Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Собко Богдана Юріївна

УДК 530.145 + 531.19

ДИСЕРТАЦІЯ
Термодинамічні функції систем із дробовими статистиками

104 — Фізика та астрономія
10 Природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
_____ Б. Ю. Собко
(підпис)

Науковий керівник: Ровенчак Андрій Адамович,
доктор фізико-математичних наук, професор

ЛЬВІВ — 2022

АНОТАЦІЯ

Собко. Б. Ю. Термодинамічні функції систем із дробовими статистиками. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 — «Фізика та астрономія», Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2022. Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2022.

Дану дисертацію присвячено вивченню термодинаміки систем частинок, які можуть бути описані дробовими статистиками, що узагальнюють статистики Бозе–Айнштайна та Фермі–Дірака.

До першої групи задач належать дослідження статистичних властивостей частинок, що підпорядковуються еніонній статистиці, тобто, так званих еніонів. На відміну від бозонів чи ферміонів, для таких частинок перестановка приводить до довільної зміни фази хвильової функції (звідси й походить назва *anyon*). Ефективно така поведінка можлива у двовимірних системах. Друга група задач пов'язана з вивченням кількох типів дробових статистик, отриманих через узагальнення виразів для чисел заповнення. До них належать фермі-газ, деформований адитивною q-експонентою Цалліса, а також низка модифікацій статистик Поліхронакоса та Голдейна–Ву.

У роботі розглянуто абелеві та неабелеві еніони. Для останніх перестановка частинок змінює не лише фазу, але й саму хвильову функцію. Для них проаналізовано два типи, залежно від параметра жорсткості — з м'якою та твердою серцевиною.

Для першого типу пропрацьовано детальний опис термодинаміки системи еніонів, що мають окрім електричного ще і магнітний заряд. Дослідження ґрунтується на використанні другого віріального коефі-

цієнта та поправки до нього. Для опису властивостей системи було використано розрахунок спектру двох еніонів у межах теорії збурень. Розгляд системи частинок з магнітними зарядами, розміщеними в постійному магнітному полі, забезпечується вибором векторних потенціальних доданків у формі $\mathbf{A}^{(\mathrm{e})} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_0, \mathbf{r}]$, $\mathbf{A}^{(\mathrm{m})} = \mathbf{a}t$, де $\mathbf{B}_0$ і $\mathbf{a}$ є сталими векторами. Постулюючи, що $a \equiv |\mathbf{a}|$ є невеликим числовим значенням, ми автоматично можемо врахувати, що часова залежність є досить слабкою. Цей підхід дозволяє працювати в адіабатичному наближенні. За допомогою теорії збурень було розраховано енергетичний спектр системи двох еніонів, що лінійно залежить від введеної змінної. У тексті роботи оцінено порядок значення параметра a та проаналізовано межі реальної застосовності і детектування полів такого порядку, за якого поправки набувають допустимих, тобто досить малих значень. Показано, що врахування внеску від гіпотетичних магнітних зарядів знімає виродження за орбітальним квантовим числом для енергетичних рівнів. Отримано вираз для поправки другого віріального коефіцієнта Δb_2. Продемонстровано цікаву залежність — при $\alpha < 0.5$, тобто при бозонній стороні, ця поправка має екстремум, а саме — мінімум або максимум залежно від знака добутку електричних і магнітних зарядів $e\mu$. При наближенні α до ферміонної сторони, тобто при $\alpha \to 1$, залежність поправки до другого віріального коефіцієнта стає лінійною. Також детально розраховано поправку до магнітної сприйнятливості. Зрозуміло, що аналогічним чином можна розраховувати поправки до інших термодинамічних функцій.

Опис термодинаміки системи багатьох частинок є важливою складовою фізичної науки. Останнім часом багато робіт присвяченню вивченню цього питання як у тривимірному просторі, так і у двовимірному. Зокрема в останньому і виникають еніони. І якщо для абелевих

еніонів є достатньо результатів за різних умов, як реальних, так і чисто гіпотетичних, то для неабелевих можна знайти лише досить обмежену частину доробку. Власне, саме тому наступною опрацьованою проблематикою стало завдання отримати більше інформації по опису цього типу частинок. Отож, для другого виду еніонів — неабелевих — досліджено питання другого віріального коефіцієнта. Вивчення неабелевих еніонів суттєво ускладнюється тим, що залежно від типу жорсткості серцевини вираз для другого віріального коефіцієнта є різним. І якщо у випадку твердої серцевини він має досить зручну форму запису, то для м'якої — набуває дуже громіздкого вигляду, а тому з ним дуже складно працювати, як аналітично, так і чисельно. Тому для спрощення опису було вирішено запропонувати оригінальний спосіб вираження зв'язку параметрів їх віріальних коефіцієнтів та параметрів двопараметричних дробових статистик, щоб описувати систему еніонів через останні. Очевидно, що це було зроблено з врахуванням кількості параметрів статистик. Для еніонів з твердою серцевиною було використано неадитивні та неповні модифікації q-експонентою Цалліса статистик Поліхронакоса та Голдейна–Ву. Розраховано значення параметрів дробових статистик, за яких еніони цього виду можуть бути через них описані. Для неабелевих еніонів з м'якою серцевиною продемонстровано результати зв'язку лише з коефіцієнтами неадитивної статистики Поліхронакоса. Очевидно, що таким же чином можна отримати зв'язок і з іншими двопараметричними статистиками.

Окрім вище написаного, також було опрацьовано та порівняно два варіанти віріального розвинення, які можна зустріти в науковій літературі. Один з них ґрунтується на розкладі в рівнянні стану в ряд за степенями густини. Інший підхід базується на розкладі статистичної суми в ряд по степеням активності. В роботі подано виведення зв'язку

обох віріальних коефіцієнтів.

Окремим питанням було розв'язано задачу для фермі-системі зі слабкою контактною взаємодією, описаною через неадитивну статистику Поліхронакоса. Безсумнівно, що для такої постановки задачі є доречним наступний запис, що характеризує невеликі відхилення від стандартної статистики Фермі: $q = 1 + r$ і $\gamma = 1 + \eta$. У роботі детально показано отримання співвідношення між статистичними параметрами і параметрами взаємодії реальної фермі-системи, використовуючи віріальне розвинення. Зокрема, для двовимірного фермі-газу з контактними взаємодіями величина, що характеризує змодельовану систему дорівнює $\Lambda = E_\mathrm{b}/T$, де E_b — енергія зв'язку єдиного доступного зв'язаного стану. Невеликі відхилення γ і q від одиниці можна отримати у вигляді рядів за $1/(\ln \Lambda^2)$. У випадку неабелевих еніонів із м'якою серцевиною можна виразити γ і q через три величини — ізоспін l, силу взаємодії κ і параметр жорсткості τ з певною свободою. Головним рушієм постановки цього питання було максимальне спрощення змальовування цього типу статистики. Через простоту і зручність, очевидно, що вибір припав на двопараметричні статистики.

У роботі також детально показано вплив використання деформації до узагальнення розподілу Фермі, використовуючи неадитивну q-експоненту Цалліса замість звичайної у виразі для чисел заповнення. Дану модифікацію застосовано у двох моделях, які відрізняються між собою у плані вибору змінної у показнику експоненти, тобто зміну фактора Гіббса. У першому випадку це хімічний потенціал μ, а у другому — активність, чи іншими словами, фугативність z. Тобто, перша та друга модифікації, відповідно, матимуть вигляд:

$$n_1(\varepsilon, \mu, T) = \frac{1}{e_q^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1}, \qquad n_2(\varepsilon, z, T) = \frac{1}{z^{-1} e_q^{\varepsilon/T} + 1}.$$

Детально розглянуто низько- та високотемпературну границі. Виведено залежності для хімічного потенціалу та активності від температури для двох моделей як для границі $T \to 0$, так і для $T \to \infty$. Показано, що результат опису з використанням першої моделі збігається зі звичайним розподілом Фермі лише у границі низьких температур, натомість у границі високих температур залежно від того, з якого боку підходити до адитивної межі $q = 1$ чи зліва, чи справа, питома ізохорна теплоємність прямує чи до нескінченності, чи до нуля, а не до константи, як то є для звичайного фермі–газу. Для другої моделі ж маємо кардинально іншу картину: в границі низьких температур продемонстровано вражаючі результати відхилення від третього закону термодинаміки, а саме — ненульова теплоємність. Знову ж таки, залежно від значення q маємо два різні варіанти. Зліва від одиниці за нульової температури теплоємність набуває певного додатної величини, а справа — теплоємність набуває нульового значення за деякої додатної температури. В границі ж високих температур опис схожий до звичайного Фермі-газу — значення питомої ізохорної теплоємності прямує до константи, залежної від вимірності простору, що розглядають. Порахувано значення ізохорної теплоємності C_V для другої моделі при $T \to 0$ за різних значень параметрів неадитивності q та показника $s = D/2$ в виразі для густини станів (D — вимірність простору).

Для більшої наочності усі результати підкріплені відповідними аналітичними та числовими розрахунками, а також рисунками та таблицями.

Ключові слова: теорія збурень, віріальний розклад, магнітний заряд, фермі-газ, ентропія Цалліса, q-експонента Цалліса, абелеві еніони, неабелеві еніони, двопараметричні дробові статистики, неадитивна статистика, неповна статистика.

ABSTRACT

Sobko B. Y. Thermodynamic functions of the system with fractional statistics. — Manuscript.

A thesis for a Doctor of Philosophy degree on the specialty 104 — Physics and Astronomy, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2022.

This thesis is dedicated to the study of the thermodynamics of systems of particles, which can be described by fractional statistics that generalize the Bose–Einstein and Fermi–Dirac statistics.

The first group of tasks includes the statistical properties investigation of particles subject to anyonic statistics, i.e., so-called anyons. Unlike bosons or fermions, for such particles the permutation leads to an arbitrary (any) change in the phase of the wave function (hence the name *anyon*). Effectively, this behavior can occur in two-dimensional systems. The second group of problems is related to the study of several types of fractional statistics obtained through the generalization of expressions for filling numbers. These include the Fermi gas deformed by the non-additive Tsallis q-exponential, as well as a number of modifications of the Polychronakos and Haldane–Wu statistics.

Abelian and non-Abelian anyons are considered in the work. For the latter, a permutation of particles changes not only the phase, but also the wave function itself. Two types were analyzed for the non-Abelian anyons, depending on different values of hard-core parameter — with a soft and hard core.

For the first type, a detailed description of the thermodynamics of the system of anyons, which have, in addition to the electric charge, also a

magnetic charge, has been worked out. The study is based on the usage of the second virial coefficient and its correction. To describe the properties of the system, the calculation of the spectrum of two anyons within the framework of perturbation theory was used. Consideration of a system of particles with magnetic charges placed in a constant magnetic field is ensured by the selection of vector potential terms in the form $\mathbf{A}^{(\mathrm{e})} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_0, \mathbf{r}], \mathbf{A}^{(\mathrm{m})} = \mathbf{a}t$, where $\mathbf{B}_0$ and $\mathbf{a}$ are constant vectors. By postulating that $a \equiv |\mathbf{a}|$ is a small numerical value, we can automatically taken into account that the time dependence is quite weak. This approach allows working in the adiabatic approximation. Using perturbation theory, the energy spectrum of the system of two anyons was calculated, which depends linearly on the introduced variable. In the text of the work, the order of the value of the parameter a is estimated and the limits of real applicability and detection of fields of such an order are analyzed, for which the corrections acquire admissible, that is, rather small values. It is shown that taking into account the contribution from hypothetical magnetic charges removes the degeneracy in the orbital quantum number for the energy levels. The expression for the correction of the second virial coefficient Δb_2 is obtained. An interesting dependence was demonstrated — at $\alpha < 0.5$, that is, at the bosonic side, this correction has an extremum, namely — minimum or maximum depending on the sign of the product of the electric and magnetic charges $e\mu$. When α approaches the fermionic side, that is, when $\alpha \to 1$, the dependence of the correction on the second virial coefficient becomes linear. The correction for magnetic susceptibility is also calculated in detail. It is clear that corrections to other thermodynamic functions can be evaluated in a similar way.

Description of the thermodynamics of a system of many particles is

an important component of physical science. Recently, many works have been devoted to the study of this issue both in three-dimensional space and in two-dimensional space. In particular, anyons arise in the latter one. While for the Abelian anyons there are enough results under various conditions, both real and purely hypothetical, for non-Abelian ones one can find only a fairly limited part of the work. In fact, that is why the task of obtaining more information on the description of this type of particles became the next studied issue. So, for the second type of anyons — non-Abelian — the question of the second virial coefficient was investigated. The study of non-Abelian anyons is significantly complicated by the fact that, depending on the type of the hard-core parameter, the expression for the second virial coefficient is different. And if in the case of a hard core it has a fairly convenient form of recording, then for a soft one it takes on a very cumbersome appearance, and therefore it is very difficult to work with it, both analytically and numerically. Therefore, to simplify the description, it was decided to propose an original way of expressing the relationship between the parameters of their virial coefficients and the parameters of two-parametric fractional statistics in order to describe the system of anyons through the latter one. Obviously, this was done taking into account the number of statistics parameters. For anyons with a hard core, non-additive (with the Tsallis q-exponential) and incomplete modifications of Polychronakos and Haldane–Wu statistics were used. The values of the parameters of fractional statistics were calculated, according to which anyons of this type can be described through them. For non-Abelian anyons with a soft core, the results of the connection only with the coefficients of non-additive Polychronakos statistics are demonstrated. It is obvious that in the same way it is possible to obtain a connection

with other two-parameter statistics.

In addition to what was written above, two variants of virial expansion, which can be found in the scientific literature, were also analyzed and compared. One of them is based on the expansion in the equation of state in a power series of the density. Another approach is based on the expansion of the partition function in a series by degrees of fugacity. The work presents the derivation of the relationship between both virial coefficients.

As a separate issue, the problem for a Fermi system with a weak contact interaction described by non-additive Polychronakos statistics was solved. There is no doubt that the following notation, which characterizes small deviations from standard Fermi statistics, is appropriate for such a formulation of the problem: $q = 1 + r$ and $\gamma = 1 + \eta$. The work shows in detail how to obtain the relationship between the parameters of the statistics and interaction parameters of a real Fermi system using virial expansion. In particular, for a two-dimensional Fermi gas with contact interactions, the quantity characterizing the modeled system is equal to $\Lambda = E_{\mathrm{b}}/T$, where E_{b} is the binding energy of the only available bound state. Small deviations of γ and q from unity can be obtained as series in $1/(\ln \Lambda^2)$. In the case of soft-core non-Abelian anions, γ and q can be expressed in terms of three quantities — isospin l, interaction force κ and hard core parameter τ with some degree of freedom. The main driver for posing this question was the maximum simplification of drawing this type of statistics. Due to simplicity and convenience, it is obvious that the choice fell on two-parameter statistics.

The work also shows in detail the effect of using deformation to generalize the Fermi distribution using the non-additive Tsallis q-exponential instead of the usual one in the expression for the occupation numbers. This modi-

fication is applied in two models, which differ from each other in terms of the choice of variable in the exponent power, that is, the change in the Gibbs factor. In the first case, it is the chemical potential μ, and in the second it is the activity, or in other words, the fugacity z. That is, the first and second modifications, respectively, will look like this:

$$n_1(\varepsilon, \mu, T) = \frac{1}{e_q^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1}, \qquad n_2(\varepsilon, z, T) = \frac{1}{z^{-1}e_q^{\varepsilon/T} + 1}.$$

The low- and high-temperature limiting cases are considered in detail. The dependences of the chemical potential and activity on temperature are derived for two models both for the limits of $T \to 0$ and for $T \to \infty$. It is shown that the result of the description using the first model coincides with the usual Fermi distribution only in the limit of low temperatures. On the other hand, in the limit of high temperatures, depending on whether we approach the additive limit $q = 1$ from the left side or from the right one, the isochoric specific heat capacity goes either to infinity or to zero, and not to a constant, as it is for an ordinary Fermi gas. For the second model, we have a radically different picture: in the limit of low temperatures, impressive results of deviation from the third law of thermodynamics, namely — non-zero heat capacity, have been demonstrated. Again, depending on the value of q, we have two different options. To the left of the unit at zero temperature, the heat capacity acquires a certain positive value, and to the right — the heat capacity acquires a zero value at some positive temperature. In the limit of high temperatures, the description is similar to the usual Fermi gas — the value of the specific isochoric heat capacity leads to a constant that depends on the dimensionality of the space under consideration. The value of the isochoric heat capacity C_V for the second model at $T \to 0$ was calculated for different values of the nonadditivity

parameters q and the power $s = D/2$ in the expression for the density of states (D is the dimensionality of space).

For better clarity, all results are supported by appropriate analytical and numerical calculations, as well as figures and tables.

Key words: perturbation theory, virial expansion, magnetic charge, Fermi gas, Tsallis entropy, Tsallis q-exponential, Abelian anyons, non-Abelian anyons, two-parameter fractional statistics, non-additive statistics, incomplete statistics.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації, що відображають основні наукові результати дисертації

[1] **Sobko B.**, Rovenchak A. Effective modeling of physical systems with fractional statistics // Fiz. Nyzk. Temp. 2022. Vol. 48, No. 8. P. 702–709; Low Temp. Phys. 2022. Vol. 48, No. 8. P. 621–627. DOI: 10.1063/10.0012649 (**Q3**)

[2] **Собко Б.** Зв'язок параметрів другого віріального коефіцієнта неабелевих еніонів з двопараметричними дробовими статистиками // Укр. фіз. журн. 2021. Т. 66, № 7. С. 595–600; **Sobko B.** Relationship between the parameters of the second virial coefficient of non-Abelian anyons and the two-parametric fractional statistics // Ukr. J. Phys. 2021. Vol. 66, No. 7. P. 595–600. DOI: 10.15407/ujpe66.7.595 (**Q3**)

[3] Rovenchak A., **Sobko B.** Fugacity versus chemical potential in non-additive generalizations of the ideal Fermi-gas // Physica A. 2019. Vol. 534. Art. 122098. 11 p. DOI: 10.1016/j.physa.2019.122098 (**Q2**)

[4] **Sobko B.**, Rovenchak A. Corrections to thermodynamics of the system of magnetically charged anyons // Fiz. Nizk. Temp. 2019. Vol. 45, No. 8. P. 1029–1034; Low Temp. Phys. 2019. Vol. 45, No. 8. P. 880–884. DOI: 10.1063/1.5116535 (**Q3**)

[5] **Собко Б.**, Ровенчак А. Суперадитивна модель ідеального фермі-газу поблизу абсолютного нуля // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. 2019. Вип. 56. С. 65–75. DOI: 10.30970/vph.56.2019.65

[6] **Собко Б.**, Ровенчак А. Спектр системи двох еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. 2016. Вип. 51. С. 87–97.

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

[7] Собко Б., Ровенчак А. Неадитивний фермі-газ // 20-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 15–16 жовтня 2020. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. С. 34.

[8] Собко Б. Вираження неабелевих еніонів через двопараметричні дробові статистики // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика-2020», Львів, 6–7 жовтня 2020 р.: Тези доповідей. С. Е4.

[9] Rovenchak A., Sobko B. Fermi-gas with nonadditive statistics // International Conference «XI Bolyai-Gauss-Lobachevsky (BGL-2019) Conference: Non-Euclidean, Non-Commutative Geometry and Quantum Physics». 19 May – 24 May 2019, Kiev, Ukraine. P. 36.

[10] Собко Б. Поправки до термодинаміки системи еніонів з магнітними зарядами у сталому магнітному полі // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика-2019», Львів, 14–16 травня 2019 р.: Тези доповідей. С. F4.

[11] Собко Б. Спектр системи двох еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика-2018», Львів, 15–17 травня 2018 р.: Тези доповідей. С. Е5.

Зміст

ВСТУП **17**

РОЗДІЛ 1. Огляд літератури **28**

1.1. Еніони 28

1.2. Неадитивні модифікації 30

1.3. Неабелеві еніони 32

РОЗДІЛ 2. Система еніонів із магнітними зарядами **37**

2.1. Вступ 37

2.2. Спектр системи двох еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами 37

2.3. Другий віріальний коефіцієнт та поправки до термодинамічних функцій системи еніонів з магнітними зарядами 44

2.4. Магнітна сприйнятливість 49

2.5. Висновки до розділу 2 51

РОЗДІЛ 3. Неадитивні модифікації фермі-газу **53**

3.1. Вступ 53

3.2. Загальні поняття 53

3.3. Деформація фактора Гіббса 56

3.4. Чисельні результати 58

3.5. Високотемпературна та класична границя для першої моделі 64

3.6. Високотемпературна та класична границі для другої моделі 68

3.7. Границя $T \to 0$ для другої моделі 71

3.8. Розрахунок C_V для другої моделі при $T \to 0$ 78

3.9. Результати чисельних розрахунків для різних s і q 82

3.10. Висновки до розділу 3 85

РОЗДІЛ 4. Ефективне моделювання фізичних систем за допомогою двопараметричних дробових статистик **87**

4.1. Вступ 87

4.2. Двопараматеричні дробові статистики 87
4.3. Віріальні коефіцієнти у неадитивній статистиці Поліхронакоса 89
4.4. Неабелеві еніони з твердою серцевиною 91
4.5. Неабелеві еніони з м'якою серцевиною 95
4.6. Два підходи до віріального розвинення 103
4.7. Фермі-система зі слабкою взаємодією 105
4.8. Висновки до розділу 4 109

ВИСНОВКИ **112**

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ **115**

ДОДАТОК А. Список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації **129**

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження.

Відомий нам Всесвіт містить лише два різновиди елементарних частинок. Один з них — сімейство ферміонів, яке включає електрони, протони, нейтрони та кварки, які їх утворюють. Ферміони є, так би мовити, частинками-одинаками за своєю суттю: жодні два не можуть існувати в одному квантовому стані одночасно. Якби ці частинки не володіли цією властивістю, вся матерія могла б просто згорнутися в одну точку. Саме завдяки ферміонам існує тверда матерія.

Решта частинок у нашому Всесвіті, як відомо, є бозонами. Ця група, яка включає в себе такі приклади, як фотони і глюони, що є, так би мовити, клеєм для кварків. На відміну від ферміонів, два або більше бозонів можуть існувати в одному стані одночасно. Вони мають властивість злипатися. Саме через це злипання ми маємо існування лазерів, що і є, власне, потоком фотонів, що займають однаковий квантовий стан.

Еніони не підпадають під жодну з вищеперелічених класифікацій. Якщо ферміон обертається навколо іншого ферміона, його квантовий стан залишається незмінним. Те саме стосується бозона. Еніони ж у тому плані відрізняються. Якщо один еніон рухається навколо іншого, їхній колективний квантовий стан змінюється. Може знадобитися кілька обертів, перш ніж еніон повернеться до свого початкового стану. Цей легкий зсув хвильової функції є цікавою властивістю, що робить їх привабливими об'єктами для квантових комп'ютерів, які залежать

від квантових станів та, як відомо, схильні до помилок. Часто можна почути наступне формулювання: еніони — частинки з пам'яттю попередніх переміщень. Звісно, враховуючи, що кожне наступне переміщення частинки накладає свій відбиток на хвильову функцію, це твердження має місце бути.

Багато фізиків пропонують практичне використання еніонів через більш надійний спосіб зберігання даних. Цей тип частинок володіє неймовірними властивостями, що робить їх не схожими на звичайні елементарні частинки. Вчені ніколи не зможуть виділити окремий еніон із системи, де він формується. Вони є квазічастинками, тобто мають вимірювані властивості, такі як звичні для нас частинки — бозони та ферміони. До прикладу можна оцінити розташування, можливо, навіть масу, але їх можна спостерігати лише в результаті колективної поведінки інших звичайних частинок за певних умов.

Отже, історично вже склалось так, що напрями досліджень систем, що описуються так званими дробовими статистиками, які є проміжними між бозонною та ферміонною, привертали до себе велику увагу, адже вони використовуються для опису фізичних задач дуже широкого спектра. Насамперед, це пов'язано з експериментальною можливістю отримувати частинки, що мають ефективний дробовий заряд, а отже, описуються дробовою статистикою. Це явище можна спостерігати в двовимірних структурах за низьких температур у сильних магнітних полях. Очевидно, що врахування існування гіпотетичного магнітного заряду в еніонах є досить корисним для розрахунку термодинаміки у конденсованих системах, де ефективно виникає як еніона статистика, так і магнітні заряди.

Поряд з ними зростає інтерес до аналізу поведінки еніонів, як абелевих, так і неабелевих. Це пов'язано, насамперед, із тим, що на основі

еніонів пропонується побудова топологічного квантового комп'ютера, а дослідження термодинаміки системи еніонів є вагомим кроком у розробці нових технологій, а також вивчення ефектів, що дадуть змогу передбачати та вирішувати проблеми у поставлених задачах. На даний момент часу ця галузь досліджень є особливо актуальною, адже лише нещодавно квантові обчислення перейшли із чисто теоретичної площини у практичну реалізацію. У дисертаційній роботі описано підходи, що описують випадки, коли розгляд еніонів різного типу є можливим через дробові статистики.

Потреба у вивченні систем із дробовою статистикою пов'язана також із тим, що їх часто використовують — переважно для спрощення математичного опису — як моделі реальних фізичних об'єктів, зокрема багатобозонних систем із різними типами взаємодій, що їх активно досліджують як фізики-теоретики, так і експериментатори провідних наукових центрів і лабораторій у різних країнах світу. Наприклад, установлення мікроскопічних механізмів, які ефективно приводять до дробової статистики Поліхронакоса з комплексним параметром, безпосередньо пов'язане з поясненням експериментів у системах, де у спектрі елементарних збуджень виникає мала дисипативна частина, зокрема під дією зовнішніх полів.

Зрозуміло, що використання ідеального газу з «підіпсутими» статистиками може бути досить корисним в ефективному моделюванні реальних систем. Загалом, різні модифікації можуть бути придатними для зручнішого опису. До прикладу, процедура врахування модифікацій q-експонентою Цалліса може бути використана для аналізу частинок, що утворюються в системах з далекодійними взаємодіями. Крім того, фермі-газ з контактною взаємодією може бути описаний через дробові статистики, що є досить зручні у застосуванні в описі.

Мета і завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є вивчення систем, що піддаються опису за допомогою дробових статистик.

Основними завданнями дисертаційної роботи є:

1. дослідження термодинамічних функцій системи магнітозаряджених еніонів у сталому магнітному полі, залежність енергетичного спектра та другого віріального коефіцієнта від еніонного параметра;
2. дослідження різних типів неадитивних модифікацій фермі-газу q-експонентою Цалліса, що різняться між собою вибором змінної у показнику експоненти, а саме — хімічним потенціалом чи активністю (фугативністю). Опис пропрацьовано за високо- та низькотемпературного режиму для обох моделей.
3. моделювання поведінки абелевих та неабелевих еніонів за допомогою двопараметричних дробових статистик на підставі зв'язку параметрів другого віріального коефіцієнта. Поставлену задачу опрацьовано для двох типів серцевини неабелевих еніонів — м'якої та твердої.
4. ефективний опис реальних фізичних систем через дробові статистики на прикладі фермі-системи з контактною взаємодією.

Об'єктом дослідження є система еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами; фермі-газ у різних модифікаціях; неабелеві еніони у моделі з жорсткою та м'якою серцевиною; фермі-газ з контактною взаємодією.

Предметом дослідження є термодинамічні характеристики системи еніонів з магнітними зарядами; властивості змодифікованого q-експонентою Цалліса фермі-газу в границі низьких та високих тем-

пературр, детальний опис термадинамічних характеристик; вираження неабелевих еніонів з жорсткою та м'якою серцевиною через математично зручніші статистики; термодинаміка фермі-газу з контактною взаємодією.

Методами дослідження виступають методи теорії збурень, віріальне та кластерне розвинення, статистико-механічні підходи до розрахунку термодинамічних функцій через вирази для чисел заповнення, числові методи.

Наукова новизна отриманих результатів.

В рамках теорії збурень вперше знайдено залежність енергії системи магнітозаряджених еніонів від еніонного параметра. Вперше запропоновано спосіб врахування еніонного параметра для розрахунку термодинамічних функцій магнітозаряджених еніонів. Вперше проаналізовано поведінку змодифікованого фермі-газу неадитивною q-експонентою Цалліса в двох моделях. Вперше показано залежність питомої теплоємності від параметра неадитивності q в низько- та високотемпературних границях для змодифікованого фермі-газу. Вперше продемонстровано параметри системи змодифікованого фермі-газу, в якому питома теплоємність набуває ненульового значення за низькотемпературної границі $T \to 0$. Вперше проаналізовано межі опису неабелевих еніонів через двопараметричні дробові статистики. Вперше описано фермі-газ з контактною взаємодією через неадитивну статистику Поліхронакоса. Вперше проаналізовано межі застосовності двопараметричних статистик в якості опису різних типів еніонів та фермі-газу з контактною взаємодією.

Практичне значення отриманих результатів.

Способи врахування магнітного заряду в еніонах можуть бути ко-

рисними при вивченні систем у конденсованому стані в сильних магнітних полях.

Підходи, розвинуті в дисертаційній роботі можна застосовувати до моделей, які дозволяють розгляд еніонів різного типу через дробові статистики. Результати щодо неабелевих еніонів можна використати для аналізу сучасних експериментів з дробовим квантовим ефектом Холла.

Процедура врахування модифікацій q-експонентою Цалліса може бути використана для аналізу частинок, що утворюються в системах з далекодійними взаємодіями. Використання ідеального газу з «підіпсутими» статистиками може бути використаний в ефективному моделюванні реальних систем.

Особистий внесок здобувача.

Постановку завдань дослідження здійснив науковий керівник роботи проф. А. А. Ровенчак. Усі викладені в дисертації результати авторка отримала самостійно або за своєї безпосередньої участі. У роботах, виконаних зі співавтором — науковим керівником, здобувачці належить:

- розрахунок спектра еніонів за допомогою теорії збурень; знаходження виразів для поправок енергії та магнітної сприйнятливсті магнітозаряджених еніонів; чисельний розрахунок множників для поправки енергії [1].

- аналітичний розрахунок внеску у термодинаміку абелевих еніонів, що базується на другому віріальному коефіцієнті; розрахунок поправки до магнітної сприйнятливості; графічна візуалізація залежності [2].

- знаходження виразів для хімічного потенціалу в високотемпературній границі однієї з моделей модифікованого фермі-газу, а саме

моделі, де показником в експоненті виступає хімічний потенціал [3].

- отримання аналітичної залежності активності від параметрів статистики та температури в низькотмпературній границі для іншої моделі, а саме моделі, де змінна z є множником для експоненти [3].

- дослідження поведінки активності в низькотемпературній границі однієї з моделей модифікації фермі-газу з визначенням, що стосується хімічного потенціалу [3].

- розрахунок ізохорної теплоємності в низькотемпературній границі однієї з моделей модифікації фермі-газу з визначенням, що стосується хімічного потенціалу[3, 4].

- отримання зв'язку параметрів системи еніонів та дробових двопараметричних статистик на підставі порівняння другого віріального коефіцієнта відповідних систем [5].

- дослідження зв'язку других віріальних коефіцієнтів за різних підходів [6].

Результати статей, їхню інтерпретацію та застосовність використаних підходів співавтори обговорювали на паритетних засадах.

Апробація результатів дисертації.

Результати досліджень, що включені до дисертації, здобувачка представляла особисто на таких конференціях та семінарах:

- Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2019 Львів, 14-16

травня 2019 р., доповідь на тему «Поправки до термодинаміки системи еніонів з магнітними зарядами у сталому магнітному полі»;

- The 13th Trans-European School of High Energy Physics, Svityaz, Volyn region, Ukraine, 11–18 July 2019, доповідь на тему «Thermodynamics in the system of magnetically charged anyons»;

- Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2020 Львів, 6-7 жовтня 2020 р., доповідь на тему «Вираження неабелевих еніонів через двопараметричні дробові статистики»;

- 20-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 15-16 жовтня 2020. Інститут фізики конденсованих систем НАН України, доповідь на тему «Неадитивний фермі-газ»;

- Звітна конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2020 р., доповідь на тему «Представлення неабелевих еніонів через неадитивні модифікації дробових статистик»;

- Звітна конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2021 р., доповідь на тему «Віріальні розклади для деформованих фермі-подібних розподілів».

Подані в роботі результати також обговорювали на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету.

Публікації.

Результати дисертаційної роботи опубліковано в 6 журнальних статтях [1–6], із яких 4 — у виданнях, що індексуються у Scopus (1 стаття

— Q2 [3] і три статті — Q3 [2, 3, 5, 6]) та 5 тезах доповідей на конференціях.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюжетних тем:

- ФФ-30Ф «Класичні і квантові системи з нестандартними комутаційними співвідношеннями і статистиками» (2016–2018 р., номер д/р 0116U001539);
- ФФ-83Ф «Квантові ефекти у фізиці одно- і багаточастинкових систем у просторах зі складною структурою» (2019 р., номер д/р 0119U002203);
- ФФ-31Ф «Роль кількачастинкових ефектів у формуванні властивостей макроскопічних систем в обмежених геометріях» (2022 р.., номер д/р 0122U001514).

Частина досліджень також виконувалась у межах проєкту Ф64/37-2016 від ДФФД України

- «Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів: електродинаміка у просторах вищої вимірності» (2016 р., номер д/р 0116U005055).

Структура та обсяг дисертації

У першому розділі окреслено історичні передумови та сучасний стан досліджень проблеми дробових статистик; висвітлено підходи, що є застосовними до вивчення неадитивних модифікацій системи фермігазу; також пояснено поняття неабелевих еніонів.

У другому розділі розраховано та вивчено поведінку термодинаміки системи еніонів з магнітними зарядами в магнітному полі. Продемонстровано, як внесок поправки енергетичного спектра впливає на другий віріальний коефіцієнт та магнітну сприйнятливість. Представлено залежності відповідних поправок як функцій температури та еніонного параметра.

Третій розділ присвячено дослідженню порівняння властивостей двох підходів до узагальнення звичайної фермі-статистики, основаної на неадитивній q-експоненті Цалліса, що використовується у факторі Гіббса замість звичайної експоненціальної функції. Як чисельні, так і аналітичні розрахунки проведено для хімічного потенціалу, активності, енергії та питомої теплоємності ідеального газу, що підпорядковується таким узагальненим типам статистики. У підході, заснованому на факторі Гіббса, що містить хімічний потенціал, високотемпературна поведінка питомої теплоємності суттєво відхиляється від очікуваної класичної границі, тоді як при низьких температурах вона нагадує звичайний ідеальний фермі-газ. Навпаки, коли активність є множником у коефіцієнті Гіббса, границя високих температур коректно відтворює класичний ідеальний газ. Однак при низьких температурах спостерігаються цікаві результати, що відповідають ненульовій питомій теплоємності при абсолютній нульовій температурі або ненульовій мінімальній температурі. Ці результати, хоч і екзотичні з першого погляду, можуть бути застосовні для ефективного моделювання фізичних явищ у різних сферах. У межах неадитивного узагальнення статистики Фермі–Дірака з використанням q-експоненти Цалліса, отримано вирази для термодинамічних функцій поблизу абсолютного нуля в так званому суперадитивному випадку, що відповідає $q < 1$. За допомогою послідовних аналітичних та числових розрахунків продемонстровано, що

в границі низьких температур енергія системи в розрахунку на одну частинку має вигляд $E/N = E_0/N + \alpha(q,s)T + \mathcal{O}(T^2)$, де s — показник степеня енергії в густині станів $g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{s-1}$. Звідси випливає, що теплоємність при $T \to 0$ набуває ненульового значення, що дорівнює коефіцієнтові $\alpha(q,s)$. Таке відхилення від третього начала термодинаміки відоме для неадитивних модифікацій статистики. Залежність питомої теплоємності в абсолютному нулі для різних параметрів неадитивності q та показника s також проілюстровано графічно.

У четвертому розділі розглянуто задачу про математично простіше подання неабелевих еніонів. Показано зв'язок між параметрами другого віріального коефіцієнта для системи неабелевих еніонів та двопараметричних модифікацій дробових статистик Голдейна–Ву та Поліхронакоса. Розраховано параметри, за якими неабелеві еніони можуть описуватись даними типами статистик. Розглянуто границю, при якій параметр неадитивності/неповноти q прямує до одиниці. Коротко узагальнено виведення виразів для віріальних коефіцієнтів. Один з підрозділів присвячено віріальним коефіцієнтам у двопараметричній модифікації статистики Поліхронакоса. Розглянута відповідна дробово-статистична модель двовимірної взаємодіючої фермі-системи. Представлено приклад моделювання м'яких неабелевих еніонів з використанням тієї ж двопараметричної статистики.

Дисертаційна робота завершується *Висновками* та *Списком використаних джерел.*

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Еніони

Задачі фізики конденсованого стану часто залучають складний математичний апарат, а ефективні моделі є ефективними інструментами для опису багатьох явищ. У розділі 2 цієї роботи ми об'єднуємо дві екзотичні фізичні моделі, що мають на меті продемонструвати розрахунок термодинамічних функцій у системах, де плоска геометрія може викликати нестандартні типи збуджень.

Ще в 1977 році Йон Маґне Лейнос і Ян Мірхейм довели, що традиційний поділ частинок на ферміони і бозони розмивається при переході у двовимірний простір [7]. У 1982 р. Френк Вільчек запропонував для таких частинок термін «еніони», оскільки при перестановці двох частинок фаза хвильової функції може змінюватися на будь-яке значення, не лише на 0 або π [8]. Звідси і походить назва частинок — від слова *any* — 'довільний':

$$\Psi_{21} = \hat{P}_{12}\Psi_{12} = e^{i\pi\alpha}\Psi_{12}, \tag{1.1}$$

де еніонний параметр $\alpha \in [0; 1]$ інтерполює між статистикою Бозе–Айнштайна ($\alpha = 0$) та Фермі–Дірака ($\alpha = 1$). У випадку $0 < \alpha < 1$, ми отримуємо еніони, а точніше — абелеві еніони.

Математично така статистика відповідає групі кіс, а не групі перестановок.

Еніони використовуються в описі дробового квантового ефекту Хол-

ла, який спостерігається у двовимірних системах електронів за низьких температур та в сильних магнітних полях [9–12].

На основі еніонів було запропоновано побудувати топологічний квантовий комп'ютер, який через свою топологічну природу повинен бути набагато толерантнішим до перешкод та помилок, ніж «звичайний» квантовий комп'ютер [13, 14]. Зауважимо, що було повідомлено про деякі натяки щодо експериментальних спостережень еніонних збуджень [15–17]. Особливу увагу варто приділити такому прикладу: ще у 2016 році було запропоновано теоретичний опис еніонного колайдера колаборацією фізиків [18]. Уже у квітні 2020 року група французьких вчених експериментально довела існування таких частинок [19]. В дослідженні було продемонстровано абелеву дробову статистику у режимі квантового ефекту Холла при факторові заповнення $\nu = 1/3$ шляхом вимірювання кореляційних характеристик струму, що виникають внаслідок зіткнення між еніонами при розщепленні пучка.

Друга модель, яку ми розглядаємо, включає в задачу поряд зі звичайними електричними зарядами гіпотетичні магнітні заряди. Існування магнітних зарядів, так званих магнітних монополів, було теоретизовано ще в 1890-х рр. [20, 21]. Послідовну квантово-механічну модель, яка, зокрема, пояснює квантування електричного заряду, запропонував Поль Дірак [22, 23]. Магнітні монополі — це, мабуть, найвідоміші модифікації рівнянь електромагнітного поля, що виникають у декількох формулюваннях [24–27], тоді як деякі екзотичні підходи включають також деформації рівнянь поля, зумовлені некомутативністю координат і мінімальною довжиною [28–31].

Квазічастинки, що імітують магнітні монополі, були знайдені в твердих тілах (на відстанях, набагато більших за сталу ґратки). Приклади включають спіновий лід титанату диспрозію $Dy_2Ti_2O_7$ [32]. Також бу-

ло показано, що магнітний монополь може з'являтися в імпульсному просторі феромагнітних кристалічних твердих тіл в області низьких енергій ($\sim$ 0.1 до 1 eV) в контексті аномального ефекту Холла, наприклад, в $SrRuO_3$ [33]. Теоретично такі утворення можуть існувати також у конденсаті Бозе–Айнштайна. Комп'ютерне моделювання дозволило створити вихори, які поводились дуже подібно до магнітних монополів Дірака [34].

Таким чином, ми бачимо, що як і еніони, так і магнітні монополі виникають як ефективні моделі у фізиці конденсованого стану, зокрема при низьких температурах та в обмежених геометріях. Одночасне вивчення цих двох моделей передбачає розгляд відповідних ефектів.

1.2. Неадитивні модифікації

У розділі 3 увагу зосереджено на неадитивних статистиках, позаяк неадитивні статистики використовують для опису широкого класу задач. Прикладом можуть бути фрактальні структури та системи з далекодійними взаємодіями [35]. На відповідні підходи натрапляємо в ядерній фізиці [36], космології [37], фізиці магнітних систем [38], а також в низці інших галузей науки [39–43].

Ми використовуватимемо узагальнення звичайної ентропії Больцмана–Ґіббса, яке Константіно Цалліс запропонував у 1988 році [44] в такому вигляді:

$$S_q = \frac{1}{q-1}\left(1 - \sum_{j=1}^{W} p_j^q\right), \qquad q \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Тут W — кількість мікростанів, а ймовірності їх реалізації p_j нормовані

умовою

$$\sum_{j=1}^{W} p_j = 1. \tag{1.3}$$

Зауважимо, що раніше подібне узагальнення дав Золтан Дароці для ентропії в теорії інформації [45].

Нескладно показати, що в границі $q \to 1$ ентропія Цалліса переходить у звичайну ентропію Больцмана–Ґіббса:

$$S_q\Big|_{q\to 1} = -\sum_{j=1}^{W} p_j \ln p_j \equiv S^{\mathrm{BG}}.$$

Остання є адитивної величиною, тобто для системи, що складається з двох підсистем A та B,

$$S^{\mathrm{BG}}(A+B) = S^{\mathrm{BG}}(A) + S^{\mathrm{BG}}(B).$$

На відміну від цього, ентропія Цалліса задовольняє співвідношення [35]:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B), \tag{1.4}$$

тобто є неадитивною величиною. Для $q > 1$ маємо, отже, $S_q(A+B) < S_q(A) + S_q(B)$, тому таку ентропію Цалліса називають *субадитивною*, а для $q < 1$ нерівність буде $S_q(A+B) > S_q(A) + S_q(B)$, що відповідає *суперадитивній* ентропії.

Ентропія Цалліса досягає максимального значення за умови рівності всіх імовірностей, $p_j = 1/W$ для усіх j. Цей максимум дорівнює

$$S_q = \frac{W^{1-q} - 1}{1-q}. \tag{1.5}$$

Можна ввести так званий q-логарифм,

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, \qquad \text{причому} \quad \ln_1 x = \ln x, \tag{1.6}$$

що дає змогу записати $S_q = \ln_q W$, подібно як $S^{\mathrm{BG}} = \ln W$.

Оберненою до q-логарифма є q-експонента Цалліса [46]:

$$e_q^x = \begin{cases} \exp(x), & \text{якщо } q = 1, \\ [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}, & \text{якщо } q \neq 1 \text{ і } 1 + (1-q)x > 0, \\ 0^{1/(1-q)}, & \text{якщо } q \neq 1 \text{ і } 1 + (1-q)x \leq 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

Остання рівність залежно від параметра неадитивності q може бути переписана таким чином:

$$0^{1/(1-q)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } q < 1, \\ \infty, & \text{якщо } q > 1. \end{cases}$$

Детальний опис q-експоненти також викладено у працях [47, 48]. Означення для $q \neq 1$ часто об'єднують за допомогою позначення $[u]_+ \equiv \max(0, u)$ [47].

Неадитивну модифікацію розподілу Фермі можна ввести таким способом [3]:

$$n_j = \frac{1}{z^{-1} e_q^{\varepsilon_j / T} + 1}, \tag{1.8}$$

де z — активність (фугативність), T — абсолютна температура, ε_j — енергія, що відповідає j-му рівневі.

У розділі 3 подано послідовні аналітичні та числові розрахунки, що обґрунтовують фізичні висновки про поведінку термодинамічних функцій поблизу абсолютного нуля та в високотемпературній границі неадитивної модифікації фермі-газу.

1.3. Неабелеві еніони

Еніони, про які йшла мова в підрозділі 1.1, є ще не найекзотичнішим видом частинок. У 1991 Ґреґорі Мур та Ніколас Рід (Gregory Moore

and Nicholas Read) запропонували новий тип частинок, які назвали неабеліонами (nonabelions) [49]. Неабелева статистика означає, що якщо у нас є кілька тотожних частинок, то перестановки в різних парах не обов'язково комутують одна з одною. Таке може бути тоді, коли перестановка двох частинок призводить не просто до фазового множника, а взагалі змінює хвильову функцію стану:

$$\hat{P}_{12}\Psi_{12} = \widetilde{\Psi}_{21}, \tag{1.9}$$

де $\widetilde{\Psi}$ отримується як унітарне перетворення первинного стану [50, 51]. В принципі, в групі кіс такі ситуації цілком реалізуються [52]; з точки зору фізики треба тільки щоб основний стан системи квазічастинок був не єдиним, а виродженим.

Існують докази, що саме така екзотична ситуація реалізується в цілком конкретній системі — електронній рідині в режимі дробового квантового ефекту Холла з фактором заповнення 5/2. У 2005 році було показано експериментально, що елементарні збудження при цьому значенні фактора заповнення мають дробовий заряд $e/4$, [53], а в роботі [54] — ще й заряд $e/2$.

Інтерес до подібних експериментів інтерферометрії [55] зріс в останні роки, що зумовлено можливістю побудови квантового комп'ютера, який би виконував операції, маніпулюючи неабелевими квазічастинками. Дію квантового комп'ютера можна описати унітарним перетворенням, а в топологічному квантовому комп'ютері воно складається з матриць, що описують «плетіння» квазічастинок.

У розділі 4 буде показано знаходження зв'язку між параметрами другого віріального коефіцієнта системи неабелевих еніонів з різними видами дробових двопараметричних статистик. Отримані результати можна використовувати для ефективної побудови термодинаміки не-

абелевих еніонів, узгодженої з іншими — математично простішими — статистиками.

Неабелеві еніони, що вивчаються в цій роботі, — неабелеві безспінові частинки Черна–Саймонса (NACS, non-Abelian Chern–Simons particles). Це точкові частинки, які взаємодіють за допомогою топологічного неабелевого ефекту Ааронова–Бома, несуть неабелеві заряди та неабелеві магнітні потоки, завдяки чому вони набувають дробових спінів і підкоряються статистиці кіс, як і абелеві еніони [56].

Для неабелевих еніонів було проведено дослідження термодинамічних властивостей найнижчого рівня Ландау в сильному магнітному полі і показано, що віріальні коефіцієнти не залежать від параметрів статистики [57]. У порівнянні з абелевим випадком, термодинаміку системи вільних неабелевих еніонів виявляється набагато важче вивчити, адже усі наявні результати є для граничних умов з моделлю жорсткої серцевини [58], а у випадку неабелевих еніонів з м'якою серцевиною немає точних результатів навіть для другого віріального коефіцієнта. Відповідно, через те ми можемо порахувати лише наближено термодинаміку системи неабелевих еніонів. У роботі [56] показано зв'язок другого віріального коефіцієнта для неабелевих еніонів з різними параметрами жорсткості (твердості) серцевини (hard-core parameter).

Гамільтоніан вільних NACS-частинок має такий вигляд [56]:

$$
\begin{aligned}
H_N &= -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{\mu_\alpha} (\nabla_{\bar{z}_\alpha} \nabla_{z_\alpha} + \nabla_{z_\alpha} \nabla_{\bar{z}_\alpha}), \\
\nabla_{z_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \frac{1}{2\pi\kappa} \sum_{\beta \neq \alpha}^{N} \hat{Q}^a_\alpha \hat{Q}^a_\beta \frac{1}{z_\alpha - z_\beta}, \\
\nabla_{\bar{z}_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha},
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

де індекс $\alpha = 1, \ldots, N$ нумерує частинки, а $z_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha$, $\bar{z}_\alpha = x_\alpha - i y_\alpha$

— їхні просторові координати. Тут κ — параметр теорії, причому $4\pi\kappa$ — ціле число. Оператори $\hat{Q}^a$ — так звані ізовектори в представленні ізоспіну l, що за своєю природою є операторами моменту кількості руху. Значення l квантовані і змінюються у множині всіх цілих і напівцілих чисел, при цьому $l = 1/2$ є мінімальним можливим нетривіальним значенням ($l = 0$ відповідає системі вільних бозонів) [56]. Тоді віріальні коефіцієнти залежать в цілому від величини квантового числа ізоспіну l і від параметра κ.

Моделі, що базуються на дробовій статистиці, застосовуються в різних областях фізики, що дозволяють ефективно описувати міжчастинкові взаємодії, ефекти граничних розмірів, внутрішню структуру частинок тощо. Мабуть, найяскравішим прикладом є дробовий квантовий ефект Холла та підходи до його пояснення, засновані на еніонах [12, 49, 59–63]. Дробова статистика також використовувалася у зв'язку з різними квантовими явищами в системах багатьох тіл, включаючи високотемпературну надпровідність [64–66], перехід ізолятора Мотта [67, 68], квантову дифузію в низьковимірних системах [69–71], але не обмежуючись ними [72, 73] тощо.

Моделі для систем зі скінченною кількістю частинок переважно посилаються на статистику Джентіле [74–76]. Моделювання взаємодіючих систем передбачає, з іншого боку, численні способи запровадження дробової статистики [77–81]. Ключовим питанням є інтерпретація параметрів статистик та вираження їх через певні властивості реальних систем.

У розділі 4 продемонстровано два приклади, де дробова статистика може бути використана як ефективний інструмент для моделювання поведінки відповідних систем з певною точністю. Перша розглянута

проблема — це проста двовимірна система Фермі з контактними взаємодіями [82, 83]. Другим прикладом є система так званих неабелєвих еніонів, які можна використовувати для опису певних екзотичних значень коефіцієнта заповнення в дробовому квантовому ефекті Холла [53, 60, 84]. В обох випадках віріальне розвинення використовується як інструмент для пошуку приблизних відповідностей між параметрами статистики та деякими особливостями реальних фізичних систем.

РОЗДІЛ 2

СИСТЕМА ЕНІОНІВ ІЗ МАГНІТНИМИ ЗАРЯДАМИ

2.1. Вступ

У цьому розділі продемонстровано залежність поправок до енергетичного спектра системи еніонів із магнітним зарядом від еніонного параметра α. Показано, на прикладі другого віріального коефіцієнта та магнітної сприйнятливості, як, враховуючи отримані вирази, можна застосувати їх до розрахунку поправок до інших термодинамічних функцій.

Результати розділу опубліковано в працях [1, 2].

2.2. Спектр системи двох еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами

Для опису електромагнітного поля в системі, що включає магнітні заряди, ми дотримуватимемось підходу Кабіббо–Феррарі [85, 86]. Чотиривектор електромагнітного потенціалу, пов'язаний з електричними зарядами, позначається як $A_\xi^{(\mathrm{e})}$, тоді як відповідний магнітний внесок становить $A_\xi^{(\mathrm{m})}$. Для частинки з масою m, електричним зарядом e і магнітним зарядом μ дія визначається як:

$$S = \int \left\{ -mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} dt - \frac{e}{c} A_\xi^{(\mathrm{e})} dx^\xi - \frac{\mu}{c} A_\xi^{(\mathrm{m})} dx^\xi \right\}$$
$$= \int \left\{ -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi^{(e)} - \mu\varphi^{(\mathrm{m})} + \frac{e}{c}\mathbf{A}^{(\mathrm{e})}\mathbf{v} + \frac{\mu}{c}\mathbf{A}^{(\mathrm{m})}\mathbf{v} \right\} dt$$
$$= \int \mathcal{L}\, dt. \tag{2.1}$$

Зауважимо, що мається на увазі підсумовування Айнштайна за повторюваними індексами ξ.

Отже, функція Лаґранжа задається виразом:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi^{(\mathrm{e})} - \mu\varphi^{(\mathrm{m})} + \frac{e}{c}\mathbf{A}^{(\mathrm{e})}\mathbf{v} + \frac{\mu}{c}\mathbf{A}^{(\mathrm{m})}\mathbf{v}, \tag{2.2}$$

Узагальнений імпульс $\mathbf{P} = \partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{v}$ пов'язаний з механічним імпульсом $\mathbf{p} = m\mathbf{v}\left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$ таким співвідношенням:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}^{(\mathrm{e})} - \frac{\mu}{c}\mathbf{A}^{(\mathrm{m})}. \tag{2.3}$$

Зауважимо, що магнітне поле має вигляд:

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\, \mathbf{A}^{(\mathrm{e})} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}^{(\mathrm{m})}}{\partial t}. \tag{2.4}$$

У двовимірному просторі перестановка двох частинок може призвести до довільного фазового множника у хвильовій функції,

$$\hat{P}_{12}|12\rangle = e^{i\pi\alpha}|12\rangle, \tag{2.5}$$

де дійсне число $\alpha \in [0; 1]$ – так званий еніонний параметр. Він інтерполює між статистикою Бозе–Айнштайна ($\alpha = 0$) та статистикою Фермі–Дірака ($\alpha = 1$). У випадку $0 < \alpha < 1$, ми отримуємо еніон. Розв'язання задачі про два еніони дає таку хвильову функцію, яка відповідає відносному руху [87]:

$$\Psi(r, \varphi) = e^{i(l-\alpha)\varphi} R(r). \tag{2.6}$$

Власні значення енергії для двох еніонів у постійному магнітному полі $\mathbf{B}_0$ є [87]:

$$E_{n,l} = [2n + |l - \alpha| - (l - \alpha) + 1]\hbar\omega_c, \tag{2.7}$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$, і циклотронна частота

$$\omega_c = \frac{eB_0}{2mc} \tag{2.8}$$

Зауважимо, що є два типи:

$$E^{(1)}_{n,l} = (2n + 1)\hbar\omega_c, \qquad \text{для} \quad l > 0, \tag{2.9}$$

$$E^{(2)}_{n,l} = [2n + 2|l| + 2\alpha + 1]\hbar\omega_c, \qquad \text{для} \quad l \leqslant 0. \tag{2.10}$$

Далі розглянемо систему з магнітними зарядами, розміщеними в постійному магнітному полі. Це забезпечується вибором векторних потенціальних доданків у формі

$$\mathbf{A}^{(\mathrm{e})} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_0, \mathbf{r}], \qquad \mathbf{A}^{(\mathrm{m})} = \mathbf{a}t, \tag{2.11}$$

де $\mathbf{B}_0$ і $\mathbf{a}$ є сталими векторами. Отже,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{1}{c}\mathbf{a}. \tag{2.12}$$

Вважатимемо, що $a \equiv |\mathbf{a}|$ є невеликим числовим значенням, тому часова залежність слабка. Це уможливлює розгляд задачі в адіабатичному наближенні.

У роботі [1] було розраховано спектр двох еніонів для $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_\varphi$ за допомогою теорії збурень. Вирази для поправок енергії (2.9)–(2.10)

можна подати у вигляді:

$$\Delta E^{(1)}_{n,l} = \frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_c}}\frac{e\mu}{4\hbar^2c^2}\frac{Q(n,l,\alpha)-P(n,l,\alpha)}{\Gamma(n+1+l-\alpha)}B_0at \qquad (2.13)$$

$$\text{для } l = 2,4,6\ldots,$$

$$\Delta E^{(2)}_{n,l} = \frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_c}}\frac{e\mu}{4\hbar^2c^2}\frac{Q(n,|l|,-\alpha)-P(n,|l|,-\alpha)}{\Gamma(n+1+|l|+\alpha)}B_0at, \qquad (2.14)$$

$$\text{для } l = 0,-2,-4,\ldots,$$

де коефіцієнти Q та P записуються через узагальнену гіпергеометричну функцію в такому вигляді:

$$Q(n,l,\alpha) = \frac{\Gamma(l-\alpha+3/2)\Gamma(n-1/2)\Gamma(n+l-\alpha+1)}{n!\Gamma(-1/2)\Gamma(l-\alpha+1)}\times$$

$$\times\, {}_3F_2\left(-n, l-\alpha+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; -n+\frac{3}{2}, l-\alpha+1; 1\right), \qquad (2.15)$$

$$P(n,l,\alpha) = (l-\alpha)\frac{\Gamma(l-\alpha+1/2)\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+l-\alpha+1)}{n!\Gamma(1/2)\Gamma(l-\alpha+1)}\times$$

$$\times\, {}_3F_2\left(-n, l-\alpha+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -n+\frac{1}{2}, l-\alpha+1; 1\right), \qquad (2.16)$$

де

$${}_3F_2(a_1,a_2,a3;b_1,b_2;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k(a_2)_k(a_3)_k}{(b_1)_k(b_2)_k}\frac{z^k}{k!} =$$

$$= 1 + \frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2}\frac{z}{1!} + \frac{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)a_3(a_3+1)}{b_1(b_1+1)b_2(b_2+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots. \qquad (2.17)$$

Тут позначення $(a)_n$ — це символ Похгаммера

$$(a)_n \equiv \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \prod_{k=0}^{n-1}(a+k). \qquad (2.18)$$

Отримуємо поправки до енергії біля коефіцієнта

$$\gamma = \frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_c}}\frac{e\mu}{4\hbar^2c^2}B_0at. \tag{2.19}$$

Відповідні числові множники розкладаються в ряд за степенями параметра α [1], до прикладу:

$$\begin{aligned}
n=0,\ \ell=-2: &\qquad 0.332335 - 0.07299\alpha + 0.0238716\alpha^2,\\
\ell=0: &\qquad 0.886227 - 1.22857\alpha + 2.30937\alpha^2,\\
\ell=2: &\qquad 0.332335 + 0.07299\alpha + 0.0238716\alpha^2;\\
n=1,\ \ell=-2: &\qquad 0.858532 - 0.142400\alpha + 0.036145\alpha^2,\\
\ell=0: &\qquad 1.55090 - 1.04222\alpha + 1.39789\alpha^2,\\
\ell=2: &\qquad 0.858532 + 0.142400\alpha + 0.036145\alpha^2;\\
n=2,\ \ell=-2: &\qquad 1.28866 - 0.176215\alpha + 0.0378834\alpha^2,\\
\ell=0: &\qquad 2.00786 - 0.921021\alpha + 1.06818\alpha^2,\\
\ell=2: &\qquad 1.28866 + 0.176215\alpha + 0.0378834\alpha^2.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

і т.д.

Графічно відповідні залежності зображено на рис. 2.1.

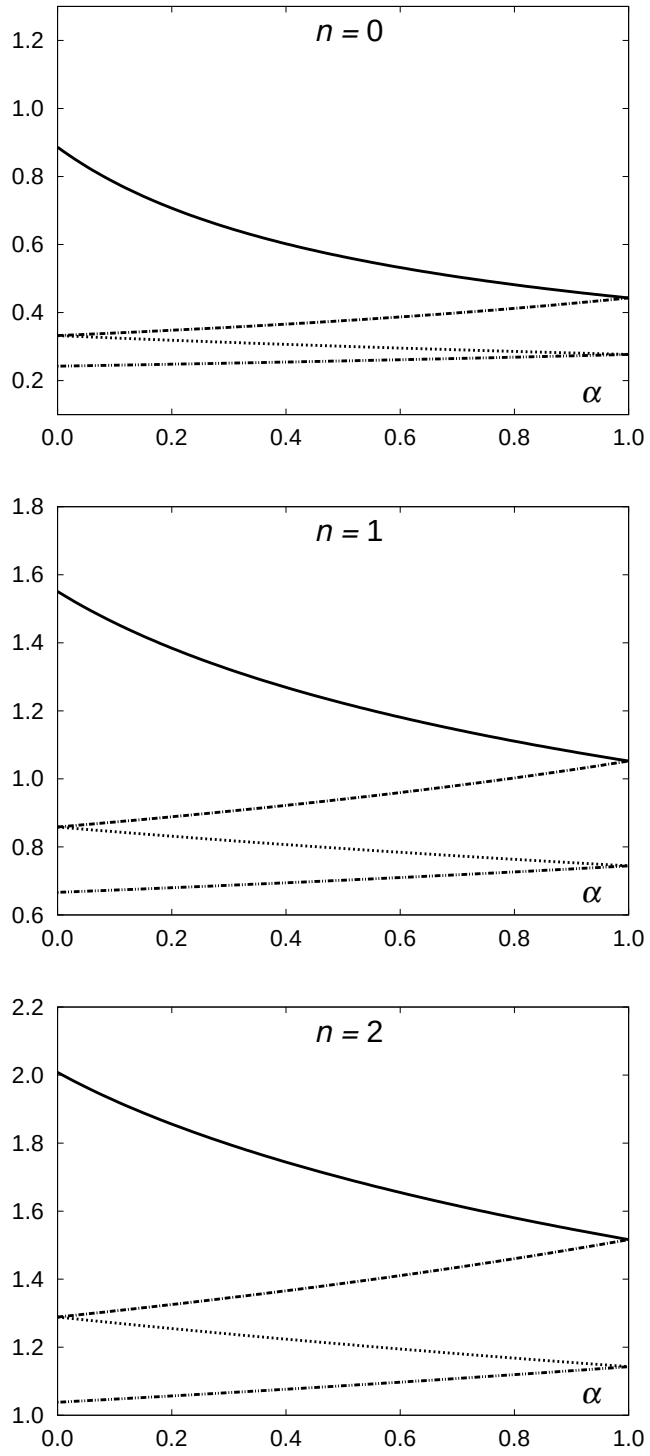


Рис. 2.1. Числові коефіцієнти в поправці (2.20) до енергії при $n = 0, 1, 2$. Суцільна лінія відповідає $\ell = 0$, пунктирна — $\ell = -2$, штрих-пунктирна — $\ell = 2$, штрихова з двома крапками — $\ell = 4$.

Оцінимо такі значення a, при яких виконуються розрахунки теорії збурень, тож поправки до енергії залишаються достатньо малими:

$$\frac{\Delta E_{n,l}}{E_{n,l}} \sim \frac{1}{\hbar\omega_c}\frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_c}}\frac{e\mu}{4\hbar^2c^2}B_0at \lesssim 1. \tag{2.21}$$

Враховуючи умову квантування Дірака [22] для магнітного заряду,

$$\frac{2e\mu}{\hbar c} = k, \qquad \text{де} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.22}$$

отримуємо

$$\frac{\Delta E_{n,l}}{E_{n,l}} \sim \frac{k}{2}\frac{a}{c}t\sqrt{\frac{\hbar c}{e^2}\frac{2c}{m\omega_c}}, \tag{2.23}$$

де $e^2/(\hbar c) \simeq 1/137$ — стала тонкої структури. Беручи до уваги типові значення циклотронної частоти $\omega_c \sim 10^6\ \text{с}^{-1}$, що відповідає магнітному полю $\sim 10^{-1}\,\text{Гс}$, та беручи за m масу електрона, отримуємо

$$\frac{\Delta E_{n,l}}{E_{n,l}} \sim \frac{a}{c}t \cdot 10^{17} \lesssim 1, \tag{2.24}$$

а отже

$$\frac{a}{c}t \lesssim 10^{-17}\ \text{Гс} \cdot \text{с}, \tag{2.25}$$

і для $t \sim 1/\omega_c$

$$\frac{a}{c} \lesssim 10^{-11}\ \text{Гс}. \tag{2.26}$$

Варто зауважити, що магнітне поле такого малого порядку можна задетектуваси сучасними магнетометрами [88]. Для полів $\sim 10^4\,\text{Гс}$ отримуємо подібним чином оцінку

$$\frac{a}{c} \lesssim 10^{-6}\ \text{Гс}. \tag{2.27}$$

2.3. Другий віріальний коефіцієнт та поправки до термодинамічних функцій системи еніонів з магнітними зарядами

Рівняння стану, що описує залежність між тиском p, температурою T і концентрацією $\rho = N/A$, де N — кількість частинок, а A — площа (аналог об'єму у двовимірній геометрії) можна записати як віріальне розвинення

$$p = \rho T \left[1 + b_2(\rho\lambda^2) + b_3(\rho\lambda^2)^2 + \ldots\right], \tag{2.28}$$

де довжина теплової хвилі де Бройля для частинки масою m є:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mT}}. \tag{2.29}$$

Базуючись на кластерному розвиненні, вираз для другого віріального коефіцієнта може бути записано [87]:

$$b_2(\alpha) = -\frac{1}{4} - 2\frac{Z_2(\alpha) - Z_2(0)}{Z_1}, \tag{2.30}$$

де статистична сума Z_1 має вигляд

$$Z_1 = \frac{1}{4\sinh^2\left(\frac{\beta\hbar\omega_c}{2}\right)}, \tag{2.31}$$

де $\beta = 1/T$ — обернена температура, а $Z_2(\alpha)$ — статистична сума задачі двох еніонів.

Отже, поправки до другого віріального коефіцієнта можна подати в такому вигляді:

$$\Delta b_2(\alpha) = -2\frac{\Delta Z_2(\alpha) - \Delta Z_2(0)}{Z_1}. \tag{2.32}$$

Поправки до статистичної суми складаються з двох доданків (для $l > 0$ і для $l \leqslant 0$):

$$\Delta Z = \Delta Z^{(1)} + \Delta Z^{(2)}. \tag{2.33}$$

Враховуючи, що

$$Z = \sum_{n,l} e^{-\beta(E_{n,l}+\Delta E_{n,l})} \approx \sum_{n} e^{-\beta E_{n,l}}(1 - \beta\Delta E_{n,l}),$$

ми отримуємо:

$$\Delta Z = -\beta \sum_{n,l} e^{-\beta E_{n,l}} \left[\Delta E^{(1)}_{n,l} + \Delta E^{(2)}_{n,l}\right]. \tag{2.34}$$

Зауважимо, що при додатних l отримуємо різні вирази при обчисленні вкладу від $\Delta E^{(1)}_{n,l}$ в $\Delta Z(\alpha)$. Однак для розрахунку Δb_2 нам необхідно знайти лише різницю $\Delta Z(\alpha) - \Delta Z(0)$, яка виявляється скінченною. Відповідний внесок має досить повільну збіжність, $1/\sqrt{l_{\max}}$, де $l_{\max}$ — верхня межа підсумовування за l. Це продемонстровано у табл. 2.1. Точність числової підгонки є порядку $10^{-6} \div 10^{-5}$.

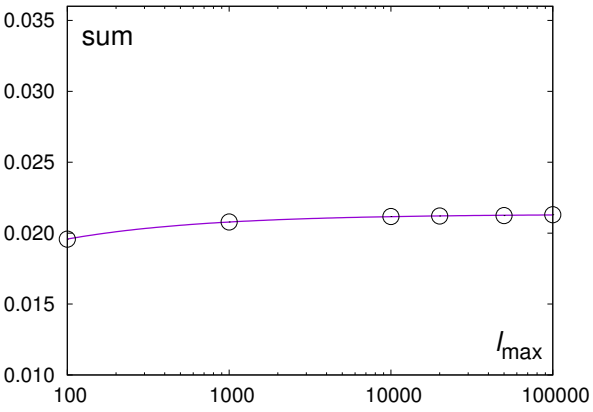
Таблиця 2.1. Результати підсумовування за l у $\Delta Z(\alpha) - \Delta Z(0)$ для деяких значень α та n, залежно від верхньої границі $l_{\max}$. Значення при $l_{\max} = \infty$ відповідає значенню числової підгонки.

	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.5$	
$l_{\max}$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 0$	$n = 1$
100	0.01958	0.0465	0.1062	0.2460
1000	0.02079	0.0501	0.1122	0.2640
10000	0.02117	0.05126	0.1141	0.2698
20000	0.02121	0.05144	0.1144	0.2706
50000	0.02124	0.05161	0.1146	0.2712
100000	0.02133	0.05167	0.1147	0.2716
∞	0.02134	0.05182	0.1150	0.2724

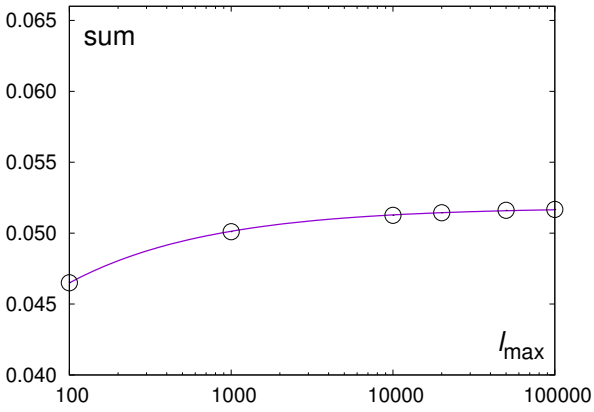
Для отримання результатів у табл. 2.1 спочатку було застосовано апроксимацію

$$\Delta Z(\alpha) - \Delta Z(0) = f(l_{\max}) = c - a l_{\max}^{-b}, \tag{2.35}$$

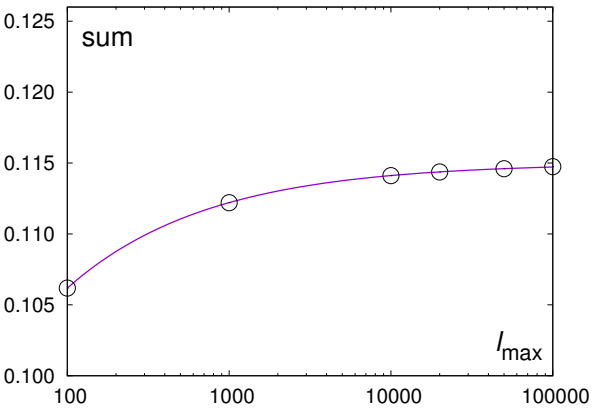
яка для різних α та n показала значення показника b в діапазоні $0.48 \ldots 0.51$. Після цього ми зафіксували $b = 1/2$. Якість цієї апроксимації можна оцінити з рис. 2.2.



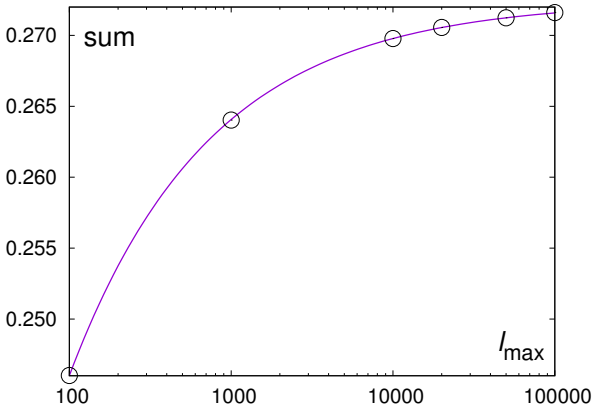
(а) $\alpha = 0.1,\ n = 0$



(б) $\alpha = 0.1,\ n = 1$



(в) $\alpha = 0.5,\ n = 0$



(г) $\alpha = 0.5,\ n = 1$

Рис. 2.2. Апроксимація значень $\Delta Z(\alpha) - \Delta Z(0)$ (позначено sum) залежно від верхньої границі підсумовування $l_{\max}$ в (2.34). Усі рисунки виконано в одному горизонтальному масштабі. Значення параметрів функції 2.35): (а) $a = 0.01758 \pm 0.0002,\ \ c = 0.02134 \pm 0.00001$; (б) $a = 0.0533 \pm 0.0004,\ \ c = 0.0518187 \pm 0.00002$; (в) $a = 0.0882 \pm 0.0002,\ \ c = 0.11500 \pm 7 \cdot 10^{-6}$; (г) $a = 0.2641 \pm 0.0003,\ \ c = 0.27242 \pm 0.00002$ю

Використовуючи (2.13)–(2.16), можна обчислити $\Delta Z(\alpha) - \Delta Z(0)$ і отримати поправки до другого віріального коефіцієнта біля множника $\beta\gamma$ [див. (2.19)]. Для зручності оберемо $\hbar\omega_c = 1$ одиницею енергії. Результати показано на рис. 2.3 та табл. 2.2 для різних значень оберненої температури β та еніонного параметра α.

Таблиця 2.2. Поправка до другого віріального коефіцієнта $\Delta b_2(\alpha)$ біля множника $\beta\gamma$.

α	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1.0$	$\beta = 2.0$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.01	−0.000 078	−0.001 948	−0.004 238	−0.007 197
0.05	−0.000 255	−0.008 358	−0.017 45	−0.026 86
0.1	−0.000 217	−0.013 77	−0.027 22	−0.036 45
0.2	0.000 551	−0.018 25	−0.031 75	−0.028 06
0.3	0.002 038	−0.016 90	−0.024 28	−0.003 644
0.4	0.004 092	−0.011 67	−0.010 31	0.025 45
0.5	0.006 616	−0.003 747	0.007 202	0.054 98
0.6	0.009 545	0.006 124	0.026 63	0.083 66
0.7	0.010 40	0.017 46	0.047 10	0.1114
0.8	0.016 46	0.029 95	0.068 19	0.1385
0.9	0.020 39	0.043 39	0.089 71	0.1655
1.0	0.024 61	0.057 66	0.1117	0.1930

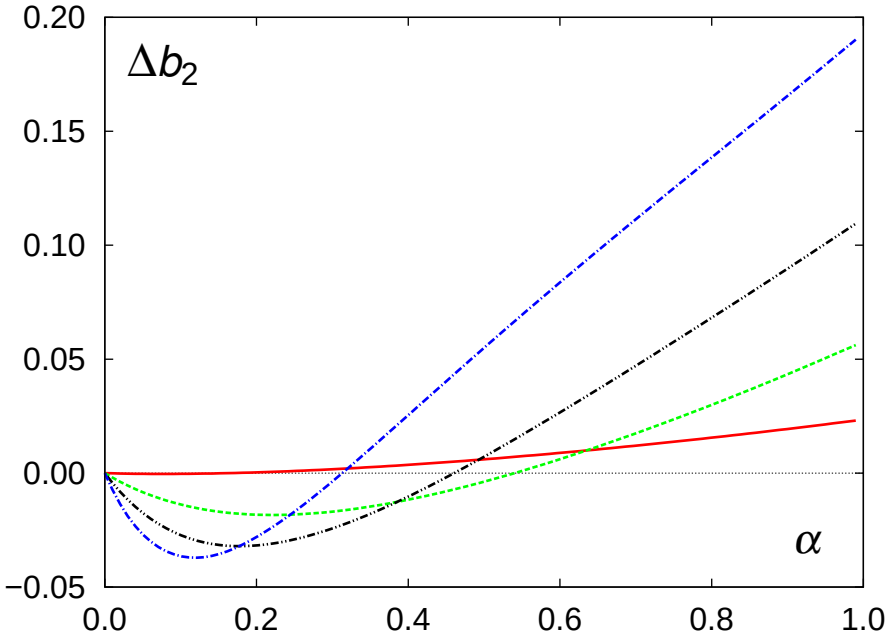


Рис. 2.3. Поправка до другого віріального коефіцієнта біля множника $\beta\gamma$. Червона суцільна лінія (——) відповідає $\beta = 0.1$, зелена пунктирна лінія (- - - -) для $\beta = 0.5$, чорна пунктирна лінія з подвійною крапкою $(-\cdot\cdot-)$ для $\beta = 1.0$, і блакитна штрихпунктирна лінія $(-\cdot-)$ відповідає $\beta = 2.0$.

Рисунок 2.3 показує, що біля бозонного боку (параметр $\alpha \in (0; 0.5)$, залежно від β) поправка Δb_2 набуває від'ємного значення. Отже, природа статистичної взаємодії змінює внесок у термодинаміку зі зростанням α. Зауважимо, що статистичне притягання / відштовхування залежить від знака добутку електричного та магнітного зарядів $e\mu$, що визначає параметр γ.

При наближенні α до ферміонної сторони, $\alpha \to 1$, залежність поправки до другого віріального коефіцієнта стає лінійною. Це спостереження може допомогти у спрощенні чисельних розрахунків у даній границі.

2.4. Магнітна сприйнятливість

Магнітна сприйнятливість може бути переписана через намагніченість як похідна за магнітним полем:

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B}, \tag{2.36}$$

де M визначається як

$$M = -\frac{\partial F}{\partial B}. \tag{2.37}$$

Вільна енергія Гельмгольца F виражається через статистичну суму Z системи, $F = -T \ln Z$. Використовуючи (2.36) та (2.37),отримуємо χ як:

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = -\frac{\partial^2 F}{\partial B^2} = \frac{\partial^2 T \ln Z}{\partial B^2}. \tag{2.38}$$

В головному наближенні, враховуючи N невзаємодіючих частинок, ми можемо переписати Z через одночастинкову статистичну суму Z_1 як $Z = Z_1^N$. Таким чином, F можна записати як:

$$F = -T \ln Z = -NT \ln Z_1 \tag{2.39}$$

і відповідно магнітна сприйнятливість буде:

$$\chi = NT \frac{\partial^2 \ln Z_1}{\partial B^2}. \tag{2.40}$$

Розглянемо питому магнітну сприйнятливість, тобто відносно однієї частинки:

$$\chi_0 = \frac{\chi}{N} = T \frac{\partial^2 \ln Z_1}{\partial B^2} \tag{2.41}$$

Використовуючи (2.31), отримаємо такий вираз для χ_0:

$$\chi_0 = \left(\frac{\hbar e}{4mcT} \right)^2 \frac{2T}{\sinh^2 \frac{\hbar \omega_c}{2T}}. \tag{2.42}$$

Очевидно, що беручи до уваги (2.32), ми також отримуємо поправки до магнітної сприйнятливості, яка є пропорційна до поправки другого

віріального коефіцієнта та залежить від еніонного параметра:

$$\Delta\chi \sim \frac{\partial^2}{\partial B^2}\Delta b_2(\alpha). \tag{2.43}$$

Оскільки аналітичні вирази досить громіздкі, ця поправка була розрахована чисельно. Результати наведені на рис. 2.4–2.5 для різних температур та значень еніонного параметра.

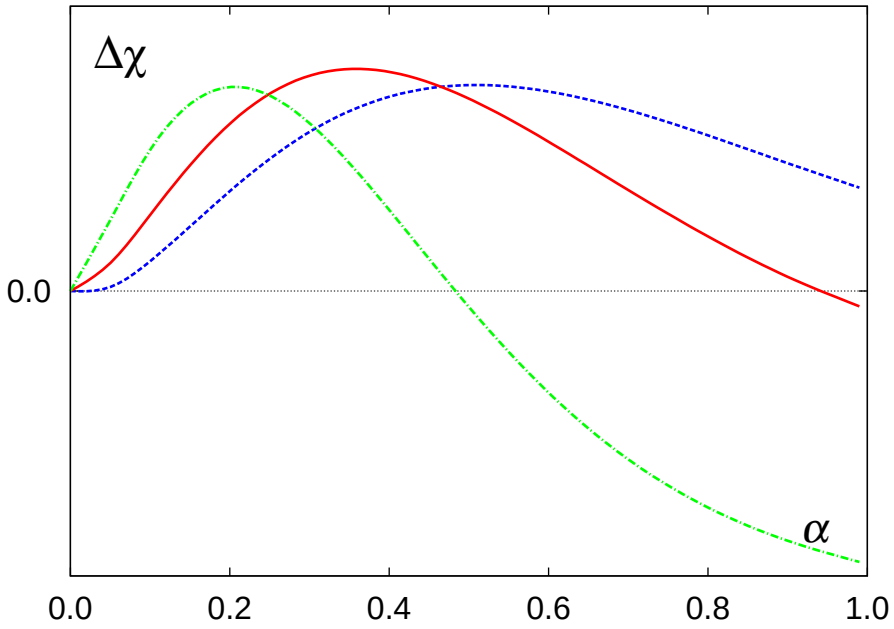


Рис. 2.4. Поправка магнітної сприйнятливості. Зелена штрихпунктирна лінія (- · - · - · -) відповідає $\beta = 2$, червона суцільна лінія (——) для $\beta = 4/3$, та блакитна пунктирна лінія (- - - -) відповідає $\beta = 1$.

Поправка $\Delta\chi$ не змінює знака за температури $T \gtrsim 0.7$. За нижчих температур бозонна та ферміонна сторони відповідають різним знакам поправки, при цьому точка $\Delta\chi = 0$ поступово зміщується до бозонної сторони $\alpha = 0$ у міру зниження температури.

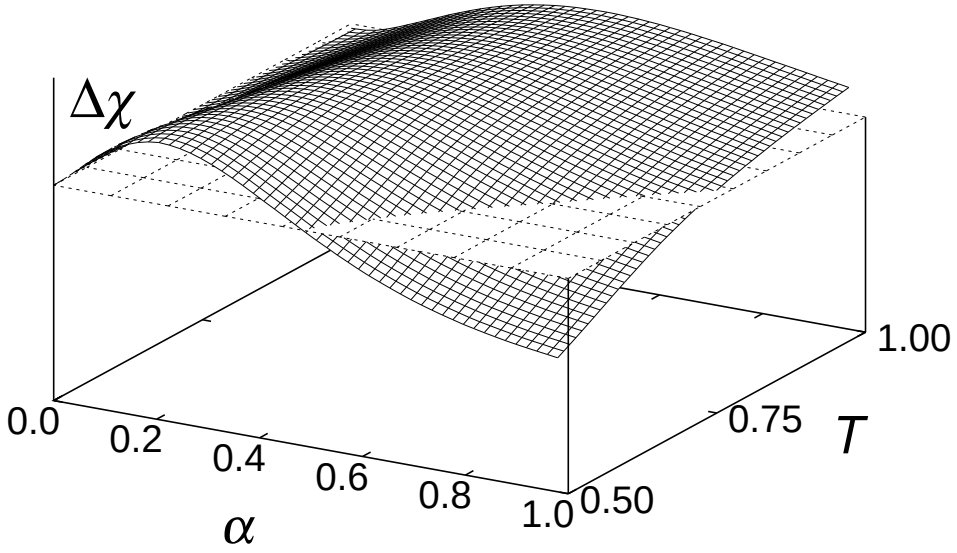


Рис. 2.5. Якісна картина поправки магнітної сприйнятливості $\Delta\chi$ (вертикальна вісь) як функція еніонного параметра α і температури T. Горизонтальна площина відповідає $\Delta\chi = 0$.

2.5. Висновки до розділу 2

У цьому розділі розглянуто систему двох еніонів у магнітному полі з магнітними зарядами та продемонстровано підходи до розрахунку термодинамічних функцій.

Внесок від гіпотетичних магнітних зарядів вважався малим параметром, внаслідок чого можна розрахувати першу поправку за теорією збурень і показати, що її врахування знімає виродження енергетичних рівнів за орбітальним квантовим числом.

Використовуючи результати для спектра задачі двох еніонів, що враховує внесок від магнітних зарядів, розраховано поправку Δb_2 другого віріального коефіцієнта. З отриманої залежності видно, що на

бозонній стороні (еніонний параметр $\alpha \lesssim 0.5$) ця поправка має екстремум (мінімум або максимум залежно від знака добутку електричних і магнітних зарядів $e\mu$).

Поправка на другий віріальний коефіцієнт дозволяє розрахувати термодинамічні функції, що було продемонстровано шляхом визначення поправки до магнітної сприйнятливості залежно від температури та еніонного параметра α.

Представлений підхід може бути використаний для розрахунку термодинамічних функцій у конденсованих системах, де ефективно проявляється еніонна статистика та магнітні заряди. Це стосується також розрахунків магнітних властивостей в інших дробових статистиках [89]. Після незначних модифікацій наведені розрахунки можуть бути застосовані до інших задач, у яких збурення має подібний характер. У перспективі передбачено докладний аналіз способів уведення в теорію магнітних зарядів, зокрема у просторах різної вимірності, та дослідження систем еніонів за таких умов.

РОЗДІЛ 3

НЕАДИТИВНІ МОДИФІКАЦІЇ ФЕРМІ-ГАЗУ

3.1. Вступ

У даному розділі продемонстровано два підходи до опису модифікованого фермі-газу. Варіювання основане на використанні неадитивної q-експоненти Цалліса [46] замість звичайної. Два підходи різняться вибором змінної у експоненті: в одному випадку це хімічний потенціал, а в іншому — активність (фугативність). Показано результати для обох моделей у високо- та низькотемпературних границях.

Результати розділу опубліковано в працях [3, 4].

3.2. Загальні поняття

Неекстенсивні та неадитивні узагальнення ентропії виникли в теорії інформації [45, 90] і були введені у фізичні проблеми Цаллісом [44]. Підходи, що базуються на узагальненні Цалліса, застосовні до проблем, де, наприклад, присутні взаємодії на великій відстані або є істотними немарківські ефекти пам'яті [35]. Сюди входять як фізичні явища [36, 37, 91], так і застосування у міждисциплінарних аспектах [39, 41–43, 92, 93].

Відомі різні формулювання неадитивних узагальнень для квантових розподілів Бозе та Фермі [94–101]. Зауважимо, що бозе-системи

вивчаються більшою мірою, можливо, завдяки захоплюючому явищу бозе-конденсації [102, 103]. Хоча деформації статистики Фермі часто вивчають поряд із статистикою Бозе, у деяких роботах деформовані ферміони є єдиним предметом аналізу [95, 99, 104].

У цій роботі ми використовуємо феноменологічну модель, яка раніше вивчалася для неадитивних узагальнень дробової статистики Поліхронакоса [105] та ідеального бозе-газу [106]. Щоб отримати термодинамічні властивості як функції температури T, ми застосовуємо стандартну процедуру, яка пов'язує кількість частинок N у системі з хімічним потенціалом μ або активністю $z = e^{\mu/T}$:

$$N = \sum_j n(\varepsilon_j, z, T) = \int_0^\infty d\varepsilon\; g(\varepsilon) n(\varepsilon, z, T), \tag{3.1}$$

де $n(\varepsilon, z, T)$ є середніми числами заповнення звичайної фермі-статистики:

$$n(\varepsilon, z, T) = \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} + 1}. \tag{3.2}$$

Нехай константа Больцмана $k_\mathrm{B} = 1$, таким чином, вимірюватимемо енергію та температуру в одних і тих же одиницях. Густину станів $g(\varepsilon)$ введено для зручності, щоб замінити підсумовування по всіх рівнях ε_j інтегруванням за енергіями ε. Щоб охопити більшу різноманітність проблем, густину станів можна записати як

$$g(\varepsilon) = NA\,\varepsilon^{s-1}, \tag{3.3}$$

де, наприклад, $s = D/2$ для вільних частинок в D-вимірному просторі, $s = D$ для D-вимірного гармонічного осцилятора тощо. Значення s, відмінні від цілого та напівцілого, можуть ефективно виникати у системах, що перебувають у зовнішньому потенціалі [107] або розміщені в пористих середовищах. Зауважимо, що для збіжності інтеграла в рівності (3.1) мусимо вимагати, щоб $s > 1$. Множник A — константа,

незалежна від енергії, що визначається такими параметрами, як концентрація частинок, маса частинок, частота гармонічного осцилятора тощо, залежно від конкретної системи, що розглядається [106, 108].

Для вільних частинок $g(\varepsilon) \propto V$, де V — об'єм, що може бути виражений через концентрацію n як $V = N/n$. Термодинамічна границя задається $N/V = n = \text{const}$ як $N \to \infty$ та $V \to \infty$. Для D-вимірного гармонічного осцилятора з частотами ω, $g(\varepsilon) \propto 1/\omega^D$. У цьому випадку термодинамічна границя відповідає $N^{1/D}\omega = \text{const}$ як $N \to \infty$ та $\omega \to 0$ [109]. Таким чином, ми маємо $g(\varepsilon) \propto N/n$ та $g(\varepsilon) \propto N/[N^{1/D}\omega]^D$, відповідно. Отже, коефіцієнт A в густині станів позбавляється «об'ємних» величин, таких як об'єм або частота, за умови термодинамічної границі.

З урахуванням хімічного потенціалу або активності як функції температури ми можемо розрахувати загальну енергію

$$E = \sum_j \varepsilon_j n(\varepsilon_j, z, T) = \int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon, z, T) \tag{3.4}$$

та ізохорну теплоємність

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V. \tag{3.5}$$

Вищезазначені функції $\mu(T)$, $z(T)$, $E(T)$ та $C_V(T)$ є головним предметом аналізу в цьому розділі. Ми розглянемо дві різні процедури, щоб ввести неадитивні узагальнення розподілу Фермі (3.2), подамо чисельні результати для всього діапазону температур, та проаналізуємо низько- та високотемпературні режими аналітично.

3.3. Деформація фактора Гіббса

Проаналізуємо два підходи до узагальнення розподілу Фермі, використовуючи неадитивну q-експоненту Цалліса (1.7).

Першою модифікацією розглянемо таку заміну фактора Гіббса $e^{(\varepsilon-\mu)/T}$ у розподілі Фермі:

$$n_1(\varepsilon,\mu,T)=\frac{1}{e_q^{(\varepsilon-\mu)/T}+1}. \tag{3.6}$$

Друга модифікація описується схожим чином,

$$n_2(\varepsilon,z,T)=\frac{1}{z^{-1}e_q^{\varepsilon/T}+1}. \tag{3.7}$$

Оскільки правило факторизації порушується для q-експонент, $e_q^{x+y}\neq e_q^x e_q^y$, то не можна встановити простий зв'язок між хімічним потенціалом і активністю, аналогічно до $z=e^{\mu/T}$ у звичному випадку. Більш того, навіть якщо подати деформовану активність як $z_q=e_q^{\mu/T}$, обернена величина не буде просто пов'язана з хімічним потенціалом, $z_q^{-1}\neq e_q^{-\mu/T}$. Якщо бути точнішим, то для q-експонент Цалліса виконуються такі співвідношення [110]:

$$(e_q^x e_q^y)^{1-q}=(e_q^{x+y})^{1-q}+(1-q)^2xy, \qquad \left[e_q^x\right]^{-1}=e_{2-q}^{-x}. \tag{3.8}$$

На рисунку 3.1 показано залежність функцій n_1 та n_2 від різних значень q та температури T. Тут і надалі для чисельних розрахунків у густині станів (3.3) покладемо константу $A=1$ та степінь $s=3/2$. Ці значення також однозначно фіксуватимуть одиниці вимірювання температури та енергії (а отже, й хімічного потенціалу).

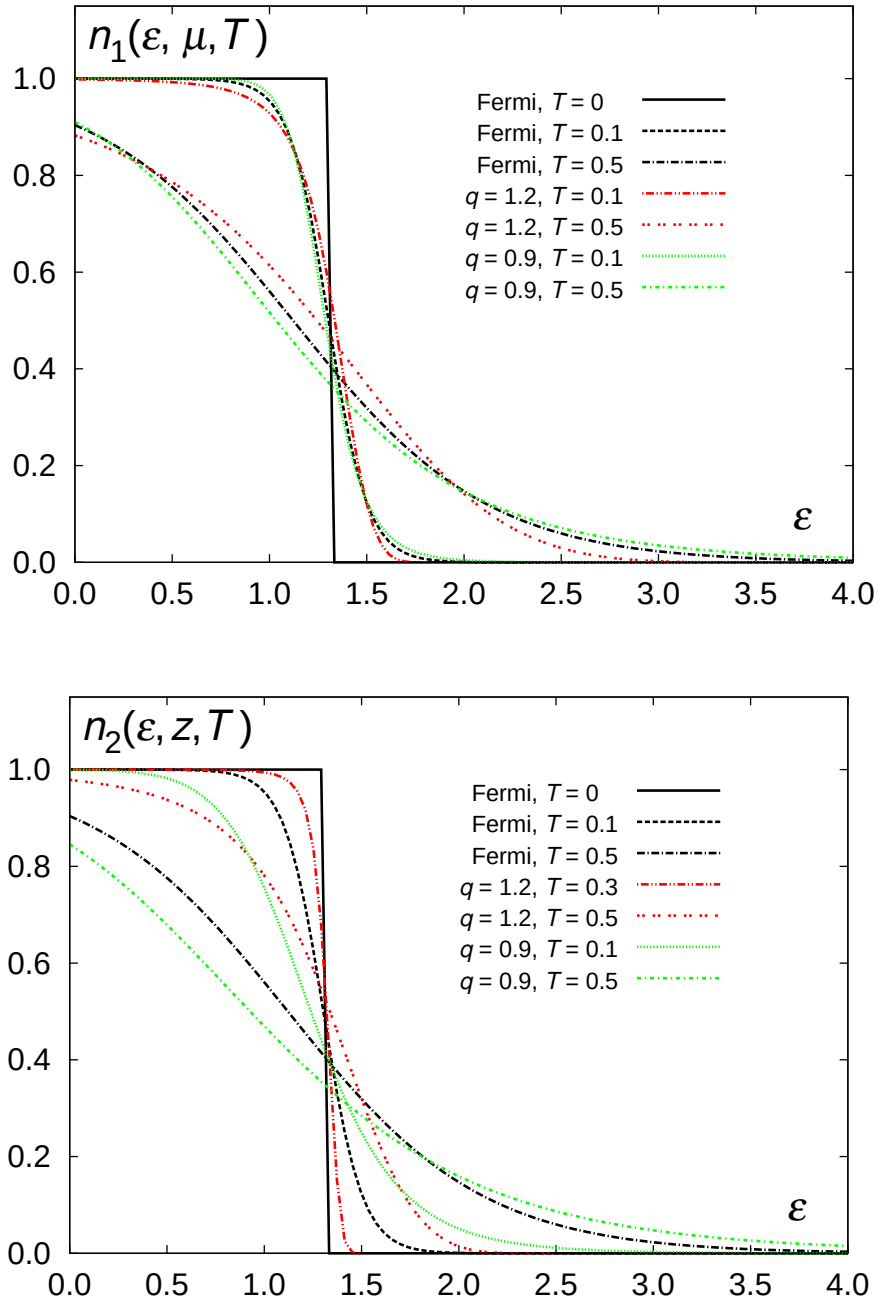


Рис. 3.1. Числа заповнення n_1 та n_2 за різних значень q та температури T. Хімічний потенціал та активність є фіксованими рівністю (3.1).

У випадку модифікації n_1, що включає хімічний потенціал, досить просто продемонструвати, що в границі $T \to 0$ отримуємо звичну сходинку Фермі. Справді, для $q < 1$, вираз $[1+(1-q)(\varepsilon-\mu)/T]$ є від'ємним для $\varepsilon < \mu$, досягаючи нуля при зростанні додатного степеня $1/(1-q)$, відповідно до рівності (1.7). І навпаки, при $q > 1$ ми маємо додатну нескінченність до від'ємного степеня, отже, також нуль. Безпосередній аналіз другої модифікації n_2, що включає активність, є дещо складнішим.

3.4. Чисельні результати

Температурну залежність хімічного потенціалу μ та активності z, порахована чисельно, показано на рис. 3.2, 3.3 і в табл. 3.1, 3.2. Результати отримано шляхом чисельного розв'язування рівняння

$$N = \int_0^\infty g(\varepsilon) n_{1,2}(\varepsilon, \cdot, T)\, d\varepsilon, \tag{3.9}$$

де крапка означає хімічний потенціал μ у випадку n_1 й активність z у випадку n_2.

Далі, використовуючи ці залежності $\mu(T)$ або $z(T)$, можемо обчислити енергію

$$E = \int_0^\infty \varepsilon\, g(\varepsilon) n_{1,2}(\varepsilon, \cdot, T)\, d\varepsilon \tag{3.10}$$

та ізохорну теплоємність

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V. \tag{3.11}$$

Результати для питомої ізохорної теплоємності C_V/N показано на рис. 3.4. Числові значення деталізоано в табл. 3.3.

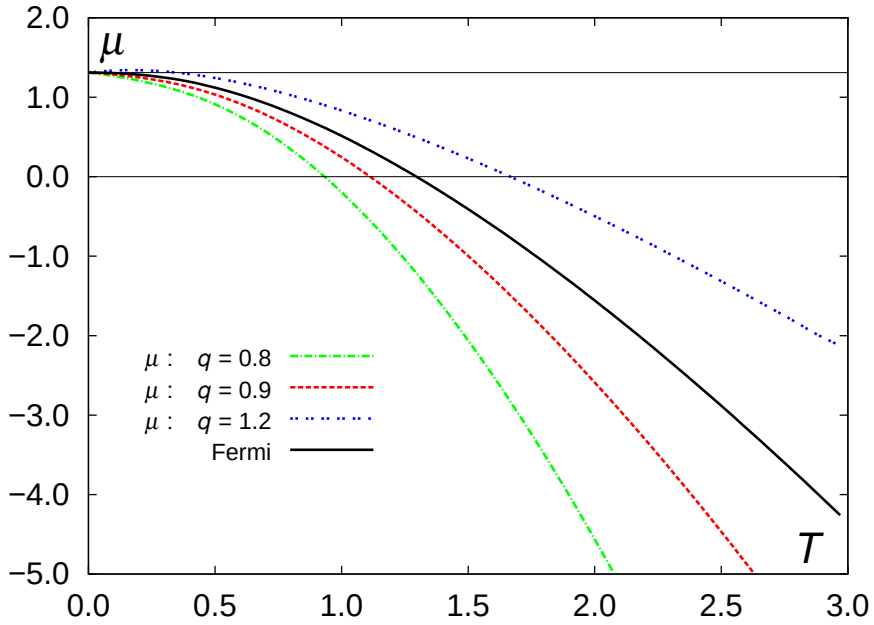


Рис. 3.2. Хімічний потенціал як функція температури T за різних значень q для першої моделі.

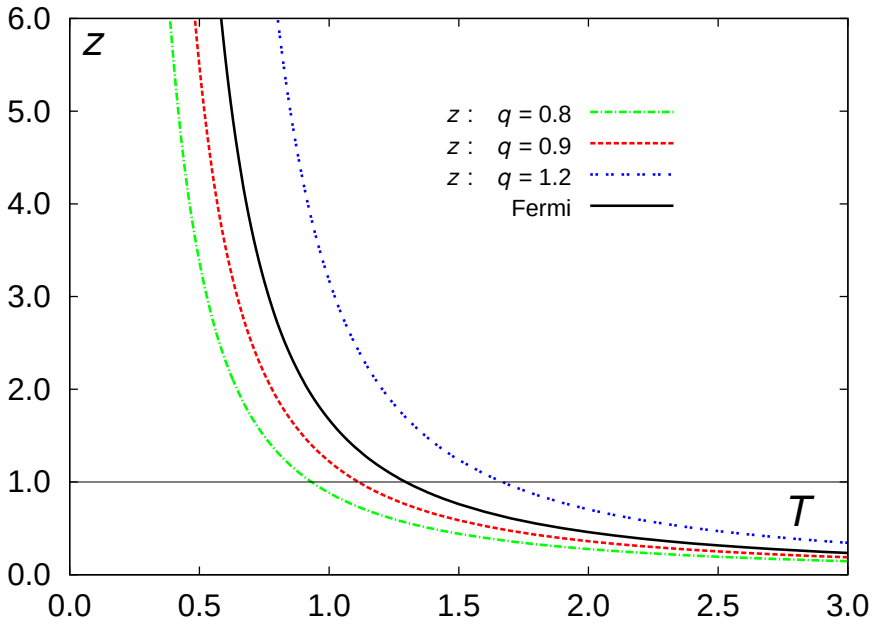


Рис. 3.3. Активність як функція температури T за різних значень q для другої моделі.

Таблиця 3.1. Залежність хімічного потенціалу μ від температури T за різних значень q для першої моделі.

T	$q = 0.8$	$q = 0.9$	$q = 1.0$	$q = 1.2$
0	1.3104	1.3104	1.3107	1.3104
0.1	1.2677	1.2870	1.3040	1.3355
0.2	1.2092	1.2502	1.2842	1.3402
0.5	0.9122	1.0339	1.1214	1.2434
0.8	0.3441	0.6222	0.8010	1.0254
1.0	−0.1964	0.2454	0.5136	0.8324
1.2	−0.8581	−0.2035	0.1767	0.6098
1.5	−2.0597	−0.9963	−0.4081	0.2305
2.0	−4.5627	−2.5893	−1.5573	−0.4965
2.5	−7.6186	−4.4671	−2.8828	−1.3146
3	−11.1650	−6.5849	−4.3518	−2.2035
4	−19.5522	−11.4207	−7.6356	−4.1441
5	−29.4558	−16.9218	−11.2887	−6.2507
6	−40.6948	−22.9774	−15.2384	−8.4842
8	−66.6816	−36.4652	−23.8461	−13.2400
10	−96.7675	−51.4715	−33.2049	−18.2872
12	−130.4571	−67.7394	−43.1638	−23.5559
15	−186.9877	−94.1334	−59.0164	−31.7813
20	−295.1805	−142.5023	−87.3671	−46.1365
50	−1213.2283	−506.6725	−287.3062	−141.2075
100	−3438.7538	−1275.3679	−678.6574	−314.6790
200	−9602.3606	−3142.8949	−1565.3106	−684.2234
500	−36 754.4160	−10 113.7904	−4600.5471	−1861.1026

Відзначимо, що вісь $\mu = 0$ хімічний потенціал перетинає на проміжку $(0.9; 1.0)$ для $q = 0.8$, на проміжку $(1.1; 1.2)$ для $q = 0.9$, $(1.2; 1.3)$ для звичайного фермі-газу (тобто $q = 1$) і $(1.6; 1.7)$ для $q = 1.2$.

Таблиця 3.2. Залежність активності z від температури T за різних значень q для другої моделі.

T	$q = 0.8$	$q = 0.9$	$q = 1.0$	$q = 1.2$
0	∞	∞	∞	∞
0.01	8.91×10^{6}	2.41×10^{11}	8.05×10^{56}	
0.05	5511.6754	2.93×10^{5}	2.33×10^{11}	
0.1	350.2061	3169.6035	4.61×10^{5}	
0.2	34.4850	105.3356	614.5891	
0.3	11.1845	23.6970	64.1256	41 972.7675
0.4	5.5425	9.9010	19.7921	254.2181
0.5	3.3741	5.4839	9.4202	45.9509
0.6	2.3104	3.5422	5.5745	17.8598
0.7	1.7047	2.5138	3.7419	9.5530
0.8	1.3235	1.8991	2.7218	6.0467
0.9	1.0661	1.4992	2.0912	4.2358
1	0.8828	1.2226	1.6713	3.1718
1.2	0.6428	0.8713	1.1586	2.0205
1.5	0.4416	0.5871	0.7618	1.2383
2	0.2765	0.3613	0.4590	0.7045
3	0.1458	0.1878	0.2344	0.3439
4	0.0934	0.1196	0.1482	0.2136
5	0.0664	0.0847	0.1046	0.1493
6	0.0503	0.0640	0.0789	0.1120
7	0.0398	0.0506	0.0623	0.0880
8	0.0325	0.0413	0.0508	0.0716
9	0.0272	0.0345	0.0424	0.0597
10	0.0232	0.0294	0.0361	0.0508

Як бачимо, активність швидко прямує до безмежної границі з наближенням температури до нуля. В наступних підрозділах отримаємо таку поведінку аналітично. Для звичайного фермі-газу ($q = 1$) це відразу випливає з означення $z = e^{\mu/T}$, оскільки значення $\mu(0)$ — скінченне додатне число (див. табл. 3.1).

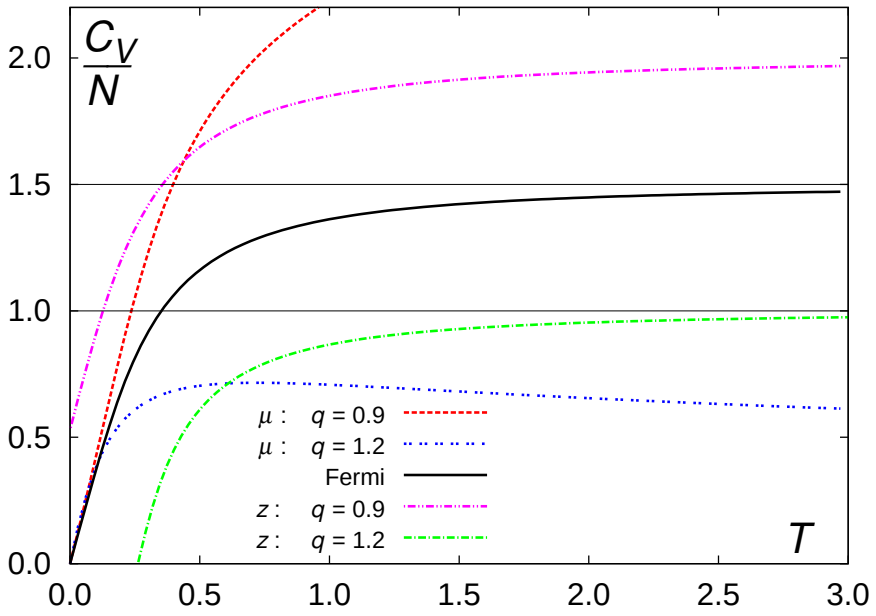


Рис. 3.4. Питома ізохорна теплоємність як функція температури T за різних значень q. Моделі 1 і 2 демонструють різну поведінку у низько- та високотемпературній границі

Результати чисельних розрахунків дають нам деякі підказки, що допоможуть із аналітичними виведеннями в наступних підрозділах. Зокрема, поведінка μ і z для різних значень параметра статистики q на рис. 3.2 та 3.3 свідчить про плавний перехід між областями $q < 1$ і $q > 1$, розділеними звичайним фермі-газом, що відповідає $q = 1$.

Однак найцікавішим є графік питомої теплоємності. Можна було б очікувати, що у високотемпературному межі значення C_V прямуватиме до константи (дорівнює sN у випадку звичайного ідеального газу). Але в першій моделі, де модифікований коефіцієнт Гіббса містить хімічний потенціал, схоже, що теплоємність нескінченно зростає, якщо $q < 1$, і прямує до нуля, якщо $q > 1$, як було показано раніше для неадитивного ідеального бозе-газу [106]. Для другої моделі, з z, класичною границею є константа, що залежить від q.

Таблиця 3.3. Залежність питомої теплоємності C_V/N від температури T за різних значень q для першої (м-1) і другої (м-2) моделей.

T	$q = 0.9$, м-1	$q = 0.9$, м-2	фермі-газ	$q = 1.2$, м-1	$q = 1.2$, м-2
0	0	0.5275	0	0	
0.01	0.0409	0.5674	0.0378	0.0503	
0.02	0.0822	0.6070	0.0755	0.0979	
0.05	0.2083	0.7239	0.1877	0.2244	
0.1	0.4238	0.9078	0.3699	0.3822	
0.2	0.8543	1.2085	0.6890	0.5602	0 (при $T = 0.262$)
0.3	1.2277	1.4149	0.9149	0.6434	0.1583
0.4	1.5071	1.5529	1.0630	0.6840	0.4477
0.5	1.7105	1.6473	1.1612	0.7039	0.6090
0.6	1.8630	1.7141	1.2290	0.7127	0.7057
0.7	1.9820	1.7629	1.2775	0.7155	0.7684
0.8	2.0784	1.7996	1.3134	0.7148	0.8117
0.9	2.1588	1.8280	1.3408	0.7119	0.8430
1	2.2276	1.8504	1.3622	0.7078	0.8665
1.2	2.3407	1.8831	1.3931	0.6977	0.8990
1.5	2.4717	1.9143	1.4222	0.6811	0.9281
2	2.6333	1.9431	1.4486	0.6547	0.9535
3	2.8565	1.9684	1.4717	0.6120	0.9748
4	3.0165	1.9793	1.4815	0.5799	0.9837
5	3.1435	1.9851	1.4867	0.5548	0.9883
6	3.2497	1.9887	1.4899	0.5345	0.9911
7	3.3415	1.9910	1.4920	0.5175	0.9930
8	3.4227	1.9926	1.4934	0.5030	0.9942
9	3.4957	1.9938	1.4945	0.4904	0.9952
10	3.5621	1.9947	1.4953	0.4794	0.9959
∞	∞	2	1.5	0	1

Низькотемпературна область має свої особливості. А саме, температурна поведінка першої моделі майже збігається з поведінкою звичайного фермі-газу, тоді як для другої моделі спостерігаються два несподівані результати. Для $q < 1$ значення теплоємності не наближається до нуля при $T \to 0$. При $q > 1$ теплоємність стає нульовою за скінченної (ненульової) температури. Ці спостереження підтверджено аналітично далі.

3.5. Високотемпературна та класична границя для першої моделі

У [106] було показано як отримати поведінку ідеального бозе-газу у режимі високих температур, що задовольняє неадитивну модифікацію фактору Гіббса, включаючи хімічний потенціал з заміною $e^{(\varepsilon-\mu)/T}$ на $e_q^{(\varepsilon-\mu)/T}$. Той самий підхід може бути використаний для відповідної моделі фермі-газу.

З рис. 3.2 ми можемо бачити, що, природно, звичайний фермі-газ розділяє випадки $q < 1$ і $q > 1$. Для ферміонів хімічний потенціал прямує до класичної границі як $T \to \infty$,

$$\frac{\mu}{T} = -\frac{|\mu|}{T} \to -\infty. \tag{3.12}$$

Отож,

$$N = NA \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{s-1}\, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1} \simeq NAT^s e^{\mu/T} \int_0^\infty dx\, x^{s-1} e^{-x}. \tag{3.13}$$

Таким чином, ми маємо високотемпературну границю

$$\mu \simeq -sT \ln T. \tag{3.14}$$

Розглянемо тепер деформований випадок для $q < 1$. Кількість частинок рівна

$$N = NA \int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon^{s-1}\, d\varepsilon}{e_q^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1} \simeq NAT^s \int\limits_0^\infty dx\, x^{s-1} \left[e_q^{x+|\mu|/T}\right]^{-1} \tag{3.15}$$

оскільки одиниця в знаменнику мала порівняно з q-експонентою. Тут також введено безрозмірну змінну $x = \varepsilon/T$.

Перепишемо вираз (3.15), використовуючи означення q-експоненти (1.7) і малість одиниці:

$$\begin{aligned}
N =& NAT^s \int\limits_0^\infty dx\, x^{s-1} \left[e_q^{x+|\mu|/T}\right]^{-1} = \\
&= NAT^s \int\limits_0^\infty dx\, x^{s-1} \left[1 + (1-q)\left(x + \frac{|\mu|}{T}\right)\right]^{-\frac{1}{q-1}} \simeq \\
&\simeq NAT^s \int\limits_0^\infty dx\, x^{s-1} \left[(1-q)\left(x + \frac{|\mu|}{T}\right)\right]^{-\frac{1}{q-1}} = \\
&= NAT^{s-\frac{1}{q-1}} (1-q)^{\frac{1}{q-1}} |\mu|^{\frac{1}{q-1}} \int\limits_0^\infty dx\, x^{s-1} \left(1 + x\frac{T}{|\mu|}\right)^{-\frac{1}{q-1}}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Вводячи тут змінну $t = x\dfrac{T}{|\mu|}$, остаточно матимемо

$$N = NAT^{-\frac{1}{q-1}} (1-q)^{\frac{1}{q-1}} |\mu|^{s+\frac{1}{q-1}}\, \mathrm{B}\left(s, \frac{1}{1-q} - s\right), \tag{3.17}$$

де $\mathrm{B}(x, y)$ — бета-функція Ейлера,

$$\mathrm{B}\,(a, b) = \int\limits_0^\infty dt\, \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}. \tag{3.18}$$

Зауважмо, що коефіцієнт A є константою, що не залежить від q, тому розв'язок для хімічного потенціалу μ в цьому випадку від q залежить.

Однак, щоб не перевантажувати позначення, не записуватимемо цієї залежності явно.

Таким же чином енергія дає

$$E = NA\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon^s\,d\varepsilon}{e_q^{(\varepsilon-\mu)/T}+1} \simeq NAT^{s+1}\int\limits_0^\infty dx\,x^s\left[e_q^{x+|\mu|/T}\right]^{-1} =$$

$$= NAT^{-\frac{1}{q-1}}(1-q)^{\frac{1}{q-1}}|\mu|^{s+1+\frac{1}{q-1}}\,\mathrm{B}\left(s+1,\frac{1}{1-q}-s-1\right). \qquad (3.19)$$

Після простих розрахунків ми отримуємо з виразу для кількості частинок (3.16) високотемпературну поведінку для хімічного потенціалу, що має вигляд:

$$\mu = -\left[A(1-q)^{\frac{1}{q-1}}\mathrm{B}\left(s,\frac{1}{1-q}-s\right)\right]^{-\frac{q-1}{1+s(q-1)}} T^{\frac{1}{1+s(q-1)}}, \qquad (3.20)$$

а далі отримуємо енергію, як і в праці [106] для ідеального бозе-газу з неадитивною статистикою,

$$\frac{E}{N} = \frac{\mathrm{B}\left(s+1,\frac{1}{1-q}-s-1\right)}{\mathrm{B}\left(s,\frac{1}{1-q}-s\right)}\,|\mu|, \qquad (3.21)$$

і, відповідно, питома ізохорна теплоємність:

$$\frac{C_V}{N} \propto T^{\frac{(1-q)s}{1+s(q-1)}} = T^\gamma. \qquad (3.22)$$

Випадок $q > 1$ дещо складніший. Означення q-експоненти (1.7) передбачає скінченну верхню межу інтегрування,

$$N = NAT^s\int\limits_0^{\frac{1}{q-1}-\frac{|\mu|}{T}} \frac{x^{s-1}\,dx}{\left[1+(1-q)\left(x-\frac{|\mu|}{T}\right)\right]^{1/(1-q)}+1} \qquad (3.23)$$

і умову $\dfrac{|\mu|}{T} < \dfrac{1}{q-1}$. Нехай

$$\frac{|\mu|}{T} = \frac{1}{q-1} - \delta, \qquad (3.24)$$

де δ є невеликим числом, яке прямує до нуля при великих температурах, ми можемо застосувати процедуру, подібну до описаної вище, для випадку $q < 1$ і, нарешті, отримати

$$\mu = \frac{1}{1-q} + \left[A(q-1)^{\frac{1}{q-1}} \mathrm{B}\left(s, \frac{1}{q-1}+1\right)\right]^{-\frac{q-1}{1+s(q-1)}} T^{\frac{1}{1+s(q-1)}} \qquad (3.25)$$

даючи ту саму температурну залежність для питомої теплоємності, що і в (3.22). Очевидно, звичайна експонента, що відповідає $q = 1$ забезпечує $C_V = \mathrm{const}$ як $T \to \infty$.

Відповідна температурна поведінка при високих температурах, показана на рис. 3.5 та 3.6.

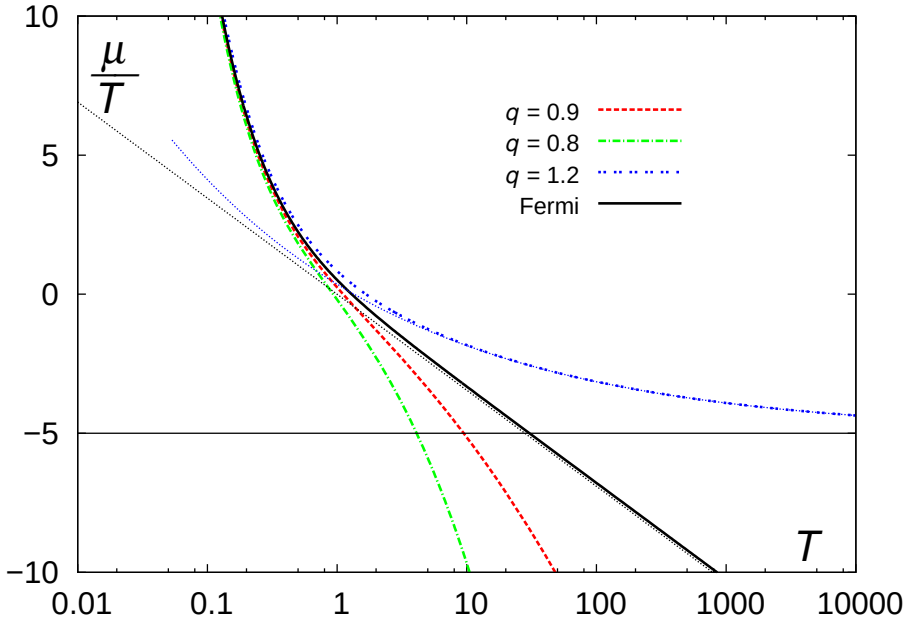


Рис. 3.5. Хімічний потенціал як функція температури T при різних значеннях q при високих температурах. Пунктирними лініями показано асимптотичну поведінку.

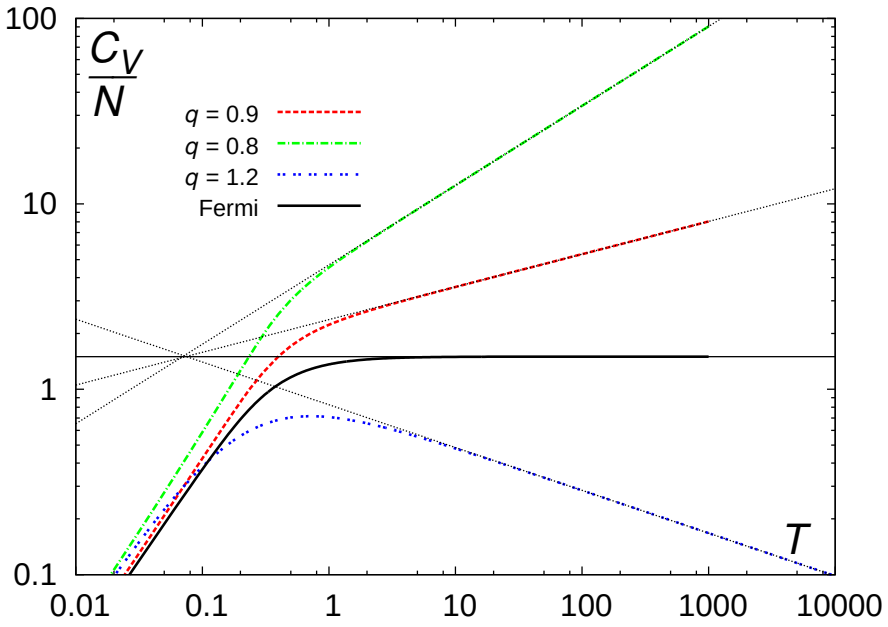


Рис. 3.6. Питома теплоємність як функція температури T при різних значеннях q при високих температурах. Пунктирними лініями показано асимптотичну поведінку.

3.6. Високотемпературна та класична границі для другої моделі

Для моделі, що включає активність, можна провести той же аналіз, що і для неадитивного бозе-газу [106]. При $z \to 0$ за високих температур кількість частинок та енергія може бути записана у такому вигляді

$$N = NA \int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon^{s-1}\, d\varepsilon}{z^{-1} e_q^{\varepsilon/T} + 1} \simeq zNAT^s \int\limits_0^\infty dx\, x^{s-1} \left[e_q^x\right]^{-1} \tag{3.26}$$

та

$$E = NA \int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon^{s}\, d\varepsilon}{z^{-1} e_q^{\varepsilon/T} + 1} \simeq zNAT^{s+1} \int\limits_0^\infty dx\, x^{s} \left[e_q^x\right]^{-1}. \tag{3.27}$$

З (3.26), поділивши на N отримуємо

$$1 = zAT^s \int\limits_0^\infty dx\, x^{s-1} \left[e_q^x\right]^{-1} \tag{3.28}$$

Розглянемо інтеграл за різних значень параметра q.

Для $q < 1$, зробивши заміну $t = (1-q)x$, отримуємо:

$$1 = zAT^s \int\limits_0^\infty dx\, x^{s-1} \left[e_q^x\right]^{-1} = zAT^s \frac{1}{(1-q)^s} \int\limits_0^\infty dt\, t^{s-1}(1+t)^{-\frac{1}{1-q}}. \tag{3.29}$$

Використовуючи означення бета-функції (3.18) та прирівнюючи відповідні степені t, можна переписати

$$1 = zAT^s \int\limits_0^\infty dx\, x^{s-1} \left[e_q^x\right]^{-1} = zAT^s \frac{1}{(1-q)^s} \mathrm{B}\left(s, \frac{1}{1-q} - s\right). \tag{3.30}$$

Для $q > 1$ зробивши заміну $t = -(1-q)x$ та врахувавши верхню межу, отримуємо:

$$1 = zAT^s \int\limits_0^\infty dx\, x^{s-1} \left[e_q^x\right]^{-1} = zAT^s \frac{1}{(q-1)^s} \int\limits_0^1 dt\, t^{s-1}(1-t)^{-\frac{1}{1-q}}. \tag{3.31}$$

Використовуючи означення бета-функції

$$\mathrm{B}\,(a,b) = \int\limits_0^1 dt\, t^{a-1}(1-t)^{b-1}, \tag{3.32}$$

та прирівнюючи відповідні степені t, отримуємо:

$$1 = zAT^s \int\limits_0^\infty dx\, x^{s-1} \left[e_q^x\right]^{-1} = zAT^s \frac{1}{(q-1)^s} \mathrm{B}\left(s, \frac{1}{(q-1)} + 1\right). \tag{3.33}$$

Таким чином, головний член активності є

$$z_0 = \left[A \frac{1}{(1-q)^s} \mathrm{B}\left(s, \frac{1}{1-q} - s\right)\right]^{-1} T^{-s} \tag{3.34}$$

для $q < 1$ і

$$z_0 = \left[A \frac{1}{(q-1)^s} \mathrm{B}\left(s, \frac{1}{q-1} + 1 \right) \right]^{-1} T^{-s} \tag{3.35}$$

для $q > 1$.

Прості перетворення дають класичну границю [106]:

$$E = \frac{s}{q(s+1) - s} NT. \tag{3.36}$$

і

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{s}{q(s+1) - s} N. \tag{3.37}$$

для обох $q < 1$ та $q > 1$. Як і очікувалось, випадок при $q = 1$ відповідає $E = sNT$. Рівняння (3.36)–(3.37) демонструють, по суті, неадитивний варіант закону про рівнорозподіл. Отримана залежність класичних меж енергії та теплоємності від параметра неадитивності q корелює з результатами, наведеними в [111, 112].

Додавання більшої кількості членів в розкладах для кількості частинок (3.26) та енергії (3.27) дає можливість отримати поправки до класичної границі активності, енергії та питомої теплоємності.

Для $q < 1$ з (3.26) ми отримуємо

$$N \simeq zNAT^s \frac{1}{(1-q)^s} \sum_{k=0} (-1)^k z^k \, \mathrm{B}\left(s, \frac{k}{1-q} - s \right) \tag{3.38}$$

та

$$E \simeq zNAT^{s+1} \frac{1}{(1-q)^{s+1}} \sum_{k=0} (-1)^k z^k \, \mathrm{B}\left(s+1, \frac{k}{1-q} - s - 1 \right). \tag{3.39}$$

Вираз для двох доданків активності має вигляд

$$z = z_0 + \Delta z = z_0 + z_0^2 \frac{\mathrm{B}\left(s, \frac{2}{1-q} - s \right)}{\mathrm{B}\left(s, \frac{1}{1-q} - s \right)}, \tag{3.40}$$

де поправка $\Delta z \propto T^{-2s}$, що дає енергію

$$\frac{E}{N} = \frac{s}{q(s+1)-s} T + \frac{AT^{s+1}}{(1-q)^{s+1}} \Delta z \, \mathrm{B}\left(s+1, \frac{q}{1-q} - s\right) =$$

$$= \frac{s}{q(s+1)-s} T + \mathrm{const}\, T^{1-s}, \qquad \text{де } \mathrm{const} > 0. \tag{3.41}$$

Таким чином, високотемпературна поправка до класичного границі питомої теплоємності (3.37) є від'ємною (оскільки $s > 1$) і пропорційною до T^{-s}. Випадок $q > 1$ можна аналізувати подібним чином [варто звернути увагу на різницю між виразами (3.34) та (3.35) для z_0] з отриманою однаковою температурною залежністю.

3.7. Границя $T \to 0$ для другої моделі

Границя низьких температур першої моделі, з визначенням, що стосується хімічного потенціалу, дуже схожа на границю для звичайного фермі-газу. Зокрема, можна показати, що при $T = 0$ хімічний потенціал досягає значення

$$\mu_0 \equiv \mu\Big|_{T=0} = \left(\frac{s}{A}\right)^{1/s}, \tag{3.42}$$

незалежного від q. З огляду на сходинчасту поведінку чисел заповнення в цій моделі при $T = 0$, див. рис. 3.1 та відповідне обговорення в Розділі 3.3, можна легко ідентифікувати μ_0 з енергією Фермі.

З іншого боку, друга модель, що включає активність, виявляє набагато цікавіші властивості при $T \to 0$.

Поведінка активності z в межі низьких температур отримується наступним чином. Із виразу для кількості частинок:

$$N = NAT^s \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{z^{-1} e_q^x + 1} \tag{3.43}$$

отримаємо:

$$AT^s \int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{z^{-1}e_q^x + 1} = 1. \tag{3.44}$$

Інтеграл у виразі (3.44), що визначає активність, може бути розділений на дві частини,

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{z^{-1}e_q^x + 1} = \int\limits_0^{x_1} \frac{x^{s-1}\,dx}{z^{-1}e_q^x + 1} + \int\limits_{x_1}^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{z^{-1}e_q^x + 1}, \tag{3.45}$$

де $e_q^{x_1} = z$ або еквівалентно, $x_1 = \ln_q z$ з q-логарифмом, що визначається як

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, \qquad \text{отримують, зокрема,} \quad \ln_1 x = \ln x. \tag{3.46}$$

З урахуванням різних радіусів збіжності два інтеграли розкладаються в такі ряди:

$$\int\limits_0^{x_1} dx\, x^{s-1}\Big[1 + z^{-1}e_q^x\Big]^{-1} + \int\limits_{x_1}^\infty dx\, x^{s-1} z (e_q^x)^{-1}\Big[1 + z(e_q^x)^{-1}\Big]^{-1} =$$

$$= \int\limits_0^{x_1} dx\, x^{s-1} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{z^k}\left(e_q^x\right)^k + \int\limits_{x_1}^\infty dx\, x^{s-1} \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} z^k \left(e_q^x\right)^{-k}. \tag{3.47}$$

У границі $T \to 0$ активність прямує до нескінченності, як і x_1. Отже, ми зацікавлені у головних внесках відповідних інтегралів,

$$\int\limits_0^{x_1} dx\, x^{s-1}\left(e_q^x\right)^k = \frac{(1-q)^{1+\frac{k}{1-q}}}{k + (1-q)s}\, x_1^{s+\frac{k}{1-q}} + \ldots, \tag{3.48}$$

та

$$\int\limits_{x_1}^\infty dx\, x^{s-1}\left(e_q^x\right)^{-k} = \frac{(1-q)^{1+\frac{k}{q-1}}}{k + (q-1)s}\, x_1^{s+\frac{k}{q-1}} + \ldots\,. \tag{3.49}$$

Беручи до уваги, що для великих z q-логарифм зводиться до степеневої функції,

$$x_1 = \ln_q z \simeq \frac{z^{1-q}}{1-q}, \tag{3.50}$$

таким чином, отримуємо з (3.44):

$$A\,(T \ln_q z)^s\,(1-q)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+(1-q)s} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+(q-1)s}\right] = 1. \tag{3.51}$$

Цей вираз можна переписати, використовуючи так званий трансцендент Лерха $\Phi(a;b;c)$, який є узагальненням дзета-функцій Рімана та Гурвіца:

$$\Phi(a;b;c) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{(b+c)^k}, \tag{3.52}$$

а саме

$$\lim_{T\to 0} T \ln_q z = \Big\{A(1-q)\Big[\Phi\big(-1;1;(1-q)s\big) + \Phi\big(-1;1;1+(q-1)s\big)\Big]\Big\}^{-1/s}. \tag{3.53}$$

Зауважимо, що в границі $q \to 1-0$

$$\Phi\big(-1;1;(1-q)s\big) + \Phi\big(-1;1;1+(q-1)s\big) = \frac{1}{(1-q)s} + \ldots, \tag{3.54}$$

де написано тільки головний член, тому при $T = 0$

$$\mu = T \ln z = (s/A)^{1/s}, \tag{3.55}$$

що збігається з виразом (3.42) для енергії Фермі.

Позначаючи

$$\begin{aligned}\phi(q,s) &= (1-q)\Big[\Phi\big(-1;1;(1-q)s\big) + \Phi\big(-1;1;1+(q-1)s\big)\Big] \\ &= (1-q)\pi\,\mathrm{csc}[\pi(1-q)s];\end{aligned} \tag{3.56}$$

так що

$$\lim_{T\to 0} T \ln_q z = [A\phi(q,s)]^{-1/s}, \tag{3.57}$$

ми також можемо відразу написати низькотемпературну границю для енергії E, де інтеграл містить x^s замість x^{s-1} для N. Таким чином,

$$E_0 \equiv \lim_{T\to 0} E = NA(T\ln_q z)^{s+1}\phi(q,s+1) = N\frac{\phi(q,s+1)}{[\phi(q,s)]^{1/s+1}}. \qquad (3.58)$$

Після деяких громіздких виведень можна показати, що наступний доданок є лінійним за температурою,

$$E\Big|_{T\to 0} = E_0 + T\alpha(q,s) + \mathcal{O}(T)^2, \qquad (3.59)$$

де $\alpha(q,s)$ є складним виразом, що задовольняє умову $\alpha(1,s)=0$. Відхилення $\alpha(q,s)$ від нуля пов'язане з порушенням відношення $e^{-x} = [e^x]^{-1}$ для q-експоненти Цалліса, $e_q^{-x} \neq [e_q^x]^{-1}$, порівняно з аналізом виродження фермі-газу в [113, Chap. V].

Як наслідок (3.59) ми маємо очевидний результат,

$$C_V\Big|_{T\to 0} = \alpha(q,s) \neq 0 \qquad \text{для} \quad q<1. \qquad (3.60)$$

Безумовно, це порушує третій закон термодинаміки. Однак ненульові теплоємності при абсолютному нулі відомі для нерівноважних систем, таких як стекла [114], або для деяких магнітних систем [115].

В границі $T\to 0$ ми отримуємо для активності з (3.57)

$$z = e_q^{\frac{1}{T}[A\phi(q,s)]^{-1/s}}, \qquad (3.61)$$

отож, параметр заповнення після деяких перетворень стає

$$n_2(\varepsilon,z,T) = \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{[A\phi(q,s)]^{-1/s}}\right)^{1/(1-q)}+1} \qquad (3.62)$$

демонструючи таким чином плавну сходинку, на відміну від звичайного фермі-газу, який отримують із наведеного вище виразу в межах $q\to 0$.

Для $q > 1$, активність прямує до нескінченності при деякій температурі T_0 даючи нульову питому теплоємність при T_0. Для отримання T_0 розглянемо відношення

$$N = NAT_0^s \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{z^{-1}e_q^x + 1} =$$

$$= NAT_0^s \int_0^{x_0} \frac{x^{s-1}\,dx}{z^{-1}[1 + (1-q)x]^{1/(1-q)} + 1}. \tag{3.63}$$

Скінченна верхня межа інтегрування отримується з умови

$$1 + (1-q)x_0 = 0,$$

див. формулювання (1.7). Отож, для $z \to \infty$,

$$T_0 = (q-1)\left(\frac{s}{A}\right)^{1/s}. \tag{3.64}$$

Таким чином, у випадку $q > 1$ в моделі існує скінченна ненульова мінімальна температура T_0. Вона стає нулем в границі $q \to 1$, як і очікувалося.

Щоб завершити цей розділ, розглянемо, яким буде відповідне визначення хімічного потенціалу у другій моделі, а саме, як він пов'язаний з активністю. У наших похідних відношення $T \ln_q z$ виникає природним чином, що відповідає $\mu = T \ln z$. Таким чином, ми можемо визначити величину

$$\mu_q = T \ln_q z \tag{3.65}$$

як еквівалент хімічного потенціалу. З іншого боку, з $z^{-1} = e^{\mu/T}$, замінюючи звичайну експоненту цаллісівською, ми отримаємо

$$\tilde{\mu}_q = -T \ln_q z^{-1}. \tag{3.66}$$

На рис. 3.7, показано різні визначення хімічного потенціалу у другій моделі порівняно з хімічним потенціалом у першій моделі. Як бачимо, перші запропоновані визначення (3.65) мають поведінку, найбільш подібну до звичайного хімічного потенціалу. Зауважимо, що значення μ_q при $T = 0$, див. рівняння (3.57), можна розглядати як q-деформований аналог енергії Фермі у другій моделі,

$$\varepsilon_{q\mathrm{Fermi}} = [A\phi(q,s)]^{-1/s}, \tag{3.67}$$

тоді як пряме визначення в цьому випадку недоступне через плавну форму залежності числа заповнення (3.62), на відміну від сходинчастої форми у звичайному фермі-газі, так само як у першій моделі.

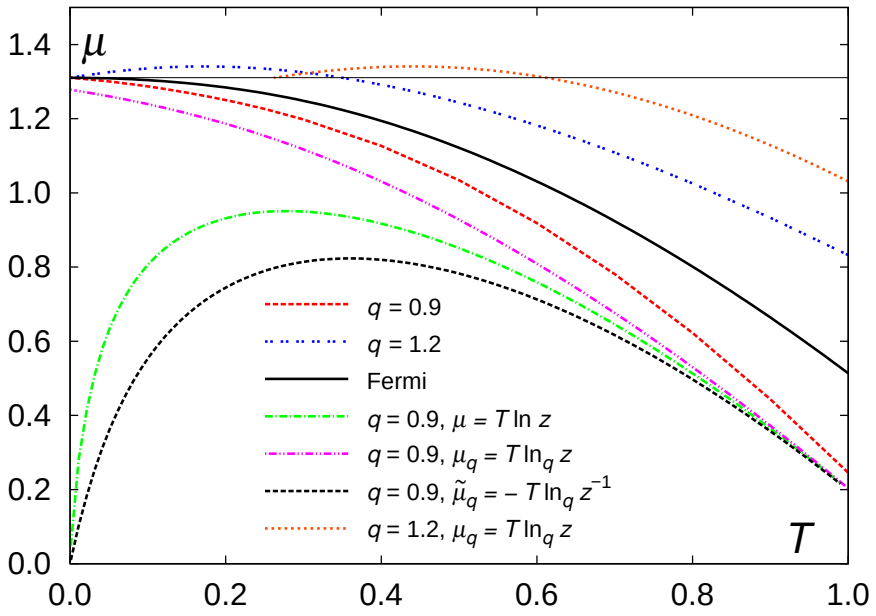


Рис. 3.7. Різні визначення хімічного потенціалу у другій моделі як функції температури T порівняно з хімічним потенціалом у першій моделі та у звичайному фермі-газі.

Детальніше порівняння для значення параметра $q = 0.9$ можна зробити на підставі числових значень у табл. 3.4.

Таблиця 3.4. Порівняння різних можливих означень для хімічного потенціалу в другій моделі з першою моделлю (μ) та фермі-газом (μ_{Fermi}). Параметр $q = 0.9$.

T	μ	$T \ln z$	$\mu_q = T \ln_q z$	$\tilde{\mu}_q = -T \ln_q z^{-1}$	μ_{Fermi}
0	1.3104	0.0000	1.2779	0.0000	1.3107
0.01	1.3086	0.1138	1.2749	0.0927	1.3103
0.05	1.3004	0.2733	1.2603	0.3580	1.3088
0.1	1.2870	0.3501	1.2392	0.5534	1.3040
0.12	1.2808	0.3677	1.2299	0.6074	1.3012
0.15	1.2703	0.3864	1.2147	0.6712	1.2959
0.2	1.2502	0.4045	1.1863	0.7446	1.2842
0.3	1.1980	0.4124	1.1171	0.8140	1.2483
0.4	1.1268	0.3983	1.0307	0.8195	1.1941
0.5	1.0339	0.3695	0.9276	0.7824	1.1214
0.6	0.9185	0.3296	0.8089	0.7128	1.0309
0.7	0.7810	0.2802	0.6759	0.6164	0.9237
0.8	0.6222	0.2228	0.5299	0.4970	0.8010
0.9	0.4434	0.1583	0.3719	0.3572	0.6640
1	0.2454	0.0873	0.2030	0.1990	0.5136
1.2	−0.2035	−0.0718	−0.1641	−0.1664	0.1767
1.5	−0.9963	−0.3469	−0.7779	−0.8205	−0.4081
2	−2.5893	−0.8842	−1.9357	−2.1432	−1.5573
3	−6.5849	−2.1789	−4.6200	−5.4611	−4.3518
4	−11.4207	−3.6888	−7.6526	−9.4630	−7.6356
5	−16.9218	−5.3603	−10.9371	−13.9994	−11.2887
7	−29.5108	−9.0702	−18.0575	−24.3350	−19.4359
10	−51.4715	−15.3095	−29.7081	−42.2638	−33.2049

З табл. 3.4 можна зробити висновки про такі співвідношення між різними означеннями хімічного потенціалу у границі високих температур: $\mu < \tilde{\mu}_q < \mu_{\text{Fermi}} < \mu_q < T \ln z$.

3.8. Розрахунок C_V для другої моделі при $T \to 0$

У попередньому підрозділі було виявлено, що в розкладі виразу для енергії системи за степенями температури T є лінійний доданок. Перепишемо інтеграли (3.48) та (3.49), враховуючи перші два члени розкладу:

$$\int\limits_0^{x_1} dx\, x^{s-1}(e_q^x)^k = \int\limits_0^{x_1} dx\, x^{s-1}[1+(1-q)x]^{k/(1-q)} =$$

$$= \frac{(1-q)^{\frac{k}{1-q}+1}}{s(1-q)+k} x_1^{s+\frac{k}{1-q}} + k\frac{(1-q)^{\frac{k}{1-q}-1}}{(s-1)(1-q)+k} x_1^{s+\frac{k}{1-q}-1} + \dots , \qquad (3.68)$$

$$\int\limits_{x_1}^{\infty} dx\, x^{s-1}(e_q^x)^k = \int\limits_{x_1}^{\infty} dx\, x^{s-1}[1+(1-q)x]^{-k/(1-q)} =$$

$$= \frac{(1-q)^{1-\frac{k}{1-q}}}{k-s(1-q)} x_1^{s-\frac{k}{1-q}} - k\frac{(1-q)^{-\frac{k}{1-q}-1}}{k-(s-1)(1-q)} x_1^{s-\frac{k}{1-q}-1} + \dots . \qquad (3.69)$$

Зважаючи на те, що в першому та другому наближенні відповідно:

$$x_1 = \frac{z^{1-q}-1}{1-q}, \qquad x_1 = \frac{z^{1-q}}{1-q}, \qquad (3.70)$$

та враховуючи малість $1/z$, отримаємо такі вирази:

$$\int\limits_0^{x_1} dx\, x^{s-1}(e_q^x)^k = \frac{(1-q)^{1-s}}{s(1-q)+k} z^{s(1-q)+k} +$$

$$+ (1-q)^{-s} z^{(s-1)(1-q)+k} \left[\frac{(q-1)(s-1)}{(s-1)(1-q)+k}\right], \qquad (3.71)$$

$$\int\limits_{x_1}^{\infty} dx\, x^{s-1}(e_q^x)^k = \frac{(1-q)^{1-s}}{k-s(1-q)} z^{s(1-q)-k} +$$

$$+ (1-q)^{-s} z^{(s-1)(1-q)-k} \left[\frac{(q-1)(s-1)}{k-(s-1)(1-q)}\right]. \qquad (3.72)$$

Далі перейдемо до q-логарифма. Для спрощення врахуємо, що перед інтегралами стоять множники z із відповідними степенями (3.47). Отримаємо:

$$\frac{1}{z^k}\int\limits_0^{x_1} dx\, x^{s-1}(e_q^x)^k = \frac{(1-q)}{s(1-q)+k}[\ln_q z]^s + \\ + (1-q)^{-1}[\ln_q z]^{s-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(1-q)+k} - \frac{1}{(s-1)+k}\right\}, \quad (3.73)$$

$$z^k\int\limits_{x_1}^{\infty} dx\, x^{s-1}(e_q^x)^k = \frac{(1-q)}{k-s(1-q)}[\ln_q z]^s + \\ + k(1-q)^{-1}[\ln_q z]^{s-1}\left\{\frac{1}{k-s(1-q)} - \frac{1}{k-(s-1)(1-q)}\right\}. \quad (3.74)$$

Коефіцієнти біля q-логарифмів, залежні від q та s, перепозначимо як функції $\phi(q,s)$ (як і в 3.56) та $\psi(q,s)$:

$$\phi(q,s) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1-q}{s(1-q)+k} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1-q}{k-s(1-q)}, \quad (3.75)$$

$$\psi(q,s) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{1-q}\left[\frac{1}{(s-1)(1-q)+k} - \frac{1}{s(1-q)+k}\right] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{1-q}\left[\frac{1}{k-s(1-q)} - \frac{1}{k-(s-1)(1-q)}\right]. \quad (3.76)$$

Через трансцендент Лерха вони перепишуться таким чином:

$$\phi(q,s) = (1-q)\Big[\Phi\big(-1;1;(1-q)s\big) + \Phi\big(-1,1,1+(q-1)s\big)\Big] =$$

$$= (1-q)\pi\csc[\pi(1-q)s]; \tag{3.77}$$

$$\psi(q,s) = s\Big[\Phi(-1,1,1+(q-1)s) - \Phi(-1,1,1+(1-q)s)\Big] +$$

$$+(s-1)\Big[\Phi(-1,1,q+(1-q)s) - \Phi(-1,1,2-q+(q-1)s)\Big]. \tag{3.78}$$

З виразу 3.44 отримуємо:

$$AT^s\left\{(\ln_q z)^s\phi(q,s) + (\ln_q z)^{s-1}\psi(q,s)\right\} = 1, \tag{3.79}$$

а з 3.10 для енергії матимемо:

$$E = NAT^{s+1}\int\limits_0^\infty \frac{x^s dx}{z^{-1}e_q^x + 1}. \tag{3.80}$$

Якщо врахувати, що степінь у чисельнику підінтегрального виразу на одиницю більший порівняно з виразом для кількості частинок (3.43), то за аналогією з (3.79) енергія набуде вигляду:

$$E = NAT^{s+1}\left\{(\ln_q z)^{s+1}\phi(q,s+1) + (\ln_q z)^s\psi(q,s+1)\right\}. \tag{3.81}$$

Враховуючи (3.79) та (3.81), отримаємо:

$$E = NT\frac{\left\{(\ln_q z)^{s+1}\phi(q,s+1) + (\ln_q z)^s\psi(q,s+1)\right\}}{\left\{(\ln_q z)^s\phi(q,s) + (\ln_q z)^{s-1}\psi(q,s)\right\}}. \tag{3.82}$$

Для спрощення записів, перепозначимо: $\phi(q,s) = \phi_0$; $\phi(q,s+1) = \phi_1$; $\psi(q,s) = \psi_0$; $\psi(q,s+1) = \psi_1$. Після незначних перетворень вираз для енергії (3.82) матиме вигляд:

$$E = N(T\ln_q z)\frac{\phi_1}{\phi_0}\frac{1 + \frac{1}{\ln_q z}\frac{\psi_1}{\phi_1}}{1 + \frac{1}{\ln_q z}\frac{\psi_0}{\phi_0}}. \tag{3.83}$$

Враховуючи малість $\frac{1}{\ln_q z}$ та нехтуючи квадратичними доданками, отримаємо:

$$E = N(T\ln_q z)\frac{\phi_1}{\phi_0}\left(1+\frac{1}{\ln_q z}\left(\frac{\psi_1}{\phi_1}-\frac{\psi_0}{\phi_0}\right)\right). \tag{3.84}$$

З виразу (3.79) отримаємо:

$$T\ln_q z = \left(\frac{1}{A\phi_0}\right)^{1/s}\left(1-\frac{1}{s}\frac{1}{\ln_q z}\frac{\psi_0}{\phi_0}\right). \tag{3.85}$$

Тоді, враховуючи малість $\frac{1}{\ln_q z}$ та нехтуючи квадратичними доданками, перепишемо енергію таким чином:

$$E = N\left(\frac{1}{A\phi_0}\right)^{1/s}\frac{\phi_1}{\phi_0}\left[1+\frac{1}{\ln_q z}\left(\frac{\psi_1}{\phi_1}-\frac{\psi_0}{\phi_0}\left(1+\frac{1}{s}\right)\right)\right]. \tag{3.86}$$

Беручи лінійне наближення, отримаємо вираз для $\frac{1}{\ln_q z}$:

$$\frac{1}{\ln_q z} = T(A\phi_0)^{1/s}. \tag{3.87}$$

Очевидно, що застосовуючи цей підхід, можна отримати коефіцієнти біля вищих степенів T. Остаточний вираз для енергії набуде вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{E}{N} &= \left(\frac{1}{A\phi_0}\right)^{1/s}\frac{\phi_1}{\phi_0}\left[1+T\,(A\phi_0)^{1/s}\left(\frac{\psi_1}{\phi_1}-\frac{\psi_0}{\phi_0}\left(1+\frac{1}{s}\right)\right)+\ldots\right]= \\ &= \left(\frac{1}{A\phi_0}\right)^{1/s}\frac{\phi_1}{\phi_0}+T\frac{\phi_1}{\phi_0}\left[\frac{\psi_1}{\phi_1}-\frac{\psi_0}{\phi_0}\left(1+\frac{1}{s}\right)\right]+\mathcal{O}(T^2).\end{aligned} \tag{3.88}$$

Зауважимо, що другий доданок у виразі для енергії, пропорційний до T, не містить множника A, що характеризується параметрами системи.

Питома теплоємність, отже, буде:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{\phi_1}{\phi_0}\left[\frac{\psi_1}{\phi_1}-\frac{\psi_0}{\phi_0}\left(1+\frac{1}{s}\right)\right]+\mathcal{O}(T). \tag{3.89}$$

У границі $T\to 0$ збережеться лише перший доданок, який позначимо $\alpha(q,s)$:

$$\alpha(q,s) = \frac{\phi_1}{\phi_0}\left[\frac{\psi_1}{\phi_1}-\frac{\psi_0}{\phi_0}\left(1+\frac{1}{s}\right)\right]. \tag{3.90}$$

У наступному підрозділі наведено результати чисельних розрахунків теплоємності для різних значень параметра неадитивності q та показника s в густині станів.

3.9. Результати чисельних розрахунків для різних s і q

Визначивши з (3.44) величину z як функцію температури та розрахувавши далі енергію з (3.80), отримаємо питому теплоємність, яку для кількох значень q та s показано на рис. 3.8 у порівнянні зі звичайним ідеальним фермі-газом (з адитивною статистикою).

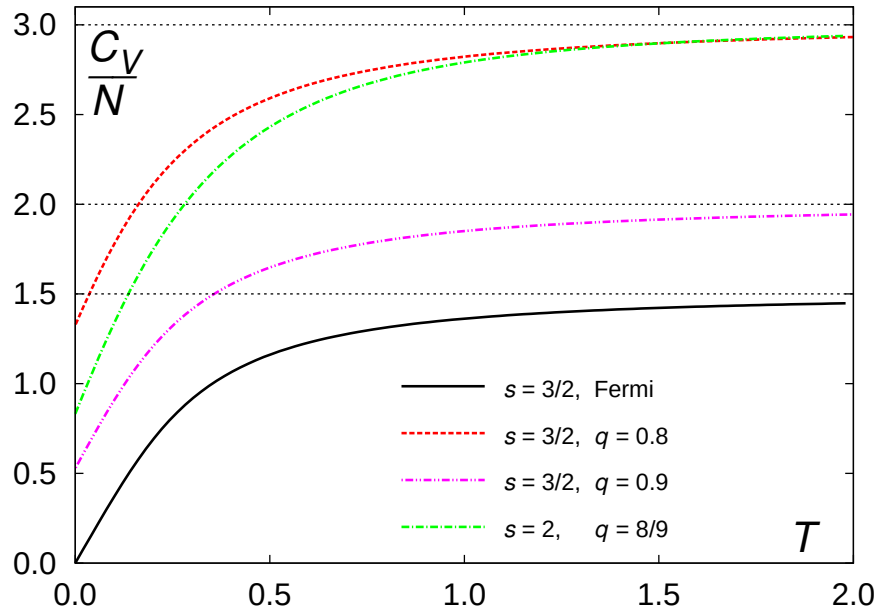


Рис. 3.8. Питомі теплоємності суперадитивної модифікації ідеального фермі-газу для різних значень s та q. Випадки $s = 3/2, q = 0.8$ та $s = 2, q = 8/9$ забезпечують однакову високотемпературну границю $\dfrac{C_V}{N} = \dfrac{s}{q(s+1) - s}$ [3, 106].

На рис. 3.9 наведено значення питомої теплоємності в нулі температур $\alpha(q,s)$ як функції параметра неадитивності q для різних показників степеня s у густині станів (3.3). Як і треба очікувати, у границі $q \to 1$, яка відповідає звичайній адитивній статистиці, теплоємність прямує до нуля. Можна показати, що в цій границі $\alpha(q,s)$ є лінійною

$$\alpha(q,s)\Big|_{q\to 1} = \frac{\pi^2 s}{3}(1-q) + \mathcal{O}\left((1-q)^3\right), \tag{3.91}$$

що добре видно з рисунка.

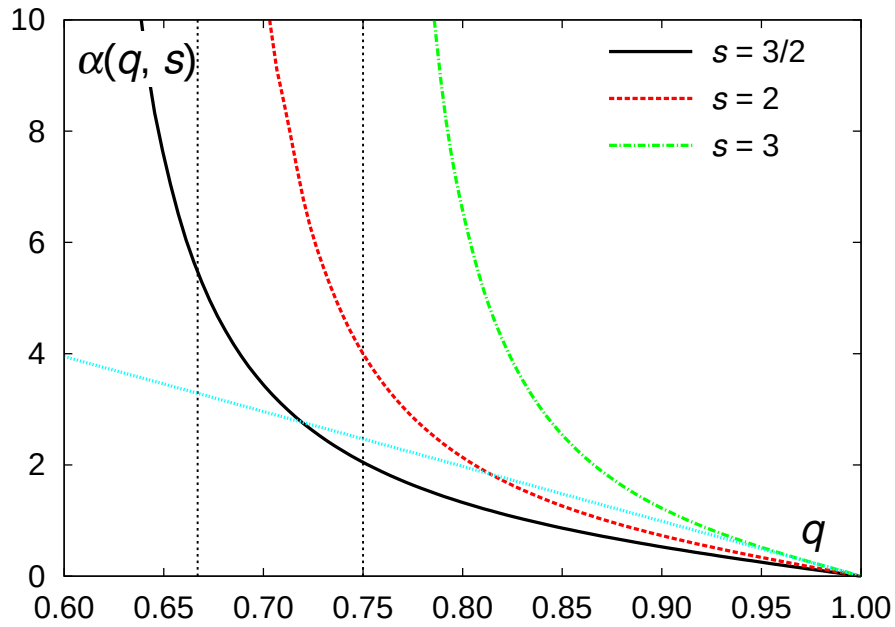


Рис. 3.9. Значення питомої теплоємності суперадитивної модифікації ідеального фермі-газу при $T = 0$. Вертикальні лінії відповідають асимптотичним значенням $s/(s+1)$. Пунктирною прямою позначено лінійну залежність (3.91) для $s = 3$.

Як було показано в [3, 106], з високотемпературної поведінки теплоємності випливає існування нижньої межі для параметра q, а саме

$$q_{\min} = \frac{s}{s+1}. \tag{3.92}$$

Поблизу цього значення $\alpha(q,s)$ розбігається як

$$\alpha(q,s) \sim \frac{1}{q+s(q-1)}. \tag{3.93}$$

Результати розрахунків також підсумовано в табл. 3.5.

Таблиця 3.5. Значення питомої теплоємності при $T = 0$ для другої моделі залежно від параметра статистики q.

q	$s = 3/2$	$s = 2$	$s = 3$
0.61	40.2190		
0.63	12.9993		
0.65	7.5486		
0.67	5.2068	123.0429	
0.69	3.9005	16.7329	
0.71	3.0641	8.5668	
0.73	2.4803	5.5621	
0.75	2.0474	4.0000	
0.77	1.7116	3.0407	19.1018
0.79	1.4417	2.3893	8.6357
0.81	1.2184	1.9154	5.2124
0.83	1.0289	1.5526	3.5328
0.85	0.8646	1.2632	2.5400
0.87	0.7193	1.0243	1.8830
0.89	0.5884	0.8210	1.4123
0.91	0.4684	0.6433	1.0531
0.93	0.3566	0.4839	0.7638
0.95	0.2508	0.3373	0.5189
0.96	0.1994	0.2674	0.4076
0.97	0.1489	0.1992	0.3014
0.98	0.0989	0.1321	0.1990
0.99	0.0494	0.0659	0.0989
1.00	0.0000	0.0000	0.0000

3.10. Висновки до розділу 3

У цьому розділі проаналізовано два феноменологічних підходи до узагальнення розподілу Фермі з використанням неадитивної q-експоненти Цалліса. Перша модель отримана заміною фактора Гіббса $e^{(\varepsilon-\mu)/T} \to e_q^{(\varepsilon-\mu)/T}$ демонструє поведінку при високих температурах, що суттєво відхиляється від класичної границі. А саме, теплоємність не є сталою, а натомість нескінченно зростає за $q < 1$ або прямує до нуля при $q > 1$. З іншого боку, в границі низьких температур ця модель дуже нагадує звичайний ідеальний фермі-газ.

Друга модель була отримана заміною

$$e^{(\varepsilon-\mu)/T} = z^{-1}e^{\varepsilon/T} \to z^{-1}e_q^{\varepsilon/T}.$$

Зауважимо, що властивості q-експоненти Цалліса не дозволяють правило факторизації $e_q^{(\varepsilon-\mu)/T} \neq e_q^{-\mu/T}e_q^{\varepsilon/T}$. Відмінності з першою моделлю видаються принциповими. Зокрема, при високих температурах питома теплоємність набуває сталого значення. Однак найцікавіші результати отримані в області низьких температур.

Для $q < 1$ у другій моделі ізохорна питома теплоємність прямує до додатного сталого значення при $T = 0$. Ця властивість може бути корисною для моделювання магнітних систем [115] або неергодичних систем, таких як стекла [114]. Більше того, екстраполяція кривої C_V для досягнення нульового значення означала б негативні абсолютні температури, які нещодавно з'явилися в деяких космологічних моделях [116, 117] але не обмежуються ними [118, 119].

Скінченна (ненульова) мінімальна температура, отримана для $q > 1$ у другій моделі, є ще одним екзотичним результатом, хоча він зустрічається в літературі [120]. Така поведінка може бути використана для ефективного опису систем з так званим мінімальним імпульсом

[121, 122]. Нещодавно про мінімальну температуру, а саме про «порогову» температуру для випромінювання чорного тіла, також повідомляли для деформованої моделі бозе-газу, яка пов'язана з іншим типом неадитивності [123].

Перспективи представленого дослідження включають дослідження взаємодіючих систем та аналіз інших типів деформованих експонент, таких як κ-експонента Каніадакіса [124, 125], або деякі інші типи деформації статистики [126, 127].

РОЗДІЛ 4

ЕФЕКТИВНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ ДВОПАРАМЕТРИЧНИХ ДРОБОВИХ СТАТИСТИК

4.1. Вступ

У цьому розділі показано подання неабелевих еніонів через математично простіші двопараметричні дробові статистики. Розглянуто два приклади реальних фізичних систем, які можуть бути приблизно описані за допомогою дробової неадитивної статистики Поліхронакоса та деяких інших типів статистики. Зв'язок між статистиками встановлено за допомогою віріального розвинення. Для двовимірного фермі-газу з контактними взаємодіями досягається точність до третього віріального коефіцієнта включно. Детально проаналізовано підхід до моделювання другого віріального коефіцієнта неабелевих еніонів із твердою та м'якою серцевиною.

Результати розділу опубліковано в працях [5, 6].

4.2. Двопараматеричні дробові статистики

Розглянемо кілька двопараметричних статистичних моделей, за допомогою яких можна наближено описувати еніони, та наведемо відповідні вирази для другого віріального коефіцієнта [128], загальна ідея

виведення яких описана в наступному підрозділі.

Статистика Поліхронакоса

Для статистики Поліхронакоса середні числа заповнення матимуть вигляд:

$$n_j^{\mathrm{P}} = \frac{1}{z^{-1}X(\varepsilon_j) + \gamma}, \tag{4.1}$$

де $X(\varepsilon_j) = e^{\varepsilon_j/T}$, а $\gamma = -\gamma'$ – параметр статистики.

▶ *Неповна статистика Поліхронакоса.*

Модифікуючи звичну статистику Поліхронакоса таким чином, що $X(\varepsilon_j) = e^{q\varepsilon_j/T}$, де q — параметр деформації, можна отримати двопараметричну залежність. Така модифікація носить назву неповної статистики Поліхронакоса. Другий віріальний коефіцієнт тоді набуде вигляду:

$$b_2^{\mathrm{IPS}} = -\frac{\gamma}{4}q. \tag{4.2}$$

▶ *Неадитивна статистика Поліхронакоса.*

Модифікуємо звичайну статистику Поліхронакоса q-експонентою Цалліса [46].

У цьому випадку, при $X(\varepsilon_j) = e_q^{\varepsilon_j/T}$, отримаємо неадитивну статистику Поліхронакоса. Тоді другий віріальний коефіцієнт можна отримати у такому вигляді:

$$b_2^{\mathrm{NAPS}} = -\frac{\gamma}{4}\frac{2q^2}{1+q}. \tag{4.3}$$

Статистика Голдейна–Ву

Середні числа заповнення у цій статистиці виражаються таким чином:

$$n_j^{\mathrm{HW}} = \frac{1}{w\left(z^{-1}X(\varepsilon_j)\right) + g}, \tag{4.4}$$

де $X(\varepsilon_j) = e^{\varepsilon_j/T}$, g — параметр статистичної взаємодії, а функція $w(x)$ задовольняє трансцендентне рівняння:

$$w^g(x)\left[1 + w(x)\right]^{1-g} = x. \tag{4.5}$$

Для випадку $g = 0$ розв'язком цього рівняння буде $w(x) = x - 1$ — розподіл Бозе, а при $g = 1$ ми отримуємо $w(x) = x$ — розподіл Фермі. У границі великих значень аргумента функції $w(x)$ вираз для чисел заповнення може бути переписаний у такому вигляді:

$$n_j^{\mathrm{HW}} = \frac{1}{w(x) + g} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/T} + (2g - 1)}. \tag{4.6}$$

▶ *Неповна статистика Голдейна–Ву*

Для неповної статистики Голдейна–Ву, прийнявши що $X(\varepsilon_j) = e^{q\varepsilon_j/T}$, другий віріальний коефіцієнт матиме вигляд:

$$b_2^{\mathrm{IHWS}} = \frac{2g - 1}{4} q. \tag{4.7}$$

▶ *Неадитивна статистика Голдейна–Ву*

У неадитивній статистиці Голдейна–Ву при $X(\varepsilon_j) = e_q^{\varepsilon_j/T}$ другий віріальний коефіцієнт залежить від параметра неадитивності таким чином:

$$b_2^{\mathrm{NAHWS}} = \frac{2g - 1}{4} \frac{2q^2}{(1 + q)}. \tag{4.8}$$

4.3. Віріальні коефіцієнти у неадитивній статистиці Поліхронакоса

Виведення віріальних коефіцієнтів у кількох типах дробових статистик було повідомлено у роботах [129, 130]. Загальна ідея така. Густину можна виразити за допомогою кластерних інтегралів [87]:

$$\rho = \frac{N}{V} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_\ell z^\ell. \tag{4.9}$$

З іншого боку

$$N = \sum_j n_j, \tag{4.10}$$

де підсумовування проводиться по усім станам, а n_j — числа заповнення, які у випадку неадитивної статистики Поліхронакоса задаються у такому вигляді:

$$n_j = \frac{1}{z^{-1} e_q^{\varepsilon_j/T} + \gamma}. \tag{4.11}$$

Тут e_q^x — q-експонента Цалліса (1.7).

Використовуючи густину станів [108]

$$g(\varepsilon) = \frac{V}{\Gamma(s)} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^s \varepsilon^{s-1}, \qquad \text{де} \;\; s = \frac{D}{2}, \tag{4.12}$$

Ми можемо переписати підсумування по станах як інтеграл по енергії

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{V} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{g(\varepsilon)}{z^{-1} e_q^{\varepsilon_j/T} + \gamma} \tag{4.13}$$

а потім отримати кластерні інтеграли після розкладання вищевказаного виразу в ряд за z таким чином, див. [106, 130]:

$$\mathcal{B}_\ell = \frac{1}{\lambda^D} \frac{(-\gamma)^{\ell-1}}{\ell} \{\ell; s\}_q. \tag{4.14}$$

Тут

$$\{\ell; s\}_q = \frac{1}{|q-1|^s \, \Gamma(s)} \mathrm{B}\left(s, \frac{\ell}{|q-1|} + k\right),$$

$$\text{з} \quad k = \begin{cases} 1 & \text{для } q > 1 \\ -s & \text{для } q < 1 \end{cases} \tag{4.15}$$

Другий та третій віріальні коефіцієнти є:

$$b_2 = \frac{\gamma}{2} \frac{\{2; s\}_q}{\{1; s\}_q^2}, \tag{4.16}$$

$$b_3 = -\frac{2}{3}\gamma^2 \frac{\{3; s\}_q}{\{1; s\}_q^3} + \gamma^2 \frac{\{2; s\}_q^2}{\{1; s\}_q^4}. \tag{4.17}$$

Зокрема, в границі $\gamma = q = 1$, беручи до уваги, що $\{\ell; s\}_1 = \ell^{-s}$, ми отримуємо результат для ідеального D-вимірного фермі-газу:

$$b_2^{(0)} = \frac{1}{2^{s+1}}, \qquad b_3^{(0)} = \frac{1}{2^{2s}} - \frac{2}{3^{s+1}}. \tag{4.18}$$

4.4. Неабелеві еніони з твердою серцевиною

Статистичну механіку NACS-частинок можна вивчити, ввівши функцію великої статистичної суми Ξ, визначену в термінах гамільтоніану H_N, заданого рівнянням (1.10), для N-частинкових статистичних сум Z_N та активності z:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \mathrm{Tr}\exp^{-\beta H_N}. \tag{4.19}$$

Зауважимо, що буде справедливе наступне кластерне розвинення:

$$\Xi = \exp\left\{ A \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n z^n \right\}, \tag{4.20}$$

де A — площа газу (звісно, це еквівалент об'єму V у двовимірній задачі), а $\mathcal{B}_n$ — n-ті кластерні інтеграли. Причому,

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{A} Z_1, \qquad \mathcal{B}_1 = \frac{1}{A}\left\{ Z_2 - \frac{Z_1^2}{2} \right\}. \tag{4.21}$$

Віріальне розвинення для рівняння стану за степенями густини $\rho = N/A$ дає:

$$p = \rho T \left[1 + b_2(\rho\lambda_T^2) + b_3(\rho\lambda_T^2)^2 + \ldots \right], \tag{4.22}$$

де довжина теплової хвиль де Бройля частинки з масою m є:

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mT}}, \tag{4.23}$$

а b_n — безрозмірні n-ті віріальні коефіцієнти. Другий віріальний коефіцієнт має такий вигляд:

$$b_2 = -\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2} = A\left\{ \frac{1}{2} - \frac{Z_2}{Z_1^2} \right\}, \tag{4.24}$$

тобто для його розрахунку потрібно знайти одно- і двочастинкову статистичні суми.

Візьмемо вираз для другого віріального коефіцієнта з праці [56], у якій детально показано розрахунок b_2:

$$b_2(\kappa, l) = -\frac{1}{4(2l+1)}\Bigg[1 + \frac{1}{(2l+1)}\sum_{j=0}^{2l}(2j+1)\times$$

$$\times\Big\{\big(1+(-1)^{j+2l}\big)(\gamma_j^2 - 2\gamma_j) +$$

$$+\big(1-(-1)^{j+2l}\big)[(\gamma_j+1) \bmod 2 - 1]^2\Big\}\Bigg], \qquad (4.25)$$

де l — ізоспін, а параметри γ_j та ω_j пов'язані такими співвідношенням:

$$\gamma_j = \omega_j \bmod 2,$$
$$\omega_j = \frac{1}{4\pi\kappa}[j(j+1) - 2l(l+1)]. \qquad (4.26)$$

На рис. 4.1 проілюстровано залежність другого віріального коефіцієнта неабелевих еніонів від параметрів k та l. Варто зазначити, що, хоча параметри k та l змінюються відповідно у множині цілих та напівцілих значень, для покращення візуальної сприйнятності на графіку було з'єднано точки, що належать до конкретних значень параметрів k та l.

Прирівнюючи відповідні множники у виразах для другого віріального коефіцієнта неабелевих еніонів (4.25) та модельних систем (4.2), (4.3), (4.7), (4.8) можна отримати зв'язок для параметрів дробових статистик у випадку, коли через конкретну статистику можливий опис неабелевих еніонів.

Множники $\gamma/4$ або $(2g-1)/4$ зручно прирівняти до $\frac{1}{4(2l+1)}$, адже цей вираз є головним членом у розкладі, тобто параметри γ та g пов'язані з ізоспіном l. Відповідно, параметри q будуть виражатися через l і κ.

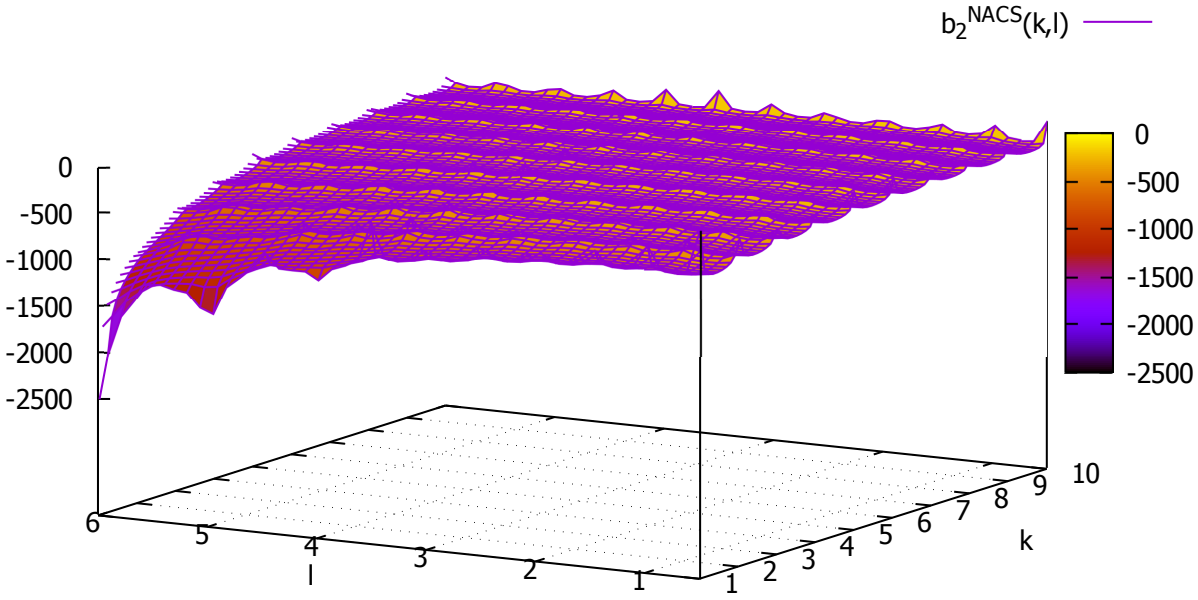


Рис. 4.1. Залежність другого віріального коефіцієнта неабелевих еніонів від параметрів l та k.

Отримані результати можна узагальнити у таблиці 4.1. Для уникнення громіздкості деякі сталі параметри наведено нижче.

l	$\gamma_{\text{IPS}} = \gamma_{\text{NAPS}}$	$g_{\text{IHWS}} = g_{\text{NAHWS}}$
1/2	1/2	3/8;
1	1/3	5/12;
3/2	1/4	7/16;
2	1/5	9/20.

Зазначимо, що розрахунок $\gamma_j = \omega_j \bmod 2$ не дуже добре означений для дробових та від'ємних чисел у різних пакетах програм. Тому в даній роботі було використано такий спосіб обчислення:

$$\gamma_j = \omega_j \bmod 2 = (\lfloor \omega_j \rfloor \bmod 2) + (\omega_j - \lfloor \omega_j \rfloor),$$

де $\lfloor x \rfloor$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує x.

Таблиця 4.1. Результати розрахованих значень параметрів q дробових статистик залежно від еніонних k та l. Для кожного значення параметра l лівий стовпець відповідає $q_{\mathrm{IPS}} = q_{\mathrm{IHWS}}$, а правий — $q_{\mathrm{NAPS}} = q_{\mathrm{NAHWS}}$.

k	$l = 1/2$		$l = 1$		$l = 3/2$		$l = 2$	
1	1.0000	1.0000	89.000	45.478	136.00	68.986	1753.0	877.50
2	0.2500	0.4215	13.000	7.3807	31.000	16.443	397.00	199.50
3	0.3333	0.5000	9.8889	5.7973	12.667	7.2116	158.33	80.154
4	0.4375	0.5897	5.0000	3.2656	6.6250	4.1171	101.00	51.481
5	0.5200	0.6562	3.8800	2.6673	4.0000	2.7322	89.000	45.478
10	0.7300	0.8136	2.1200	1.6880	1.0000	1.0000	19.400	10.614
20	0.8575	0.9034	1.4800	1.3064	0.6250	0.7367	3.4000	2.4064
50	0.9412	0.9605	1.1728	1.1132	0.7600	0.8351	1.6720	1.4234
100	0.9703	0.9801	1.0832	1.0550	0.8650	0.9085	1.2880	1.1867
1000	0.9970	0.9980	1.0080	1.0054	0.9852	0.9901	1.0245	1.0163

Зауважимо, що при великих значеннях параметра k другий множник у виразі для другого віріального коефіцієнта (4.25) має прямувати до одиниці, так само, як і параметр неповноти (неадитивності) статистик q, що й видно з таблиці 4.1.

Наприклад, розглянемо неадитивну статистику Голдейна–Ву. Для великих k значення ω_j, є малим, так само як і γ_j. Тому можна подати q як $1 + \Delta q$.

$$\frac{2q^2}{1+q} = \frac{2(1+\Delta q)^2}{1+(1+\Delta q)} \simeq \frac{2(1+2\Delta q)}{2+\Delta q} =$$

$$= \frac{2(1+2\Delta q)}{2(1+\frac{\Delta q}{2})} \simeq 2(1+2\Delta q)\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta q}{2}\right) \simeq$$

$$\simeq 1 + 2\Delta q - \frac{\Delta q}{2} \to 1.$$

Врахуємо, що в границі великих κ значення ω_j, як і γ_j є малим. Тому в цій границі вираз для Δq через параметри κ та l можна спрощено подати у такому вигляді:

$$\frac{3}{2}\Delta q = \frac{1}{4\pi\kappa(2l+1)}\sum_{j=0}^{2l}(2j+1)\times$$
$$\times\left[2l(l+1)-j(j+1)\right]\left(1+(-1)^{j+2l}\right). \qquad (4.27)$$

4.5. Неабелеві еніони з м'якою серцевиною

У цьому підрозділі, використаємо вираз для другого віріального коефіцієнта з м'якою серцевиною неабелевих частинок Черна–Саймонса з [50], де показано детальний розрахунок для загальних граничних умов. Ми фокусуємось на ізотропному випадку, що відповідає єдиному параметру жорсткості (hard-core parameter) τ. Вираз для другого віріального коефіцієнта набуде вигляду:

$$b_2^{\text{s.c.}}(\kappa,l,\tau) = \frac{1}{2(2l+1)^2}\sum_{j=0}^{2l}(2j+1)\Big[\left(1+(-1)^{j+2l}\right)B_2^{\text{B}}(\omega_j,\tau)+$$
$$+\left(1-(-1)^{j+2l}\right)B_2^{\text{F}}(\omega_j,\tau)\Big], \quad (4.28)$$

де

$$B_2^{\mathrm{B}}(\omega_j,\tau) = b_2^{\mathrm{h.c.}}(\kappa,l) - 2\Bigg\{ e^{\tau}\theta(-\sigma) + \\ + \frac{\delta_j\sigma\sin(\pi\delta_j)}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{e^{\tau t}\,t^{|\delta_j|-1}\,dt}{1+2\sigma\cos(\pi\delta_j)t^{|\delta_j|}+t^{2|\delta_j|}}\Bigg\} \tag{4.29}$$

та

$$B_2^{\mathrm{F}}(\omega_j,\tau) = b_2^{\mathrm{h.c.}}(\kappa,l) - 2\Bigg\{ e^{\tau}\theta(-\sigma) + \\ + \frac{\Gamma_j\sigma\sin(\pi\Gamma_j)}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{e^{\tau t}\,t^{|\Gamma_j|-1}\,dt}{1+2\sigma\cos(\pi\Gamma_j)t^{|\Gamma_j|}+t^{2|\Gamma_j|}}\Bigg\}. \tag{4.30}$$

Тут $\sigma = \pm 1$, а $\theta(x)$ — функція Гевісайда. Другий віріальний коефіцієнт для жорсткої серцевини $b_2^{\mathrm{h.c.}}(\kappa,l)$ задано виразами (4.25)–(4.26), а також введено додатково такі позначення:

$$\delta_j = (\omega_j + 1) \bmod 2 - 1, \tag{4.31}$$

$$\Gamma_j = \omega_j \bmod 2 - 1, \tag{4.32}$$

Тут κ — параметр теорії, що задовільняє умову $4\pi\kappa = k$ з $k = 0, 1, 2\ldots$. Границя $\kappa \to \infty$ відповідає невзаємодіючим частинкам.

Ізоспінове квантове число l є напівцілим або цілим, з мінімальним нетривіальним значенням $l = 1/2$, тоді як $l = 0$ відповідає вільним бозонам [50]. Границя жорсткого ядра відповідає $\sigma = +1$ та $\tau \to \infty$.

Зауважимо, що підінтегральні вирази в (4.29) та (4.30) можуть бути розбіжними при деяких значеннях δ_j або Γ_j. Справді,

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{\tau t}\,t^{|\eta|-1}\,dt}{1+2\cos(\pi\eta)t^{|\eta|}+t^{2|\eta|}} = \infty \quad \text{для} \quad \eta = 0, \pm 1, \tag{4.33}$$

де η означає або δ_j, або Γ_j. З визначень (4.31) і (4.32) можна зробити висновок, що область варіації для цих величин дорівнює $(-1;1)$, з виключеними межами. Таким чином, єдиним проблемним значенням є $\eta = 0$. Однак, розглянувши весь доданок, з множником $\eta \sin(\pi\eta)$ перед інтегралом, легко показати, що

$$\lim_{\eta\to 0} \frac{\eta \sin(\pi\eta)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{\tau t}\, t^{|\eta|-1}\, dt}{1 + 2\cos(\pi\eta) t^{|\eta|} + t^{2|\eta|}} = \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{4} \frac{\eta^2}{|\eta|} = 0, \tag{4.34}$$

де враховано розклад гамма-функції $\Gamma(x \to 0) = 1/x + \ldots$. Можна також показати, що в межах $\eta \to 1 - 0$ і $\eta \to -1 + 0$ досягаються такі значення:

$$\lim_{\eta\to \pm 1 \mp 0} \frac{\eta \sin(\pi\eta)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{e^{\tau t}\, t^{|\eta|-1}\, dt}{1 + 2\cos(\pi\eta) t^{|\eta|} + t^{2|\eta|}} = e^{-\tau}. \tag{4.35}$$

У випадку вільних частинок, що підкоряються неадитивній статистиці Поліхронакоса в двох вимірах, другий віріальний коефіцієнт можна записати як, див. [5, 129],

$$b_2^{\mathrm{NAPS}}(\gamma, q) = \frac{\gamma}{4} \frac{2q^2}{1+q}. \tag{4.36}$$

Тут ми маємо два параметри, тоді як параметри м'якості ядра неабелевих еніонів містять три: ізоспін l, параметр теорії – зв'язок – сила взаємодії (coupling) $4\pi\kappa = k$ і м'якість ядра τ. Розв'язуючи рівняння $b_2^{\mathrm{s.c.}}(\kappa, l, \tau) = b_2^{\mathrm{NAPS}}(\gamma, q)$, де другий віріальний коефіцієнт неабелевих еніонів визначається як (4.28), ми можемо співвіднести параметри γ і q розглянутої дробової статистики та параметри еніонів. З огляду на певну свободу, можна встановити для зручності, див.[5],

$$\gamma = -\frac{1}{2l+1}, \tag{4.37}$$

так що $\gamma = 1$ при найнижчому нетривіальному $l = 1/2$. Коефіцієнт,

що залишився $b_2^{\text{s.c.}}(\kappa, l, \tau)$ отримується як додатний розв'язок

$$\frac{2q^2}{1+q} = \frac{2}{2l+1}\sum_{j=0}^{2l}(2j+1)\Big[\big(1+(-1)^{j+2l}\big)B_2^{\text{B}}(\omega_j,\tau) + \big(1-(-1)^{j+2l}\big)B_2^{\text{F}}(\omega_j,\tau)\Big]. \qquad (4.38)$$

Таким чином, параметр q визначається всіма трьома параметрами неабелевої еніонної системи (l, $4\pi\kappa = k$ і τ).

Основна мотивація такого складного підходу полягає в тому, що як тільки третій віріальний коефіцієнт для неабелевих еніонів стане доступним, налаштування параметрів γ і q дозволить встановити більш точну відповідність між такими еніонами та неадитивною статистикою Поліхронакоса.

Розрахунки зроблені як для $\sigma = +1$, так і для $\sigma = -1$. Останній випадок дає прийнятні результати лише для досить «м'якого» ядра (τ не є великим) через e^{τ} у визначеннях (4.29) та (4.30).

Зауважимо, що про немонотонну поведінку еніонного $b_2^{\text{s.c.}}$ від k (а також від l_0) повідомлялося, зокрема, у [50], тому подібні результати для q на рис. 4.2–4.4 не повинні дивувати.

Треба зауважити, що для деяких значень параметрів — а саме в області низьких k — еніонний $b_2^{\text{s.c.}} > 0$, що дає комплексні розв'зки для q. Цей факт свідчить про неуніверсальність розглянутої моделі дробової статистики для неабелєвих аніонів.

У границі $k \to \infty$ і $\tau \to \infty$, що відповідає невзаємодіючим жорстким еніонам, поведінка $q \to 1$ забезпечує

$$b^{\text{h.c.}}(\kappa \to \infty, l) = -\frac{1}{4}\frac{1}{2l+1}, \qquad (4.39)$$

як і очікувалось [50].

Нижче подано графіки та таблиці, що візуально демонструють залежність параметра неадитивності q від $k = 4\pi\kappa$ для різних значень

l і σ при різних значеннях параметра жорсткості τ. Для уникнення громіздкості у таблицях наведені вибіркові дані.

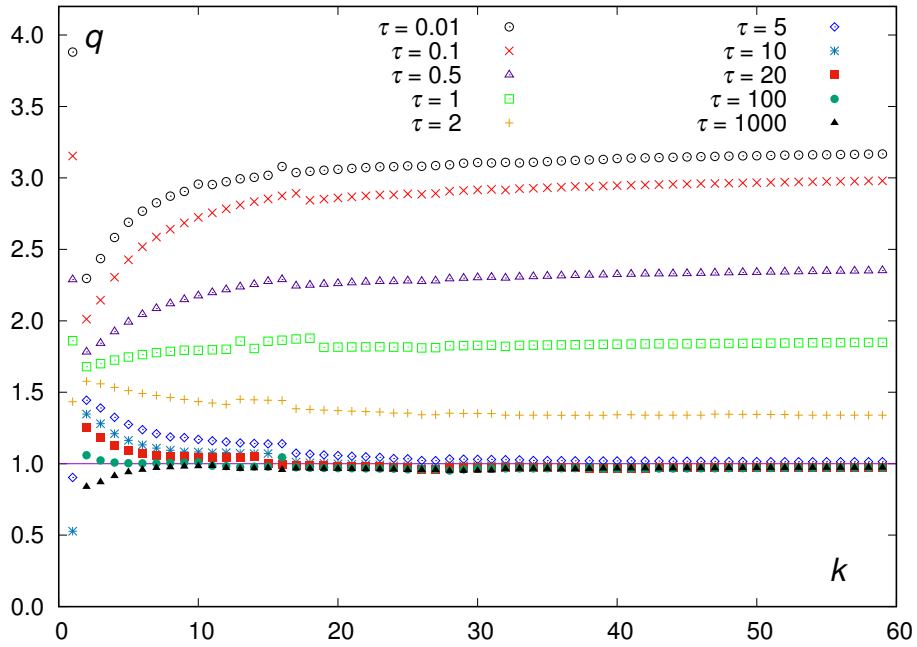


Рис. 4.2. Залежність параметра неадитивності q від $k = 4\pi\kappa$ для $l = 1/2$ і $\sigma = +1$ при різних значеннях параметра жорсткості τ.

Таблиця 4.2. Параметр q для неабелевих еніонів для $l = 1/2$ і $\sigma = +1$ при різних значеннях параметра жорсткості τ.

k	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 5$	$\tau = 10$	$\tau = 20$	$\tau = 100$
1	3,881	3,154	2,289	1,861	1,434	0,904	0,528	999	999
5	2,689	2,427	1,992	1,747	1,511	1,275	1,163	1,092	1,004
15	3,018	2,854	2,276	1,857	1,445	1,139	1,071	0,998	0,979
25	3,085	2,888	2,280	1,817	1,353	1,034	0,984	0,970	0,961
35	3,115	2,931	2,313	1,831	1,339	1,022	0,984	0,974	0,968
45	3,147	2,958	2,331	1,839	1,340	1,017	0,978	0,971	0,967
55	3,162	2,975	2,347	1,847	1,339	1,014	0,981	0,975	0,972

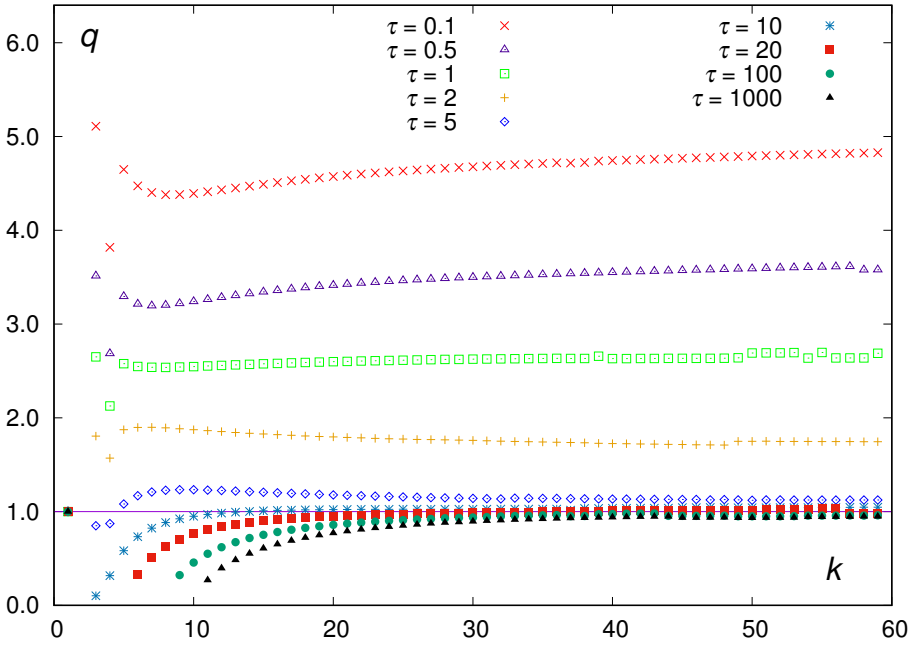


Рис. 4.3. Залежність параметра неадитивності q від $k = 4\pi\kappa$ для $l = 1$ і $\sigma = +1$ при різних значеннях параметра жорсткості τ.

Таблиця 4.3. Параметр q для неабелевих еніонів для $l = 1$ і $\sigma = +1$ при різних значеннях параметра жорсткості τ.

k	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 5$	$\tau = 10$	$\tau = 20$	$\tau = 100$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5,654	4,649	3,295	2,577	1,873	1,081	0,583	999	999
15	5,011	4,491	3,342	2,576	1,827	1,206	1,008	0,902	0,753
25	5,062	4,634	3,464	2,614	1,773	1,157	1,025	0,973	0,909
35	5,105	4,713	3,527	2,634	1,743	1,141	1,027	0,999	0,960
45	5,130	4,768	3,572	2,634	1,715	1,130	1,042	1,012	0,954
55	5,149	4,814	3,608	2,698	1,747	1,124	1,044	1,029	0,957

Таблиця 4.4. Параметр q для неабелевих еніонів для $l = 1$ і $\sigma = -1$ при різних значеннях параметра жорсткості τ.

k	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.5$
1	13.5519	14.6984	21.2397
2	12.8819	14.0288	20.5716
3	7.4050	9.4740	17.1040
4	7.3869	9.4742	17.1059
5	7.0494	9.2170	16.9356
6	6.9071	9.1175	16.8703
7	6.8476	9.0818	16.8471
8	6.8267	9.0743	16.8425
9	6.8248	9.0799	16.8465
10	6.8324	9.0915	16.8544
12	6.8591	9.1209	16.8741
14	6.8895	9.1506	16.8941
16	6.9186	9.1777	16.9122
18	6.9450	9.2016	16.9282
20	6.9684	9.2225	16.9421
25	7.0161	9.2642	16.9700
30	7.0518	9.2947	16.9906
35	7.0797	9.3189	17.0066
40	7.1021	9.3379	17.0194
45	7.1206	9.3541	17.0300
50	7.1363	9.3677	17.0402
55	7.1497	9.3793	17.0483
56	7.1522	9.3814	17.0498
57	7.1546	9.3834	17.0512
58	7.1570	9.3854	17.0527

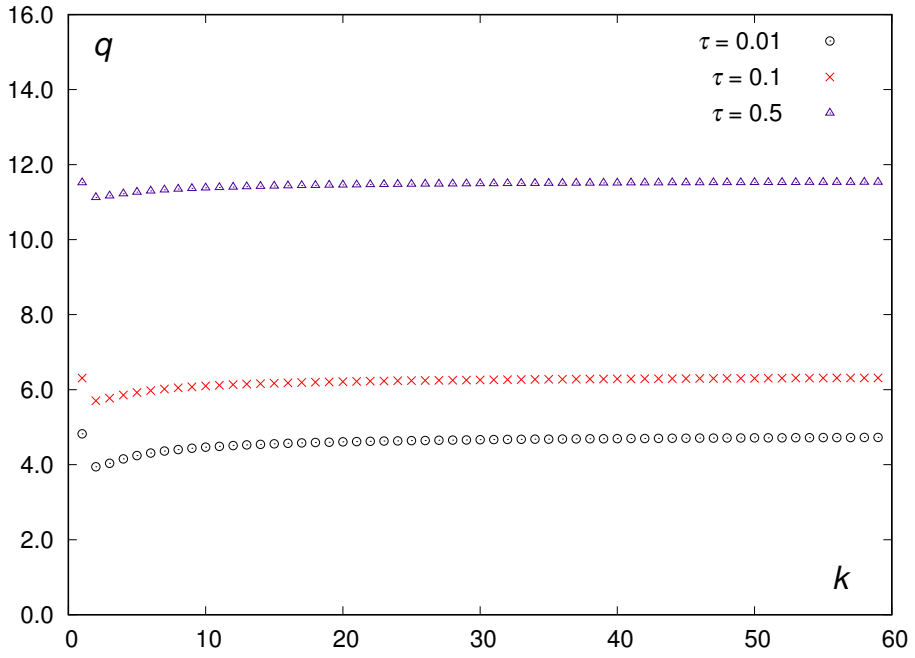


Рис. 4.4. Залежність параметра неадитивності q від $k = 4\pi\kappa$ для $l = 1/2$ і $\sigma = -1$ при різних значеннях параметра жорсткості τ.

Зауважимо, що для даного випадку, можна спостерігати, що при збільшенні значення параметра жорсткості τ відбувається досить різке підвищення значення q, про що було згадано раніше.

Таблиця 4.5. Параметр q для неабелевих еніонів для $l = 1/2$ і $\sigma = -1$ при різних значеннях параметра жорсткості τ.

k	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.5$
1	4.8228	6.3103	11.5173
5	4.2430	5.9240	11.2663
15	4.5569	6.1712	11.4300
25	4.6410	6.2411	11.4789
35	4.6815	6.2756	11.5040
45	4.7055	6.2961	11.5192
55	4.7213	6.3097	11.5295

4.6. Два підходи до віріального розвинення

Класичне віріальне розвинення було запропоновано понад століття тому [131] як спосіб запису рівняння стану у вигляді ряду за степенями густини. Проте у сучасній літературі можна знайти щонайменше два дещо відмінні підходи до такого поняття. Ось чому в цьому підрозділі ми коротко підсумовуємо термінологію та позначення, які будуть використовуватися надалі.

Великий термодинамічний потенціал $\Omega = -pV$, де p — тиск, V — об'єм, може бути виражений через статистичну суму Ξ:

$$\Omega = -T \ln \Xi, \tag{4.40}$$

де T — температура. Віріальне розвинення для D-вимірної системи тоді

$$pV = NT \left[1 + b_2 \, \rho\lambda^D + b_3 \left(\rho\lambda^D \right)^2 + \ldots \right], \tag{4.41}$$

де теплова хвиля де Бройля для частинки масою m є $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mT)}$ та $\rho = N/V$ — густина. Коефіцієнти b_n — так звані віріальні коефіцієнти. Використовуючи кластерне розвинення для великої статистичної суми,

$$\ln \Xi = V \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{B}_\ell z^\ell, \tag{4.42}$$

де z — фугативність, а $\mathcal{B}_\ell$ — кластерні коефіцієнти, можна легко показати наступний зв'язок [87, 132]:

$$b_2 \lambda^D = -\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2}, \tag{4.43}$$

$$b_3 \lambda^{2D} = -2\frac{\mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_1^3} + 4\frac{\mathcal{B}_2^2}{\mathcal{B}_1^4}, \tag{4.44}$$

$$\ldots \, .$$

Можна також використовувати трохи інший підхід, див. [133, 134], переписуючи велику статистичну суму Ξ як суму статистичних сум Q_n за степенями фугативності z:

$$\Xi = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n = 1 + Q_1 z + Q_2 z^2 + \dots . \tag{4.45}$$

Тоді для рівняння стану отримаємо:

$$-\Omega = T \ln \Xi = pV = TQ_1 \left[z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \right], \tag{4.46}$$

де c_n також мають назву віріальні коефіцієнти(!). Заради уникнення плутанини, цей термін не буде використовуватись для c_n у тексті цієї роботи. Коефіцієнти c_n виражаються через статистичні суми таким чином [134]:

$$c_2 = \frac{Q_2}{Q_1} - \frac{Q_1}{2}, \tag{4.47}$$

$$c_3 = \frac{Q_3}{Q_1} - Q_2 + \frac{Q_1^2}{3}, \tag{4.48}$$

$$\dots .$$

Очевидно, зауваживши просте співвідношення між кластерними коефіцієнтами та канонічними статистичними сумами, $V\mathcal{B}_\ell = Q_\ell$, ми відразу отримаємо:

$$b_2 \lambda^D = -\frac{V}{Q_1} c_2, \tag{4.49}$$

$$b_3 \lambda^{2D} = -2 \left(\frac{V}{Q_1} \right)^2 c_3 + 4 \left(\frac{V}{Q_1} \right)^2 c_2^2, \tag{4.50}$$

$$\dots .$$

Переписуючи $Q_1 = V/\lambda^D$ (Якщо бути точним, це співвідношення відповідає безспіновим частинкам. Однак з урахуванням додаткового виродження $(2s+1)$ через спін s не змінює кінцеві результати, оскільки

такі множники скорочуються під час виведення), можна перейти до таких співвідношень:

$$b_2 = -c_2, \tag{4.51}$$

$$b_3 = -2c_3 + 4c_2^2, \tag{4.52}$$

$$\dots \ .$$

Ці вирази корисні для порівняння результатів, наведених у літературі, де застосовуються два підходи до віріального розвинення.

4.7. Фермі-система зі слабкою взаємодією

Для цієї задачі відхилення від стандартної статистики Фермі будуть незначними, тому розглядатимемо головні поправки до віріальних коефіцієнтів у границях $q \to 1$ і $\gamma \to 1$. Зручно буде використовувати такі позначення:

$$q = 1 + r \qquad \text{і} \qquad \gamma = 1 + \eta.$$

Щоб отримати вирази для віріальних коефіцієнтів при малих відхиленнях q від одиниці, корисні такі асимптотичні розкладання для бета-функції:

$$\mathrm{B}(s, X+1)\Big|_{X\to\infty} = \Gamma(s) X^{-s} \left[1 - \frac{s(s+1)}{2}\frac{1}{X} + \dots\right], \tag{4.53}$$

$$\mathrm{B}(s, X-s)\Big|_{X\to\infty} = \Gamma(s) X^{-s} \left[1 + \frac{s(s+1)}{2}\frac{1}{X} + \dots\right], \tag{4.54}$$

які можна отримати на підставі відповідних наближень для гамма-функції.

Після простих перетворень можна отримати головний член поправок:

$$\{\ell; s\}_{1+r} \simeq \frac{1}{\ell^s}\left[1 - \frac{s(s+1)}{2}\frac{r}{\ell}\right], \tag{4.55}$$

де $\{\ell; s\}_q$ означено рівнянням (4.15).

Таким чином, віріальні коефіцієнти (з точністю до перших порядків за малими поправками) є:

$$b_2 = \frac{1}{2^{s+1}}(1+\eta)\left[1 + \frac{3}{4}s(s+1)r\right], \tag{4.56}$$

$$b_3 = (1+2\eta)\left[\left(\frac{1}{2^{2s}} - \frac{2}{3^{s+1}}\right) + \left(\frac{3}{2^{2s}} - \frac{16}{3^{s+2}}\right)\frac{s(s+1)}{2}r\right]. \tag{4.57}$$

Розглянемо двовимірний фермі-газ з контактною (zero range) взаємодією [82, 83]. У такій системі існує єдиний зв'язаний стан з енергією зв'язку E_b. Вводячи позначення $\Lambda = E_\mathrm{b}/T$,можна переписати другий віріальний коефіцієнт у такій формі [83, 134]:

$$b_2^{\mathrm{int}} = \frac{1}{4} - e^{\Lambda^2} + \int\limits_0^\infty \frac{dy}{y}\frac{2e^{-\Lambda^2 y^2}}{\pi^2 + 4\ln^2 y}. \tag{4.58}$$

Для невзаємодіючої системи ($\Lambda = 0$), значення інтегралу в (4.58) набуває одиниці у відповідності до другого віріального коефіцієнта ідеального 2D фермі-газу $b_2^{(0)} = 1/4$. Водночас, отримання граничної поведінки при $\Lambda \to 0$ не є очевидним. Дійсно, розклад експоненти $e^{-\Lambda^2 y^2}$ у ряд дає розбіжні інтеграли.

Правда, існує обхідний шлях подолання цієї проблеми розбіжності. Інтеграл можна продиференціювати за Λ^2 із заміною змінної $x = \Lambda y$,

$$\frac{\partial}{\partial(\Lambda^2)}\int\limits_0^\infty \frac{dy}{y}\frac{2e^{-\Lambda^2 y^2}}{\pi^2 + 4\ln^2 y} = -\frac{1}{\Lambda^2}\int\limits_0^\infty dx\,\frac{2xe^{-x^2}}{\pi^2 + 4(\ln x - \ln\Lambda)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\Lambda^2}\frac{1}{4\ln^2\Lambda}\int\limits_0^\infty dx\,\frac{2xe^{-x^2}}{1-2\frac{\ln x}{\ln\Lambda}+\ldots} =$$

$$= -\frac{1}{\Lambda^2}\frac{1}{\ln^2\Lambda^2}\int\limits_0^\infty dx\,2xe^{-x^2}\left[1+2\frac{\ln x}{\ln\Lambda}+\ldots\right] =$$

$$= -\frac{1}{\Lambda^2}\frac{1}{\ln^2\Lambda^2}+\frac{2C}{\Lambda^2}\frac{1}{\ln^3\Lambda^2}+\ldots, \tag{4.59}$$

де $C = 0.57721\ldots$ — константа Ейлера–Маскероні. Інтегруючи отриманий ряд, ми отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{dy}{y}\frac{2e^{-\Lambda^2y^2}}{\pi^2+4\ln^2 y} = 1+\frac{1}{\ln\Lambda^2}-\frac{C}{\ln^2\Lambda^2}+\ldots, \tag{4.60}$$

де одиниця є константою інтегрування з умови значення інтегралу при $\Lambda = 0$. Цю логарифмічну поведінку можна бути перевірена чисельно.

Слабку (логарифмічну) збіжність інтеграла в (4.60) добре ілюструє табл. 4.6. Розрахунки інтегралів зроблено чисельно за допомогою `https://www.wolframalpha.com`.

Отож, ми отримуємо b_2^{int} в границі $\Lambda \to 0$

$$b_2^{\text{int}} = \frac{1}{4}+\delta b_2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{\ln\Lambda^2}-\frac{C}{\ln^2\Lambda^2}+\ldots\ . \tag{4.61}$$

Аналітичних результатів для третього віріального коефіцієнта є недостатньо у різних посиланнях [83, 135]. Однак, так як нас цікавить головна поправка до ідеальної фермі-системи,

$$b_3^{\text{int}} = b_3^{(0)}+\delta b_3, \tag{4.62}$$

скористаємось доступністю даних для δc_3 та δc_2 [134, 136].

Таблиця 4.6. Порівняння чисельних результатів для інтеграла в (4.60) та його наближень

Λ^2	$\int_0^\infty \frac{dy}{y}\frac{2e^{-\Lambda^2 y^2}}{\pi^2+4\ln^2 y}$	$1+\frac{1}{\ln\Lambda^2}$	$1+\frac{1}{\ln\Lambda^2}-\frac{C}{\ln^2\Lambda^2}$
0.2	0.59394	0.37867	0.15583
0.1	0.64818	0.56571	0.45684
10^{-2}	0.77831	0.78285	0.75564
10^{-3}	0.84803	0.85524	0.84314
10^{-4}	0.88639	0.89143	0.88462
10^{-6}	0.92509	0.92762	0.92459
10^{-8}	0.94422	0.94571	0.94401
10^{-10}	0.95559	0.95657	0.95548
10^{-12}	0.96312	0.96381	0.96305
10^{-16}	0.97246	0.97286	0.97243
10^{-20}	0.97803	0.97829	0.97801

З (4.51) можемо переписати:

$$\begin{aligned} b_3^{\text{int}} &= -2\left(c_3^{(0)}+\delta c_3\right)+4\left(c_2^{(0)}+\delta c_2\right)^2 \\ &\simeq -2c_3^{(0)}+4{c_2^{(0)}}^2-2\delta c_3+8c_2^{(0)}\delta c_2, \end{aligned} \tag{4.63}$$

де перші два доданки дають $b_3^{(0)}=1/36$. Враховуючи, що $c_2^{(0)}=-1/4$ і співвідношення $\delta c_3=-\delta c_2$, що передбачене для двовимірної площини у рамках напівкласичного ґраткового наближення [134] (див. також результати представлені у [136]), отримуємо $\delta b_3=0$.

З (4.56), у 2D випадку ($s = D/2 = 1$) результати у лінійному наближенні за поправками дають

$$b_2 = \frac{1}{4} + \frac{\eta}{4} + \frac{3}{8}r, \tag{4.64}$$

$$b_3 = \frac{1}{36} + \frac{\eta}{18} + \frac{17}{108}r. \tag{4.65}$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\frac{1}{4} + \frac{\eta}{4} + \frac{3}{8}r = \frac{1}{4} + \delta b_2, \tag{4.66}$$

$$\frac{1}{36} + \frac{\eta}{18} + \frac{17}{108}r = \frac{1}{36}, \tag{4.67}$$

легко можна отримати співвідношення між статистичними параметрами і параметрами взаємодії реальної фермі-системи:

$$\eta = \frac{17}{2}\,\delta b_2, \qquad r = -3\,\delta b_2, \tag{4.68}$$

де поправка δb_2 з точністю до двох членів розкладу за параметром Λ^2 дорівнює

$$\delta b_2 = \frac{1}{\ln \Lambda^2} - \frac{C}{\ln^2 \Lambda^2}. \tag{4.69}$$

Зрозуміло, що врахування точнішого результату для поправки δb_3, наприклад, [83] лише трішки змінить кінцеві результати без будь-яких ускладнень даної схеми.

4.8. Висновки до розділу 4

У цьому розділі продемонстровано зв'язок параметрів другого віріального коефіцієнта неабелевих еніонів та двопараметричних неповних і неадитивних модифікацій статистик Голдейна–Ву та Поліхронакоса.

Отримано вирази, що пов'язують параметри цих дробових статистик із параметрами неабелевих еніонів на підставі другого віріального коефіцієнта. Розраховано чисельні значення параметрів, за яких неабелеві еніони можуть наближено описуватись такими типами дробових статистик.

Зауважимо, що двопараметричні статистики можуть бути застосовані для моделювання неабелевих еніонів із м'якою серцевиною. Відповідні аналітичні вирази будуть дуже громіздкими, а зв'язки між параметрами знаходяться лише чисельно.

Розглянуто дві задачі, де моделі на основі дробової неадитивної статистики Поліхронакоса дають наближений опис реальних фізичних систем. Ця дробова статистика визначається двома параметрами, γ і q. Використовуючи віріальне розвинення, значення параметрів статистики пов'язуються з величинами, що характеризують змодельовані системи. Зокрема, для двовимірного фермі-газу з контактними взаємодіями така величина дорівнює $\Lambda = E_\mathrm{b}/T$, де E_b — енергія зв'язку єдиного доступного зв'язаного стану. Невеликі відхилення γ і q від одиниці отримують як ряди за $1/(\ln \Lambda^2)$. У випадку неабелевих еніонів із м'якою серцевиною ми можемо виразити γ і q через три величини, ізоспін l, силу взаємодії κ і параметр жорсткості τ з певною свободою.

Зауважимо, що для проаналізованої фермі-системи відновлюються як другий, так і третій віріальні коефіцієнти. Точність такої моделі можна перевірити, включивши до уваги вищі віріальні коефіцієнти [137]. Це може вимагати певних модифікацій вихідної двопараметричної дробової статистики для кращого опису.

Для системи неабелевих еніонів поки відомий лише другий віріальний коефіцієнт. Однак ми виявили, що наш підхід має обмежену застосовність, оскільки він не повсюдно працює для малих значень

параметра κ. У цьому випадку в майбутніх дослідженнях також слід розглянути інші моделі дробових статистик. Більше інформації про такі системи буде отримано після того, як стане відомий принаймні наступний, третій віріальний коефіцієнт.

Можна також припустити, що ефективні моделі, засновані на різних типах дробової статистики, полегшать врахування деяких зовнішніх впливів, таких як обертання системи або пасток [133], а також ефектів граничного розміру (finite-size effects).

ВИСНОВКИ

Головні результати дисертаційної роботи можна підсумувати у вигляді такого переліку.

1. Досліджено властивості системи еніонів з магнітними зарядами в магнітному полі. В рамках теорії збурень отримано параметри другого віріального коефіцієнта магнітозаряджених еніонів, залежного від еніонного параметра α. Проаналізовано межі застосовності даної теорії. Внесок від гіпотетичних магнітних зарядів вважався малим параметром, внаслідок чого можна розрахувати першу поправку за теорією збурень і показати, що її врахування знімає виродження енергетичних рівнів за орбітальним квантовим числом. З отриманої залежності другого віріального коефіцієнта видно, що на бозонній стороні (еніонний параметр $\alpha \lesssim 0.5$) ця поправка має екстремум (мінімум або максимум в залежності від знаку добутку електричних і магнітних зарядів $e\mu$). Очевидно, що поправка на другий віріальний коефіцієнт дозволяє розрахувати поправки до термодинамічних функції, що було продемонстровано через визначення поправки на магнітну сприйнятливість залежно від температури та еніонного параметра α.

2. Опрацьовано узагальнення фермі-газу, що базується на модифікації з використанням q-експоненти Цалліса в двох варіаціях, котрі різняться між собою вибором змінної у показнику експоненти. В рамках даного підходу отримано термодинамічні характеристики системи деформованого фермі-газу за високих та низьких температур, а саме – детально проаналізовано поведінку хімічного потнціалу, активності (фугативності) та питомої ізохорної теплоємності.

Перша модель отримана наступною заміною:

$$e^{(\varepsilon-\mu)/T} \to e_q^{(\varepsilon-\mu)/T}.$$

Зміна поведінки за високих температур суттєво відхиляється від класичного фермі-газу: теплоємність не є сталою, а натомість нескінченно зростає за $q < 1$ або прямує до нуля при $q > 1$. З іншого боку, в границі низьких температур ця модель дуже нагадує звичайний ідеальний фермі-газ.

Друга модель була отримана з того, що

$$e^{(\varepsilon-\mu)/T} = z^{-1}e^{\varepsilon/T} \to z^{-1}e_q^{\varepsilon/T}.$$

Обов'язково варто зауважити, що властивості q-експоненти Цалліса порушують звичне правило факторизації, саме – $e_q^{(\varepsilon-\mu)/T} \neq e_q^{-\mu/T}e_q^{\varepsilon/T}$. За високих температурах питома теплоємність набуває сталого значення. Однак найцікавіші результати отримані в області низьких температур. Для $q < 1$ у другій моделі ізохорна питома теплоємність прямує до додатного сталого значення при $T = 0$ та набуває нульового значення за певної скінченної (ненульової) мінімальної температури для $q > 1$.

3. Запропоновано спосіб вираження характеристик еніонів через двопараметричні дробові систем, шляхом прирівнювання відповідних числових коефіцієнтів для другого віріального коефіцієнта, а саме через неповні та неадитивні модифікації статистик Поліхронакоса та Голдейна–Ву. Цю задачу опрацьовано для двох типів еніонів, залежно від параметру серцевини, а саме — з твердою та м'якою серцевиною.

4. Досліджено властивості деформованого фермі-газу. Опрацьовано детальний опис через двопараметричну дробові статистику, а са-

ме — неадитивну статистику Поліхронакоса, котра визначається двома параметрами, γ і q. Пораховано значення параметрів, за яких фермі-газ з контактною взаємодією може бути описаний через даний тип статистики, використовуючи віріальне розвинення. Зокрема, для двовимірного фермі-газу з контактними взаємодіями така величина дорівнює $\Lambda = E_\mathrm{b}/T$, де E_b — енергія зв'язку єдиного доступного зв'язаного стану. Невеликі відхилення γ і q від одиниці отримують як ряди за $1/(\ln \Lambda^2)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Б. Собко та А. Ровенчак. Спектр системи двох еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз.*, 51:87–97, 2016.

[2] B. Sobko and A. Rovenchak. Corrections to thermodynamics of the system of magnetically charged anyons. *Fiz. Nizk. Temp.*, 45(8):880–884, 2019. (*Low Temp. Phys.*, 45(8):880-884, 2019).

[3] A. Rovenchak and B. Sobko. Fugacity versus chemical potential in nonadditive generalizations of the ideal Fermi-gas. *Physica A*, 534:122098, 2019.

[4] А. Ровенчак і Б. Собко. Суперадитивна модель ідеального фермі-газу поблизу абсолютного нуля температури. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз.*, 56:65–75, 2019.

[5] B. Sobko. Relationship between the parameters of the second virial coefficient of non-Abelian anyons and two-parametric fractional statistics. *Ukr. J. Phys.*, 66(7):595–600, 2021.

[6] B. Sobko and A. Rovenchak. Effective modeling of physical systems with fractional statistics. *Fiz. Nyzk. Temp.*, 48(8):702–709, 2022. (*Low Temp. Phys.*, 48(8):621-627, 2022).

[7] J. M. Leinaas and J. Myrheim. On the theory of identical particles. *Nuovo Cimento*, 37B(1):1–23, 1977.

[8] F. Wilczek. Quantum mechanics of fractional-spinn particles. *Phys. Rev. Lett.*, 49(14):957–959, 1982.

[9] B. I. Halperin. Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized Hall states. *Phys. Rev. Lett.*, 52(18):1583–1586, 1984.

[10] D. Arovas, J. R. Schrieffer, and F. Wilczek. Fractional statistics and

the quantum Hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 53(7):722–723, 1984.

[11] Anne E. B. Nielsen. Anyon braiding in semianalytical fractional quantum Hall lattice models. *Phys. Rev. B*, 91:041106, 2015.

[12] E. Shech. Two approaches to fractional statistics in the quantum Hall effect: Idealizations and the curious case of the anyon. *Found. Phys.*, 45(9):1063–1100, 2015.

[13] A. Yu. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Ann. Phys.*, 303(1):2–30, 2003.

[14] Ville Lahtinen and Jiannis K. Pachos. A short introduction to topological quantum computation. *SciPost Phys.*, 3(19):021, 2017.

[15] F. E. Camino, W. Zhou, and V. J. Goldman. Realization of a Laughlin quasiparticle interferometer: Observation of fractional statistics. *Phys. Rev. B*, 72(7):075342, 2005.

[16] C. Weeks, G. Rosenberg, B. Seradjeh, and M. Franz. Anyons in a weakly interacting system. *Nature Phys.*, 3:797–801, 2007.

[17] T. Keilmann, S. Lanzmich, I. McCulloch, and M. Roncaglia. Statistically induced phase transitions and anyons in 1D optical lattices. *Nature Commun.*, 2:361, 2011.

[18] B. Rosenow, I. P. Levkivskyi, and B. I. Halperin. Current correlations from a mesoscopic anyon collider. *Phys. Rev. Lett.*, 15:116, 2016.

[19] H. Bartolomei *et al.* Fractional statistics in anyon collisions. *Science*, 2020.

[20] A. Vaschy. *Traité d'électricité et de magnétisme: Théorie et applications, instruments et méthodes de mesure électrique.* Baudry, Paris, 1890.

[21] P. Curie. Sur la possibilité d'existence de la conductibilité magnétique et du magnétisme libre. *J. Phys. Theor. Appl.*, 3(1):415–417, 1894.

[22] P. A. M. Dirac. Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. London A*, 133(821):60–72, 1931.

[23] P. A. M. Dirac. The theory of magnetic poles. *Phys. Rev.*, 74(7):817–830, 1948.

[24] G. 't Hooft. Magnetic monopoles in unified gauge theories. *Nucl. Phys. B*, 79(2):276–284, 1974.

[25] A. M. Polyakov. Particle spectrum in the quantum field theory. *JETP Lett.*, 20(6):194–195, 1974.

[26] Martin Bucher, Hoi-Kwong Lo, and John Preskill. Topological approach to Alice electrodynamics. *Nucl. Phys. B*, 386:3–26, 1992.

[27] C. Cafaro and S. A. Ali. The spacetime algebra approach to massive classical electrodynamics with magnetic monopoles. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 17(1):23–36, 2007.

[28] V. M. Tkachuk. Field equation in a deformed space with minimal length. *J. Phys. Stud.*, 11(1):41–44, 2007.

[29] E. Harikumar, T. Jurić, and S. Meljanac. Electrodynamics on κ-Minkowski space-time. *Phys. Rev. D*, 84:085020, 2011.

[30] S. K. Moayedi, M. R. Setare, and B. Khosropour. Formulation of electrodynamics with an external source in the presence of a minimal measurable length. *Adv. High En. Phys.*, 2013:657870, 2013.

[31] V. M. Vasyuta and V. M. Tkachuk. Classical electrodynamics in a space with spin noncommutativity of coordinates. *Phys. Lett. B*, 761:462–468, 2016.

[32] D. J. P. Morris, D. A. Tennant, S. A. Grigera, B. Klemke, C. Castelnovo, R. Moessner, C. Czternasty, M. Meissner, K. C. Rule, J.-U. Hoffmann, K. Kiefer, S. Gerischer, D. Slobinsky, and R. S. Perry. Dirac strings and magnetic monopoles in the spin ice $Dy_2Ti_2O_7$. *Science*, 326:411–414, 2009.

[33] Zhong Fang, Naoto Nagaosa, and Kei S. Takahashi. The anomalous Hall effect and magnetic monopoles in momentum space. *Science*, 302:92–95, 2003.

[34] E. Gibney. Quantum cloud simulates magnetic monopole. *Nature*, 5:1–3, 2014.

[35] S. Abe and Y.Okamoto. Nonextensive statistical mechanics and its applications. *Berlin : Springer, 2001*, page 277, 2001.

[36] L. Marques, J. Cleymans, and A. Deppman. Description of high-energy *pp* collisions using Tsallis thermodynamics: Transverse momentum and rapidity distributions. *Phys. Rev. D*, 91(5), 2015.

[37] Motohiko Kusakabe, Toshitaka Kajino, Grant J. Mathews, and Yudong Luo. On the relative velocity distribution for general statistics and an application to big-bang nucleosynthesis under Tsallis statistics. *Phys. Rev. D*, 99(4):043505, 2019.

[38] Luiz C. Sampaio, Márcio P. de Albuquerque, and Fortunato S. de Menezes. Nonextensivity and tsallis statistics in magnetic systems. *Phys. Rev. B*, 55(9):5611–5614, 1997.

[39] M. Gell-Mann and C. Tsallis, editors. *Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications*. Oxford University Press, New York, 2004.

[40] Taiki Takahashi. A social discounting model based on Tsallis' statistics. *Physica A*, 389(17):3600–3603, 2010.

[41] G. P. Pavlos, L. P. Karakatsanis, A. C. Iliopoulos, E. G. Pavlos, M. N. Xenakis, Peter Clark, Jamie Duke, and D. S. Monos. Measuring complexity, nonextensivity and chaos in the DNA sequence of the Major Histocompatibility Complex. *Physica A*, 438:188–209, 2015.

[42] G. Ruiz and A. F. de Marcos. Evidence for criticality in financial data. *Eur. Phys. J. B*, 91:1, 2018.

[43] Yair Neuman, Yochai Cohen, Navot Israeli, and Boaz Tamir. A

proposed methodology for studying the historical trajectory of words' meaning through Tsallis entropy. *Physica A*, 492:804–813, 2018.

[44] Constantino Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52, 1988.

[45] Z. Daróczy. Generalized information functions. *Information and Control*, 16:36–51, 1970.

[46] Constantino Tsallis. What are the numbers that experiments provide? *Química Nova*, 17(6):468–471, 1994.

[47] J. Naudts. The q-exponential family in statistical physics. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 201, 2010.

[48] S. Umarov, C. Tsallis, and S. Steinberg. On a q-central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics. *Milan J. Math.*, 76, 2008.

[49] G. Moore and N. Read. Nonabelions in the fractional quantum Hall effect. *Nucl. Phys. B*, 360:362, 1991.

[50] Francesco Mancarella, Andrea Trombettoni, and Giuseppe Mussardo. Statistical mechanics of an ideal gas of non-Abelian anyons. *Nucl. Phys. B*, 867(3):950–976, 2013.

[51] Douglas Lundholm and Viktor Qvarfordt. Exchange and exclusion in the non-abelian anyon gas, 2020. arXiv:2009.12709.

[52] L. Jacak, P. Sitko, K. Wieczorek, and A. Wójs. *Quantum Hall Systems: Braid Groups, Composite Fermions, and Fractional Charge*. International series of monographs on physics Oxford University PressB, 2003.

[53] M. Dolev, M. Heiblum, V. Umansky, A. Stern, and D. Mahalu. Observation of a quarter of an electron charge at the $\nu = 5/2$ quantum Hall state. *Nature*, 4526:829–834, 2008.

[54] R. L. Willett, L. N. Pfeiffer, and K. W West. Measurement of filling

factor 5/2 quasiparticle interference with observation of charge $e/4$ and $e/2$ period oscillations. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 106(22):8853–8858, 2009.

[55] Waheb Bishara, Parsa Bonderson, Chetan Nayak, Kirill Shtengel, and J. K. Slingerland. Interferometric signature of non-abelian anyons. *Phys. Rev. B*, 80:155303, 2009.

[56] F. Mancarella, A. Trombettoni, and G. Mussardo. Statistical mechanics of an ideal gas of non-Abelian anyons. *Nucl. Phys. B*, 867(3):950–976, 2013.

[57] A. P. Polychronakos. Virial coefficients of non-Abelian anyons. *Phys. Rev. Lett.*, 84(6):1268–1271, 2000.

[58] T. Lee. On statistical mechanics of non-Abelian Chern-Simons particles,. *preprint arXiv: hep-th/9601018 (1996)*, 1996.

[59] Ady Stern. Anyons and the quantum Hall effect—A pedagogical review. *Ann. Phys.*, 323(1):204–249, 2008.

[60] David J. Clarke, Jason Alicea, and Kirill Shtengel. Exotic non-Abelian anyons from conventional fractional quantum Hall states. *Nat. Commun.*, 4(1), 2013.

[61] J. Nakamura, S. Liang, G. C. Gardner, and M. J. Manfra. Direct observation of anyonic braiding statistics. *Nat. Phys.*, 16(9):931–936, 2020.

[62] Sourav Manna, Biplab Pal, Wei Wang, and Anne E. B. Nielsen. Anyons and fractional quantum hall effect in fractal dimensions. *Phys. Rev. Research*, 2:023401, 2020.

[63] Ha Quang Trung and Bo Yang. Fractionalization and dynamics of anyons and their experimental signatures in the $\nu = n + 1/3$ fractional quantum hall state. *Phys. Rev. Lett.*, 127:046402, 2021.

[64] R. B. Laughlin. The relationship between high-temperature

superconductivity and the fractional quantum Hall effect. *Science*, 242:525–533, 1988.

[65] G. S. Canright and M. D. Johnson. Fractional statistics: alpha to beta. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 27:3579–3598, 1994.

[66] Carlindo Vitoriano and M. D. Coutinho-Filho. Fractional statistics and quantum scaling properties of the integrable Penson-Kolb-Hubbard chain. *Phys. Rev. B*, 82:125126, 2010.

[67] Dung-Hai Lee and Steven A. Kivelson. Two classes of Mott insulator. *Phys. Rev. B*, 67:024506, 2003.

[68] M. Gulacsi. Holon statistics. *Physica B*, 536:777–780, 2018.

[69] M. P. A. Fisher, G. Grinstein, and S. M. Girvin. Presence of quantum diffusion in two dimensions: Universal resistance at the superconductor-insulator transition. *Phys. Rev. Lett.*, 64:587–590, 1990.

[70] H.-D. Doebner. On a general nonlinear schrödinger equation admitting diffusion currents. *Phys. Lett. A*, 162:397–401, 1992.

[71] Oliver Hart, Yuan Wan, and Claudio Castelnovo. Coherent propagation of quasiparticles in topological spin liquids at finite temperature. *Phys. Rev. B*, 101:064428, 2020.

[72] Chigak Itoi. Smooth paths on three-dimensional lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 73:3335–3338, 1994.

[73] Leif Arkeryd. On low temperature kinetic theory; spin diffusion, Bose–Einstein condensates, anyons. *J. Stat. Phys.*, 150:1063–1079, 2013.

[74] C. S. Srivatsan, M. V. N. Murthy, and R. K. Bhaduri. Gentile statistics and restricted partitions. *Pramana - J Phys*, 66:485–494, 2006.

[75] A. Rovenchak. The relation between fractional statistics and finite bosonic systems in the one-dimensional case. *Low Temperature*

Physics, 35:510–513, 2009.

[76] Wang Jian-Hui and Ma Yong-Li. Thermodynamic properties of a finite bose gas in a harmonic trap. *Chin. Phys. B*, 19(5):050502, 2010.

[77] A. M. Gavrilik and Yu. A. Mishchenko. Deformed Bose gas models aimed at taking into account both compositeness of particles and their interaction. *Ukr. J. Phys.*, 58(12):1171–1177, 2013.

[78] Carlindo Vitoriano, R. R. Montenegro-Filho, and M. D. Coutinho-Filho. Fractional exclusion statistics and thermodynamics of the Hubbard chain in the spin-incoherent Luttinger liquid regime. *Phys. Rev. B*, 98:085130, 2018.

[79] A. M. Gavrilik and Yu. A. Mishchenko. Composite fermions as deformed oscillators: Wavefunctions and entanglement. *Ukr. J. Phys.*, 64(12):1134, 2019.

[80] Won Sang Chung and Abdullah Algin. Modified multi-dimensional q-deformed Newton oscillators: Algebra, interpolating statistics and thermodynamics. *Ann. Phys.*, 409:167911, 2019.

[81] Hossein Mehri-Dehnavi and Hosein Mohammadzadeh. Thermodynamic geometry of Kaniadakis statistics. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 53(37):375009, 2020.

[82] Clifford Chafin and Thomas Schäfer. Scale breaking and fluid dynamics in a dilute two-dimensional Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 88:043636, 2013.

[83] W. Daza, J. E. Drut, C. Lin, and C. Ordóñez. Virial expansion for the Tan contact and Beth–Uhlenbeck formula from two-dimensional SO(2,1) anomalies. *Phys. Rev. A*, 97:033630, 2018.

[84] Jinhong Park, Christian Spånslätt, Yuval Gefen, and Alexander D. Mirlin. Noise on the non-Abelian $\nu = 5/2$ fractional quantum Hall edge. *Phys. Rev. Lett.*, 125:157702, 2020.

[85] N. Cabibbo and E. Ferrari. Quantum electrodynamics with Dirac monopoles. *Nuovo Cimento*, 23:1147–1154, 1962.

[86] John Scott, Timothy J. Evans, Douglas Singleton, Vladimir Dzhunushaliev, and Vladimir Folomeev. Dirac and non-Dirac conditions in the two-potential theory of magnetic charge. *Eur. Phys. J. C*, 78:382, 2018.

[87] A. Khare. *Fractional Statistics and Quantum Theory.* World Scientific, Singapore, 2nd edition, 2005.

[88] Babak Amirsolaimani, Palash Gangopadhyay, Andre P. Persoons, Sasaan A. Showghi, Lloyd J. Lacomb, Robert A. Norwood, and Nasser Peyghambarian. High sensitivity magnetometer using nanocomposite polymers with large magneto-optic response. *Optics Lett.*, 43(19):4615–4618, 2018.

[89] Fang Qin and Ji-Sheng Chen. Pauli paramagnetic susceptibility of an ideal anyon gas within Haldane fractional exclusion statistics. *Commun. Theor. Phys.*, 58(4):573–576, 2012.

[90] A. Rényi. On measures of entropy and information. *Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 547–561, 1961.

[91] Sushanta Tripathy, Trambak Bhattacharyya, Prakhar Garg, Prateek Kumar, Raghunath Sahoo, and Jean Cleymans. Nuclear modification factor using Tsallis non-extensive statistics. *Eur. Phys. J. A*, 52(9), 2016.

[92] N. Arunkumar, K. Ram Kumar, and V. Venkataraman. Automatic detection of epileptic seizures using permutation entropy, Tsallis entropy and Kolmogorov complexity. *Journal of Medical Imaging and Health Informatics*, 6(2):526–531, 2016.

[93] A. Rovenchak and S. Buk. Part-of-speech sequences in literary text: Evidence from Ukrainian. *J. Quant. Ling.*, 25(1):1–21, 2018.

[94] Fevzi Büyükiliç, Doğan Demirhan, and Atilla Güleç. A stastistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases. *Phys. Lett. A*, 197(3):209–220, 1995.

[95] F. Pennini, A. Plastino, and A. R. Plastino. Tsallis nonextensive thermostatistics, Pauli principle and the structure of the Fermi surface. *Physica A*, 234(1–2):471–479, 1996.

[96] B. Tanatar. Trapped interacting Bose gas in nonextensive statistical mechanics. *Phys. Rev. E*, 65:046105, 2002.

[97] Congjie Ou and Jincan Chen. Thermostatistic properties of a q-generalized Bose system trapped in an n-dimensional harmonic oscillator potential. *Phys. Rev. E*, 68:026123, 2003.

[98] H. H. Aragão-Rêgo, D. J. Soares, L. S. Lucena, L. R. da Silva, E. K. Lenzi, and Kwok Sau Fa. Bose–Einstein and Fermi–Dirac distributions in nonextensive Tsallis statistics: an exact study. *Physica A*, 317(1):199–208, 2003.

[99] S. Martínez, F. Pennini, A. Plastino, and M. Portesi. q-thermostatistics and the analytical treatment of the ideal Fermi gas. *Physica A*, 332:230–248, 2004.

[100] Hosein Mohammadzadeh, Fereshteh Adli, and Sahereh Nouri. Perturbative thermodynamic geometry of nonextensive ideal classical, Bose, and Fermi gases. *Phys. Rev. E*, 94:062118, 2016.

[101] Won Sang Chung and Abdullah Algin. Duality of boson and fermion: New intermediate-statistics. *Phys. Lett. A*, 381(38):3266–3271, 2017.

[102] Abdullah Algin and Ali Olkun. Bose–Einstein condensation in low dimensional systems with deformed bosons. *Annals of Physics*, 383:239–256, 2017.

[103] Fereshteh Adli, Hosein Mohammadzadeh, Morteza Nattagh Najafi, and Zahra Ebadi. Condensation of nonextensive ideal Bose gas and critical exponents. *Physica A*, 521:773–780, 2019.

[104] J. Rożynek. Non-extensive distributions for a relativistic Fermi gas. *Physica A*, 440:27–32, 2015.

[105] Andrij Rovenchak. Weakly nonadditive polychronakos statistics. *Phys. Rev. A*, 89:052116, 2014.

[106] A. Rovenchak. Ideal Bose-gas in nonadditive statistics. *Low Temp. Phys.*, 44(10):1025–1031, 2018.

[107] Vanderlei Bagnato and Daniel Kleppner. Bose-Einstein condensation in low-dimensional traps. *Phys. Rev. A*, 44:7439–7441, 1991.

[108] Luca Salasnich. BEC in nonextensive statistical mechanics. *International Journal of Modern Physics B*, 14(4):405–409, 2000.

[109] Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii, and Sandro Stringari. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71:463–512, 1999.

[110] Takuya Yamano. Some properties of q-logarithm and q-exponential functions in Tsallis statistics. *Physica A*, 305(3):486–496, 2002.

[111] A. R. Plastino and J. A. S. Lima. Equipartition and virial theorems within general thermostatistical formalisms. *Physics Letters A*, 260(1-2):46–54, 1999.

[112] Jorge Ananias Neto. Fundamental constants, entropic gravity and nonextensive equipartition theorem. *Physica A*, 391(18):4320–4324, 2012.

[113] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Statisticsl Physics. Part 1.* Pergamon Press, Oxford, 3rd edition, 1980.

[114] John C. Mauro, Roger J. Loucks, and Sabyasachi Sen. Heat capacity, enthalpy fluctuations, and configurational entropy in broken ergodic systems. *J. Chem. Phys.*, 133(16):164503, 2010.

[115] Adam Berlie, Ian Terry, Marek Szablewski, and Sean R. Giblin. Separating the ferromagnetic and glassy behavior within the metal-

organic magnet $Ni(TCNQ)_2$. *Phys. Rev. B*, 92(18), 2015.

[116] Ákos Szölgyén and Bence Kocsis. Black hole disks in galactic nuclei. *Phys. Rev. Lett.*, 121(10):101101, 2018.

[117] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, and C. N. Pope. Killing horizons: Negative temperatures and entropy super-additivity. *Phys. Rev. D*, 98(10), 2018.

[118] Ákos Rapp. Quantum simulators at negative absolute temperatures. *Phys. Rev. A*, 85:043612, 2012.

[119] Eitan Abraham and Oliver Penrose. Physics of negative absolute temperatures. *Phys. Rev. E*, 95(1):012125, 2017.

[120] Won Sang Chung and Hassan Hassanabadi. Statistical physics when the minimum temperature is not absolute zero. *Modern Physics Letters B*, 32(10):1850123, 2018.

[121] T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk, and V. M. Tkachuk. The WKB approximation in the deformed space with the minimal length and minimal momentum. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41(4):045305, 2008.

[122] M. M. Stetsko. Microscopic black hole and uncertainty principle with minimal length and momentum. *Int. J. Mod. Phys. A*, 28(10):1350029, 2013.

[123] W. S. Chung, A. M. Gavrilik, and A. V. Nazarenko. Doubly special relativity and photons at the Planck scale. *Preprint arXiv:1808.01243v2*, 2018.

[124] G. Kaniadakis. Non-linear kinetics underlying generalized statistics. *Physica A*, 296(3):405–425, 2001.

[125] Kamel Ourabah and Mouloud Tribeche. Planck radiation law and einstein coefficients reexamined in Kaniadakis κ statistics. *Phys. Rev. E*, 89(6):062130, 2014.

[126] Abdullah Algin, Dursun Irk, and Gozde Topcu. Anyonic behavi-

or of an intermediate-statistics fermion gas model. *Phys. Rev. E*, 91(6):062131, 2015.

[127] A. M. Gavrilik, I. I. Kachurik, M. V. Khelashvili, and A. V. Nazarenko. Condensate of μ-Bose gas as a model of dark matter. *Physica A*, 506:835–843, 2018.

[128] A. Rovenchak. Two-parametric fractional statistics models for anyons. *Eur. Phys. J. B*, 87, 2014.

[129] A. A. Rovenchak. Two–parametric fractional statistics models for anyons. *The European Physical Journal B*, 8(175), 2014.

[130] O. M. Chubai and A. A. Rovenchak. Ideal Bose gas in some deformed types of thermodynamics. Correspondence between deformation parameters. *Ukr. J. Phys.*, 65(6):500, 2020.

[131] Heike Kamerlingh Onnes. Expression of the equation of state of gases and liquids by means of series. *Proc. Sect. Sci. K. Akad. Wet. Amst.*, 4:125–147, 1902.

[132] H. Boschi-Filho P. F. Borges and C. Farina. Generalized partition functions, interpolating statistics and higher virial coefficients. *Modern Physics Letters A*, 14:1217–1226, 1999.

[133] Xia-Ji Liu, Hui Hu, and Peter D. Drummond. Virial expansion for a strongly correlated Fermi gas. *Phys. Rev. Lett.*, 102:160401, 2009.

[134] C. R. Shill and J. E. Drut. Virial coefficients of one-dimensional and two-dimensional Fermi gases by stochastic methods and a semiclassical lattice approximation. *Phys. Rev. A*, 98:053615, 2018.

[135] Xia-Ji Liu. Virial expansion for a strongly correlated Fermi system and its application to ultracold atomic Fermi gases. *Phys. Rep.*, 524(2):37–83, 2013.

[136] Vudtiwat Ngampruetikorn, Jesper Levinsen, and Meera M. Parish. Pair correlations in the two-dimensional Fermi gas. *Phys. Rev. Lett.*,

111:265301, 2013.

[137] Y. Hou and J. E. Drut. Virial expansion of attractively interacting Fermi gases in one, two, and three dimensions, up to fifth order. *Phys. Rev. A*, 102:033319, 2020.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті

[1] **Sobko B.**, Rovenchak A. Effective modeling of physical systems with fractional statistics // Fiz. Nyzk. Temp. 2022. Vol. 48, No. 8. P. 702–709; Low Temp. Phys. 2022. Vol. 48, No. 8. P. 621–627. DOI: 10.1063/10.0012649 (**Q3**) *(Особистий внесок здобувача: дослідження зв'язку других віріальних коефіцієнтів за різних підходів.)*

[2] **Собко Б.** Зв'язок параметрів другого віріального коефіцієнта неабелевих еніонів з двопараметричними дробовими статистиками // Укр. фіз. журн. 2021. Т. 66, № 7. С. 595–600; Sobko B. Relationship between the parameters of the second virial coefficient of non-Abelian anyons and the two-parametric fractional statistics // Ukr. J. Phys. 2021. Vol. 66, No. 7. P. 595–600. DOI: 10.15407/ujpe66.7.595 (**Q3**) *(Особистий внесок здобувача: отримання зв'язку параметрів системи еніонів та дробових двопараметричних статистик на підставі порівняння другого віріального коефіцієнта відповідних систем.)*

[3] Rovenchak A., **Sobko B.** Fugacity versus chemical potential in non-additive generalizations of the ideal Fermi-gas // Physica A. 2019. Vol. 534. Art. 122098. 11 p. DOI: 10.1016/j.physa.2019.122098 (**Q2**) *(Особистий внесок здобувача: знаходження виразів для хімічного потенціалу в високотемпературній границі однієї з моделей модифікованого фермі-газу, а саме моделі, де показником в експоненті виступає хімічний потенціал; отримання аналітичної*

залеж -ності активності від параметрів статистики та температури в низькотемпературній границі для іншої моделі, а саме моделі, де змінна z є множником для експоненти; дослідження поведінки активності в низькотемпературній границі однієї з моделей модифікації фермі-газу з визначенням, що стосується хімічного потенціалу.).

[4] **Sobko B.**, Rovenchak A. Corrections to thermodynamics of the system of magnetically charged anyons // Fiz. Nizk. Temp. 2019. Vol. 45, No. 8. P. 1029–1034; Low Temp. Phys. 2019. Vol. 45, No. 8. P. 880–884. DOI: 10.1063/1.5116535 (**Q3**) *(Особистий внесок здобувача: аналітичний розрахунок внеску у термодинаміку абелевих еніонів, що базується на другому віріальному коефіцієнті; розрахунок поправки до магнітної сприйнятливості; графічна візуалізація залежності).*

[5] **Собко Б.**, Ровенчак А. Суперадитивна модифікація ідеального фермі-газу поблизу абсолютного нуля // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. 2019. Вип.56. С. 65–75. DOI: 10.30970/vph.56.2019.65 *(Особистий внесок здобувача: розрахунок ізохорної теплоємності в низькотемпературній границі однієї з моделей модифікації фермі-газу з визначенням, що стосується хімічного потенціалу.)*

[6] **Собко Б.**, Ровенчак А. Спектр системи двох еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. 2016. Вип. 51. С. 87–97. *(Особистий внесок здобувача: розрахунок спектра еніонів за допомогою теорії збурень; знаходження виразів для поправок енергії та магнітної сприйнятливсті магнітозаряджених еніонів; чисельний розрахунок множників для поправки енергії).*

АПРОБАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Конференції

[1] Собко Б. Спектр системи двох еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика-2018», Львів, 15–17 травня 2018 р. — усна доповідь.

[2] Собко Б. Поправки до термодинаміки системи еніонів з магнітними зарядами у сталому магнітному полі // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика-2019», Львів, 14–16 травня 2019 р. — усна доповідь.

[3] Rovenchak A., Sobko B. Fermi-gas with nonadditive statistics // International Conference "XI Bolyai-Gauss-Lobachevsky (BGL-2019) Conference: Non-Euclidean, Non-Commutative Geometry and Quantum Physics". 19 May – 24 May 2019, Kiev, Ukraine. — усна доповідь співавтора.

[4] Собко Б. Вираження неабелевих еніонів через двопараметричні дробові статистики // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика-2020», Львів, 6–7 жовтня 2020 р. — усна доповідь.

[5] Собко Б., Ровенчак А. Неадитивний фермі-газ // 20-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 15–16 жовтня 2020. Інститут фізики конденсованих систем НАН України. — усна доповідь.

[6] Sobko B. Thermodynamics in the system of magnetically charged anyons // The 13th Trans-European School of High Energy Physics, Svityaz, Volyn region, Ukraine, 11–18 July 2019. — усна доповідь.

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

[1] Собко Б., Ровенчак А. Неадитивний фермі-газ // 20-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 15–16 жовтня 2020. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. С. 34.

[2] Собко Б. Вираження неабелевих еніонів через двопараметричні дробові статистики // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика-2020», Львів, 6–7 жовтня 2020 р.: Тези доповідей. С. Е4.

[3] Rovenchak A., Sobko B. Fermi-gas with nonadditive statistics // International Conference "XI Bolyai-Gauss-Lobachevsky (BGL-2019) Conference: Non-Euclidean, Non-Commutative Geometry and Quantum Physics". 19 May – 24 May 2019, Kiev, Ukraine. P. 36.

[4] Собко Б. Поправки до термодинаміки системи еніонів з магнітними зарядами у сталому магнітному полі // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика-2019», Львів, 14–16 травня 2019 р.: Тези доповідей. С. F4.

[5] Собко Б. Спектр системи двох еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика-2018», Львів, 15–17 травня 2018 р.: Тези доповідей. С. Е5.