t)e^{-p\,t}dt, \quad p \in \Pi_\omega. \tag{5.25}$$

У випадку коли функція $\eta \mapsto \widehat{f}(\xi + i\eta) : \mathbb{R} \to X$ належить $L^1(\mathbb{R};X)$ для деякого $\xi > \omega$, згідно з (5.24) отримаємо обернене перетворення Лапласа

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}e^{\xi t}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi + i\eta)\, e^{i\eta t}\, d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi + i\eta)\, e^{(\xi+i\eta)t}\, d(i\eta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} p=\xi} \widehat{f}(p)\, e^{pt}\, dp, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Розглянемо простір $\mathcal{H}(\omega;X)$, елементами якого є аналітичні функції $h : \Pi_\omega \to X$, що задовольняють умову:

(H): для довільного $\xi_0 > \omega$ існують сталі $C = C(h,\xi_0) \geqslant 0$ і $s = s(h,\xi_0) \geqslant 0$ такі, що

$$\|h(p)\|_X \leqslant C(1 + |p|^s), \quad \operatorname{Re} p > \xi_0. \tag{5.27}$$

Твердження 5.5 ([2], §10.4; [44], розд. XVI, §2)**.** *Перетворення Лапласа взаємно однозначно переводить простір* $\mathcal{D}'(\omega, \mathbb{R}_+; X)$ *на простір* $\mathcal{H}(\omega; X)$*. Крім того, якщо функція* $\widehat{f} \in \mathcal{H}(\omega; X)$ *задовольняє умову* (5.27) *(із заміною* h *на* $\widehat{f}$*), то вона є (при перетворенні Лапласа) образом функції* $f \in \mathcal{D}'(\omega, \mathbb{R}_+; X)$*, що визначена за формулою*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{d}{dt} - b\right)^k \int\limits_{\operatorname{Re} p = \xi} \frac{\widehat{f}(p)}{(p-b)^k} e^{p\,t}\, dp, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5.28}$$

де $b, \xi \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ *– будь-які такі, що* $b \leqslant \omega,\ \xi > \xi_0,\ k > s+1$*.*

Тут формула (5.28) визначає обернене перетворення Лапласа, яке в частковому випадку має вигляд (5.26).

Легко переконатись, що

$$L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X) \subset \mathcal{D}'(\alpha/2, \mathbb{R}_+; X),$$

оскільки для будь-якої функції $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ маємо, що $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; X)$ і при застосуванні нерівності Коші-Буняковського виконується умова (5.22):

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\xi t}\|f(t)\|_X dt = \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha/2 t}\|f(t)\|_X e^{(\alpha/2-\xi)t} dt \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}\|f(t)\|_X^2 dt\right]^{1/2} \left[\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{(\alpha-2\xi)t} dt\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2(\xi-\alpha/2)}}\|f\|_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)} < \infty$$

для будь-яких $\xi > \alpha/2$.

Нехай $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X)$ – лінійний підпростір простору $\mathcal{H}(\alpha/2; X)$, елементами якого є функції $p \mapsto h(p) : \overline{\Pi_{\alpha/2}} \to X$, що аналітичні на відкритій півплощині $\Pi_{\alpha/2}$, неперервні на її замиканні $\overline{\Pi_{\alpha/2}}$ та задовольняють умову **(H)** при $s = 0$ і для кожного значення $\xi \geqslant \alpha/2$ функції $\eta \mapsto h(\xi + i\eta) : \mathbb{R} \to X$ належать простору $L^2(\mathbb{R}; X)$, тобто $\int\limits_{\mathbb{R}} \|h(\xi+i\eta)\|_X^2\, d\eta < \infty$. Отримаємо такі наслідки.

Наслідок 5.1 ([57]). *Перетворення Лапласа* $\mathfrak{L}[\cdot]$ *переводить взаємно однозначно простір* $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$ *на простір* $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2};X)$ *і при цьому для будь-якої функції* $f\in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$ *її образом є функція*

$$\widehat{f}(p)=\mathfrak{L}[f](p):=\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t)\,e^{-p\,t}\,dt,\quad p\in\overline{\Pi_\alpha/2}, \tag{5.29}$$

а для довільної функції $\widehat{f}\in\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2};X)$ *її прообраз* $f\in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$ *можна знайти за формулою*

$$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}[\widehat{f}](t):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=\xi}\widehat{f}(p)\,e^{pt}\,dp,\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad \xi\geqslant\alpha/2. \tag{5.30}$$

Також правильна рівність Парсеваля

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2\xi t}\|f(t)\|^2_X\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=\xi}\|\widehat{f}(p)\|^2_X\,dp\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\|\widehat{f}(\xi+i\eta)\|^2_X\,d\eta,\ \xi\geqslant\alpha/2, \tag{5.31}$$

зокрема,

$$\|f\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)}=\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=\alpha/2}\|\widehat{f}(p)\|^2_X\,dp\right)^{1/2}\equiv\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\|\widehat{f}(\alpha/2+i\eta)\|^2_X\,d\eta\right)^{1/2}. \tag{5.32}$$

Доведення. Нехай $f\in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$. Враховуючи означення перетворення Лапласа, отримаємо

$$\begin{aligned}\widehat{f}(p)&=\mathfrak{L}_{t\to p}[f(t)](p)\overset{p=\xi+i\eta}{=}\mathfrak{F}_{t\to\eta}[e^{-\xi t}f(t)](\xi+i\eta)=\\&=\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\xi t}f(t)\,e^{-i\eta t}\,dt=\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t)\,e^{-pt}\,dt,\quad p\in\overline{\Pi_{\alpha/2}}.\end{aligned} \tag{5.33}$$

Оскільки функція $t\mapsto t^k f(t)\,e^{-pt}:\mathbb{R}_+\to X$ є абсолютно інтегровною для будь-якого $p\in\Pi_{\alpha/2}$ і для довільної точки $p_0\in\overline{\Pi_{\alpha/2}}$ в деякому її околі мажорується абсолютно інтегровною функцією, то $\widehat{f}$ є аналітичною в $\Pi_{\alpha/2}$. Крім того, можна показати, що $\widehat{f}$ є неперервною на $\overline{\Pi_{\alpha/2}}$.

Доведемо, що $\widehat{f}$ задовольняє умову **(H)** при $s = 0$. Враховуючи (5.33), для $p = \xi + i\eta \in \Pi_{\alpha/2}$ маємо

$$\|\widehat{f}(p)\|_X \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_+} \|f(t)\|_X \, e^{-\xi t} \, dt = \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha/2\, t} \|f(t)\|_X \, e^{(\alpha/2-\xi)t} \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} \|f(t)\|_X^2 \, dt \right]^{1/2} \left[\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{(\alpha-2\xi)t} \, dt \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2(\xi - \alpha/2)}} \|f\|_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)}. \tag{5.34}$$

Так як функція $t \mapsto e^{-\xi t} f(t)$ належить $L^2(\mathbb{R}_+; X)$ для будь-якого $\xi \geqslant \alpha/2$ і перетворення Фур'є переводить $L^2(\mathbb{R}; X)$ на $L^2(\mathbb{R}; X)$, то функція $\eta \mapsto \widehat{f}(\xi + i\eta)$ є елементом простору $L^2(\mathbb{R}; X)$. Крім того, виконується рівність Парсеваля

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2\xi t} \|f(t)\|_X^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}(\xi + i\eta)\|_X^2 \, d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re} p = \xi} \|\widehat{f}(p)\|_X^2 \, dp.$$

Отже, функція $\widehat{f}(p)$, $p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$, є елементом простору $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X)$.

Тепер припустимо, що $\widehat{f} \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X)$. Доведемо, що існує функція $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ така, що $\widehat{f}$ є образом f при застосуванні перетворення Лапласа. Враховуючи $\widehat{f} \in \mathcal{H}(\alpha/2; X)$, існує $f \in \mathcal{D}'(\alpha/2, \mathbb{R}_+; X)$ така, що

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[\widehat{f}(p)](t) \overset{p=\xi+i\eta}{=} e^{\xi t} \, \mathfrak{F}^{-1}_{\eta \to t}[\widehat{f}(\xi + i\eta)](t), \quad \xi > \alpha/2.$$

Оскільки $\eta \mapsto \widehat{f}(\xi + i\eta) : \mathbb{R} \to X$ є елементом простору $L^2(\mathbb{R}; X)$ для довільного $\xi \geqslant \alpha/2$ маємо

$$t \mapsto e^{-\xi t} \, f(t) = \mathfrak{F}^{-1}_{\eta \to t}[\widehat{f}(\xi + i\eta)](t) \in L^2(\mathbb{R}_+; X)$$

при довільному $\xi \geqslant \alpha/2$, а також

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\xi t} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi + i\eta)\, e^{i\eta t}\, d\eta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi + i\eta)\, e^{(\xi + i\eta)t}\, d\eta = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p = \xi} \widehat{f}(p)\, e^{pt}\, dp, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{5.35}$$

Отже, $f = \mathfrak{L}^{-1}[\widehat{f}]$ є елементом простору $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ і справджується формула (5.35). □

Наслідок 5.2 ([57]). *Якщо функція f належить простору $H^m_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ $(m \in \mathbb{N})$, то функції $p \mapsto p^k \widehat{f}(p)$ належать простору $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X)$ для кожного $k \in \{0, 1, ..., m\}$. І навпаки, якщо функції $p \mapsto p^k \widehat{f}(p)$ належать простору $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X)$ для кожного $k \in \{0, 1, ..., m\}$, то функція $f := \mathfrak{L}^{-1}[\widehat{f}]$ належить простору $H^m_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ і*

$$f^{(k)}(t) = \mathfrak{L}^{-1}[p^k \widehat{f}(p)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p = \xi} p^k \widehat{f}(p)\, e^{pt}\, dp, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad k = \overline{1, m}, \tag{5.36}$$

де $\xi \geqslant \alpha/2$ — яке-небудь число і від його величини значення функції f не залежать.

Крім того, виконуються рівності

$$\|f\|^2_{H^m_\alpha(\mathbb{R}_+; X)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p = \alpha/2} \Big[\sum_{k=0}^{m} |p|^{2k} \Big] \|\widehat{f}(p)\|^2_X\, dp = \\ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \Big[\sum_{k=0}^{m} \big(\alpha^2/4 + \eta^2\big)^k \Big] \|\widehat{f}(\alpha/2 + i\eta)\|^2_X\, d\eta.$$

Доведення. Для доведення даного наслідку розглянемо випадок $m = 1$.

Нехай $f \in H^1_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$, тобто $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X) \cap C(\mathbb{R}; X)$, $f' \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$, $f(0) = 0$. Згідно з наслідком 5.1 маємо, що функції $p \mapsto \widehat{f}(p)$ і $p \mapsto \widehat{f'}(p)$ є елементами простору $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X)$. Враховуючи означення перетворення

Лапласа та використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$\widehat{f'}(p) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f'(t)\, e^{-p\,t}\, dt = \left[\begin{array}{ll} u = e^{-p\,t}; & du = -p\, e^{-p\,t}\, dt \\ dv = f'(t)\, dt; & v = f(t) \end{array}\right] =$$

$$= f(t)\, e^{-p\,t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} + p \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t)\, e^{-p\,t}\, dt = p\widehat{f}(p), \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}.$$

Звідси випливає, що $p \mapsto p\widehat{f}(p) \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X)$.

Припустимо тепер, що функції $p \mapsto \widehat{f}(p)$ і $p \mapsto p\widehat{f}(p)$ є елементами простору $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X)$. Згідно з наслідком 5.1 функція

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re} p = \xi} \widehat{f}(p)\, e^{pt}\, dp, & \text{якщо } \ t > 0, \\ 0, & \text{якщо } \ t \leqslant 0, \end{cases} \tag{5.37}$$

є елементом простору $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$. Доведемо, що $f \in C(\mathbb{R}; X)$, $f' \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ і, зокрема $f(0) = 0$.

Використовуючи нерівність Коші, маємо

$$\|\widehat{f}(p)\|_X = \frac{1}{|p|} \cdot |p| \|\widehat{f}(p)\|_X \leqslant \frac{1}{4|p|^2} + |p|^2 \|\widehat{f}(p)\|_X^2, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}.$$

Звідси, оскільки $p \mapsto p\widehat{f}(p) \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X)$, отримуємо

$$\eta \mapsto \|\widehat{f}(\xi + i\eta)\|_X \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{для довільного } \xi \geqslant \alpha/2.$$

Таким чином, функція f, визначена за формулою (5.37), є елементом простору $C(\mathbb{R}; X)$, а оскільки $f(t) = 0$ при $t < 0$, то $f(0) = 0$.

Покажемо, що

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re} p = \xi} p\widehat{f}(p)\, e^{pt}\, dp, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{5.38}$$

Справді, оскільки $p \mapsto p\widehat{f}(p) \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X)$, то вираз у правій частині формули (5.38) визначає функцію, що належить простору $L^2_\alpha(\mathbb{R}; X)$. Покажемо, що первісна цієї функції, рівної 0 при $t = 0$, співпадає з f.

Нехай

$$t \mapsto f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\xi} p\widehat{f}(p)\, e^{pt}\, dp, & \text{якщо } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{якщо } \ t < 0. \end{cases} \tag{5.39}$$

Враховуючи, що

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\xi} \widehat{f}(p)\, dp = 0,$$

знайдемо

$$\int\limits_0^t f_1(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^t \left[\int\limits_{\mathrm{Re}p=\xi} p\widehat{f}(p)\, e^{ps}\, dp \right] ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\xi} p\widehat{f}(p) \left[\int\limits_0^t e^{ps}\, ds \right] dp = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\xi} \widehat{f}(p) \left[e^{pt} - 1 \right] dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\xi} \widehat{f}(p) e^{pt}\, dp - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\xi} \widehat{f}(p)\, dp = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Отже, наслідок 5.2 доведено. □

Нехай $X_j,\ j = 0, 1, 2,$ – гільбертові простори, відповідно, зі скалярними добутками $(\cdot, \cdot)_j,\ j = 0, 1, 2,$ та породженими нормами $\| \cdot \|_j,\ j = 0, 1, 2.$ Крім, того справджуються неперервні включення

$$X_2 \subset X_1 \subset X_0. \tag{5.40}$$

Наприклад, $X_0 = L^2(\Omega),\ X_1 = H^1(\Omega),\ X_2 = H^1(\Omega, \Delta)$. Звідси випливає, що

$$L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X_2) \subset L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X_1) \subset L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X_0) \subset \mathcal{D}'(\alpha/2, \mathbb{R}_+; X_0) \tag{5.41}$$

і

$$\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X_2) \subset \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X_1) \subset \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X_0) \subset \mathcal{H}(\alpha/2; X_0). \tag{5.42}$$

а перетворення Лапласа

$$\mathfrak{L}[\cdot] \,:\, \mathcal{D}'(\alpha/2, \mathbb{R}_+; X_0) \to \mathcal{H}(\alpha/2; X_0)$$

взаємно однозначно переводить простір $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X_j)$ на простір $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X_j)$ для кожного $j \in \{0, 1, 2\}$, причому виконуються рівності Парсеваля

$$\|f\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X_j)} = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}(\alpha/2 + i\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}; X_j)}, \quad j = 0, 1, 2. \tag{5.43}$$

Твердження 5.6 ([57]). *Нехай функція f належить простору $H^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X_0) \cap H^1_\alpha(\mathbb{R}_+; X_1) \cap L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X_2)$. Тоді для функції $\widehat{f}(p) := \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t)\, e^{-pt}\, dt$, $p \in \Pi_{\alpha/2}$, справджуються включення*

$$\begin{aligned} &p \mapsto \widehat{f}(p) \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X_2), \quad p \mapsto p\widehat{f}(p) \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X_1), \\ &p \mapsto p^2 \widehat{f}(p) \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; X_0). \end{aligned} \tag{5.44}$$

І навпаки, якщо для деякої функції $\widehat{f}(p)$, $p \in \Pi_{\alpha/2}$, правильні включення (5.44), тоді функція

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p = \xi} \widehat{f}(p)\, e^{pt}\, dp, & \text{якщо } \ t \in \mathbb{R}_+, \\ 0, & \text{якщо } \ t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{5.45}$$

де $\xi \geqslant \alpha/2$ – яке-небудь число (значення f від ξ не залежить), належить простору

$$H^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X_0) \cap H^1_\alpha(\mathbb{R}_+; X_1) \cap L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X_2),$$

причому $f \in C^1(\mathbb{R}; X_0) \cap C(\mathbb{R}; X_1)$.

Крім того,

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p = \xi} p\, \widehat{f}(p)\, e^{pt}\, dp, \quad f''(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p = \xi} p^2\, \widehat{f}(p)\, e^{pt}\, dp, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

і

$$\|f\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X_2)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}p=\alpha/2} \|\widehat{f}(p)\|_2^2\,dp = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}(\alpha/2+i\eta)\|_2^2\,d\eta,$$

$$\|f\|^2_{H^1_\alpha(\mathbb{R}_+;X_1)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}p=\alpha/2} \left[1+|p|^2\right]\|\widehat{f}(p)\|_1^2\,dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left[1+\alpha^2/4+\eta^2\right]\|\widehat{f}(\alpha/2+i\eta)\|_1^2\,d\eta,$$

$$\|f\|^2_{H^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}p=\alpha/2} \left[1+|p|^2+|p|^4\right]\|\widehat{f}(p)\|_0^2\,dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left[1+\alpha^2/4+\eta^2+\left(\alpha^2/4+\eta^2\right)^2\right]\|\widehat{f}(\alpha/2+i\eta)\|_0^2\,d\eta.$$

Твердження 5.7 ([57]). *Нехай X та Y – гільбертові простори, а $A : X \to Y$ – лінійний неперервний оператор. Тоді, якщо f належить простору $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$, то Af належить простору $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;Y)$ і*

$$A\mathfrak{L}_X[f](p) = \mathfrak{L}_Y[Af](p), \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}.$$

Крім того, якщо $\widehat{f}$ належить простору $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2};X)$, то $A\widehat{f}$ належить простору $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2};Y)$ і

$$A\mathfrak{L}_X^{-1}[\widehat{f}](t) = \mathfrak{L}_Y^{-1}[A\widehat{f}](t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

де $\mathfrak{L}_X : L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X) \to \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2};X)$, $\mathfrak{L}_Y : L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;Y) \to \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2};Y)$ – перетворення Лапласа відповідних просторів.

Лема 5.1. *Нехай $f(\cdot) \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$, де X довільний гільбертів простір. Тоді для довільного $r>0$ маємо $f(\cdot-r) \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$ і $\|f(\cdot-r)\|_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)} = e^{-\alpha r/2}\|f\|_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)}$. Крім того, $\mathfrak{L}[f(\cdot-r)](p) = e^{-pr}\mathfrak{L}[f](p)$, $p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$.*

Доведення. Нехай $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$. Беручи до уваги, що $f(t)=0$ при

$t < 0$, матимемо

$$\|f(\cdot - r)\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)} = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \|f(t-r)\|^2_X \, e^{-\alpha t} \, dt \overset{\tau=t-r}{=} \int\limits_{-r}^{\infty} \|f(\tau)\|^2_X \, e^{-\alpha(\tau+r)} \, d\tau =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+} \|f(\tau)\|^2_X \, e^{-\alpha(\tau+r)} \, d\tau = e^{-\alpha r} \|f\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+;X)}.$$

Отож, $f(\cdot - r) \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ і до цієї функції застосовне перетворення Лапласа при довільному $p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$:

$$\mathfrak{L}[f(\cdot - r)](p) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t-r) \, e^{-p\,t} \, dt \overset{\tau=t-r}{=} \int\limits_{-r}^{\infty} f(\tau) \, e^{-p(\tau+r)} \, d\tau =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(\tau) \, e^{-p(\tau+r)} \, d\tau = e^{-p\,r} \mathfrak{L}[f](p).$$

□

Перейдемо тепер до застосування перетворення Лапласа до вихідної задачі (**HD**). Позначимо через $\mathfrak{L}_0[\cdot]$ і $\mathfrak{L}_0^{-1}[\cdot]$ пряме та обернене перетворення Лапласа, відповідно, просторів $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ і $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; L^2(\Omega))$, через $\mathfrak{L}_1[\cdot]$ і $\mathfrak{L}_1^{-1}[\cdot]$ пряме та обернене перетворення Лапласа, відповідно, просторів $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ і $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; H^1(\Omega))$, через $\mathfrak{L}_2[\cdot]$ і $\mathfrak{L}_2^{-1}[\cdot]$ пряме та обернене перетворення Лапласа, відповідно, просторів $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega, \Delta))$ і $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; H^1(\Omega, \Delta))$, через $\mathfrak{L}_{1/2}[\cdot]$ і $\mathfrak{L}_{1/2}^{-1}[\cdot]$ пряме та обернене перетворення Лапласа, відповідно, просторів $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ і $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; H^{1/2}(\Gamma))$, через $\mathfrak{L}_{-1/2}[\cdot]$ і $\mathfrak{L}_{-1/2}^{-1}[\cdot]$ пряме та обернене перетворення Лапласа, відповідно, просторів $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ і $\mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; H^{-1/2}(\Gamma))$.

Нехай $u(\cdot, t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, – сильний розв'язок задачі (**HD**), тобто $u \in H^2_\alpha(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap H^1_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)) \cap L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega, \Delta))$ і правильні рівності (5.13) та (5.14). Застосуємо до них перетворення Лапласа, використовуючи

оператори $\mathfrak{L}_0[\cdot]$ і $\mathfrak{L}_{-1/2}[\cdot]$ відповідно:

$$\mathfrak{L}_0[u''](p) - \mathfrak{L}_0[\Delta u](p) = 0, \tag{5.46}$$

$$\mathfrak{L}_{-1/2}[\gamma_1 u](p) + \mathfrak{L}_{-1/2}[b(\gamma_0 u)'](p) = \mathfrak{L}_{-1/2}[g](p), \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}. \tag{5.47}$$

Оскільки оператори $\Delta : H^1(\Omega, \Delta)) \to L^2(\Omega)$, $\gamma_0 : H^1(\Omega)) \to H^{1/2}(\Gamma)$ і $\gamma_1 : H^1(\Omega, \Delta)) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ є лінійними та неперервними, то на підставі наслідків 5.1, 5.2 та тверджень 5.6, 5.7 перетворення Лапласа $\widehat{u}(\cdot, p) := \mathfrak{L}_2[u](\cdot, p)$ для кожного $p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$ як функція $x \in \Omega$ належить простору $H^1(\Omega, \Delta)$ і задовольняє рівності

$$-\Delta\widehat{u}(\cdot, p) + p^2\widehat{u}(\cdot, p) = 0, \tag{5.48}$$

$$\gamma_1\widehat{u}(\cdot, p) + p\, b\, \gamma_0\widehat{u}(\cdot, p) = \widehat{g}(\cdot, p), \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}, \tag{5.49}$$

де $\widehat{g} := \mathfrak{L}_{-1/2}[g]$ – перетворення Лапласа функції g.

Зазначимо, що отримана крайова задача відрізняється від задач, які відомі в літературі як задачі для еліптичних рівнянь з крайовою умовою третього типу (умовою Робіна) (див., наприклад, [1, 76, 83]). Відмінність полягає у наявності параметра p не лише у диференціальному рівнянні, а й у крайовій умові. Цей фактор врахуємо в подальшому обґрунтуванні. Далі для зручності при класифікації задач отриману задачу також називатимемо задачею Робіна.

5.4. Обґрунтування математичних моделей

Оскільки задача (5.48), (5.49) буде предметом подальшого дослідження, то перепишемо її у загальній постановці, розглядаючи $p \in \overline{\Pi_{\alpha^*}}$, де $\alpha^* > 0$ – стала.

Задача (**ER**): для довільного фіксованого $p \in \overline{\Pi_{\alpha^*}}$ знайти функцію $w \in H^1(\Omega, \Delta)$, яка задовольняє рівняння

$$-\Delta w + p^2 w = 0 \ \text{ в } L^2(\Omega), \tag{5.50}$$

і крайову умову

$$\gamma_1 w + p\, b\, \gamma_0 w = h(p) \ \text{ в } H^{-1/2}(\Gamma), \tag{5.51}$$

де $h : \overline{\Pi_{\alpha^*}} \to H^{-1/2}(\Gamma)$ – задана функція.

5.4.1. Властивості розв'язку задачі Робіна для еліптичного рівняння з параметром у крайовій умові. Доведемо коректність задачі (**ER**).

Теорема 5.2. *Задача (**ER**) має розв'язок і тільки один, причому для кожного $p \in \overline{\Pi_{\alpha^*}}$ він задовольняє оцінки*

$$\|w\|_0 \leqslant C_4 \, \|h\|_{-1/2}, \tag{5.52}$$

$$\|w\|_1 \leqslant C_5 \, |p| \, \|h\|_{-1/2}, \tag{5.53}$$

$$\|w\|_2 \leqslant C_6 \, |p|^2 \, \|h\|_{-1/2}, \tag{5.54}$$

де C_4, C_5, C_6 – деякі сталі.

Крім того, якщо функція $h : \Pi_{\alpha^*} \to H^{-1/2}(\Gamma)$ є аналітичною, то функція $p \mapsto w(\cdot, p) \, : \, \Pi_{\alpha^*} \to H^1(\Omega, \Delta)$ теж є аналітичною.

Доведення. Зведемо задачу (**ER**) до варіаційного рівняння

$$\widetilde{a}_p(w, v) = \langle h, \gamma_0 v \rangle_{1/2}, \quad v \in H^1(\Omega), \tag{5.55}$$

де

$$\widetilde{a}_p(w, v) := [w, v] + p^2 (w, v)_0 + p \int\limits_{\Gamma} b(x) \gamma_0 w(x) \overline{\gamma_0 v(x)} \, d\Gamma, \quad w, v \in H^1(\Omega). \tag{5.56}$$

Далі для спрощення опускатимемо аргумент p у запису функції $w(\cdot, p)$. Враховуючи неперервність оператора сліду і нерівність Коші-Буняковського, для неперервної антилінійної форми $\langle h, \gamma_0 v\rangle_{1/2}$ у правій частині рівняння (5.55) отримаємо оцінку

$$|\langle h, \gamma_0 v\rangle_{1/2}| \leqslant \|h\|_{-1/2}\|\gamma_0 v\|_{1/2} \leqslant C_1\|h\|_{-1/2}\|v\|_1, \quad v \in H^1(\Omega). \tag{5.57}$$

де C_1 – стала з нерівності (5.8).

Для півторалінійної форми $\widetilde{a}_p(\cdot,\cdot)$ можна показати, що вона є неперервною на $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$

$$|\widetilde{a}_p(w, v)| \leqslant C_7\|w\|_1\|v\|_1, \quad w, v \in H^1(\Omega), \tag{5.58}$$

де C_7 – стала, яка залежить від p. Легко переконатися [65], що для неперервної півторалінійної форми $a_p(w, v)$

$$a_p(w, v) := [w, v] + p^2(w, v)_0, \quad (w, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega),$$

виконується рівність

$$\mathrm{Re}(e^{-i\mathrm{Arg}\, p}\, a_p(v, v)) = \frac{\mathrm{Re}\, p}{|p|}\|v\|^2_{|p|,\Omega}, \quad v \in H^1(\Omega), \tag{5.59}$$

де

$$\|v\|_{|p|,\Omega} := \left(\|\nabla v\|_0^2 + |p|^2\, \|v\|_0^2\right)^{1/2}, \quad v \in H^1(\Omega). \tag{5.60}$$

Відомо [65], що для будь-якого фіксованого $p \in \overline{\Pi_{\alpha^*}}$ справджуються нерівності

$$\kappa\|v\|_1 \leqslant \|v\|_{|p|,\Omega} \leqslant \frac{|p|}{\kappa}\|v\|_1, \quad v \in H^1(\Omega), \tag{5.61}$$

де $\kappa := \min\{1, \alpha^*\}$.

Врахувавши рівності (5.59) для неперервної півторалінійної форми

$a_p(w,v)$ і $p\,e^{-i\mathrm{Arg}\,p}=|p|$, отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(e^{-i\mathrm{Arg}\,p}\,\widetilde{a}_p(v,v)) =&\frac{\mathrm{Re}\,p}{|p|}\|v\|^2_{|p|,\Omega}+|p|\int\limits_{\Gamma} b(x)|\gamma_0 v(x)|^2\,d\Gamma\geqslant\\ \geqslant&\frac{\mathrm{Re}\,p}{|p|}\|v\|^2_{|p|,\Omega},\quad v\in H^1(\Omega),\end{aligned}\tag{5.62}$$

Звідси випливає коерцитивність півторалінійної форми $e^{-i\mathrm{Arg}\,p}\,\widetilde{a}_p(\cdot,\cdot)$ в просторі $H^1(\Omega)$.

Отож, при довільному $p\in\overline{\Pi_{\alpha^*}}$ виконуються всі умови теореми Лакса-Мільграма (див., наприклад, [43, розділ VII, §1, теорема 1]) стосовно рівняння (5.55), що доводить існування та єдиність розв'язку $w\in H^1(\Omega)$ для цього рівняння.

Зазначимо, що оскільки функція w задовольняє рівняння (5.50) в сенсі розподілів, то

$$\Delta w=p^2w\in L^2(\Omega),\ p\in\overline{\Pi_{\alpha^*}},\tag{5.63}$$

тобто $w\in H^1(\Omega,\Delta)$ при довільному $p\in\overline{\Pi_{\alpha^*}}$.

Тепер покажемо виконання оцінок для розв'язку задачі (**ER**). З нерівностей (5.57) і (5.61) отримаємо

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(e^{-i\mathrm{Arg}\,p}\,\widetilde{a}_p(w,w))\leqslant|\widetilde{a}_p(w,w)|=|\langle h,\gamma_0 w\rangle_{1/2}|\leqslant\\ &\leqslant C_1\|h\|_{-1/2}\|w\|_1\leqslant\frac{C_1}{\kappa}\|h\|_{-1/2}\|w\|_{|p|,\Omega}.\end{aligned}\tag{5.64}$$

Звідси, враховуючи коерцитивність (5.62) півторалінійної форми $e^{-i\mathrm{Arg}\,p}\,\widetilde{a}_p(\cdot,\cdot)$, маємо

$$\|w\|_{|p|,\Omega}\leqslant\frac{C_1}{\kappa\mathrm{Re}\,p}|p|\|h\|_{-1/2}\leqslant\frac{2C_1}{\kappa\alpha}|p|\|h\|_{-1/2}=C_8|p|\|h\|_{-1/2},$$

де $C_8:=\frac{C_1}{\kappa\alpha^*}$. Звідси, беручи до уваги (5.60), маємо

$$\|\nabla w\|_0^2+|p|^2\|w\|_0^2\leqslant C_8^2|p|^2\|h\|^2_{-1/2}.\tag{5.65}$$

В результаті з (5.65) отримаємо такі оцінки

$$\|w\|_0^2 \leqslant C_8^2 \, \|h\|_{-1/2}^2, \tag{5.66}$$

$$\|\nabla w\|_0^2 \leqslant C_8^2 \, |p|^2 \|h\|_{-1/2}^2. \tag{5.67}$$

Таким чином, з оцінки (5.66) безпосередньо випливає (5.52). Тоді з (5.67) матимемо:

$$\begin{aligned} &\|w\|_1^2 = \|w\|_0^2 + \|\nabla w\|_0^2 \leqslant C_8^2 \|h\|_{-1/2}^2 + C_8^2 |p|^2 \|h\|_{-1/2}^2 = \\ &= C_8^2 \left(\frac{1}{|p|^2} + 1 \right) |p|^2 \|h\|_{-1/2}^2 \leqslant C_8^2 \left(\frac{1}{\mathrm{Re}^2 \, p} + 1 \right) |p|^2 \|h\|_{-1/2}^2 \leqslant \\ &\leqslant C_8^2 \left(\frac{1}{\alpha^*} + 1 \right)^2 |p|^2 \|h\|_{-1/2}^2, \end{aligned} \tag{5.68}$$

звідки слідує нерівність (5.53) при $C_5 := C_8 \left(\frac{1}{\alpha^*} + 1 \right)$.

Перейдемо до доведення оцінки (5.54) леми. З урахуванням рівності (5.63) і оцінки для $\|w\|_0^2$ маємо

$$\|\Delta w\|_0^2 = |p|^4 \|w\|_0^2 \leqslant C_8^2 |p|^4 \|h\|_{-1/2}^2. \tag{5.69}$$

Тоді

$$\begin{aligned} &\|w\|_2^2 = \|w\|_1^2 + \|\Delta w\|_0^2 \leqslant C_5^2 |p|^2 \|h\|_{-1/2}^2 + C_8^2 |p|^4 \|h\|_{-1/2}^2 = \\ &= \left(\frac{C_5^2}{|p|^2} + C_8^2 \right) |p|^4 \|h\|_{-1/2}^2 \leqslant \left(\frac{C_5}{\alpha^*} + C_8 \right)^2 |p|^4 \|h\|_{-1/2}^2, \end{aligned} \tag{5.70}$$

звідки після позначення $C_6 := C_8 + \frac{C_5}{\alpha^*}$ отримуємо нерівність (5.54) леми.

□

5.4.2. Побудова розв'язку мішаної задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою (доведення теореми 5.1). Покажемо, що сильний розв'язок задачі (**HD**) існує і знайдемо його образ.

Припустимо, що функція $w(x, p)$, $x \in \Omega$, є сильним розв'язком задачі (**ER**) для довільного $p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$ з $h = \widehat{g}(p)$. Покажемо, що функція

$p \mapsto w(\cdot, p)$ задовольняє умови твердження 5.6, де $X_0 = L^2(\Omega)$, $X_1 = H^1(\Omega)$, $X_2 = H^1(\Omega, \Delta)$. Спочатку доведемо рівність

$$\widehat{g}(p) = p^{-k}\widehat{g^{(k)}}(p), \quad k \in \{1, 2\}, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}. \tag{5.71}$$

Використовуючи форму інтегрування частинами, для довільного $p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$ виконаємо перетворення

$$\widehat{g}(p) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} g(t)\, e^{-p\,t}\, dt = \left[\begin{array}{ll} u = g(t); & du = g'(t)\, dt \\ dv = e^{-p\,t}\, dt; & v = -\frac{1}{p}e^{-p\,t} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{p}g(t)\, e^{-p\,t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}_+} g'(t)\, e^{-p\,t}\, dt = \frac{1}{p^2}\int\limits_{\mathbb{R}_+} g''(t)\, e^{-p\,t}\, dt = \frac{1}{p^2}\widehat{g''}(p),$$

Таким чином отримаємо (5.71), звідки випливає рівність

$$\|\widehat{g}(p)\|_{-1/2} = |p|^{-k}\|\widehat{g^{(k)}}(p)\|_{-1/2}, \quad k \in \{1, 2\}, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}. \tag{5.72}$$

З оцінок теореми 5.2 для неперервної залежності розв'язку від вхідних даних та рівності (5.72) маємо оцінки

$$|p|^2\|w(p)\|_0 \leqslant C_4|p|^2\|\widehat{g}(p)\|_{-1/2} = C_4\|\widehat{g''}(p)\|_{-1/2}, \tag{5.73}$$

$$|p|\|w(p)\|_1 \leqslant C_5|p|^2\, \|\widehat{g}(p)\|_{-1/2} = C_5\|\widehat{g''}(p)\|_{-1/2}, \tag{5.74}$$

$$\|w(p)\|_2 \leqslant C_6|p|^2\, \|\widehat{g}(p)\|_{-1/2} = C_6\|\widehat{g''}(p)\|_{-1/2}, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}. \tag{5.75}$$

Враховуючи те, що функція $p \mapsto w(p)$ є аналітичною в $\Pi_{\alpha/2}$ і неперервною на $\overline{\Pi_{\alpha/2}}$, а g'' належить простору $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$, то на підставі оцінок (5.73) — (5.75) отримаємо виконання усіх умов твердження 5.6 щодо функції $p \mapsto w(p)$, а саме

$$p \mapsto w(p) \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; H^1(\Omega, \Delta)), \quad p \mapsto p\, w(p) \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; H^1(\Omega)),$$

$$p \mapsto p^2 w(p) \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; L^2(\Omega)).$$

Звідси випливає, що для довільного числа $\xi \geqslant \alpha/2$, функція

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\xi} w(x,p)\, e^{pt}\, dp, & \text{для } x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R}_+, \\ 0, & \text{для } x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{5.76}$$

значення якої від ξ не залежить, є елементом простору

$$H^2_\alpha(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap H^1_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)) \cap L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega, \Delta)),$$

причому

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\xi} p\, w(x,p)\, e^{pt}\, dp, \\ u_{tt}(x,t) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\xi} p^2 w(x,p)\, e^{pt}\, dp,\ x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{5.77}$$

та виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega,\Delta))} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\alpha/2} \|w(p)\|_2^2\, dp \leqslant \\ &\leqslant \frac{C_6^2}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\alpha/2} \|\widehat{g''}(p)\|^2_{-1/2}\, dp = C_6^2 \|g''\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))}, \end{aligned} \tag{5.78}$$

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\alpha/2} (1+|p|^2) \|w(p)\|_1^2\, dp \leqslant \\ &\leqslant \frac{C_5^2}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\alpha/2} \left(|p|^2 + |p|^4\right) \|\widehat{g}(p)\|_1^2\, dp \leqslant \\ &\leqslant \frac{C_5^2}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}p=\alpha/2} \left(\|\widehat{g'}(p)\|^2_{-1/2} + \|\widehat{g''}(p)\|^2_{-1/2}\right) dp = \\ &= C_5^2 \left(\|g'\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))} + \|g''\|^2_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))}\right), \end{aligned} \tag{5.79}$$

$$\|u\|^2_{H^2_\alpha(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega))} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}p=\alpha/2} \left(1+|p|^2+|p|^4\right)\|w(p)\|^2_0\,dp \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_4^2}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}p=\alpha/2} \left(1+|p|^2+|p|^4\right)\|\widehat{g}(p)\|^2_{-1/2}\,dp = C_4^2\|g\|^2_{H^2_\alpha(\mathbb{R}_+;H^{-1/2}(\Gamma))}. \tag{5.80}$$

Покажемо, що функція u є сильним розв'язком задачі (**HD**). Оскільки оператори $\Delta : H^1(\Omega,\Delta)) \to L^2(\Omega)$, $\gamma_0 : H^1(\Omega)) \to H^{1/2}(\Gamma)$ and $\gamma_1 : H^1(\Omega,\Delta)) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ є лінійними та неперервними, зі сказаного вище і тверджень 5.1–5.7 отримаємо

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_0^{-1}[\Delta w(p)](t) = \Delta\mathfrak{L}_2^{-1}[w(p)](t) = \Delta u(t), \quad t\in\mathbb{R}_+,\\
&\mathfrak{L}_0^{-1}[p^2 w(p)](t) = u''(t), \quad t\in\mathbb{R}_+,\\
&\mathfrak{L}_{-1/2}^{-1}[\gamma_1 w(p)](t) = \gamma_1\mathfrak{L}_2^{-1}[w(p)](t) = \gamma_1 u(t), \quad t\in\mathbb{R}_+,\\
&\mathfrak{L}_{1/2}^{-1}[b\,p\,\gamma_0 w(p)](t) = b\,\mathfrak{L}_{1/2}^{-1}[p\,\gamma_0 w(p)](t) =\\
&= b\,\gamma_0\mathfrak{L}_1^{-1}[p\,w(p)](t) = b\,\gamma_0 u'(t), \quad t\in\mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

Подіємо на рівність

$$-\Delta w + p^2 w = 0, \quad p\in\overline{\Pi_{\alpha/2}}, \tag{5.81}$$

перетворенням $\mathfrak{L}_0^{-1}[\cdot]$ і застосуємо $\mathfrak{L}_{-1/2}^{-1}[\cdot]$ до умови

$$\gamma_1 w(p) + b\,p\,\gamma_0 w(p) = \widehat{g}(p), \quad p\in\overline{\Pi_{\alpha/2}}. \tag{5.82}$$

звідки отримаємо те, що функція u є сильним розв'язком задачі (**HD**).

5.4.3. Розв'язування системи крайових інтегральних рівнянь відносно даних Коші для задачі Робіна. Розглянемо поверхневі потенціали, асоційовані із задачею (**ER**). Відомо (див., наприклад, [1, 19]), що у випадку, коли межею області є поверхня Ляпунова, довільний розв'язок

еліптичного рівняння (5.48) з простору $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ можна подати у інтегральній формі

$$\widehat{u}(x) = \widetilde{S}_p\, \widehat{\mu}(x) - \widetilde{D}_p\, \widehat{\lambda}(x), \quad x \in \Omega, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}, \tag{5.83}$$

де $\widehat{\lambda} := \widehat{u}|_\Gamma$, $\widehat{\mu} := \partial_{\boldsymbol{\nu}} \widehat{u}|_\Gamma$,

$$\widetilde{S}_p\, \widehat{\mu}(x) := \int\limits_\Gamma \widehat{\mu}(y)\, e(x-y,p)\, d\Gamma_y, \quad x \in \Omega, \tag{5.84}$$

$$\widetilde{D}_p\, \widehat{\lambda}(x) := \int\limits_\Gamma \widehat{\lambda}(y)\, \partial_{\boldsymbol{\nu}_y} e(x-y,p)\, d\Gamma_y, \quad x \in \Omega, \tag{5.85}$$

а функція

$$e(x,p) := \frac{e^{-p|x|}}{4\pi|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \tag{5.86}$$

є фундаментальним розв'язком рівняння (5.50).

Поверхневі інтеграли (5.84) і (5.85) називають асоційованими з рівнянням (5.50) потенціалами, відповідно, простого і подвійного шару, а функції $\widehat{\mu}$ і $\widehat{\lambda}$ — їхніми густинами.

Потенціали (5.84) і (5.85) є нескінченно диференційовними функціями в області Ω, а для їхніх граничних значень і нормальних похідних на межі Γ виконуються рівності:

$$\begin{aligned} &\widetilde{S}_p^+ \widehat{\mu} = \widetilde{V}_p \widehat{\mu}, \quad \widetilde{D}_p^+ \widehat{\lambda} = -\frac{1}{2}\widehat{\lambda} + \widetilde{K}_p \widehat{\lambda}, \\ &\partial_{\boldsymbol{\nu}}^+ \widetilde{S}_p \widehat{\mu} = \frac{1}{2}\widehat{\mu} + \widetilde{K}_p^\top \widehat{\mu}, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}}^+ \widetilde{D}_p \widehat{\lambda} = -\widetilde{W}_p \widehat{\lambda}, \end{aligned} \tag{5.87}$$

де

$$\widetilde{V}_p \widehat{\mu}(x) := \int\limits_\Gamma \widehat{\mu}(y) e(x-y,p)\, d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma, \tag{5.88}$$

$$\widetilde{K}_p \widehat{\lambda}(x) := \int\limits_\Gamma \widehat{\lambda}(y) \partial_{\boldsymbol{\nu}_y} e(x-y,p)\, d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma, \tag{5.89}$$

$$\widetilde{K}_p^\top \widehat{\mu}(x) := \partial_{\boldsymbol{\nu}_x} \int\limits_\Gamma \widehat{\mu}(y) e(x-y,p)\, d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma, \tag{5.90}$$

$$\widetilde{W}_p \widehat{\lambda}(x) := \partial_{\boldsymbol{\nu}_x} \int\limits_\Gamma \widehat{\lambda}(y) \partial_{\boldsymbol{\nu}_y} e(x-y,p)\, d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma. \tag{5.91}$$

Зауважимо, що ядро $e(\cdot,p)$ є слабо сингулярною функцією в $\mathbb{R}^3$. Тому інтеграл (5.88) має інтегровну особливість в ядрі. В інтегралах (5.89) і (5.90) ядра є сингулярними функціями внаслідок взяття нормальної похідної, тому ці інтеграли існують в сенсі головного значення Коші. Відомо також (див., наприклад, [58, 74]), що інтеграл (5.91) існує в сенсі головного значення Коші, якщо поверхня Γ належить класу C^2, а густина є неперервно-диференційовною за Гельдером.

Розглянемо граничне значення та правильну нормальну похідну для виразів лівої та правої частин у зображенні (5.83) розв'язку задачі (**ER**). Беручи до уваги рівності (5.87) і діючи так само, що й при виведенні системи ЕКІР (1.16), але використовуючи крайову умову (5.51), отримаємо таку систему крайових інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \widetilde{V}_p \widehat{\mu} - \dfrac{1}{2}\widehat{\lambda} - \widetilde{K}_p \widehat{\lambda} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\widehat{\mu} + \widetilde{K}_p^\top \widehat{\mu} + p\, b\, \widehat{\lambda} + \widetilde{W}_p \widehat{\lambda} = h \end{cases} \quad \text{на } \Gamma, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}. \tag{5.92}$$

Твердження 5.8 (Теорема 1[40], Теорема 5.6.2 [58]). *Для операторів $\widetilde{S}_p$, $\widetilde{D}_p$, $\widetilde{V}_p$, $\widetilde{K}_p$, $\widetilde{K}_p^\top$ і $\widetilde{W}_p$, заданих правилами* (5.84), (5.85) *і* (5.88)-(5.91), *існують, відповідно, розширення*

$$\widehat{S}_p : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega,\Delta), \quad \widehat{D}_p : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega,\Delta), \tag{5.93}$$

$$\begin{gathered} \widehat{V}_p \,:\, H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma), \quad \widehat{K}_p \,:\, H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma), \\ \widehat{K}_p^\top \,:\, H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma), \quad \widehat{W}_p \,:\, H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma), \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}, \end{gathered} \tag{5.94}$$

які є лінійними і неперервними.

Введемо простори $\mathcal{H} := H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ і $\mathcal{H}^* := H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, для яких визначимо норми відповідно

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}} := \left[\|\phi_1\|^2_{-1/2} + \|\phi_2\|^2_{1/2}\right]^{1/2}, \quad \phi = (\phi_1, \phi_2)^\top \in \mathcal{H},$$

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^*} := \left[\|\psi_1\|^2_{1/2} + \|\psi_2\|^2_{-1/2}\right]^{1/2}, \quad \psi = (\psi_1, \psi_2)^\top \in \mathcal{H}^*,$$

і на їхньому декартовому добутку визначимо білінійну форму $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma : \mathcal{H} \times \mathcal{H}^* \to \mathbb{C}$ за правилом

$$\langle \phi, \psi \rangle_\Gamma := \langle \phi_1, \psi_1 \rangle_{1/2} + \langle \psi_2, \phi_2 \rangle_{1/2}, \quad \phi = (\phi_1, \phi_2)^\top \in \mathcal{H}, \quad \psi = (\psi_1, \psi_2)^\top \in \mathcal{H}^*. \tag{5.95}$$

Лема 5.2. *Білінійна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma : \mathcal{H} \times \mathcal{H}^* \to \mathbb{C}$ є неперервною, зокрема, правильна оцінка*

$$|\langle \phi, \psi \rangle_\Gamma| \leqslant 2\|\phi\|_{\mathcal{H}} \|\psi\|_{\mathcal{H}^*}, \quad \phi \in \mathcal{H},\ \psi \in \mathcal{H}^*. \tag{5.96}$$

Доведення. Нехай $\phi = (\phi_1, \phi_2)^\top, \psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$, де $\phi_1, \psi_2 \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \phi_2, \psi_1 \in H^{1/2}(\Gamma)$. Тоді можемо записати

$$\begin{aligned}
&|\langle \phi, \psi \rangle_\Gamma| = |\langle \phi_1, \psi_1 \rangle_{1/2} + \langle \psi_2, \phi_2 \rangle_{1/2}| \leqslant \|\phi_1\|_{-1/2} \|\psi_1\|_{1/2} + \|\psi_2\|_{-1/2} \|\phi_2\|_{1/2} \leqslant \\
&\leqslant \big(\|\phi_1\|_{-1/2} + \|\phi_2\|_{1/2}\big) \|\psi_1\|_{1/2} + \big(\|\phi_1\|_{-1/2} + \|\phi_2\|_{1/2}\big) \|\psi_2\|_{-1/2} = \\
&= \big(\|\phi_1\|_{-1/2} + \|\phi_2\|_{1/2}\big) \big(\|\psi_1\|_{-1/2} + \|\psi_2\|_{1/2}\big).
\end{aligned}$$

Беручи до уваги нерівність

$$a + b \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}, \quad a, b \geqslant 0,$$

матимемо

$$|\langle \phi, \psi \rangle_\Gamma| \leqslant 2 \left[\|\phi_1\|^2_{-1/2} + \|\phi_2\|^2_{1/2}\right]^{1/2} \left[\|\psi_1\|^2_{-1/2} + \|\psi_2\|^2_{1/2}\right]^{1/2} = 2\|\phi\|_{\mathcal{H}} \|\psi\|_{\mathcal{H}^*}. \tag{5.97}$$

□

Розглянемо узагальнення системи КІР (5.92) на простір $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} \widehat{V}_p(\widehat{\mu}) - \dfrac{1}{2}\widehat{\lambda} - \widehat{K}_p(\widehat{\lambda}) = 0 & \text{в } H^{1/2}(\Gamma), \\ \dfrac{1}{2}\widehat{\mu} + \widehat{K}_p^{\top}(\widehat{\mu}) + p\, b\, \widehat{\lambda} + \widehat{W}_p(\widehat{\lambda}) = h & \text{в } H^{-1/2}(\Gamma), \end{cases} \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}. \tag{5.98}$$

Означення 5.2. При довільних $p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$ і $h \in H^{-1/2}(\Gamma)$ розв'язком системи КІР (5.98) називаємо пару функцій $(\widehat{\mu}, \widehat{\lambda}) \in \mathcal{H}$, для яких перша рівність цієї системи є правильною в $H^{1/2}(\Gamma)$, а друга – в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Розглянемо крайовий оператор $A_p : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$, заданий матрицею

$$A_p := \begin{pmatrix} p\,\widehat{V}_p & -\dfrac{1}{2}I_1 - \widehat{K}_p \\ \dfrac{1}{2}I_2 + \widehat{K}_p^{\top} & b\, I_1 + p^{-1}\,\widehat{W}_p \end{pmatrix}, \tag{5.99}$$

складеною з крайових операторів (5.94), I_1 і I_2 – оператори ідентичності у просторах $H^{1/2}(\Gamma)$ і $H^{-1/2}(\Gamma)$ відповідно.

Лема 5.3. *Оператор $A_p : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ є бієктивним. Для цього оператора і оберненого до нього $A_p^{-1} : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ справджуються такі оцінки*

$$\|A_p\| \leqslant C_1|p|^2, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}, \tag{5.100}$$

$$\|A_p^{-1}\| \leqslant C_2|p|^2, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}, \tag{5.101}$$

де C_1 і C_2 – незалежні від p сталі.

Доведення. Спочатку покажемо ін'єктивність оператора A. Для цього достатньо показати, що однорідне рівняння

$$A_p\,\phi = 0, \quad \phi \in \mathcal{H}, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}, \tag{5.102}$$

має лише нульовий розв'язок.

Подамо матричний оператор A_p у вигляді

$$A_p := \widehat{A}_p + \widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}, \tag{5.103}$$

де

$$\widehat{A}_p := \begin{pmatrix} p\,\widehat{V}_p & -\widehat{K}_p \\ \widehat{K}_p^\top & p^{-1}\,\widehat{W}_p \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}_1 := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}I_1 \\ \frac{1}{2}I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b\,I_2 \end{pmatrix}. \tag{5.104}$$

Тут $\widehat{A}_p : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ – так званий оператор Кальдерона, складений з крайових операторів, що відповідають рівнянню (5.50) (див., наприклад, [58]). Згідно з [28, Лема 3.1] існує стала $\kappa > 0$ така, що оператор Кальдерона задовольняє нерівність

$$\mathrm{Re}\,\big\langle \phi, \widehat{A}_p\phi \big\rangle_\Gamma \geqslant C_4|p|^{-2}\,\|\phi\|^2_{\mathcal{H}}, \quad \phi \in \mathcal{H}, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}, \tag{5.105}$$

де $C_4 = \frac{1}{2}\kappa \min(1, |p|^2)\mathrm{Re}\,p$. Оскільки при $p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$ виконується нерівність $\min(1, |p|^2)\mathrm{Re}\,p \geqslant \min(1, \alpha^2/4)\alpha/2$, то попередню нерівність можна переписати так:

$$\mathrm{Re}\,\big\langle \phi, \widehat{A}_p\phi \big\rangle_\Gamma \geqslant C_5|p|^{-2}\,\|\phi\|^2_{\mathcal{H}}, \quad \phi \in \mathcal{H}, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}, \tag{5.106}$$

де $C_5 := \frac{1}{4}\alpha\kappa \min(1, \alpha^2/4)$.

Отож, оператор $\widehat{A}_p$ є $\mathcal{H}-$коерцитивним. Враховуючи відношення $\mathrm{Re}\big\langle \phi, \widetilde{A}_1\phi \big\rangle_\Gamma = 0$ і $\big\langle \phi, \widetilde{A}_2\phi \big\rangle_\Gamma \geqslant b_-\|\phi_2\|^2_{L^2(\Gamma)}$, де $b_- := \inf\limits_{x\in\Gamma} b(x)$, легко бачити, що оператор A_p також є $\mathcal{H}-$коерцитивним:

$$\mathrm{Re}\,\big\langle \phi, A_p\,\phi \big\rangle_\Gamma \geqslant C_5\frac{1}{|p|^2}\,\|\phi\|^2_{\mathcal{H}} + b_-\|\phi_2\|^2_{L^2(\Gamma)} \geqslant C_5\frac{1}{|p|^2}\,\|\phi\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{5.107}$$

Звідси випливає, що рівняння (5.102) має лише розв'язок $\phi = 0$.

Покажемо тепер сюр'єктивність оператора A. При довільному заданому $\psi \in \mathcal{H}^*$ розглянемо таке КІР

$$A_p\,\phi = \psi \quad \text{ в } \mathcal{H}^*, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}. \tag{5.108}$$

Відповідно до [27, Твердження A.2.] існує стала $C > 0$, яка залежить лише від Γ, така, що

$$\big\|\big(\widehat{A}_p + \widetilde{A}_1\big)\phi\big\|_{\mathcal{H}^*} \leqslant C|p|^2\|\phi\|_{\mathcal{H}}.$$

Ввівши позначення $b_+ := \sup\limits_{x\in\Gamma} b(x)$, аналогічну нерівність можна отримати і для оператора A_p:

$$\|A_p\phi\|_{\mathcal{H}^*} \leqslant C|p|^2\|\phi\|_{\mathcal{H}} + \|\widetilde{A}_2\phi\|_{\mathcal{H}^*} \leqslant C|p|^2\|\phi\|_{\mathcal{H}} + b_+\|\phi_2\|_{1/2} \leqslant C_1|p|^2\|\phi\|_{\mathcal{H}},$$

де $C_1 := C + 4\alpha^{-2}b_+$. З отриманої нерівності безпосередньо випливає оцінка (5.100), тобто оператор A_p обмежений.

В силу $\mathcal{H}-$коерцитивності і неперервності оператора A_p, за теоремою Лакса-Мільграма для довільного $\psi \in \mathcal{H}^*$ існує розв'язок $\phi \in \mathcal{H}$ КІР (5.108) і він є єдиним. Отож, оператор A_p є сюр'єктивним при довільному $p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$.

Беручи до уваги нерівності (5.107) і (5.96), маємо такі нерівності

$$C_5\frac{1}{|p|^2}\,\|\phi\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant \operatorname{Re}\big\langle\phi, A_p\,\phi\big\rangle_\Gamma \leqslant \big|\big\langle\phi, A_p\,\phi\big\rangle_\Gamma\big| \leqslant 2\|\phi\|_{\mathcal{H}}\|A_p\,\phi\|_{\mathcal{H}^*}, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}},$$

звідки слідує оцінка

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_2|p|^2\|A_p\,\phi\|_{\mathcal{H}^*} \quad \Leftrightarrow \quad \|A_p^{-1}\psi\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_2|p|^2\|\psi\|_{\mathcal{H}^*}, \quad \phi \in \mathcal{H},\ \psi \in \mathcal{H}^*,$$

де $C_2 := 2C_5^{-1}$. Тоді $\|A_p^{-1}\| = \sup\limits_{\psi\in\mathcal{H}^*,\psi\neq 0} \frac{\|A_p^{-1}\psi\|_{\mathcal{H}}}{\|\psi\|_{\mathcal{H}^*}} \leqslant \frac{C_2|p|^2\|\psi\|_{\mathcal{H}^*}}{\|\psi\|_{\mathcal{H}^*}} = C_2|p|^2$.

□

Теорема 5.3. *При довільних $p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$ і $h \in H^{-1/2}(\Gamma)$ система КІР* (5.98) *має розв'язок і тільки один. Крім того, виконуються оцінки*

$$\|\widehat{\mu}\|_{-1/2} \leqslant C_2\,|p|^2\,\|h\|_{-1/2}, \tag{5.109}$$

$$\|\widehat{\lambda}\|_{1/2} \leqslant C_2\,|p|\,\|h\|_{-1/2}, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}, \tag{5.110}$$

де C_2 – стала.

Доведення. Справедливість першого твердження леми безпосередньо випливає з леми 5.3, оскільки після підстановки $\widehat{\mu} = p\phi_1$ і $\widehat{\lambda} = \phi_2$ у рівняння системи (5.98) вона набуде вигляду (5.108) при $\psi_1 = 0$ і $\psi_2 = p^{-1}h$.

Тепер, беручи до уваги оцінку (5.101), отримаємо таку нерівність

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}} = \|A_p^{-1}\psi\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|A_p^{-1}\| \, \|\psi\|_{\mathcal{H}^*} \leqslant C_2|p|^2\|\psi\|_{\mathcal{H}^*} = C_2|p|\|h\|_{-1/2},$$

звідки слідує

$$\|\phi_1\|_{-1/2} \leqslant \|\phi\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_2|p|\|h\|_{-1/2}, \quad \|\phi_2\|_{1/2} \leqslant \|\phi\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_2|p|\|h\|_{-1/2}.$$

З останніх нерівностей і формул зробленої вище підстановки безпосередньо випливають оцінки (5.109) і (5.110). □

Нагадаємо, що розв'язок $(\widehat{\mu}, \widehat{\lambda})$ системи КІР (5.98) є даними Коші задачі (**ER**). Отож, якщо його знайти і підставити у подання (5.83), то матимемо розв'язок задачі (**ER**).

5.4.4. Обґрунтування обчислювальної схеми для мішаної задачі для хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою. Отримані вище результати дають змогу зробити висновки стосовно коректності етапів обчислювальної схеми задачі (**HD**), поданої у розділі 1.2.

1. Дані Коші розв'язку задачі (HD). З теореми 5.3 маємо такий наслідок про залежність даних Коші розв'язку задачі (**HD**) від функції g.

Наслідок 5.3. *Нехай маємо у правій частині системи КІР* (5.98) $h = \widehat{g}(p) = \mathfrak{L}[g](p)$, $p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$, *де* $g \in H^m_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$, $m \geqslant 2$, *– довільна функція. Тоді для розв'язку системи КІР* (5.98) *виконуються включення*

$$p \mapsto p^k \, \widehat{\mu}(p) \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; H^{-1/2}(\Gamma)), \quad k = \overline{0, m-2}, \tag{5.111}$$

$$p \mapsto p^k \, \widehat{\lambda}(p) \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; H^{1/2}(\Gamma)), \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{5.112}$$

Доведення. Згідно леми 5.3 при $h = \widehat{g}(p)$, $p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$, для розв'язку системи КІР (5.98) маємо оцінки

$$\|\widehat{\mu}(p)\|_{-1/2} \leqslant C_2\,|p|^2\,\|\widehat{g}(p)\|_{-1/2}, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}, \tag{5.113}$$

$$\|\widehat{\lambda}(p)\|_{1/2} \leqslant C_2\,|p|\,\|\widehat{g}(p)\|_{-1/2}, \quad p \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}, \tag{5.114}$$

Оскільки в силу твердження 5.2 для функцій $g \in H^m_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ справедливі включення

$$p \mapsto p^k\,\widehat{g}(p) \in \mathcal{L}(\Pi_{\alpha/2}; H^{-1/2}(\Gamma)), \quad k = \overline{0, m},$$

то одночасно з нерівностями (5.113) і (5.114) є правильними такі нерівності

$$|p|^k\|\widehat{\mu}(p)\|_{-1/2} \leqslant C_2|p|^{k+2}\|\widehat{g}(p)\|_{-1/2} = C_2\|g^{(k+2)}\|_{-1/2}, \quad k = \overline{0, m-2}, \tag{5.115}$$

$$|p|^k\|\widehat{\lambda}(p)\|_{1/2} \leqslant C_2|p|^{k+1}\|\widehat{g}(p)\|_{-1/2} = C_2\|g^{(k+1)}\|_{-1/2}, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{5.116}$$

з яких слідують включення (5.111) і (5.112).

□

Нехай маємо пару функцій $(\widehat{\mu}, \widehat{\lambda}) \in \mathcal{H}$, яка є розв'язком системи (5.98) для довільної функції $g \in H^m_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ при $m \geqslant 2$. Тоді для такого розв'язку згідно наслідку 5.2 існують прообрази, для яких на підставі наслідку 5.3 маємо включення

$$\mu := \mathfrak{L}^{-1}[\widehat{\mu}] \in H^{m-2}_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma)), \quad \lambda := \mathfrak{L}^{-1}[\widehat{\lambda}] \in H^{m-1}_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma)). \tag{5.117}$$

Отож, при $m = 2$ до отриманих функцій μ і λ є застосовне ПЛ, тобто є визначеними послідовності $\boldsymbol{\mu} = \mathcal{L}\mu = \big(\mu_0, \mu_1, ...\big)^\top$ і $\boldsymbol{\lambda} = \mathcal{L}\lambda = \big(\lambda_0, \lambda_1, ...\big)^\top$.

Як видно з формул (5.117), гладкість густин хвильових потенціалів залежить від заданої функції g. Покажемо, що за умови достатньо гладких густин хвильові потенціали (1.5) і (1.6) можна отримати за допомогою

оберненого перетворення Лапласа з поверхневих потенціалів (5.84) і (5.85) відповідно.

Зауважимо, що згідно леми 5.1 можемо записати

$$\mathfrak{L}[\mu(y,\cdot-|x-y|)](p)=e^{-p|x-y|}\mathfrak{L}[\mu(y,\cdot)](p)=e^{-p|x-y|}\widehat{\mu}(y,p).$$

Якщо застосувати обернене перетворення Лапласа до обох сторін цієї рівності і скористатися формулою (5.30), то отримаємо

$$\mu(y,t-|x-y|)=\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=\alpha/2}e^{pt}e^{-p|x-y|}\widehat{\mu}(y,p)\,dp\right],\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Підставимо отриманий вираз замість густини у хвильовий потенціал $\widetilde{\mathcal{S}}\mu$ і скористаємося твердженням 5.7 для перестановки місцями операторів $\mathfrak{L}^{-1}$ і $\widetilde{S}_p$. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{S}}\mu(x,t)=\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu(y,t-|x-y|)}{4\pi|x-y|}\,d\Gamma_y=\\
&=\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{4\pi|x-y|}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=\alpha/2}e^{pt}e^{-p|x-y|}\widehat{\mu}(y,p)\,dp\right]d\Gamma_y=\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=\alpha/2}e^{pt}\int\limits_{\Gamma}\widehat{\mu}(y,p)\,\frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,d\Gamma_y\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}p=\alpha/2}e^{pt}\widetilde{S}_p\widehat{\mu}(x)\,dp=\\
&=\mathfrak{L}^{-1}[\widetilde{S}_p\widehat{\mu}](x,t),\quad (x,t)\in Q.
\end{aligned}\tag{5.118}$$

Тим самим шляхом, що й у (5.118), перетворимо потенціал подвійного шару. Спочатку за умови достатньо гладкої функції $\widehat{\lambda}$ розпишемо в явному вигляді нормальну похідну:

$$\widetilde{\mathcal{D}}\lambda(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\partial_{\boldsymbol{\nu}_y}\frac{\lambda(z,t-|x-y|)}{|x-y|}\right]\Bigg|_{z=y} d\Gamma_y =$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}_y}\lambda(z,t-|x-y|)}{|x-y|} + \lambda(y,t-|x-y|)\partial_{\boldsymbol{\nu}_y}|x-y|^{-1}\right]\Bigg|_{z=y} d\Gamma_y =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{1}{|x-y|}\partial_t\lambda(y,t-|x-y|) - \frac{1}{|x-y|^2}\lambda(y,t-|x-y|)\right]\partial_{\boldsymbol{\nu}_y}|x-y|\, d\Gamma_y,$$

$$(x,t)\in Q. \tag{5.119}$$

Використовуючи рівності, які слідують з леми 5.1:

$$\lambda(y,t-|x-y|) = \left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} p=\alpha/2} e^{pt}e^{-p|x-y|}\widehat{\lambda}(y,p)\, dp\right],$$

$$\partial_t\lambda(y,t-|x-y|) = \left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} p=\alpha/2} e^{pt}e^{-p|x-y|}p\,\widehat{\lambda}(y,p)\, dp\right], \quad t\in\mathbb{R}_+,$$

можна виконати такі перетворення:

$$\widetilde{\mathcal{D}}\lambda(x,t) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{|x-y|}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} p=\alpha/2} e^{pt}e^{-p|x-y|}\,p\,\widehat{\lambda}(y,p)\, dp\right]\partial_{\boldsymbol{\nu}_y}|x-y|\, d\Gamma_y -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{|x-y|^2}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} p=\alpha/2} e^{pt}e^{-p|x-y|}\widehat{\lambda}(y,p)\, dp\right]\partial_{\boldsymbol{\nu}_y}|x-y|\, d\Gamma_y =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} p=\alpha/2} e^{pt}\int\limits_{\Gamma}\widehat{\lambda}(y,p)\,\partial_{\boldsymbol{\nu}_y}e(x-y,p)\, d\Gamma_y\, dp =$$

$$=\mathfrak{L}^{-1}[\widetilde{D}_p\widehat{\lambda}](x,t), \quad (x,t)\in Q. \tag{5.120}$$

2. Розв'язність системи КІР (1.33)**.** Легко бачити, що оператор A_0 в системі КІР (1.33) є частковим випадком матричного оператора у лівій

частині системи КІР (5.98) при $p = \gamma \in \overline{\Pi_{\alpha/2}}$. Зокрема при $k = 0$ системи КІР (5.98) і (1.35) є ідентичними, тому згідно теореми 5.3 існує єдиний розв'язок $\phi_0 = (\mu_0, \lambda_0)^\top \in \mathcal{H}$. Беручи до уваги подання (1.24) для функцій e_k, $k \in \mathbb{N}_0$, можна показати, що $A_1\phi_0 \in \mathcal{H}^*$, тому за тією ж теоремою 5.3 існує єдиний розв'язок $\phi_1 = (\mu_1, \lambda_1)^\top \in \mathcal{H}$. Продовжуючи цей процес далі, приходимо до такого твердження.

Наслідок 5.4. *Для довільного $k \in \mathbb{N}_0$ система КІР* (1.33) *має розв'язок $(\mu_k, \lambda_k)^\top \in \mathcal{H}$ і тільки один.*

3. Розв'язність СЛАР (1.39)**.** Наслідком встановленої при доведенні леми 5.3 $\mathcal{H}-$коерцитивності матричного оператора у лівій частині системи КІР (5.98) є відомий факт (див., наприклад, [84, Chapt.8]), що після його дискретизації отримана матриця у лівій частині СЛАР (1.39) є додатньо-визначеною, що гарантує розв'язність цієї системи для довільного $k \in \mathbb{N}_0$.

Беручи до уваги, що добуток скінченновимірних просторів $S_h^0(\Gamma) \times S_h^1(\Gamma)$ є апроксимаційним для простору $\mathcal{H}$, матимемо, що для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ $\mu_k^h \to \mu_k$ при $M \to \infty$ і $\lambda_k^h \to \lambda_k$ при $M^* \to \infty$.

5.5. Висновки до розділу 5

Вагові простори Лебега і Соболєва утворюють універсальний фреймворк для дослідження мішаних задач для рівнянь в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами. З одного боку, вони дають змогу отримати вагомі теоретичні результати шляхом застосування перетворення Лапласа за часовою змінною, оскільки такий підхід створює умови для використання добре розробленої теорії крайових задач для еліптичних рівнянь. З іншого боку, у цих просторах можна розробляти ефективні методи чисельного розв'язування досліджуваних задач на основі перетворення Лаґерра.

РОЗДІЛ 6
АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ, ОТРИМАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ФРЕЙМВОРКУ

У цьому розділі розглянемо використання фреймворку для проведення обчислювальних експериментів з модельними еволюційними задачами. Зокрема на конкретних прикладах продемонструємо підходи до використання можливостей фреймворку щодо поширення комбінованого методу крайових елементів та перетворення Лаґерра на нові класи еволюційних задач.

У першу чергу розглянемо використання ПЗ, яке реалізує обчислювальні схеми для знаходження розв'язків мішаних задач для хвильового рівняння, отриманих у розділі 1. Крім того, визначимо різні процедури модифікації готових модулів з метою розширення функціональності фреймворку. Зокрема розглянемо заміну ядра хвильового потенціалу на функцію Гріна у випадку півпростору, щоб мати змогу моделювати хвильові процеси у півпросторі з включенням довільної форми. Також порівняємо прямий та непрямий підходи для знаходження чисельних розв'язків деяких задач.

6.1. Множина реалізованих задач

Розроблений у розділі 4 алгоритм реалізації модуля Problem Solver (рис. 2.1) для задачі (**HD**) був застосований також до реалізації у фреймворку аналогічних модулів для усіх інших розглянутих у першому розділі мішаних задач. Повний перелік цих задач з варіантами прямого і непрямого

підходів та відповідними типами ЕКІР і КІР подано у табл. 4.1.

Зауважимо, що у другій частині цієї таблиці подано також задачі для еліптичних рівнянь та відповідні КІР. Оскільки вони виникають при застосуванні перетворення Лаґерра до еволюційних задач і є необхідним компонентом комбінованого методу, то в MMF розроблено також окремий інтерфейс для їхнього розв'язування.

Архітектура та інфраструктура фреймворку, які спроєктовані на основі абстрагування щодо сутностей предметної області та на використанні абстрактних та інтерфейсних типів, забезпечують гнучку основу для реалізації обчислювальних схем різних математичних моделей. Тому для побудови нового модуля достатньо знати лише структуру відповідних КІР та СЛАР. Такий підхід дає змогу легко розширювати фреймворк задачами, що моделюють різні фізичні явища – як еволюційні, так і незалежні від часової змінної.

Далі на прикладах продемонструємо можливості фреймворку для чисельного розв'язування задач із табл. 4.1.

Введемо позначення та сутності, які використовуватимемо у чисельних експериментах. Зокрема, у формулюванні задач використовуватимемо куб $\Omega^- := \{(x_1, x_2, x_3) : |x_i| < 1,\ i \in \overline{1,3}\}$ як приклад області з ліпшицевою межею. Відповідно позначаємо $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$ зовнішність куба. Для спрощення класифікації задачі в Ω називатимемо зовнішніми, а в Ω^- – внутрішніми.

У мішаних задачах для моделювання відповідних крайових умов будемо використовувати функції, які задають поширення сферичного імпульсу [19]:

$$w(x,t) := \frac{w^*(t - |x - x^*| + r)}{|x|} \vartheta(t - |x - x^*| + r),\ (x,t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x^*\} \times \mathbb{R}_0, \quad (6.1)$$

де ϑ – функція Хевісайда, w^* – кубічний β-сплайн [15], за допомогою якого

задаватимемо характер зміни граничного значення в часі, x^* –точка, в якій розміщено джерело імпульсу, $r \geqslant 0$ – параметр, за допомогою якого будемо встановлювати початок відліку часу в момент досягнення імпульсом найближчої точки на межі області.

Можна переконатися, що функція w задовольняє однорідне хвильове рівняння (1.1) та однорідні початкові умови (1.2). Якщо підставити функцію w у ліву частину відповідної крайової умови, то отриманий вираз можна трактувати як задану функцію g у крайовій умові. Тоді сама функція w, або її наближення

$$w^N(x,t) := \sum_{k=0}^{N} w_k(x)\, l_k(t),\ x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{6.2}$$

при деякому значенні $N \in \mathbb{N}$ може використовуватися як аналітичний розв'язок відповідної мішаної задачі.

Для просторових компонент u_k^h модельних задач розглядатимемо абсолютну і відносною похибки

$$\delta_k^h := ||u_k^h - u_k||_{L^2(\Omega_{a,b})},\ \ \epsilon_k^h := \delta_k^h / ||u_k||_{L^2(\Omega_{a,b})} * 100\ \%,\ \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{6.3}$$

де u_k - відомий аналітичний розв'язок, а під $\Omega_{a,b}$ розуміємо деякий відрізок з кінцями в точках (a,b), вздовж якого розміщуються точки спостереження. Також обчислюватимемо передбачуваний порядок збіжності (estimated order of convergence, EOC)

$$eoc_k := \ln(\delta_k^{h_{j-1}} / \delta_k^{h_j})\ /\ \ln(h_{j-1}/h_j),\ \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{6.4}$$

де h_{j-1} і h_j — параметри двох послідовних розбиттів крайової поверхні.

Для нестаціонарних чисельних розв'язків $\widetilde{u}^{N,h}$ розглянемо абсолютну і відносну похибки

$$\widetilde{\delta}^{N,h} := ||\widetilde{u}^{N,h} - \widetilde{u}^N||_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega_{a,b}))},\ \ \widetilde{\epsilon}^{N,h} := \widetilde{\delta}^{N,h} / ||\widetilde{u}^N||_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega_{a,b}))} * 100\ \%. \tag{6.5}$$

відповідна формула для знаходження ЕОС матиме вигляд

$$\widetilde{eoc}^{N,h} := \ln(\widetilde{\delta}^{N,h_{j-1}}/\widetilde{\delta}^{N,h_j}) \,/\, \ln(h_{j-1}/h_j). \tag{6.6}$$

6.2. Порівняння прямого і непрямого підходів до подання розв'язку мішаної задачі

Розглянемо результати серії обчислювальних експериментів щодо розв'язування еволюційних задач для хвильового рівняння з використанням формули Кірхгофа (прямий підхід) або одного з потенціалів (непрямий підхід) для подання розв'язку.

6.2.1. Задача Діріхле: прямий і непрямий підхід з потенціалом простого шару.

Приклад 6.1. Знайти чисельний розв'язок $\widetilde{u}^{N,h}$ задачі Діріхле (1.1), (1.2), (1.40) при $N = 20$, $x^* = (0, 0, 0)$ і $r = 1$ з використанням прямого і непрямого підходів, розбиваючи поверхню куба Ω^- на M крайових елементів, і дослідити апостеріорні похибки.

Таблиця 6.1

Аналіз збіжності для наближеного розв'язку $\widetilde{u}^{20,h}$ задачі Діріхле з використанням прямого і непрямого підходів, $N = 20$.

M	Непрямий підхід			Прямий підхід		
	$\widetilde{\delta}^{20,h}$	$\widetilde{e}oc^{20,h}$	$\widetilde{\epsilon}^{20,h}(\%)$	$\widetilde{\delta}^{20,h}$	$\widetilde{e}oc^{20,h}$	$\widetilde{\epsilon}^{20,h}(\%)$
768	$1.77{\cdot}10^{-3}$		0.34	$4.98{\cdot}10^{-3}$		0.97
1200	$1.10{\cdot}10^{-3}$	2.11	0.21	$3.42{\cdot}10^{-3}$	1.68	0.66
2028	$6.40{\cdot}10^{-4}$	2.08	0.12	$2.31{\cdot}10^{-3}$	1.50	0.45

Як видно з результатів у табл. 6.1, при збільшенні кількості елементів

розбиття M абсолютна і відносна похибки чисельних розв'язків зменшуються, демонструючи сталий порядок збіжності в обох випадках. Причому похибки розв'язку при непрямому підході виявилися дещо меншими.

Для порівняння часу обчислень лівої та правої частин СЛАР для обох підходів застосуємо клас TimeLogger (рис. 2.17). Оскільки ліві частини в обох випадках однакові, то різниці в часі обчислення немає (рис. 6.1, ліва частина СЛАР). Разом з тим, час обчислення правих частин при непрямому підході суттєво менший (рис. 6.1, права частина СЛАР).

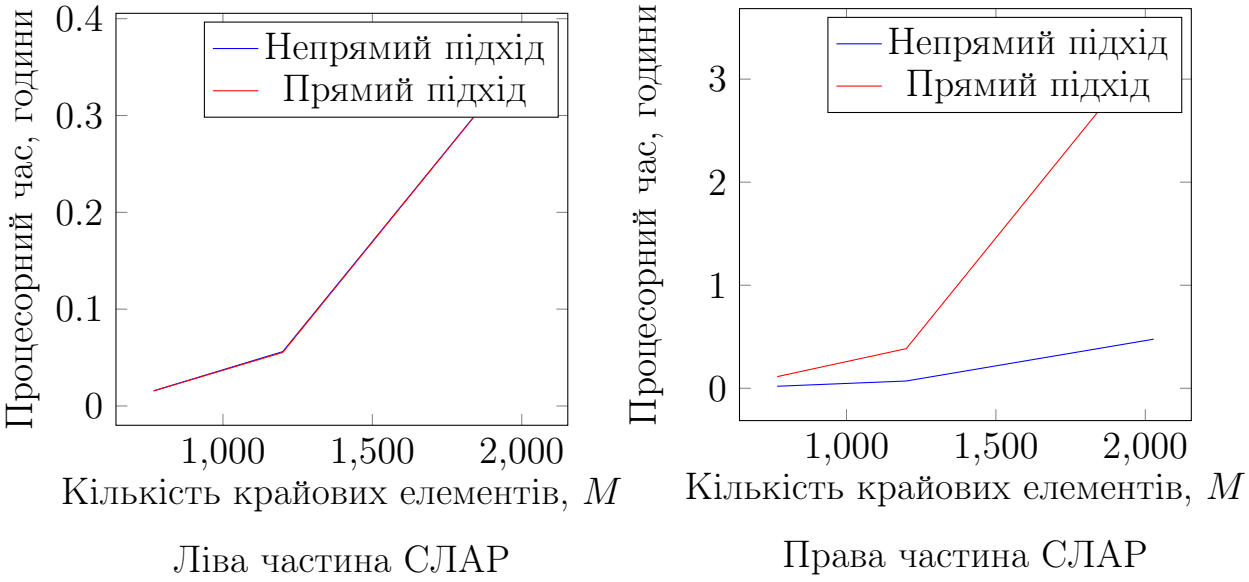

Рис. 6.1. Час обчислення лівої та правої частин СЛАР у випадку задачі Діріхле з використанням прямого і непрямого підходів

Для чисельного розв'язування виконано таку підготовку фреймворку:

1) створено два модулі Problem Solver для прямого і непрямого підходів;
2) вибрано базовий клас DoubleSeriesTask для задання основного алгоритму розв'язування;
3) додано новий клас DirichletInputData, похідний від DoubleSeriesInputData, для збереження параметрів ПЛ та часових і просторових інтервалів;

4) створено нові стратегії заповнення лівої частини матриці СЛАР
   — DirichletDirectLeftStrategy для прямого підходу;
   — DirichletIndirectLeftStrategy для непрямого підходу;
5) створено нові стратегії заповнення правої частини матриці СЛАР
   — DirichletDirectRightStrategy для прямого підходу;
   — DirichletIndirectRightStrategy для непрямого підходу;
6) застосовано клас TimeLogger у зазначених стратегіях для хронометражу обчислень;
7) вибрано xml-файли зі стандартними розбиттями поверхні куба.

Отож, непрямий підхід є для даного класу задач дещо точнішим та суттєво вигіднішим з точки зору затрат обчислювальних ресурсів. Разом з тим, у випадку застосування прямого підходу безпосередньо отримуємо наближені дані Коші розв'язку задачі.

6.2.2. Задача Неймана: прямий і непрямий підхід з потенціалом подвійного шару.

Приклад 6.2. Знайти чисельний розв'язок $\widetilde{u}^{N,h}$ задачі Неймана (1.1), (1.2), (1.44) з використанням прямого і непрямого підходів з тими ж значеннями параметів задачі, що і в прикладі 6.1.

Побудова програмних модулів є аналогічною попередньому прикладу і відрізняється лише стратегіями формування матриці СЛАР.

Бачимо з табл. 6.2, що для обох підходів похибки розв'язків є співмірними, зменшуються при згущенні розбиття межі і, як і у задачі Діріхле, демонструють сталий порядок збіжності. Зазначимо, що час знаходження розв'язку у прямому підході є більшим через додаткову кількість обчислень у правій частині СЛАР.

Таблиця 6.2

Аналіз збіжності для наближеного розв'язку $\widetilde{u}^{20,h}$ задачі Неймана з використанням прямого і непрямого підходів, $N = 20$.

M	Непрямий підхід			Прямий підхід		
	$\widetilde{\delta}^{20,h}$	$\widetilde{eoc}^{20,h}$	$\widetilde{\epsilon}^{20,h}(\%)$	$\widetilde{\delta}^{20,h}$	$\widetilde{eoc}^{20,h}$	$\widetilde{\epsilon}^{20,h}(\%)$
768	$2.52{\cdot}10^{-3}$		0.49	$2.63{\cdot}10^{-3}$		0.51
1200	$1.94{\cdot}10^{-3}$	1.18	0.38	$1.73{\cdot}10^{-3}$	1.87	0.34
2028	$1.45{\cdot}10^{-3}$	1.10	0.28	$1.10{\cdot}10^{-3}$	1.74	0.21

6.2.3. Задача Неймана: непрямий підхід з потенціалом простого шару.

Приклад 6.3. Знайти чисельний розв'язок $\widetilde{u}^{N,h}$ задачі Неймана з прикладу 6.2 з використанням потенціалу простого шару, а також дослідити його компоненти u_0^h та u_{10}^h.

Результати чисельних експериментів подано в табл. 6.3 і 6.4. Вони демонструють подібну до попередніх прикладів тенденцію щодо похибок.

Таблиця 6.3

Похибки та порядки збіжності для u_0^h, u_{10}^h.

M	u_0^h			u_{10}^h		
	δ_0^h	eoc_0	$\epsilon_0^h(\%)$	δ_{10}^h	eoc_{10}	$\epsilon_{10}^h(\%)$
972	$1.23{\cdot}10^{-4}$	2.09	1.31	$2.44{\cdot}10^{-4}$	2.02	1.59
1200	$1.01{\cdot}10^{-4}$	1.90	1.07	$1.98{\cdot}10^{-4}$	1.97	1.29
1452	$8.29{\cdot}10^{-5}$	2.02	0.88	$1.64{\cdot}10^{-4}$	2.01	1.07

Таблиця 6.4

Порівняння збіжності для задачі Неймана з використанням потенціалів простого та подвійного шару при $N = 10$

M	Потенціал простого шару		Потенціал подвійного шару	
	$\widetilde{eoc}^{10,h}$	$\widetilde{\epsilon}^{10,h}(\%)$	$\widetilde{eoc}^{10,h}$	$\widetilde{\epsilon}^{10,h}(\%)$
300	1.5	1.36	1.14	2.45
432	1.21	1.12	1.42	1.9
768	1.15	0.8	2.26	0.98

Разом з тим зауважимо:

1) при поданні розв'язку потенціалом простого шару дана задача зводиться до КІР Фредгольма 2-го роду [58];
2) алгоритми дискретизації потенціалу простого шару суттєво простіші і вимагають менше обчислювальних ресурсів, ніж у випадку потенціалу подвійного шару;
3) отримані відносні похибки для обох підходів є співмірними.

Підготовчі кроки для модуля Problem Solver у випадку потенціалу простого шару були такими:

1) додано нові стратегії заповнення матриці у наявний модуль для задачі Неймана (з використанням потенціалу подвійного шару);
2) додано перемикач у форму введення параметрів задачі Неймана, згідно з яким вибиратиметься правильна стратегія для певного підходу (потенціалу простого або подвійного шару);
3) додано поле для зберігання значень просторових компонент u_i у похідний клас від UnFactory.

Відзначимо, що така гнучкість фреймворку щодо запровадження но-

вих підходів чи методів є наслідком побудови правильної архітектури та ефективної бібліотеки базових типів.

6.3. Динамічна заміна алгоритму формування матриці СЛАР

Обчислення матриць СЛАР є найзатратнішими алгоритмами стосовно обчислювальних ресурсів. Тому розробка ефективних алгоритмів для таких операцій є актуальною проблемою і для програмної заміни таких алгоритмів у фреймворку запроваджено спеціальний механізм, який передбачає відокремлення алгоритмів заповнення лівої та правої частин СЛАР у окремих класах.

Покажемо застосування цього підходу на прикладі задачі Неймана, а саме забезпечимо інтерфейс користувача можливістю динамічної заміни стандартного алгоритму так званим алгоритмом адаптивної кросапроксимації матриць (ACA) [50]. При ACA окремі частини матриці – так звані допустимі блоки – наближують добутком двох векторів за допомогою спеціального алгоритму [54], щоб похибка наближення не перевищувала наперед заданого значення ε. Надалі МКЕ, в якому реалізовано алгоритм ACA, будемо називати *швидким МКЕ*, слідуючи традиціям застосування цього методу до різних задач [50, 80].

Приклад 6.4. Знайти функцію u_0^h – перший компонент чисельного розв'язку задачі Неймана, вираженого потенціалом подвійного шару, використовуючи швидкий МКЕ і розгляд розбиваючи поверхню куба Ω^- на M крайових елементів.

Результати обчислювальних експериментів, які наведені в табл. 6.5, підтверджують ефективність застосування алгоритму ACA, а саме можли-

вість отримати досить високу точність шуканих функцій апроксимованими допустимими блоками. Причому відсоток елементів матриці, які обчислюють і зберігають, зменшується при згущенні розбиття межової поверхні (див. табл. 6.6). Зауважимо, що при малих значеннях M швидкий МКЕ обчислює та зберігає фактично всі елементи матриці, тому в таких випадках цей підхід не є ефективним, враховуючи додаткові затрати ресурсів на ініціалізацію алгоритму.

Таблиця 6.5

Похибки та порядок збіжності для u_0^h у швидкому МКЕ при $\varepsilon = 0.01$.

M	δ_0^h	eoc_0	$\epsilon_0^h(\%)$
300	$1.88{\cdot}10^{-4}$	1.97	2.00
768	$9.51{\cdot}10^{-5}$	1.45	1.01
1200	$7.19{\cdot}10^{-5}$	1.25	0.77

Таблиця 6.6

Відсоток збережених елементів матриці СЛАР при знаходженні u_0^h швидким МКЕ.

M крайових елементів	108	300	768	1200
% збережених елементів	100	99	98	87

Підготовка програмного коду для поставленого завдання полягає в розширенні графічного інтерфейсу форми введення параметрів, а саме засобом альтернативного вибору звичайного алгоритму або АСА для обчислення матриці СЛАР, а також полем для задання ε. Крім того у модулі Problem Solver треба визначити по дві стратегії-реалізації інтерфейсів

ILeftPartStrategy та IRightPartStrategy для формування СЛАР швидким та звичайним МКЕ.

6.4. Задача з динамічною крайовою умовою

Приклад 6.5. Для різних значень параметра b знайти чисельний розв'язок $\widetilde{u}^{N,h}$ задачі (**HD**) при $N = 10$, розбиваючи поверхню куба Ω^- на M крайових елементів, і дослідити апостеріорні похибки.

Нагадаємо, що розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді формули Кірхгофа, а розробка для неї відповідного модуля Problem Solver детально описана у розділі 4.

Результати обчислень подано в табл. 6.7. Як бачимо, похибки чисельних розв'язків є практично однаковими для розглянутих значень параметра b. Також вони співмірні з похибками чисельних розв'язків розглянутих раніше задач Діріхле та Неймана. Характер зміни в часі розв'язку $\widetilde{u}^{10,h}$ для $b = 1$ продемонстровано на рис. 6.2.

Таблиця 6.7

Аналіз збіжності для $\widetilde{u}^{10,h}$ при різних M і b.

M	$b = 0.25$			$b = 1$			$b = 16$		
	$\widetilde{\delta}^{10,h}$	$\widetilde{e}oc^{10,h}$	$\widetilde{\epsilon}^{10,h}(\%)$	$\widetilde{\delta}^{10,h}$	$\widetilde{e}oc^{10,h}$	$\widetilde{\epsilon}^{10,h}(\%)$	$\widetilde{\delta}^{10,h}$	$\widetilde{e}oc^{10,h}$	$\widetilde{\epsilon}^{10,h}(\%)$
768	$1.16{\cdot}10^{-3}$		0.23	$1.33{\cdot}10^{-3}$		0.26	$2.25{\cdot}10^{-3}$		0.44
1200	$9.26{\cdot}10^{-4}$	1.01	0.18	$1.00{\cdot}10^{-3}$	1.28	0.20	$1.83{\cdot}10^{-3}$	0.92	0.36
2028	$7.47{\cdot}10^{-4}$	0.82	0.15	$7.19{\cdot}10^{-4}$	1.26	0.14	$1.45{\cdot}10^{-3}$	0.90	0.28

Приклад 6.6. Знайти чисельний розв'язок задачі (**HD**) з прикладу 6.5, застосовуючи швидкий МКЕ, і знайти кількість (у відсотках до загальної кількості) обчислених і збережених в пам'яті елементів матриці СЛАР.

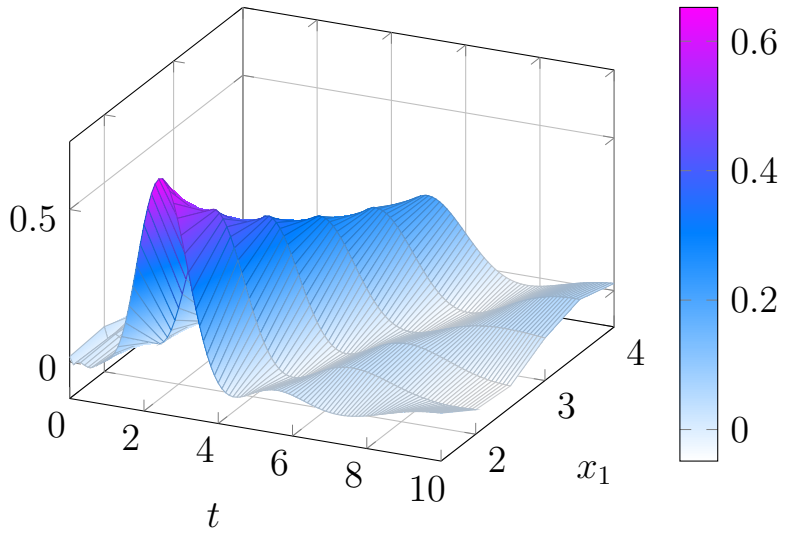

Рис. 6.2. Зміна в часі чисельного розв'язку $\widetilde{u}^{10,h}$ задачі (**HD**) на прямій $(x_1, 0, 0)$, $x_1 > 1$, для $b = 1$ та $M = 2028$ крайових елементів.

Графік на рис. 6.2 чисельного розв'язку, отриманого при значеннях параметрів $N = 10$ і $M = 2028$, демонструє зміну в часі згенерованої хвилі, яка поширюється вздовж осі $0x_1$.

Графіки залежності кількості збережених елементів від параметра M для різних блоків СЛАР подано на рис. 6.3. Бачимо, що при застосуванні АСА ($\varepsilon = 0.01$ і $\varepsilon = 0.001$) ця залежність має квазілінійний характер. Таким чином, при достатньо великих значеннях параметра M можна суттєво зекономити витрати пам'яті та часовий ресурс для знаходження блоків $\mathbf{V}_0^h$, $\mathbf{K}_0^h$ та $\mathbf{W}_0^h$.

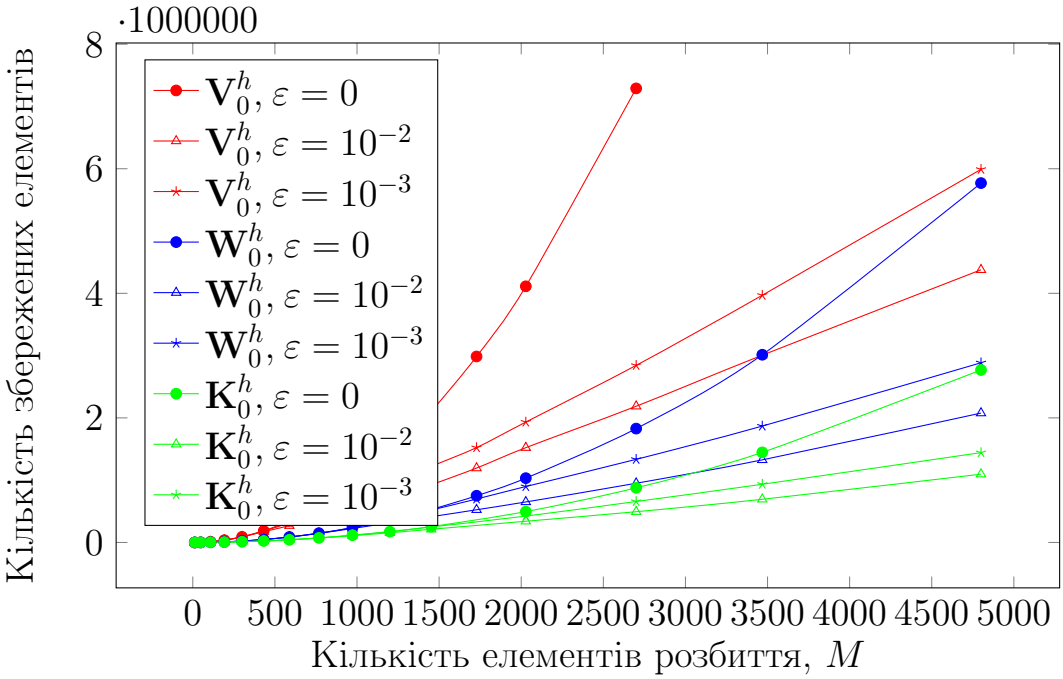

Рис. 6.3. Кількість збережених елементів у матрицях $\mathbf{V}_0^h$, $\mathbf{W}_0^h$ та $\mathbf{K}_0^h$ залежно від кількості крайових елементів при застосуванні звичайного ($\varepsilon = 0$) і швидкого МКЕ з різними значеннями параметра ε

Підготовка модуля Problem Solver була такою:

1) додано нову реалізацію інтерфейсу ILeftStrategy;
2) виділено в окремих функціях обчислення блоків V_0^h, W_0^h, K_0^h;
3) передбачено можливість вибору способу обчислень лівої частини СЛАР на формі введення параметрів задачі;
4) додатково визначено процес запису кількості збережених елементів блоку матриці у файл.

Отже, результати чисельних експериментів підтверджують, що фреймворк можна ефективно використовувати для розв'язування і дослідження задач з динамічними крайовими умовами.

6.5. Розширення класу задач за рахунок заміни ядер потенціалів

В огляді літератури вже було відзначено, що поєднання МКЕ з перетворенням Лаґерра є універсальним підходом для знаходження чисельних розв'язків мішаних задач для еволюційних рівнянь різних типів. Причому відмінність буде лише у вигляді відповідних потенціалів, які залежать як від просторових, так і часової змінних. Наприклад, у випадку рівняння теплопровідності потрібно використати теплові потенціали.

Зазначимо, що після застосування перетворення Лаґерра до залежних від часу потенціалів отримані потенціали мають подібні властивості. З огляду на це, архітектура MMF спроєктована так, щоб розширення множини поверхневих потенціалів потребувало найменших зусиль. Для цього достатньо модифікувати алгоритми обчислення ядер потенціалів. Оскільки класи для знаходження матричних елементів із табл. 4.2 містять посилання на абстракцію ядра, то це дає змогу безпосередньо використовувати різні реалізації ядер без заміни решти програмних компонентів. Продемонструємо такий підхід на прикладі задач Діріхле.

6.5.1. Задачі Діріхле для рівнянь різних типів.

Приклад 6.7. Знайти компонент u_0^h чисельного розв'язку внутрішньої задачі Діріхле (1.68), (1.2), (1.52) при різних комбінаціях значень параметрів $a_i, i = \overline{1,3}$ і $b_1 = b_2 = 0, b_3 = 1$ з використанням потенціалу простого шару і дослідити похибки наближених розв'язків для різних M.

Результати експериментів для трьох наборів значень параметрів подано у табл. 6.8. У кожному випадку бачимо зменшення похибок при збільшенні кількості крайових елементів M.

Програмна підготовка була такою:

Таблиця 6.8

Аналіз збіжності u_0^h для прикладу 6.7 при різних значеннях M.

M	$a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0$			$a_2 = 1, a_1 = a_3 = 0$			$a_1 = a_2 = a_3 = 1$		
	δ_0^h	eoc_0	$\epsilon_0^h(\%)$	δ_0^h	eoc_0	$\epsilon_0^h(\%)$	δ_0^h	eoc_0	$\epsilon_0^h(\%)$
768	$4.34{\cdot}10^{-5}$		0.57	$1.24{\cdot}10^{-4}$		0.45	$6.96{\cdot}10^{-6}$		0.78
1200	$2.96{\cdot}10^{-5}$	1.71	0.39	$8.35{\cdot}10^{-5}$	1.78	0.30	$4.91{\cdot}10^{-6}$	1.57	0.55

— додано новий модуль розв'язування задачі Діріхле з використанням потенціалу простого шару;

— додано дві нові реалізації ядер потенціалу простого шару, що виникають у випадках $a_2 = 1, a_1 = a_3 = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ (ядро потенціалу при $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0$ реалізоване в бібліотеці базових класів);

— використано клас VFactory для знаходження елементів матриці СЛАР, що викликає VIntegral з відповідним ядром.

Як бачимо, додаткова програмна реалізація передбачає лише додавання нових сутностей, що задають обчислення ядра відповідного потенціалу.

6.5.2. Задача Діріхле для півпростору з включенням. Нехай Ω^- є тим самим кубом, що й раніше, але тепер розглядаємо його як включення у півпросторі $\Omega_0 = \mathbb{R}^2 \times (-2, \infty)$ з межею $\Gamma_0 = \{(x_1, x_2, -2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Позначимо $\Omega := \Omega_0 \setminus \overline{\Omega^-}$.

У цьому випадку для генерування функції g використаємо функцію $\widetilde{w}(x,t) := w(x,t) - w(\widetilde{x},t)$, де точка $\widetilde{x}$ є симетричною до x відносно Γ_0, причому $x^* = (0,0,0)$ і $r = 1$. Очевидно, що $\widetilde{w}$ задовольняє (1.1) та (1.2) і $\widetilde{w}(x,t) \equiv 0$ на Γ_0 при $t \in \mathbb{R}_+$.

Приклад 6.8. Знайти чисельний розв'язок $\widetilde{u}^{N,h}$ задачі Діріхле (1.1), (1.2), (1.40) при $N = 20$ зі слідами $\gamma_{0,0}u = \lambda \equiv 0$ і $\gamma_{0,1}u = g = \widetilde{w}$, що задані на

циліндрах $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+$ і $\Sigma = \Gamma \times \mathbb{R}_+$ відповідно.

Використано прямий підхід для подання розв'язку задачі та функції Гріна $N_k(x, y)$, $k \in \mathbb{N}_0$, [77, 54] в ролі ядер відповідних поверхневих потенціалів. Наведені у табл. 6.9 результати обчислень корелюють з відповідними даними табл. 6.1, отриманими для зовнішньої задачі Діріхле.

Таблиця 6.9

Аналіз збіжності u_0^h, u_{10}^h і $\widetilde{u}^{N,h}$ для прикладу 6.8 при $N = 20$ і різних значеннях M.

M	$u_0^h(x)$			u_{10}^h			$\widetilde{u}^{N,h}$		
	δ_0^h	eoc_0	$\epsilon_0^h(\%)$	δ_{10}^h	eoc_{10}	$\epsilon_{10}^h(\%)$	$\widetilde{\delta}^{N,h}$	$\widetilde{eoc}^{N,h}$	$\widetilde{\epsilon}^{N,h}(\%)$
1452	$8.14{\cdot}10^{-6}$	2.23	0.31	$4.64{\cdot}10^{-5}$	2.40	0.26	$9.06{\cdot}10^{-4}$	2.10	0.17
1728	$6.93{\cdot}10^{-6}$	2.16	0.26	$3.79{\cdot}10^{-5}$	2.31	0.21	$7.57{\cdot}10^{-4}$	2.05	0.14
2700	$4.56{\cdot}10^{-6}$	2.13	0.17	$2.27{\cdot}10^{-5}$	2.29	0.13	$4.79{\cdot}10^{-4}$	2.06	0.09

Поведінку розв'язку задачі Діріхле для півпростору у відповідних точках спостереження подано на рис. 6.4. Зазначимо затухання сигналу (розв'язку задачі) при наближенні до поверхні Γ_0.

Для експериментів до фреймворку додано такий програмний код:

1) зареєстровано новий модуль розв'язування задачі;
2) додано всі необхідні файли, що й у випадку застосування прямого підходу із прикладу 6.1;
3) додано клас NkFactory, що є похідним від ElemFactory та задає обчислення функцій Гріна [77, 54];
4) передано об'єкт класу NkFactory у конструктори об'єктів VFactory та KFactory для ініціалізації поля kernelFactory (рис. 4.8);
5) додано новий параметр на форму введення параметрів, що задає координату x_3 площини Γ_0.

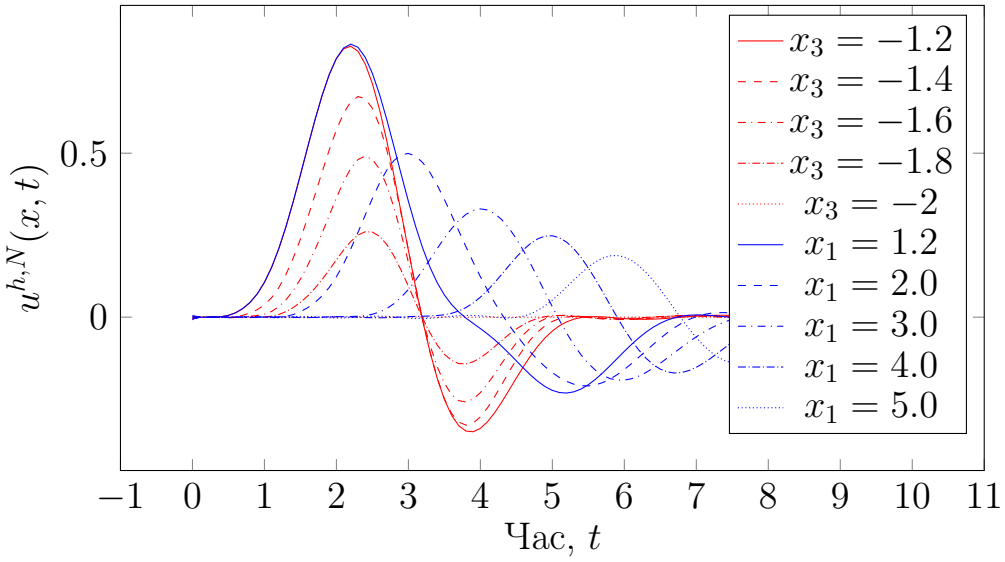

Рис. 6.4. Чисельний розв'язок задачі з прикладу 6.8 у двох множинах точок спостереження $\{(x_1, 0, 0)\}$ і $\{(0, 0, x_3)\}$.

Зазначимо, що за подібною схемою можна досліджувати задачі з включеннями в інших областях, для яких можна побудувати функції Гріна, причому розглядати інші типи крайових умов. Знову ж таки, цей підхід поширюються на еволюційні рівняння інших типів, зокрема на мішані задачі для рівняння теплопровідності чи телеграфного рівняння.

6.6. Розширення функціональності на нові класи задач

У цьому підрозділі на задачах акустичної дифракції продемонструємо розширення фреймворку на задачі, в яких на якомусь етапі можна виокремити одну із множини уже реалізованих задач. Інший напрямок розширення стосується на можливостей фреймворку щодо роботи з геометрією області, а саме комбінувати кілька поверхонь для різних типів та виконувати їхнє розбиття.

6.6.1. Задачі акустичної дифракції. Розглянемо дифракцію акустичного сферичного імпульсу на кубі. Вважаємо, що імпульс задано функцією (6.1), його джерело знаходиться в точці $x^* = (2, 0, 0)$, $r = 1$, а куб Ω^- той самий, що і раніше.

Функцію, яка описує дифраговане поле, шукаємо у вигляді [83]

$$u_{tot} = u + w, \tag{6.7}$$

де u – розсіяне (згенероване поверхнею Γ) поле, яке є розв'язком задачі (**HD**) при $g = -(\partial_{\boldsymbol{\nu}} w - b\,\partial_t w)$ в крайовій умові (1.3).

Приклад 6.9. Знайти розсіяне u та загальне u_{tot} поля такі, що

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} u_{tot}|_\Sigma - b\,\partial_t u_{tot}|_\Sigma = 0 \quad \text{на } \Sigma, \tag{6.8}$$

для значень $b \in \{0.001; 1; 1000\}$.

Чисельний розв'язок $\widetilde{u}^{N,h}$, який наближує функцію u при $N = 10$ і $M = 768$, продемонстровано на рис. 6.5 для деяких точок спостереження. З графіків видно вплив параметра b на розсіяне поле. На рис. 6.6 – 6.8 зображено скріншоти дифрагованого поля $\widetilde{u}^{N,h}_{tot} := \widetilde{u}^{N,h} + w$ у різні моменти часу.

Зазначимо, що програмна реалізація Problem Solver для цієї задачі є аналогічною до описаних раніше. За допомогою цього ж модуля можна досліджувати інші види дифракції.

Покажемо, що при певних значеннях параметра b в умові (6.8) дифраговане поле стає подібним до полів у випадках перешкод з акустично "м'яким" [26, 69] та "жорстким" [25, 12] покриттями. У першому випадку крайова умова матиме вигляд

$$u_{tot}|_\Sigma = 0 \quad \text{на } \Sigma, \tag{6.9}$$

а в другому

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} u_{tot}|_\Sigma = 0 \quad \text{на } \Sigma. \tag{6.10}$$

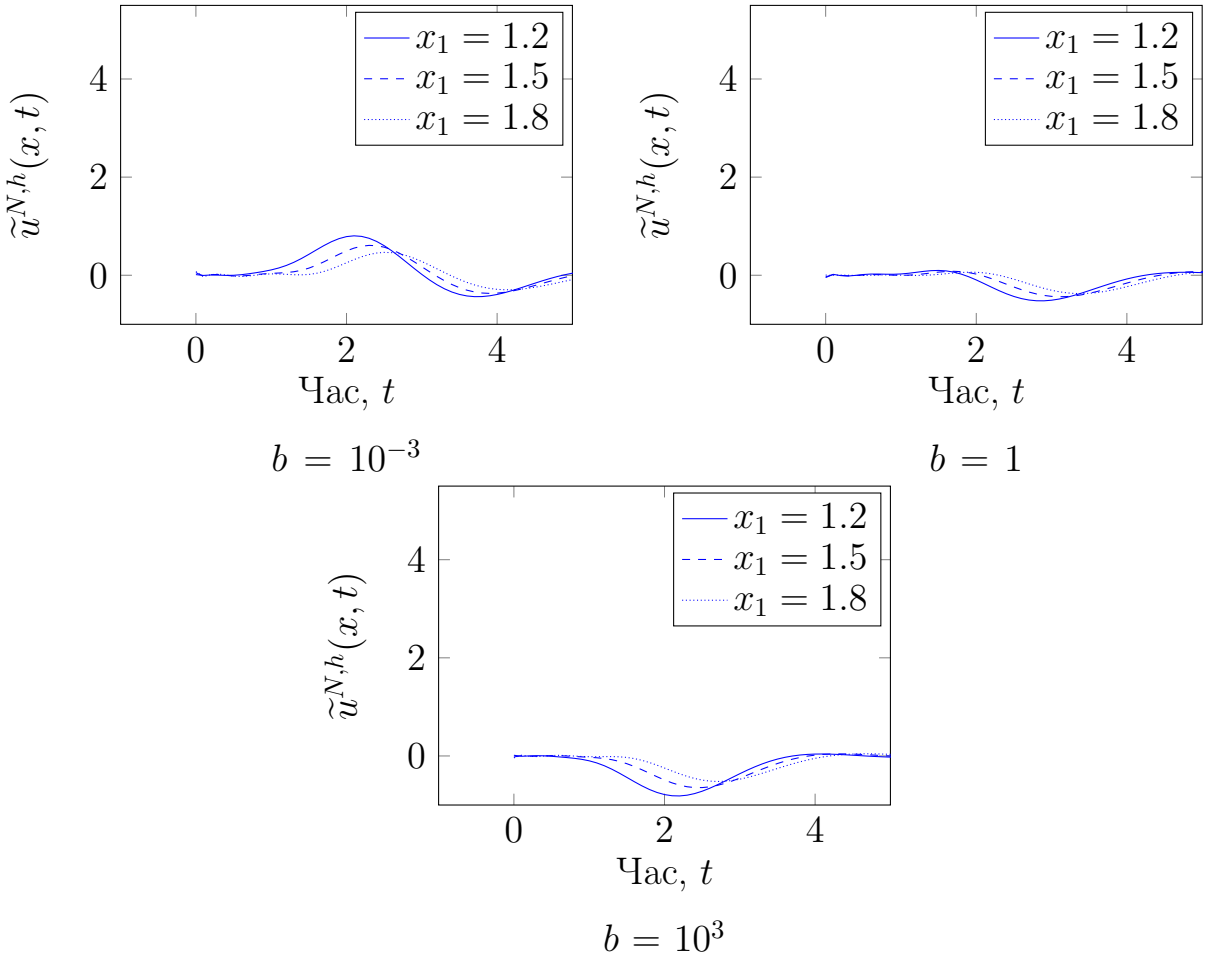

Рис. 6.5. Розсіяне акустичне поле $\widetilde{u}^{N,h}$ з прикладу 6.9 при $N = 10$ і $M = 768$ в точках спостереження $(x_1, 0, 0)$ для $b \in \{10^{-3}, 1, 10^3\}$.

Приклад 6.10. Для розсіювача та сферичного імпульсу з прикладу 6.9 порівняти дифраговані поля при значеннях параметра $b \in \{10^{-3}, 10^3\}$ з дифрагованими полями у випадках перешкод з акустично "жорстким" та "м'яким" покриттями.

Якщо в обох випадках загальне поле подати у вигляді (6.7), то для розсіяних полів отримаємо задачі Діріхле (1.1), (1.2), (1.40) з крайовою функцією $g = -w$ і задачу Неймана (1.1), (1.2), (1.44) з крайовою функцією $g = -\partial_{\boldsymbol{\nu}} w$.

У табл. 6.10 наведено значення функції $\widetilde{u}^{N,h}_{tot}(x,t)$ у кількох точках спостереження, обчисленої через відповідні чисельні розв'язки $\widetilde{u}^{N,h}(x,t)$ зада-

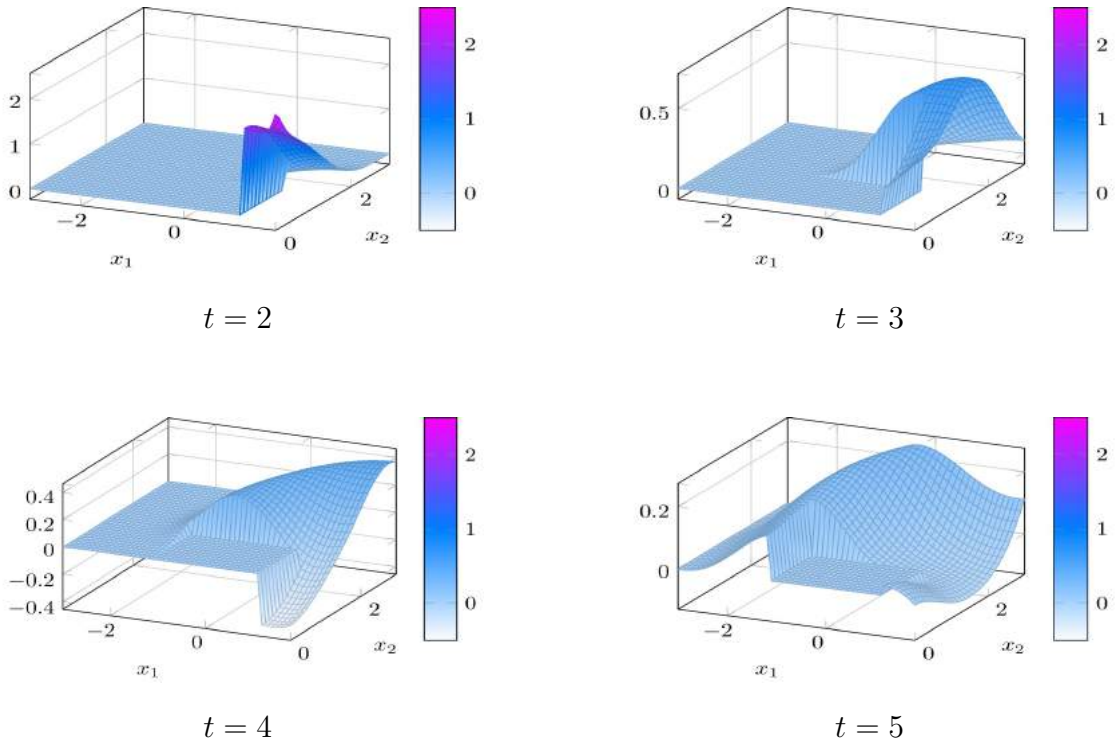

Рис. 6.6. Чисельний розв'язок $\widetilde{u}_{tot}^{N,h}$ для $b = 10^{-3}$ при $M = 768$.

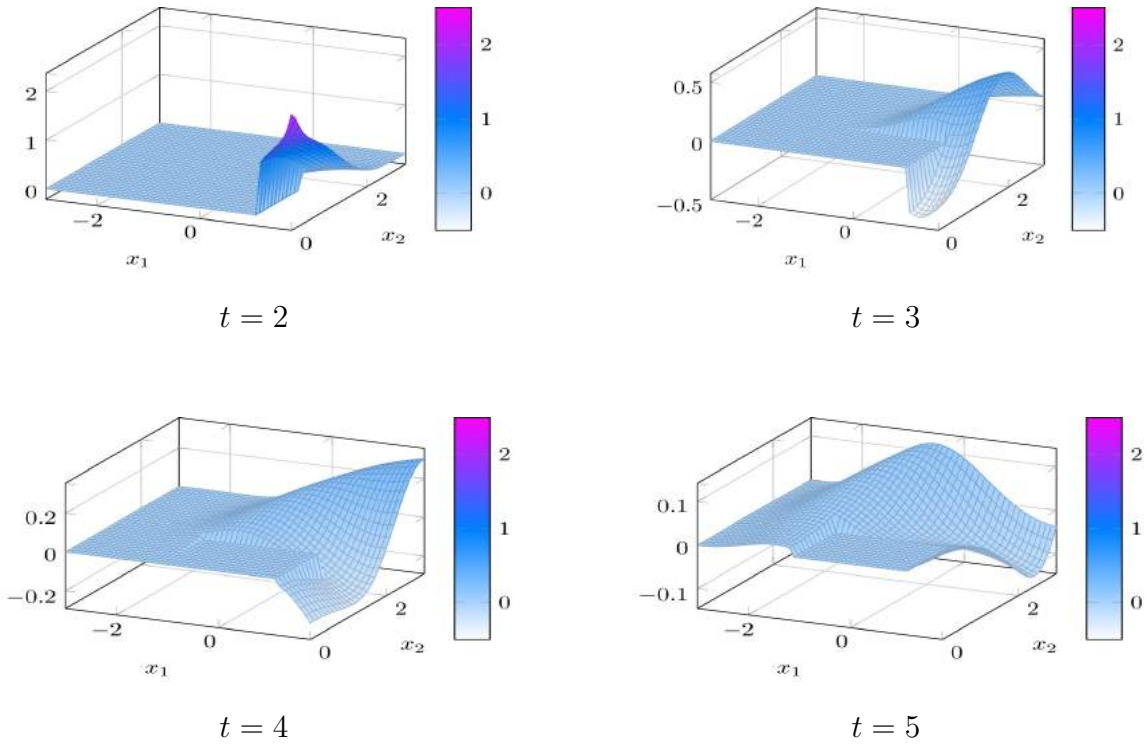

Рис. 6.7. Чисельний розв'язок $\widetilde{u}_{tot}^{N,h}$ для $b = 1$ при $M = 768$.

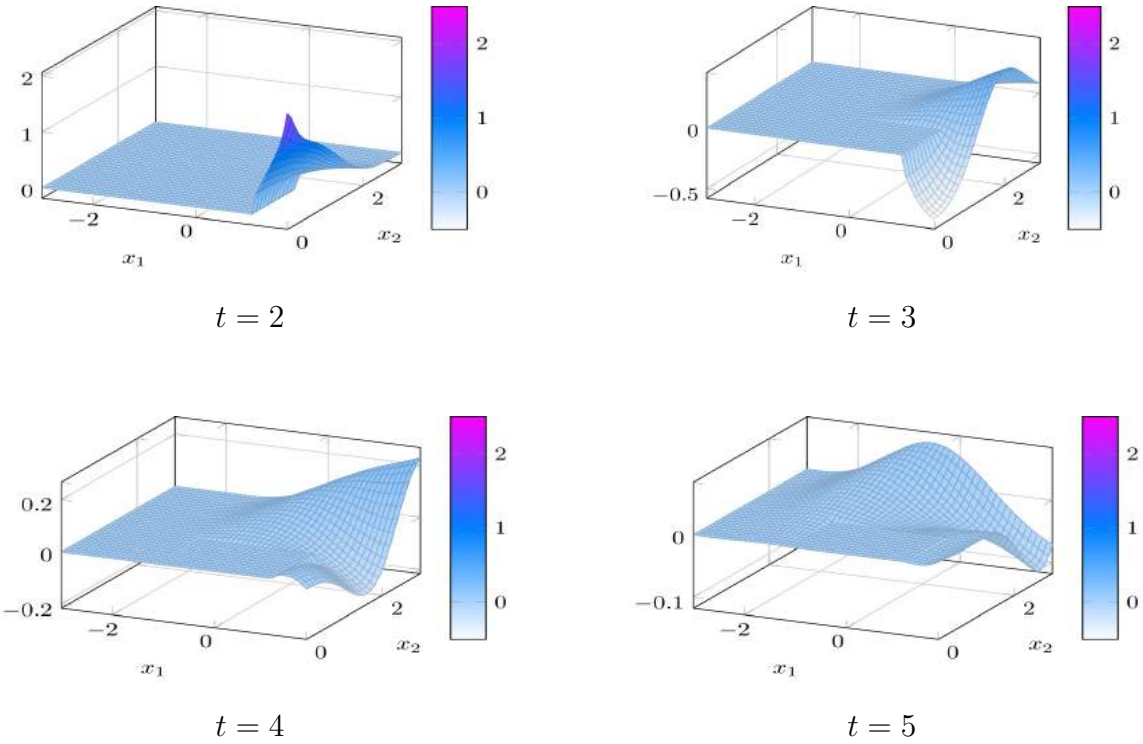

Рис. 6.8. Чисельний розв'язок $\widetilde{u}_{tot}^{N,h}$ для $b = 10^3$ при $M = 768$.

чі (**HD**) з відповідними значеннями параметра b, а також через чисельні розв'язки зазначених задач Діріхле та Неймана.

Як бачимо, отримане дифраговане поле $\widetilde{u}_{tot}^{N,h}$ для достатньо малих значень параметра b ($b = 0.001$) є близьким до відповідного поля, отриманого з розв'язку задачі Неймана. Коли ж b достатньо велике ($b = 1000$), то дифраговане поле $\widetilde{u}_{tot}^{N,h}$ є близькими до поля, отриманого з розв'язку задачі Діріхле. При інших значеннях b у динамічній крайовій умові відповідне поле суттєво відрізняється від попередніх варіантів.

Отож, зазначений параметр має важливе значення при моделюванні дифракції акустичного імпульсу.

6.6.2. Задача Коші. Нехай маємо куб із кубічною порожниною, так як зображено на рис. 6.9, де Γ_1 і Γ_2 – його внутрішня і зовнішня поверхні відповідно, $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Вважаємо, що на зовнішній поверхні дані Коші

Таблиця 6.10

Значення функції $\widetilde{u}_{tot}^{N,h}$ для різних задач

t	$b=1$	задача Неймана	$b=10^{-3}$	задача Діріхле	$b=10^{3}$
			$x=1.2$		
0	−0.08160	−0.01944	−0.02144	−0.02120	−0.02037
1	0.54080	0.62272	0.62339	0.41894	0.41566
2	1.07154	1.95514	1.95503	0.38824	0.38036
3	−0.33011	0.20529	0.19619	−0.18632	−0.18299
4	−0.08903	−0.40846	−0.40485	0.02473	0.02527
			$x=1.8$		
0	0.71173	0.78347	0.78268	0.67037	0.67027
1	4.76077	4.78699	4.78674	4.74332	4.74322
2	2.19178	2.38511	2.38607	1.88850	1.88517
3	−0.34495	0.24699	0.24069	−0.51206	−0.51265
4	−0.18098	−0.23562	−0.23533	0.00155	0.00333

розв'язку однорідного хвильового рівняння задовольняють умову (1.56).

Приклад 6.11. Знайти при $N=10$ чисельний розв'язок $u^{N,h}$ задачі Коші (1.1), (1.2) і (1.56) та зокрема його коефіцієнти u_k^h, $k=0;5$, для даних Коші, визначених за допомогою функції w.

Подамо розв'язок задачі Коші (1.1), (1.2), (1.56) у вигляді потенціалу простого шару (1.57) та отримаємо систему КІР (1.67). Особливості розв'язування такої СЛАР див. [38].

Отримані чисельні результати наведені в табл. 6.11. Точки спостереження виберемо вздовж відрізка $\Omega_{a,b}$, де $a=(0.55,0,0)$ і $b=(0.9,0,0)$. Бачимо, що як і для раніше розглянутих задач, похибки розв'язку і його

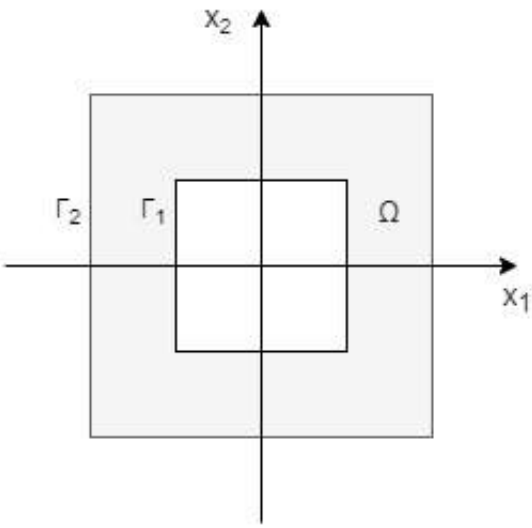

Рис. 6.9. Переріз області Ω, що обмежена поверхнями Γ_1 (довжина ребра дорівнює 1) і Γ_2 (довжина ребра дорівнює 2), у площині x_1x_2.

коефіцієнтів є співмірними між собою і зменшуються при згущенні розбиття поверхні.

Таблиця 6.11

Аналіз збіжності для u_0^h, u_5^h і $u^{N,h}$ при зростанні M ($\sigma = 1$, $N = 10$).

M	u_0^h			u_5^h			$u^{N,h}$		
	δ_0^h	eoc_0	$\epsilon_0^h(\%)$	δ_5^h	eoc_5	$\epsilon_5^h(\%)$	$\delta^{N,h}$	$eoc^{N,h}$	$\epsilon^{N,h}(\%)$
1452	$5.21{\cdot}10^{-3}$	1.67	1.84	$2.14{\cdot}10^{-3}$	2.87	2.28	$4.30{\cdot}10^{-2}$	2.43	1.74
1728	$4.51{\cdot}10^{-3}$	1.67	1.59	$1.69{\cdot}10^{-3}$	2.69	1.81	$3.63{\cdot}10^{-2}$	1.93	1.47
2028	$4.05{\cdot}10^{-3}$	1.35	1.43	$1.49{\cdot}10^{-3}$	1.58	1.59	$3.28{\cdot}10^{-2}$	1.27	1.33

Підготовчі до обчислювального експерименту дії є такими:

1) використаємо модуль Boundary Generator для отримання розбиттів бічних поверхонь кубів і застосуємо підхід із розділу 4 для завантаження кількох поверхонь;
2) додамо нові стратегії-реалізації для формування лівої і правої частин

матриці СЛАР відповідно до КІР для задачі Коші (див. табл. 4.1);

3) розширимо класи для знаходження матричних елементів відповідно до схеми на рис. 4.11.

В результаті отримаємо всі необхідні компоненти для коректної роботи модуля Problem Solver.

Отже, описаний процес демонструє простоту використання фреймворку MMF при роботі із комбінованими розбиттями поверхонь.

6.7. Висновки до розділу 6

Розглянуті приклади мішаних задач повністю вичерпують типи задач, для яких у розділі 1 були побудовані обчислювальні схеми для знаходження чисельних розв'язків комбінованим МКЕ і ПЛ.

У кожному з прикладів продемонстровано ефективність зазначеного методу у тривимірних за просторовими координатами областях зі складною геометрією, зокрема у зовнішніх задачах. Крім того, для кожної задачі вказано послідовність кроків щодо підготовки вхідних даних задачі і розробки додаткового програмного забезпечення, яке враховує конкретні характеристики та властивості задачі.

Крім того, підібрані приклади демонструють можливості подальшого розширення фреймворку на нові типи задач, тобто підтверджують відповідність розробленої архітектури фреймворку вимогам, перелік яких було сформульовано на початку роботи. Відзначимо також, що висока точність отриманих результатів обчислювальних експериментів підтверджує також достовірність проведених в роботі теоретичних досліджень.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розглянуто математичні моделі еволюційних процесів на основі мішаних задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку зі сталими коефіцієнтами, розроблено комбінований метод крайових елементів (МКЕ) і перетворення Лаґерра для їхнього чисельного розв'язування та побудовано відповідне програмне забезпечення. В рамках цих досліджень отримано такі основні результати.

1. Узагальнено обчислювальні схеми математичних моделей, які основані на поєднанні перетворення Лаґерра і МКЕ для чисельного розв'язування мішаних еволюційних задач у тривимірних областях зі складною геометрією.
2. Дотримуючись підходу ін'єкції залежностей з використанням абстрактних типів, розроблено чотирирівневу архітектуру програмного комплексу, яка забезпечує його розширення новими задачами і чисельними методами без переробки існуючого програмного коду.
3. Відповідно до концепції, закладеної в основу архітектури комплексу, для усіх досліджуваних математичних моделей розроблено модулі розв'язування відповідних мішаних задач і, крім того, продемонстровано модифікацію відповідних модулів для розв'язування нових класів задач.
4. Обґрунтовано математичну модель мішаної задачі для однорідного хвильового рівняння з динамічною крайовою умовою, а також досліджено розв'язки відповідних КІР методом Гальоркіна-МКЕ.
5. Отриманими результатами чисельних експериментів підтверджено ко-

ректність проведених теоретичних досліджень та ефективність запропонованих підходів до побудови спеціалізованого програмного комплексу.

Отримані теоретичні результати та побудований програмний комплекс можуть бути використані для моделювання еволюційних процесів різної природи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. *Линейные уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1964.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
3. Галазюк В. А. Метод поліномів Чебишева — Лагера в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами / В. А. Галазюк // Доп. АН УРСР. — 1981. — N 1. — С. 3–7.
4. Глова А. Р. Про застосування потенціалів із запізненням в початково-крайових задачах для хвильового рівняння / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук // Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2018)", 26-28 вересня 2018, Львів. — Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2018. — С. 39–42.
5. Глова А. Р. Про розв'язування задач для хвильового рівняння з імпедансними крайовими умовами з використанням перетворення Лаґерра і МГЕ / А. Р. Глова, С. В. Літинський, А. О. Музичук // Матеріали XXV Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2019)", 24-27 вересня 2019, Львів. — Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2019. — С. 52–56.
6. Глова А. Р. Про розв'язування залежних від часу граничних інтегральних рівнянь у початково-крайових задачах для хвильового рівняння у вагових просторах Лебега / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Му-

зичук, А. О. Музичук // Матеріали XXVI Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та комп’ютерних наук (APAMCS-2021)”, 27-28 вересня 2021, Львів. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2021. — С. 80-84.

7. Глова А. Р. Система MultiMathFramework для розв’язування початково-крайових задач з використанням методу граничних елементів та перетворення Лаґерра / А. Р. Глова, О. В. Кір // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2020. – Вип. 28. – С. 27-44.
8. Глова А. Р. Чисельне розв’язування початково-крайових задач для хвильового рівняння із застосуванням формули Кірхгофа та перетворення Лаґерра / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук, А. О. Музичук // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2019. – Вип. 27. – С. 18-33.
9. Глова А. Р. Чисельне розв’язування початково-крайової задачі Робіна для однорідного хвильового рівняння / А. Р. Глова // Матеріали Міжнародної студентської наукової конференції з прикладної математики та комп’ютерних наук (СНКПМКН-2018), 2018, Львів. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2018. – С. 19–20.
10. Ладыженская О.Я. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
11. Літинський С. В. Про поєднання перетворення Лагера і методу граничних елементів для розв’язування інтегральних рівнянь запізнюючих потенціалів / С. В. Літинський, Ю. А. Музичук, А. О. Музичук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — [2017].
12. Літинський С. В. Розв’язування мішаних задач для хвильового рівняння з використанням запізнюючих поверхневих потенціалів та перетворення Лаґера / С. В. Літинський, А. О. Музичук // Мат. сту-

дії. — 2015. — Т. 44. — N 2. — С. 185–203.

13. Людкевич И. В. Численное решение краевых задач для волнового уравнения / И. В. Людкевич, А. Е. Музычук. — Львов: ЛГУ, 1990. — 80 с.
14. Людкевич Й. В. Чисельне розв'язування крайової задачі Діріхле для рівняння теплопровідності методами інтегральних перетворень та інтегральних рівнянь у випадку незамкнутих осесиметричних поверхонь / Й. В. Людкевич, Р. Б. Скасків // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 1989. — N 31. — С. 2–8.
15. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы/Г.И.Марчук, В.И.Агошков. — М.: Наука, 1981. — 416 с.
16. Мартін Р. Чиста архітектура: Мистецтво розроблення програмного забезпечення / пер. з англ. І. Бондар-Терещенко. — Харків: Вид-во "Ранок": Фабула, 2021. — 368 с.
17. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М.: Наука, 1983. — 424 с.
18. Пасичнык Р. М. Численное решение гранично-временного интегрального уравнения типа волнового потенциала: интегральные уравнения в прикладном моделировании / Р. М. Пасичнык // Тез. докл. 2-й респ. науч.-техн. конф. — Киев, 1986. — С. 175–176.
19. Положий Г. Н. Уравнения математической физики / Г. Н. Положий. — М.: Высшая школа, 1964. — 560 с.
20. Пучка В.А. Входной язык пакета программ АМИР // Численное решение граничных задач математической физики на незамкнутых поверхностях методом интегральных уравнений / Львов. ун-т. Львов, 1988. -С.48-65. Деп. в УкрНИИНТИ 16.12.88, N2987-Ук88.
21. Хапко Р.С, Переймибіда А.А. Метод потенціалів розв'язування початково-крайових задач для телеграфного рівняння на площині //

Теоретична електротехніка.- 1996.- Вип. 53.- С.73-82.

22. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач / Г. А. Шинкаренко. — К.: НМК ВО, 1991. — 88 с.
23. AcousticBEM. – https://github.com/fjargsto/abem.
24. Ballani J. Numerical solution of exterior Maxwell problems by Galerkin BEM and Runge — Kutta convolution quadrature / J. Ballani, L. Banjai, S. Sauter, A. Veit // Numer. Math. — 2013. — N 123. — P. 643–670.
25. Bamberger A. Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retarde de la diffraction d'une onde acoustique (I) / A. Bamberger, T. Ha Duong // Math. Methods Appl. Sci. — 1986. — N 8 (3). — P. 405–435.
26. Bamberger A. Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigide / A. Bamberger, T. Ha Duong // Math. Methods Appl. Sci. — 1986. — N 8. — P. 598–608.
27. Banjai L. Convolution quadrature for the wave equation with a nonlinear impedance boundary condition. / L. Banjai, A. Rieder // Mathematics of Computation — Volume 87. — P. 1783-1819; doi:10.1090/mcom/3279
28. Banjai L. Time-domain Dirichlet-to-Neumann map and its discretization / L. Banjai // IMA J. Numer. Analysis. — 2014. — N 34. — P. 1136–1155.
29. Bebendorf M. Hierarchical matrices: a means to efficiently solve elliptic boundary value problems / M. Bebendorf. — Springer Science & Business Media, 2008.
30. BEM++. – https://gow.epsrc.ukri.org/NGBOViewGrant.aspx?GrantRef=EP/I030042/1.
31. BESLE. – https://researchportal.port.ac.uk/en/publications/besle-boundary-element-software-for-3d-linear-elasticity.
32. Bempp. – http://bempp.com.

33. Bruno O.P. "Regularized integral equations and fast high-order solvers for sound-hard acoustic scattering problems"/ O.P. Bruno, T. Elling and C. Tur. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 91, no. 10, pp. 1045-1072, 2012.
34. Chapko R. On a boundary integral solution of a lateral planar Cauchy problem in elastodynamics/R. Chapko, B. Johansson, L. Mindrinos//J.of Comp.and Appl.Math. – Vol. 367, March 2020, 112463.– https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112463
35. Chapko R. Numerical solution of the Dirichlet initial boundary value problem for the heat equation in exterior 3-dimensional domains using integral equations / R. Chapko, B. Johansson // J. of Eng. Math., Springer. — 2016. — P. 17.
36. Chapko R. On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations / R. Chapko, R. Kress // Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications. Ser. in Math. Analysis and Applications. — 2000. — N 2. — P. 55–69.
37. Chapko R. A projected iterative method based on integral equations for inverse heat conduction in domains with a cut/ Roman Chapko, B. Tomas Johansson, Vasyl Vavrychuk//Inverse Problems. — Vol. 29, Number 6, Article 065003. – https://doi.org/10.1088/0266-5611/29/6/065003.
38. Chapko R. Wave propagation from lateral Cauchy data using a boundary element method / Roman Chapko, B. Tomas Johansson, Yuriy Muzychuk, Andriy Hlova // Wave Motion. – Vol.91, November 2019, Article 102385.– https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102385.
39. Colton D. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, 3rd edn/

D.Colton , R.Kress // Applied mathematical sciences. Springer, Berlin.— 2013.

40. Costabel M. Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results / M. Costabel // SIAM J. on Math. Analysis. — 1988. — N 19. — P. 613–626.
41. Danson D., Brebbia C.A., Adey R.A. The BEASY system / D. Danson, C. A. Brebbia, R. A. Adey // Advances in Engineering Software. – 1982. – N 2(4). – P. 68-74. – https://doi.org/10.1016/S0141-1195(82)80056-9.
42. Daursen S., Seemann M. Dependency Injection Principles, Practices, and Patterns / S. Daursen, M. Seemann. – Manning Publications Co., 2019. – 552 p. – ISBN: 9781617294730.
43. Dautray R., Lions J.L. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology / Functional and Variational Methods, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. – 1988. - Vol.2.
44. Dautray R. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology / R. Dautray, J. L. Lions. — Berlin: Springer-Verlag, 1992. — Vol. 5: Evolution problems I. — 742 p.
45. Dautray R. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology / R. Dautray, J. L. Lions. — Berlin: Springer-Verlag, 1992. — Vol. 4: Integral Equations and Numer. Methods. — 493 p.
46. Davies P. J. Stability and convergence of collocation schemes for retarded potential integral equations / P. J. Davies, D. B. Duncan // SIAM J. Numer. Anal. — 2004. –N 42. — P. 1167–1188.
47. Dominguez V. Some properties of layer potentials and boundary integral operators for wave equation / V. Dominguez, F.-G. Sayas // J. of Integral Equations and Applications. — 2013. — N 25 (2). — P. 253–294.
48. Gamma E. Design Patterns: Elements of Reusable Object-Oriented

Software / E. Gamma., R. Helm., R. Johnson., J. Vlissides. — Addison-Wesley Professional Computing Series, 1994. — ISBN: 0-201-63361-2.

49. Hunt Andrew. The Pragmatic Programmer: From Journeyman to Master / Andrew Hunt, David Thomas. — Addison Wesley, 1999. — ISBN: 0-201-61622-X.
50. Hackbusch W. Hierarchical matrices: algorithms and analysis / W. Hackbusch // Springer Ser. in Computational Math. — Vol. 49. — 2015. — 511 p.
51. Ha-Duong T. On retarded potential boundary integral equations and their discretisation / T. Ha-Duong // Topics in computational wave propagation. Direct and inverse problems. — Berlin: Springer-Verlag, 2003. — P. 301–336.
52. Hassell M. A new and improved analysis of the time domain boundary integral operators for acoustics / M. Hassell, T. Qiu, T. Sanchez-Vizuet, F.-J. Sayas // Dep. of Math. Sciences. — 2015. — P. 1–22.
53. Hassell M. Convolution quadrature for wave simulations / M. Hassell, F.-J. Sayas. // Numer. Simulation in Physics and Engineering. — 2016. — N 9. — P. 71–75.
54. Hlova A. R. Coupling of Laguerre Transform and Fast BEM for solving Dirichlet initial-boundary value problems for the wave equation / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // J. of Computational and Appl. Math. – 2018. – N 2 (128). – P. 42–60.
55. Hlova A. R. Numerical solution of initial boundary-value problem for homogeneous wave equation with dynamic boundary conditions using Laguerre transform on time variable and boundary element method. / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Y. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // Proceedings of XXVI International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave

Theory (DIPED), 2021, Tbilisi. — IEEE, 2021. — P. 222-227. — https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552285.

56. Hlova A. On Laguerre-Fast-BEM for Robin initial-boundary value problems for the wave equation / A. Hlova, A. Muzychuk // Proceedings of the International Conference “Ukrainian Conference on Applied Mathematics” dedicated to the 100th birth anniversary of Professor Olexandr Kostovskiy, 28-30 September, 2017, Lviv. — Lviv: PAIS, 2017. — P. 59–60.
57. Hlova A.R. On solution of the initial-value problem for homogeneous wave equation with dynamic boundary condition in weighted Lebesgue spaces / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // J. of Numerical and Appl. Math. — 2021. — N 3 (137). — P. 76–98.
58. Hsiao G. C. Boundary integral equations / G. C. Hsiao, W. L. Wendland // Appl. Math. Sciences. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. — 620 p.
59. Hsiao G. C. Time-Domain Boundary Integral Methods in Linear Thermoelasticity / G. C. Hsiao, T. Sánchez-Vizuet // SIAM J.on Math. Analysis –2020.— Vol. 52, Iss. 3. — doi: 10.1137/19M1298652
60. Illyashenko L.N. "Spectral Surface Integral Equation method for plasmonic nanostructures"/ L. N. Illyashenko // 2019 XXIVth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), pp. 40-44, September 2019.
61. Jacobson I. Unified Software Development Process/ Ivar Jacobson, Grady Booch, James Rumbaugh – Addison-Wesley, 1999.
62. Jung B. H. Time and frequency domain solutions of EM problems using integral equations and a hybrid methodology / B. H. Jung, T. K. Sarkar, Y. Zhang et al. — 2010. — 485 p.
63. Keilson J. The bilateral Laguerre transform / J. Keilson, W. Nunn, U. Sumita // Appl. Math. and Computation. — 1981. — Vol. 8. — Iss. 2. —

P. 137–174.

64. Kielhorn L. Convolution quadrature method-based symmetric Galerkin boundary element method for 3-D elastodynamics / L. Kielhorn, M. Schanz // Internat. J. Numer. Methods Engrg. — 2008. — N 76. — P. 1724–1746.
65. Laliena A.R., Sayas F.-J. *Theoretical aspects of the application of convolution quadrature to scattering of acoustic waves*// Numer. Math. –2009. – 112(4). – P. 637-678.
66. Laliena A. R. A distributional version of Kirchhoff's formula / A. R. Laliena, F. J. Sayas // J. of Math. Analysis and Applications. — 2009. — N 1. — P. 197–208.
67. Lions J.L. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications/ J.L.Lions, E.Magenes, vol.1. – Berlin: Springer, 1972. — 374 p.
68. Litynskyy S. On the generalized solution of the initial-boundary value problems with Neumann condition for the wave equation by the use of retarded double layer potential and the Laguerre transform / S. Litynskyy, A. Muzychuk // J. of Computational and Appl. Math. — 2016. — N 2 (122). — P. 21–39.
69. Litynskyy S. On the numerical solution of the initial boundary value problem with Neumann condition for the wave equation by the use of the laguerre transform and boundary elements method / S. Litynskyy, Y. Muzychuk, A. Muzychuk // Acta Mechanica et Automatica, The J. of Bialystok Techn. Univ. — Vol. 10. — N 4. — 2016. — P. 285–290.
70. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. I/C. Lubich // Numerische Mathematik. — 1988. — N 52(2). — P. 129–145.
71. Martin R. C. The Dependency Inversion Principle / R. C. Martin. // C++ Report — SIGS Publications Group. — 1996.
72. MatLab. – https://www.mathworks.com/products/matlab.html.

73. Messner M. Fast Boundary Element Methods in Acoustics / M. Messner. —Verlag der Technischen Universitaet Graz. — 2012.

74. McLean W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations / W. McLean. — Cambridge: Cambridge univ. press, 2000. — 353 p.

75. Muzychuk Y. On the boundary integral equation method for exterior boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Y. Muzychuk // J. of Computational and Appl. Math. — 2014. — N 2 (116) — P. 96–116.

76. Muzychuk Y. A. On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Y. A. Muzychuk, R. S. Chapko // Matematychni Studii. — 2012. — N 1 (38). — P. 12–34.

77. Muzychuk Yu. On the boundary integral equation method for boundary-value problems for a system of elliptic equations of the special type in partially semi-infinite domains/ Yu. Muzychuk, R. Chapko // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2012. – N 11. – P. 20-27 (in Ukrainian).

78. OpenBEM. – http://www.openbem.dk/docs/OpenBEM-VCH-PMJ_IN2010.pdf.

79. PyBEM2D. – https://github.com/BinWang0213/PyBEM2D.

80. Rjasanow S. The fast solution of boundary integral equations / S. Rjasanow, O. Steinbach. — Berlin: Springer, 2007. — 277 p.

81. Saad Y. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems / Y. Saad, M. H. Schultz // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1986. — Vol. 7. — Iss. 3. — P. 856–869.

82. Sauter S. Galerkin method for retarded boundary integral equations with smooth and compactly supported temporal basis functions / S. Sauter,

A. A. Veit // Numer. Math. — 2013. — N 123, — P. 145–176.

83. Sayas F.-J. Retarded potentials and time domain boundary integral equations: a road-map / F.-J. Sayas. — Springer Intern. Publ., 2016. — 241 p.
84. Steinbach O. Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems. Finite and boundary elements / O. Steinbach. — New York: Springer Science, 2008. — 383 p.
85. Ulambator. – https://sourceforge.net/projects/ulambator.
86. WolframAlpha Computational Intelligence – https://www.wolframalpha.com.

Додаток А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові статті у фахових виданнях:

1. Hlova A. R. Coupling of Laguerre Transform and Fast BEM for solving Dirichlet initial-boundary value problems for the wave equation / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // J. of Numerical and Appl. Math. — 2018. — N 2 (128). — P. 42–60.
2. Chapko R. Wave propagation from lateral Cauchy data using a boundary element method / Roman Chapko, B. Tomas Johansson, Yuriy Muzychuk, Andriy Hlova // Wave Motion. – Vol.91, November 2019, Article 102385. – https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102385.
3. Глова А. Р. Чисельне розв'язування початково-крайових задач для хвильового рівняння із застосуванням формули Кірхгофа та перетворення Лаґерра / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук, А. О. Музичук // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2019. – Вип. 27. – С. 18-33.
4. Глова А. Р. Система MultiMathFramework для розв'язування початково-крайових задач з використанням методу граничних елементів та перетворення Лаґерра / А. Р. Глова, О. В. Кір // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2020. – Вип. 28. – С. 27-44.
5. Hlova A.R. On solution of the initial-value problem for homogeneous wave equation with dynamic boundary condition in weighted Lebesgue spaces / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // J. of Numerical and Appl. Math. — 2021. — N 3 (137). — P. 76–98.

Апробація результатів дисертації:

6. Hlova A. On Laguerre-Fast-BEM for Robin initial-boundary value problems for the wave equation / A. Hlova, A. Muzychuk // Proceedings of the International Conference "Ukrainian Conference on Applied Mathematics" dedicated to the 100th birth anniversary of Professor Olexandr Kostovskiy, 28-30 September, 2017, Lviv. — Lviv: PAIS, 2017. — P. 59–60. (*Міжнародна конференція "Ukrainian Conference on Applied Mathematics" присвячена 100-річчю від дня народження проф. Олександра Костовського, м. Львів, Україна, 28-30 вересня 2017 р., форма участі - очна, усна доповідь*).
7. Глова А. Р. Чисельне розв'язування початково-крайової задачі Робіна для однорідного хвильового рівняння / А. Р. Глова // Матеріали Міжнародної студентської наукової конференції з прикладної математики та комп'ютерних наук (СНКПМКН-2018), 2018, Львів. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2018. – С. 19–20. (*Міжнародна студентська наукова конференція з прикладної математики та комп'ютерних наук, м. Львів, Україна, 2018 р., форма участі - очна, усна доповідь*).
8. Глова А. Р. Про застосування потенціалів із запізненням в початково-крайових задачах для хвильового рівняння / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук // Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2018)", 26-28 вересня 2018, Львів. — Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2018. — С. 39–42. (*XXIV Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2018)", м. Львів, Україна, 26-28 вересня 2018 р., форма участі - очна, усна доповідь*).

9. Глова А. Р. Про розв'язування задач для хвильового рівняння з імпедансними крайовими умовами з використанням перетворення Лаґерра і МГЕ / А. Р. Глова, С. В. Літинський, А. О. Музичук // Матеріали XXV Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2019)", 24-27 вересня 2019, Львів. — Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2019. — С. 52–56. (*XXV Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2019)", м. Львів, Україна, 24-27 вересня 2019 р., форма участі - очна, усна доповідь*).
10. Hlova A. R. Numerical solution of initial boundary-value problem for homogeneous wave equation with dynamic boundary conditions using Laguerre transform on time variable and boundary element method. / A. R. Hlova, S. V. Litynskyy, Y. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // Proceedings of XXVI International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), 2021, Tbilisi. — IEEE, 2021. — P. 222-227. — https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552285. (*XXVI Міжнародний науковий семінар "Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)", м. Тбілісі, Грузія, 8-10 вересня 2021 р., форма участі - дистанційна, усна доповідь*).
11. Глова А. Р. Про розв'язування залежних від часу граничних інтегральних рівнянь у початково-крайових задачах для хвильового рівняння у вагових просторах Лебега / А. Р. Глова, С. В. Літинський, Ю. А. Музичук, А. О. Музичук // Матеріали XXVI Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук (APAMCS-2021)", 27-28 вересня 2021, Львів. — Львів: Львівський

національний університет імені Івана Франка, 2021. — С. 80-84. (*XXVI Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук (APAMCS-2021)" присвячена 100-річчю проф. Н.П. Флейшмана, 360-річчю Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, Україна, 27-28 вересня 2021 р., форма участі - дистанційна, усна доповідь*).