АНОТАЦІЯ

Собко. Б. Ю. Термодинамічні функції систем із дробовими статистиками. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 — «Фізика та астрономія», Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2022. Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2022.

Дану дисертацію присвячено вивченню термодинаміки систем частинок, які можуть бути описані дробовими статистиками, що узагальнюють статистики Бозе–Айнштайна та Фермі–Дірака.

До першої групи задач належать дослідження статистичних властивостей частинок, що підпорядковуються еніонній статистиці, тобто, так званих еніонів. На відміну від бозонів чи ферміонів, для таких частинок перестановка приводить до довільної зміни фази хвильової функції (звідси й походить назва *anyon*). Ефективно така поведінка можлива у двовимірних системах. Друга група задач пов'язана з вивченням кількох типів дробових статистик, отриманих через узагальнення виразів для чисел заповнення. До них належать фермі-газ, деформований адитивною q-експонентою Цалліса, а також низка модифікацій статистик Поліхронакоса та Голдейна–Ву.

У роботі розглянуто абелеві та неабелеві еніони. Для останніх перестановка частинок змінює не лише фазу, але й саму хвильову функцію. Для них проаналізовано два типи, залежно від параметра жорсткості — з м'якою та твердою серцевиною.

Для першого типу пропрацьовано детальний опис термодинаміки системи еніонів, що мають окрім електричного ще і магнітний заряд. Дослідження ґрунтується на використанні другого віріального коефіцієнта та поправки до нього. Для опису властивостей системи було використано розрахунок спектру двох еніонів у межах теорії збурень. Розгляд системи частинок з магнітними зарядами, розміщеними в постійному магнітному полі, забезпечується вибором векторних потенціальних доданків у формі $\mathbf{A}^{(\mathrm{e})} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_0, \mathbf{r}]$, $\mathbf{A}^{(\mathrm{m})} = \mathbf{a}t$, де $\mathbf{B}_0$ і $\mathbf{a}$ є сталими векторами. Постулюючи, що $a \equiv |\mathbf{a}|$ є невеликим числовим значенням, ми автоматично можемо вра-

хувати, що часова залежність є досить слабкою. Цей підхід дозволяє працювати в адіабатичному наближенні. За допомогою теорії збурень було розраховано енергетичний спектр системи двох еніонів, що лінійно залежить від введеної змінної. У тексті роботи оцінено порядок значення параметра a та проаналізовано межі реальної застосовності і детектування полів такого порядку, за якого поправки набувають допустимих, тобто досить малих значень. Показано, що врахування внеску від гіпотетичних магнітних зарядів знімає виродження за орбітальним квантовим числом для енергетичних рівнів. Отримано вираз для поправки другого віріального коефіцієнта Δb_2. Продемонстровано цікаву залежність — при $\alpha < 0.5$, тобто при бозонній стороні, ця поправка має екстремум, а саме — мінімум або максимум залежно від знака добутку електричних і магнітних зарядів $e\mu$. При наближенні α до ферміонної сторони, тобто при $\alpha \to 1$, залежність поправки до другого віріального коефіцієнта стає лінійною. Також детально розраховано поправку до магнітної сприйнятливості. Зрозуміло, що аналогічним чином можна розраховувати поправки до інших термодинамічних функцій.

Опис термодинаміки системи багатьох частинок є важливою складовою фізичної науки. Останнім часом багато робіт присвяченню вивченню цього питання як у тривимірному просторі, так і у двовимірному. Зокрема в останньому і виникають еніони. І якщо для абелевих еніонів є достатньо результатів за різних умов, як реальних, так і чисто гіпотетичних, то для неабелевих можна знайти лише досить обмежену частину доробку. Власне, саме тому наступною опрацьованою проблематикою стало завдання отримати більше інформації по опису цього типу частинок. Отож, для другого виду еніонів — неабелевих — досліджено питання другого віріального коефіцієнта. Вивчення неабелевих еніонів суттєво ускладнюється тим, що залежно від типу жорсткості серцевини вираз для другого віріального коефіцієнта є різним. І якщо у випадку твердої серцевини він має досить зручну форму запису, то для м'якої — набуває дуже громіздкого вигляду, а тому з ним дуже складно працювати, як аналітично, так і чисельно. Тому для спрощення опису було вирішено запропонувати оригінальний спосіб вираження зв'язку параметрів їх віріальних коефіцієнтів та параметрів двопараметричних дробових статистик, щоб описувати систему еніонів через останні. Очевидно, що це було зроблено з врахуванням кількості параметрів статистик. Для еніонів з твердою серцевиною було використано неадитивні та неповні модифікації q-експонентою Цалліса статистик Поліхронакоса та Голдейна–Ву. Розраховано значення параметрів дробових

статистик, за яких еніони цього виду можуть бути через них описані. Для неабелевих еніонів з м'якою серцевиною продемонстровано результати зв'язку лише з коефіцієнтами неадитивної статистики Поліхронакоса. Очевидно, що таким же чином можна отримати зв'язок і з іншими двопараметричними статистиками.

Окрім вище написаного, також було опрацьовано та порівняно два варіанти віріального розвинення, які можна зустріти в науковій літературі. Один з них ґрунтується на розкладі в рівнянні стану в ряд за степенями густини. Інший підхід базується на розкладі статистичної суми в ряд по степеням активності. В роботі подано виведення зв'язку обох віріальних коефіцієнтів.

Окремим питанням було розв'язано задачу для фермі-системі зі слабкою контактною взаємодією, описаною через неадитивну статистику Поліхронакоса. Безсумнівно, що для такої постановки задачі є доречним наступний запис, що характеризує невеликі відхилення від стандартної статистики Фермі: $q = 1 + r$ і $\gamma = 1 + \eta$. У роботі детально показано отримання співвідношення між статистичними параметрами і параметрами взаємодії реальної фермі-системи, використовуючи віріальне розвинення. Зокрема, для двовимірного фермі-газу з контактними взаємодіями величина, що характеризує змодельовану систему дорівнює $\Lambda = E_\mathrm{b}/T$, де E_b — енергія зв'язку єдиного доступного зв'язаного стану. Невеликі відхилення γ і q від одиниці можна отримати у вигляді рядів за $1/(\ln \Lambda^2)$. У випадку неабелевих еніонів із м'якою серцевиною можна виразити γ і q через три величини — ізоспін l, силу взаємодії κ і параметр жорсткості τ з певною свободою. Головним рушієм постановки цього питання було максимальне спрощення змальовування цього типу статистики. Через простоту і зручність, очевидно, що вибір припав на двопараметричні статистики.

У роботі також детально показано вплив використання деформації до узагальнення розподілу Фермі, використовуючи неадитивну q-експоненту Цалліса замість звичайної у виразі для чисел заповнення. Дану модифікацію застосовано у двох моделях, які відрізняються між собою у плані вибору змінної у показнику експоненти, тобто зміну фактора Гіббса. У першому випадку це хімічний потенціал μ, а у другому — активність, чи іншими словами, фугативність z. Тобто, перша та друга модифікації, відповідно, матимуть вигляд:

$$n_1(\varepsilon, \mu, T) = \frac{1}{e_q^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1}, \qquad n_2(\varepsilon, z, T) = \frac{1}{z^{-1} e_q^{\varepsilon/T} + 1}.$$

Детально розглянуто низько- та високотемпературну границі. Виведено залежності для хімічного потенціалу та активності від температури для двох моделей як

для границі $T \to 0$, так і для $T \to \infty$. Показано, що результат опису з використанням першої моделі збігається зі звичайним розподілом Фермі лише у границі низьких температур, натомість у границі високих температур залежно від того, з якого боку підходити до адитивної межі $q = 1$ чи зліва, чи справа, питома ізохорна теплоємність прямує чи до нескінченності, чи до нуля, а не до константи, як то є для звичайного фермі–газу. Для другої моделі ж маємо кардинально іншу картину: в границі низьких температур продемонстровано вражаючі результати відхилення від третього закону термодинаміки, а саме — ненульова теплоємність. Знову ж таки, залежно від значення q маємо два різні варіанти. Зліва від одиниці за нульової температури теплоємність набуває певного додатної величини, а справа — теплоємність набуває нульового значення за деякої додатної температури. В границі ж високих температур опис схожий до звичайного Фермі-газу — значення питомої ізохорної теплоємності прямує до константи, залежної від вимірності простору, що розглядають. Пораховано значення ізохорної теплоємності C_V для другої моделі при $T \to 0$ за різних значень параметрів неадитивності q та показника $s = D/2$ в виразі для густини станів (D — вимірність простору).

Для більшої наочності усі результати підкріплені відповідними аналітичними та числовими розрахунками, а також рисунками та таблицями.

Ключові слова: теорія збурень, віріальний розклад, магнітний заряд, фермі-газ, ентропія Цалліса, q-експонента Цалліса, абелеві еніони, неабелеві еніони, двопараметричні дробові статистики, неадитивна статистика, неповна статистика.

ABSTRACT

Sobko B. Y. Thermodynamic functions of the system with fractional statistics. — Manuscript.

A thesis for a Doctor of Philosophy degree on the specialty 104 — Physics and Astronomy, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2022.

This thesis is dedicated to the study of the thermodynamics of systems of particles, which can be described by fractional statistics that generalize the Bose–Einstein and Fermi–Dirac statistics.

The first group of tasks includes the statistical properties investigation of particles subject to anyonic statistics, i.e., so-called anyons. Unlike bosons or fermions, for such particles the permutation leads to an arbitrary (any) change in the phase of the wave function (hence the name *anyon*). Effectively, this behavior can occur in two-dimensional systems. The second group of problems is related to the study of several types of fractional statistics obtained through the generalization of expressions for filling numbers. These include the Fermi gas deformed by the non-additive Tsallis q-exponential, as well as a number of modifications of the Polychronakos and Haldane–Wu statistics.

Abelian and non-Abelian anyons are considered in the work. For the latter, a permutation of particles changes not only the phase, but also the wave function itself. Two types were analyzed for the non-Abelian anyons, depending on different values of hard-core parameter — with a soft and hard core.

For the first type, a detailed description of the thermodynamics of the system of anyons, which have, in addition to the electric charge, also a magnetic charge, has been worked out. The study is based on the usage of the second virial coefficient and its correction. To describe the properties of the system, the calculation of the spectrum of two anyons within the framework of perturbation theory was used. Consideration of a system of particles with magnetic charges placed in a constant magnetic field is ensured by the selection of vector potential terms in the form $\mathbf{A}^{(\mathrm{e})} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_0, \mathbf{r}], \mathbf{A}^{(\mathrm{m})} = \mathbf{a}t$, where $\mathbf{B}_0$ and $\mathbf{a}$ are constant vectors. By postulating that $a \equiv |\mathbf{a}|$ is a small numerical value, we can automatically taken into account that the time dependence is quite weak. This approach allows working in the adiabatic approximation. Using perturbation theory, the energy spectrum of the system of two anyons was calculated, which depends linearly on the introduced variable. In the text of the work, the order of the value of the

parameter a is estimated and the limits of real applicability and detection of fields of such an order are analyzed, for which the corrections acquire admissible, that is, rather small values. It is shown that taking into account the contribution from hypothetical magnetic charges removes the degeneracy in the orbital quantum number for the energy levels. The expression for the correction of the second virial coefficient Δb_2 is obtained. An interesting dependence was demonstrated — at $\alpha < 0.5$, that is, at the bosonic side, this correction has an extremum, namely — minimum or maximum depending on the sign of the product of the electric and magnetic charges $e\mu$. When α approaches the fermionic side, that is, when $\alpha \to 1$, the dependence of the correction on the second virial coefficient becomes linear. The correction for magnetic susceptibility is also calculated in detail. It is clear that corrections to other thermodynamic functions can be evaluated in a similar way.

Description of the thermodynamics of a system of many particles is an important component of physical science. Recently, many works have been devoted to the study of this issue both in three-dimensional space and in two-dimensional space. In particular, anyons arise in the latter one. While for the Abelian anyons there are enough results under various conditions, both real and purely hypothetical, for non-Abelian ones one can find only a fairly limited part of the work. In fact, that is why the task of obtaining more information on the description of this type of particles became the next studied issue. So, for the second type of anyons — non-Abelian — the question of the second virial coefficient was investigated. The study of non-Abelian anyons is significantly complicated by the fact that, depending on the type of the hard-core parameter, the expression for the second virial coefficient is different. And if in the case of a hard core it has a fairly convenient form of recording, then for a soft one it takes on a very cumbersome appearance, and therefore it is very difficult to work with it, both analytically and numerically. Therefore, to simplify the description, it was decided to propose an original way of expressing the relationship between the parameters of their virial coefficients and the parameters of two-parametric fractional statistics in order to describe the system of anyons through the latter one. Obviously, this was done taking into account the number of statistics parameters. For anyons with a hard core, non-additive (with the Tsallis q-exponential) and incomplete modifications of Polychronakos and Haldane–Wu statistics were used. The values of the parameters of fractional statistics were calculated, according to which anyons of this type can

be described through them. For non-Abelian anyons with a soft core, the results of the connection only with the coefficients of non-additive Polychronakos statistics are demonstrated. It is obvious that in the same way it is possible to obtain a connection with other two-parameter statistics.

In addition to what was written above, two variants of virial expansion, which can be found in the scientific literature, were also analyzed and compared. One of them is based on the expansion in the equation of state in a power series of the density. Another approach is based on the expansion of the partition function in a series by degrees of fugacity. The work presents the derivation of the relationship between both virial coefficients.

As a separate issue, the problem for a Fermi system with a weak contact interaction described by non-additive Polychronakos statistics was solved. There is no doubt that the following notation, which characterizes small deviations from standard Fermi statistics, is appropriate for such a formulation of the problem: $q = 1+r$ and $\gamma = 1+\eta$. The work shows in detail how to obtain the relationship between the parameters of the statistics and interaction parameters of a real Fermi system using virial expansion. In particular, for a two-dimensional Fermi gas with contact interactions, the quantity characterizing the modeled system is equal to $\Lambda = E_\mathrm{b}/T$, where E_b is the binding energy of the only available bound state. Small deviations of γ and q from unity can be obtained as series in $1/(\ln \Lambda^2)$. In the case of soft-core non-Abelian anions, γ and q can be expressed in terms of three quantities — isospin l, interaction force κ and hard core parameter τ with some degree of freedom. The main driver for posing this question was the maximum simplification of drawing this type of statistics. Due to simplicity and convenience, it is obvious that the choice fell on two-parameter statistics.

The work also shows in detail the effect of using deformation to generalize the Fermi distribution using the non-additive Tsallis q-exponential instead of the usual one in the expression for the occupation numbers. This modification is applied in two models, which differ from each other in terms of the choice of variable in the exponent power, that is, the change in the Gibbs factor. In the first case, it is the chemical potential μ, and in the second it is the activity, or in other words, the fugacity z. That is, the first and second modifications, respectively, will look like this:

$$n_1(\varepsilon, \mu, T) = \frac{1}{e_q^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1}, \qquad n_2(\varepsilon, z, T) = \frac{1}{z^{-1} e_q^{\varepsilon/T} + 1}.$$

The low- and high-temperature limiting cases are considered in detail. The dependences

of the chemical potential and activity on temperature are derived for two models both for the limits of $T \to 0$ and for $T \to \infty$. It is shown that the result of the description using the first model coincides with the usual Fermi distribution only in the limit of low temperatures. On the other hand, in the limit of high temperatures, depending on whether we approach the additive limit $q = 1$ from the left side or from the right one, the isochoric specific heat capacity goes either to infinity or to zero, and not to a constant, as it is for an ordinary Fermi gas. For the second model, we have a radically different picture: in the limit of low temperatures, impressive results of deviation from the third law of thermodynamics, namely — non-zero heat capacity, have been demonstrated. Again, depending on the value of q, we have two different options. To the left of the unit at zero temperature, the heat capacity acquires a certain positive value, and to the right — the heat capacity acquires a zero value at some positive temperature. In the limit of high temperatures, the description is similar to the usual Fermi gas — the value of the specific isochoric heat capacity leads to a constant that depends on the dimensionality of the space under consideration. The value of the isochoric heat capacity C_V for the second model at $T \to 0$ was calculated for different values of the nonadditivity parameters q and the power $s = D/2$ in the expression for the density of states (D is the dimensionality of space).

For better clarity, all results are supported by appropriate analytical and numerical calculations, as well as figures and tables.

Key words: perturbation theory, virial expansion, magnetic charge, Fermi gas, Tsallis entropy, Tsallis q-exponential, Abelian anyons, non-Abelian anyons, two-parameter fractional statistics, non-additive statistics, incomplete statistics.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації, що відображають основні наукові результати дисертації

[1] **Sobko B.**, Rovenchak A. Effective modeling of physical systems with fractional statistics // Fiz. Nyzk. Temp. — 2022. — Vol. 48, No. 8. — P. 702–709; Low Temp. Phys. — 2022. — Vol. 48, No. 8. — P. 621–627. DOI: 10.1063/10.0012649 (**Q3**)

[2] **Собко Б.** Зв'язок параметрів другого віріального коефіцієнта неабелевих еніонів з двопараметричними дробовими статистиками // Укр. фіз. журн. — 2021. — Т. 66, № 7. — С. 595–600; **Sobko B.** Relationship between the parameters of the second virial coefficient of non-Abelian anyons and the two-parametric fractional statistics // Ukr. J. Phys. — 2021. — Vol. 66, No. 7. — P. 595–600. DOI: 10.15407/ujpe66.7.595 (**Q3**)

[3] Rovenchak A., **Sobko B.** Fugacity versus chemical potential in nonadditive generalizations of the ideal Fermi-gas // Physica A. — 2019. — Vol. 534. — Art. 122098. — 11 p. DOI: 10.1016/j.physa.2019.122098 (**Q2**)

[4] **Sobko B.**, Rovenchak A. Corrections to thermodynamics of the system of magnetically charged anyons // Fiz. Nizk. Temp. — 2019. — Vol. 45, No. 8. — P. 1029–1034; Low Temp. Phys. — 2019. — Vol. 45, No. 8. — P. 880–884. DOI: 10.1063/1.5116535 (**Q3**)

[5] **Собко Б.**, Ровенчак А. Суперадитивна модель ідеального фермі-газу поблизу абсолютного нуля // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. — 2019. — Вип.56. — С. 65–75. DOI: 10.30970/vph.56.2019.65

[6] **Собко Б.**, Ровенчак А. Спектр системи двох еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. — 2016. — Вип. 51. — С. 87–97.

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

[7] Собко Б., Ровенчак А. Неадитивний фермі-газ // 20-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 15-16 жовтня 2020. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 34.

[8] Собко Б. Вираження неабелевих еніонів через двопараметричні дробові статистики // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика-2020», Львів, 6-7 жовтня 2020 р.: Тези доповідей. — С. E4.

[9] Rovenchak A., Sobko B. Fermi-gas with nonadditive statistics // International Conference «XI Bolyai-Gauss-Lobachevsky (BGL-2019) Conference: Non-Euclidean, Non-Commutative Geometry and Quantum Physics». 19 May - 24 May 2019, Kiev, Ukraine. — P. 36.

[10] Собко Б. Поправки до термодинаміки системи еніонів з магнітними зарядами у сталому магнітному полі // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика-2019», Львів, 14-16 травня 2019 р.: Тези доповідей. — С. F4.

[11] Собко Б. Спектр системи двох еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика-2018», Львів, 15-17 травня 2018 р.: Тези доповідей. — С. E5.