

## АНОТАЦІЯ

**Татарин М. Б. Термодинаміка чорних дір з нелінійними матеріальними полями. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.**

*Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії в галузі знань 10 «Природничі науки» за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія». — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2023.*

Дисертацію присвячено вивченню термодинамічної поведінки трьох теоретико-польових моделей чорних дір: статичних та з обертанням, з електричним та магнітним зарядами, з різними нелінійними електромагнітними полями, у просторі-часі різних вимірностей та геометрій в рамках загальної теорії відносності.

Першою розглянутою моделлю є статична, електрично заряджена чорна діра із чотирьохма різними видами нелінійного електромагнітного поля: степеневим, Борна-Інфельда, логарифмічним та експоненційним у тривимірному просторі-часі з від'ємною космологічною сталою. Отримано рівняння гравітаційного та електромагнітного полів, їхні точні аналітичні розв'язки. Показано, що для полів Борна-Інфельда та логарифмічного відсутня розбіжність електричного поля при нульовому значенні радіальної координати. Продемонстровано схожу якісну поведінку отриманих розв'язків для полів типу Борна-Інфельда.

Степенеve електромагнітне поле при параметрі нелінійності рівному одиниці відповідає лінійній максвелівській електродинаміці. Досліджено конформний випадок степеневого поля при якому радіальна компонента електричного поля задовольняє закону обернених квадратів у тривимірному просторі-часі, тензор енергії-імпульсу стає безслідовим, а скалярна кривизна приймає постійне значення. Знайдено зв'язки між сталими інтегрування та макроскопічними параметрами чорної діри — її масою та повним електричним зарядом.

Обчислено температуру випромінювання Гокінґа та електричний потен-

ціал на горизонті подій чорної діри. Досліджено розширений фазовий термодинамічний простір, де від'ємна космологічна стала інтерпретується як термодинамічний тиск з боку середовища на чорну діру. Записано перший закон термодинаміки для термодинамічної функції маси чорної діри, показано, що вона має зміст ентальпії. Отримано термодинамічний об'єм чорної діри, який співпадає з площею круга радіусу горизонту подій чорної діри. Записано рівняння стану чорної діри та виявлено його тривіальну критичну поведінку — відсутність фазового переходу. Обчислено ізобарну теплоємність чорної діри, виділено нефізичну область її від'ємного значення, яка відповідає області від'ємної температури.

Отримані результати для метричної функції, температури, тиску та ізобарної теплоємності демонструють схожу якісну поведінку для усіх типів полів. При зростанні радіальної координати член із космологічною сталою є домінуючим, так що при фіксованих інших параметрах чорної діри усі ці залежності якісно є близькими між собою. Поведінка кривих для степеневого поля визначається параметром нелінійності, для якого є фізичне обмеження, коли електричне поле стає розбіжним на безмежності. Існування горизонту подій визначається масою чорної діри.

Новизною цієї моделі є вивчення розширеного фазового термодинамічного простору тривимірної статичної чорної діри з різними нелінійними електромагнітними полями та порівняння їх між собою.

Другою дослідженою моделлю є електрично заряджена чорна діра з повільним обертанням та степеневим електромагнітним полем у тривимірному просторі-часі з від'ємною космологічною сталою. Отримано рівняння поля та їх розв'язки. Ці розв'язки описуються двома метричними функціями: діагональною та недіагональною, а також двома компонентами тензора електромагнітного поля: радіальним електричним та магнітним полями. Границя повільного обертання визначається малим параметром, що є пов'язаним із кутовим моментом чорної діри.

Для магнітного поля та недіагональної метричної функції знайдено точні квадратурні, а також аналітичні асимптотичні розв'язки, ці результати є оригінальними. Розв'язки для електричного та магнітного полів отримано в

загальному випадку без накладання на них додаткових зв'язків. Обговорено зв'язки між сталими інтегрування та параметрами чорної діри — її масою, електричним зарядом, кутовим моментом.

Розглянуто термодинаміку отриманих розв'язків у розширеному фазовому термодинамічному просторі. Показано, що у випадку повільного обертання радіальна компонента електричного поля, діагональна метрична функція та розглянута термодинамічна поведінка чорної діри співпадають із відповідним статичним випадком першої моделі для степеневого поля, тоді як саме повільне обертання зумовлює появу недіагональної метричної функції та магнітного поля того ж порядку малості, що і повільне обертання.

Ключові особливості тривимірних чорних дір зі степеневим полем та повільним обертанням є схожими до відповідних чорних дір у вищих просторово-часових вимірностях, це ще раз доводить, що тривимірні чорні діри зберігають основні властивості своїх високовимірних аналогів.

Третьою вивченою моделлю є статична чорна діра з електричним та магнітним зарядами в електродинаміці Борна-Інфельда чотиривимірного простору-часу зі сферичною, плоскою та гіперболічною геометричними структурами горизонту подій чорної діри з від'ємною космологічною сталою. Електромагнітний лагранжіан Борна-Інфельда обрано в його оригінальній формі з двома польовими інваріантами. Отримано польові рівняння та їх точні аналітичні розв'язки. Досліджувана чорна діра описується однією діагональною метричною функцією, радіальним електричним та кутовим магнітним полями.

Підстановку для вектора потенціалу електромагнітного поля обрано в такій формі, що забезпечує однакові значення інваріантів поля Борна-Інфельда, а також електричні компоненти електромагнітного поля для усіх розглянутих геометрій горизонту подій. При прямуванні радіальної координати до нуля електричне поле зростає повільніше для більших значень магнітного заряду і приймає скінченне значення.

Досліджено термодинамічні властивості отриманих розв'язків у розширеному фазовому термодинамічному просторі. Записано перший закон термодинаміки та співвідношення Смарра для скінчених термодинамічних величин

із додатковими членами поляризації вакууму Борна-Інфельда, що є характерними особливостями електродинаміки Борна-Інфельда. Отримано рівняння стану та вивчено його критичну поведінку. Фазовий перехід має місце тільки для сферичного горизонту подій чорної діри, отримано умови на електричний та магнітний заряди, а також параметр нелінійності при яких цей перехід можливий. Отримано термодинамічне критичне відношення та проаналізовано його оригінальні особливості. Обчислено ізобарну теплоємність чорної діри.

Той факт, що маса чорної діри виступає в ролі функції ентальпії у розширеному фазовому термодинамічному просторі дозволяє розглянути класичний ефект Джоуля-Томсона, під час якого маса чорної діри не змінюється. Отримано умову існування ефекту Джоуля-Томсона, побудовано відповідні інверсійні та ізоентальпійні криві, показано області нагрівання та охолодження чорної діри. При зростанні параметра нелінійності Борна-Інфельда інверсійні криві асимптотично прямують до випадку чорної діри Райснера-Нордстрьома.

Електричний та магнітний заряди входять до метричної функції та розглянутих термодинамічних величин у симетричній формі, тому присутність магнітного заряду не привносить для них нових особливостей, на відміну від електричного та магнітного полів, а також їх потенціалів, які залежать від наявності магнітного заряду. Для усіх отриманих результатів розглянуто їх граничні випадки для максвелівського лагранжіану при відсутності магнітного заряду для сферичного горизонту подій, які співпадають із відповідними результатами для чорної діри Райснера-Нордстрьома з від'ємною космологічною сталою.

Унікальністю цієї моделі є розгляд магнітного заряду в оригінальній електродинаміці Борна-Інфельда, термодинамічного критичного відношення, а також ефекту Джоуля-Томсона.

Практичним значенням результатів проведених досліджень є поповнення теоретичних напрацювань фізики чорних дір в контексті нелінійних матеріальних полів розглянутими новими питаннями та проблемами в термодинамічних аспектах, порівняння та співставлення їх між собою, незалежне підтвердження окремих результатів, існуючих у літературі. Все це є базою для

подальших подібних та суміжних досліджень і хоча б на папері наближає нас до таких недосяжних, екзотичних і водночас важливих об'єктів, як чорні діри.

**Ключові слова:** загальна теорія відносності, чорна діра, нелінійна електродинаміка, степеневе електромагнітне поле, електродинаміка Борна-Інфельда, поля типу Борна-Інфельда, термодинаміка чорних дір, розширений фазовий термодинамічний простір, ефект Джоуля-Томсона, топологічні чорні діри.

# ABSTRACT

**Tataryn M. B. Black hole thermodynamics with non-linear material fields. — Qualification scientific work on the rights of the manuscript.**

*Thesis for the scientific degree of the Philosophy Doctor in a speciality 104 «Physics and Astronomy» (10 «Natural Sciences»). — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2023.*

The work is devoted to the study of thermodynamic properties of three field-theoretical models of black holes: static and rotating, electrically and magnetically charged, with different non-linear electromagnetic fields, in various spacetime dimensions and topologies within General Relativity.

The first considered model is a static, electrically charged black hole with four various types of non-linear electromagnetic field, namely, power Maxwell invariant, Born-Infeld, logarithmic and exponential in three-dimensional spacetime with a negative cosmological constant. Equations of gravitational and electromagnetic fields, and their exact analytical solutions are obtained. It is shown that the electric field in the Born-Infeld and logarithmic electrodynamics does not diverge at the origin. The Born-Infeld type fields possess similar qualitative behavior.

The power Maxwell invariant field with the non-linearity parameter equal to unity corresponds to linear Maxwell electrodynamics. The conformal source of the power Maxwell invariant is investigated. In this case the electric field satisfies the inverse-square law in three dimensions, electromagnetic stress-energy tensor is traceless, and scalar curvature takes a constant value. Relations between integration constants and macroscopic parameters of black hole, namely, mass and full electric charge are established.

The Hawking temperature and electric potential on the black hole horizon are calculated. The extended phase space thermodynamics where a negative cosmological constant is associated as environment pressure is investigated. The first law of thermodynamics is written for the black hole mass, which is interpreted with enthalpy. The black hole thermodynamic volume coincides with the area of a circle of the black hole horizon radius. The equation of state of the black hole is written and its trivial behavior is discovered. Also, the heat capacity at constant pressure

is calculated.

The obtained relations for metric function, temperature, pressure and heat capacity for all type of fields show some similarities, namely when a radial coordinate becomes large, the term with the cosmological constant is dominating, thus for some fixed parameters of the black hole all dependences are very close to each other. The behavior of curves for the power Maxwell field is defined by the non-linearity parameter, and its values has a physical restriction when the electric field diverges at infinity. The existence of an event horizon is determined by the black hole mass.

The novelty of this model is the study of three-dimensional static black holes with various non-linear electromagnetic fields in the extended phase space thermodynamics, and the comparison of the obtained results to each other.

The second examined model is a slowly rotating, electrically charged black hole with power Maxwell invariant electromagnetic field in three-dimensional spacetime with a negative cosmological constant. Field equations and their solutions are obtained. These black hole solutions are described by two metric functions, namely diagonal and nondiagonal functions, and also two components of electromagnetic field tensor, namely the radial electric and magnetic fields. The slow rotation limit is defined by a small parameter which is related to the black hole angular momentum.

For the magnetic field and non-diagonal metric function exact quadrature as well as analytical asymptotic solutions are found, these results are original. The solutions for electric and magnetic fields are obtained in a general case without the assumption of additional connections between them. Relations between integration constants and black hole parameters — its mass, electric charge and angular momentum are discussed.

Thermodynamic properties of the obtained black hole solutions in the extended phase space thermodynamics are considered. It is shown that in a slow rotation limit the radial electric field, diagonal metric function and all considered thermodynamics are the same as for the corresponding static case of the first model with the power Maxwell invariant field, whereas the slow rotation affects the magnetic field and non-diagonal metric function.

The key features caused by the small rotation of three-dimensional black holes with the power Maxwell field are similar to those for higher-dimensional slowly rotating black holes in Einstein-power-Maxwell theory and which once again confirms the fact that three-dimensional black holes possess the main properties which have their higher-dimensional analogues.

The third studied model is a static, electrically and magnetically charged black hole in the Born-Infeld electrodynamics of four-dimensional spacetime with spherical, planar and hyperbolic black hole horizons with a negative cosmological constant. The electromagnetic Born-Infeld lagrangian is chosen in its original form with two field invariants. Field equations and its exact analytical solutions are obtained. The black hole is described by one diagonal metric function, radial electric and angular magnetic fields.

The ansatz for the electromagnetic field potential was chosen in the form which gives rise to the same form of electric field and field invariants for all types of considered horizon geometries. The electric field grows slowly near the origin for larger values of the magnetic charge for fixed the electric one and is finite.

Thermodynamic behavior of the obtained solutions in the extended phase space thermodynamics are examined. The first law of black hole thermodynamics and Smarr relation for finite thermodynamic quantities with additional terms of the Born-Infeld vacuum polarization are written. The black hole equation of state is obtained and its critical behavior is investigated. A phase transition occurs only for the spherical black hole horizon, and conditions for its existence are given. The thermodynamic critical ratio is found and its original features are analyzed. Also, the heat capacity at constant pressure is obtained.

The fact that the black hole mass is identified with enthalpy in extended phase space thermodynamics allows to consider the Joule-Thomson expansion during which the black hole mass remains unchanged. A condition for the existence of the Joule-Thomson expansion is obtained, inversion and isenthalpic curves are plotted, the cooling and heating regions are demonstrated. With increasing of the Born-Infeld non-linear parameter corresponding inversion curves asymptotically tend to the Reissner-Nordström one from below.

The electric and magnetic field enter into the metric function and the consi-



dered thermodynamic quantities equivalently, and thus the presence of a magnetic charge does not bring them very significant new features in contrast to the electromagnetic fields and their potentials, which depend on a magnetic charge. For all obtained results their limiting cases for the Maxwell lagrangian in the absence of a magnetic charge for spherical black hole horizon are considered, and they correspond to the Reissner-Nordström-anti-de Sitter black hole.

The uniqueness of this model is the consideration of topological black hole solutions, a magnetic charge in origin Born-Infeld electrodynamics, thermodynamic critical ratio, Joule-Thomson expansion.

The practical significance of obtained results is the replenishment of theoretical studies in the black hole physics in the context of non-linear material fields with new questions and problems in thermodynamic aspects, their comparison and independent confirmation of some results existing in the literature. All this is the basis for further similar and related research, and at least on paper brings us closer to such unattainable, exotic and simultaneously important objects like black holes.

**Keywords:** General Relativity, black hole, non-linear electrodynamics, power Maxwell invariant, Born-Infeld electrodynamics, Born-Infeld type fields, black hole thermodynamics, extended phase space thermodynamics, Joule-Thomson expansion, topological black holes.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

**Публікації, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:**

1. M. B. Tataryn, M. M. Stetsko. Three-dimensional static black hole with  $\Lambda$  and nonlinear electromagnetic fields and its thermodynamics. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 28, 1950160 (2019).

2. M. B. Tataryn, M. M. Stetsko. Three-dimensional slowly rotating black hole in Einstein-power-Maxwell theory. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 29, 2050111 (2020).

3. M. B. Tataryn, M. M. Stetsko. Thermodynamics of a static electric-magnetic black hole in Einstein-Born-Infeld-AdS theory with different horizon geometries. *General Relativity and Gravitation*. Vol. 53, 72 (2021).

**Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

4. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Опис статичної 3-вимірної чорної діри з нелінійними електромагнітними полями. Гравітаційне та електромагнітне поле. Термодинаміка. *Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика — 2018»*. Тези доповідей. Львів, 15-17 травня 2018 р. С. G10 (усна доповідь).

5. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Термодинамічні величини для статичної чорної діри з нелінійними електромагнітними полями у 3-вимірному випадку. *18-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статичної фізики та теорії конденсованої речовини*. Тези доповідей. Львів, 7-8 червня 2018 р. С. 43 (усна доповідь).

6. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Термодинаміка тривимірної чорної діри з нелінійним електромагнітним полем. *IX наукова конференція «Вибрані питання астрономії та астрофізики», присвячена пам'яті Богдана Бабія (1936-1993)*. Тези доповідей. Львів, 1-5 жовтня 2018 р. С. 90-91 (усна доповідь).
7. М. В. Tataryn, М. М. Stetsko.  $(2 + 1)$  static black hole with  $\Lambda$  and nonlinear electromagnetic fields and its thermodynamics. *19-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини*. Тези доповідей. Львів, 13-14 червня 2019 р. С. 27 (усна доповідь).
8. М. В. Tataryn, М. М. Stetsko. Static and slowly rotating three-dimensional black hole in nonlinear electrodynamics. *X Young Scientists Conference «Problems of Theoretical Physics» dedicated to the 110-th anniversary of the M. M. Bogolyubov (1909-1992)*. Book of abstracts. Kyiv, December 23-24, 2019. P. 41 (усна доповідь).
9. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Ефект Джоуля-Томсона для статичної чорної діри з полем Борна-Інфельда з електричним та магнітним зарядами. *Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика — 2021»*. Тези доповідей. Львів, 18-19 травня 2021 р. С. F7 (усна доповідь).
10. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Термодинаміка чорної діри з полем Борна-Інфельда та магнітним зарядом. *Наукова конференція «Астрономія у Львівському університеті» до 250-ліття Астрономічної обсерваторії та 25-ліття кафедри астрофізики*. Тези доповідей. Львів, 14-17 вересня 2021 р. С. 94 (усна доповідь).