

Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Татарин Михайло Богданович

УДК 530.122, 524.882

ДИСЕРТАЦІЯ

**ТЕРМОДИНАМІКА ЧОРНИХ ДІР
З НЕЛІНІЙНИМИ МАТЕРІАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ**

104 «Фізика та астрономія»

10 «Природничі науки»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії
у галузі природничих наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

М. Б. Татарин

Науковий керівник:

Стецко Микола Миколайович

кандидат фіз.-мат. наук, доцент

АНОТАЦІЯ

Татарин М. Б. Термодинаміка чорних дір з нелінійними матеріальними полями. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії в галузі знань 10 «Природничі науки» за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія». — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2023.

Дисертацію присвячено вивченню термодинамічної поведінки трьох теоретико-польових моделей чорних дір: статичних та з обертанням, з електричним та магнітним зарядами, з різними нелінійними електромагнітними полями, у просторі-часі різних вимірностей та геометрій в рамках загальної теорії відносності.

Першою розглянутою моделлю є статична, електрично заряджена чорна діра із чотирьох різними видами нелінійного електромагнітного поля: степеневим, Борна-Інфельда, логарифмічним та експоненційним у тривимірному просторі-часі з від'ємною космологічною сталою. Отримано рівняння гравітаційного та електромагнітного полів, їхні точні аналітичні розв'язки. Показано, що для полів Борна-Інфельда та логарифмічного відсутня розбіжність електричного поля при нульовому значенні радіальної координати. Продемонстровано схожу якісну поведінку отриманих розв'язків для полів типу Борна-Інфельда.

Степенеve електромагнітне поле при параметрі нелінійності рівному одиниці відповідає лінійній максвелівській електродинаміці. Досліджено конформний випадок степеневого поля при якому радіальна компонента електричного поля задовольняє закону обернених квадратів у тривимірному просторі-часі, тензор енергії-імпульсу стає безслідним, а скалярна кривизна приймає постійне значення. Знайдено зв'язки між сталими інтегрування та макроскопічними параметрами чорної діри — її масою та повним електричним зарядом.

Обчислено температуру випромінювання Гокінґа та електричний потен-

ціал на горизонті подій чорної діри. Досліджено розширений фазовий термодинамічний простір, де від'ємна космологічна стала інтерпретується як термодинамічний тиск з боку середовища на чорну діру. Записано перший закон термодинаміки для термодинамічної функції маси чорної діри, показано, що вона має зміст ентальпії. Отримано термодинамічний об'єм чорної діри, який співпадає з площею круга радіусу горизонту подій чорної діри. Записано рівняння стану чорної діри та виявлено його тривіальну критичну поведінку — відсутність фазового переходу. Обчислено ізобарну теплоємність чорної діри, виділено нефізичну область її від'ємного значення, яка відповідає області від'ємної температури.

Отримані результати для метричної функції, температури, тиску та ізобарної теплоємності демонструють схожу якісну поведінку для усіх типів полів. При зростанні радіальної координати член із космологічною сталою є домінуючим, так що при фіксованих інших параметрах чорної діри усі ці залежності якісно є близькими між собою. Поведінка кривих для степеневого поля визначається параметром нелінійності, для якого є фізичне обмеження, коли електричне поле стає розбіжним на безмежності. Існування горизонту подій визначається масою чорної діри.

Новизною цієї моделі є вивчення розширеного фазового термодинамічного простору тривимірної статичної чорної діри з різними нелінійними електромагнітними полями та порівняння їх між собою.

Другою дослідженою моделлю є електрично заряджена чорна діра з повільним обертанням та степеневим електромагнітним полем у тривимірному просторі-часі з від'ємною космологічною сталою. Отримано рівняння поля та їх розв'язки. Ці розв'язки описуються двома метричними функціями: діагональною та недіагональною, а також двома компонентами тензора електромагнітного поля: радіальним електричним та магнітним полями. Границя повільного обертання визначається малим параметром, що є пов'язаним із кутовим моментом чорної діри.

Для магнітного поля та недіагональної метричної функції знайдено точні квадратурні, а також аналітичні асимптотичні розв'язки, ці результати є оригінальними. Розв'язки для електричного та магнітного полів отримано в

загальному випадку без накладання на них додаткових зв'язків. Обговорено зв'язки між сталими інтегрування та параметрами чорної діри — її масою, електричним зарядом, кутовим моментом.

Розглянуто термодинаміку отриманих розв'язків у розширеному фазовому термодинамічному просторі. Показано, що у випадку повільного обертання радіальна компонента електричного поля, діагональна метрична функція та розглянута термодинамічна поведінка чорної діри співпадають із відповідним статичним випадком першої моделі для степеневого поля, тоді як саме повільне обертання зумовлює появу недіагональної метричної функції та магнітного поля того ж порядку малості, що і повільне обертання.

Ключові особливості тривимірних чорних дір зі степеневим полем та повільним обертанням є схожими до відповідних чорних дір у вищих просторово-часових вимірностях, це ще раз доводить, що тривимірні чорні діри зберігають основні властивості своїх високовимірних аналогів.

Третьою вивченою моделлю є статична чорна діра з електричним та магнітним зарядами в електродинаміці Борна-Інфельда чотиривимірного простору-часу зі сферичною, плоскою та гіперболічною геометричними структурами горизонту подій чорної діри з від'ємною космологічною сталою. Електромагнітний лагранжіан Борна-Інфельда обрано в його оригінальній формі з двома польовими інваріантами. Отримано польові рівняння та їх точні аналітичні розв'язки. Досліджувана чорна діра описується однією діагональною метричною функцією, радіальним електричним та кутовим магнітним полями.

Підстановку для вектора потенціалу електромагнітного поля обрано в такій формі, що забезпечує однакові значення інваріантів поля Борна-Інфельда, а також електричні компоненти електромагнітного поля для усіх розглянутих геометрій горизонту подій. При прямуванні радіальної координати до нуля електричне поле зростає повільніше для більших значень магнітного заряду і приймає скінченне значення.

Досліджено термодинамічні властивості отриманих розв'язків у розширеному фазовому термодинамічному просторі. Записано перший закон термодинаміки та співвідношення Смарра для скінчених термодинамічних величин

із додатковими членами поляризації вакууму Борна-Інфельда, що є характерними особливостями електродинаміки Борна-Інфельда. Отримано рівняння стану та вивчено його критичну поведінку. Фазовий перехід має місце тільки для сферичного горизонту подій чорної діри, отримано умови на електричний та магнітний заряди, а також параметр нелінійності при яких цей перехід можливий. Отримано термодинамічне критичне відношення та проаналізовано його оригінальні особливості. Обчислено ізобарну теплоємність чорної діри.

Той факт, що маса чорної діри виступає в ролі функції ентальпії у розширеному фазовому термодинамічному просторі дозволяє розглянути класичний ефект Джоуля-Томсона, під час якого маса чорної діри не змінюється. Отримано умову існування ефекту Джоуля-Томсона, побудовано відповідні інверсійні та ізоентальпійні криві, показано області нагрівання та охолодження чорної діри. При зростанні параметра нелінійності Борна-Інфельда інверсійні криві асимптотично прямують до випадку чорної діри Райснера-Нордстрьома.

Електричний та магнітний заряди входять до метричної функції та розглянутих термодинамічних величин у симетричній формі, тому присутність магнітного заряду не привносить для них нових особливостей, на відміну від електричного та магнітного полів, а також їх потенціалів, які залежать від наявності магнітного заряду. Для усіх отриманих результатів розглянуто їх граничні випадки для максвелівського лагранжіану при відсутності магнітного заряду для сферичного горизонту подій, які співпадають із відповідними результатами для чорної діри Райснера-Нордстрьома з від'ємною космологічною сталою.

Унікальністю цієї моделі є розгляд магнітного заряду в оригінальній електродинаміці Борна-Інфельда, термодинамічного критичного відношення, а також ефекту Джоуля-Томсона.

Практичним значенням результатів проведених досліджень є поповнення теоретичних напрацювань фізики чорних дір в контексті нелінійних матеріальних полів розглянутими новими питаннями та проблемами в термодинамічних аспектах, порівняння та співставлення їх між собою, незалежне підтвердження окремих результатів, існуючих у літературі. Все це є базою для

подальших подібних та суміжних досліджень і хоча б на папері наближає нас до таких недосяжних, екзотичних і водночас важливих об'єктів, як чорні діри.

Ключові слова: загальна теорія відносності, чорна діра, нелінійна електродинаміка, степеневе електромагнітне поле, електродинаміка Борна-Інфельда, поля типу Борна-Інфельда, термодинаміка чорних дір, розширений фазовий термодинамічний простір, ефект Джоуля-Томсона, топологічні чорні діри.

ABSTRACT

Tataryn M. B. Black hole thermodynamics with non-linear material fields. — Qualification scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the scientific degree of the Philosophy Doctor in a speciality 104 «Physics and Astronomy» (10 «Natural Sciences»). — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2023.

The work is devoted to the study of thermodynamic properties of three field-theoretical models of black holes: static and rotating, electrically and magnetically charged, with different non-linear electromagnetic fields, in various spacetime dimensions and topologies within General Relativity.

The first considered model is a static, electrically charged black hole with four various types of non-linear electromagnetic field, namely, power Maxwell invariant, Born-Infeld, logarithmic and exponential in three-dimensional spacetime with a negative cosmological constant. Equations of gravitational and electromagnetic fields, and their exact analytical solutions are obtained. It is shown that the electric field in the Born-Infeld and logarithmic electrodynamics does not diverge at the origin. The Born-Infeld type fields possess similar qualitative behavior.

The power Maxwell invariant field with the non-linearity parameter equal to unity corresponds to linear Maxwell electrodynamics. The conformal source of the power Maxwell invariant is investigated. In this case the electric field satisfies the inverse-square law in three dimensions, electromagnetic stress-energy tensor is traceless, and scalar curvature takes a constant value. Relations between integration constants and macroscopic parameters of black hole, namely, mass and full electric charge are established.

The Hawking temperature and electric potential on the black hole horizon are calculated. The extended phase space thermodynamics where a negative cosmological constant is associated as environment pressure is investigated. The first law of thermodynamics is written for the black hole mass, which is interpreted with enthalpy. The black hole thermodynamic volume coincides with the area of a circle of the black hole horizon radius. The equation of state of the black hole is written and its trivial behavior is discovered. Also, the heat capacity at constant pressure

is calculated.

The obtained relations for metric function, temperature, pressure and heat capacity for all type of fields show some similarities, namely when a radial coordinate becomes large, the term with the cosmological constant is dominating, thus for some fixed parameters of the black hole all dependences are very close to each other. The behavior of curves for the power Maxwell field is defined by the non-linearity parameter, and its values has a physical restriction when the electric field diverges at infinity. The existence of an event horizon is determined by the black hole mass.

The novelty of this model is the study of three-dimensional static black holes with various non-linear electromagnetic fields in the extended phase space thermodynamics, and the comparison of the obtained results to each other.

The second examined model is a slowly rotating, electrically charged black hole with power Maxwell invariant electromagnetic field in three-dimensional spacetime with a negative cosmological constant. Field equations and their solutions are obtained. These black hole solutions are described by two metric functions, namely diagonal and nondiagonal functions, and also two components of electromagnetic field tensor, namely the radial electric and magnetic fields. The slow rotation limit is defined by a small parameter which is related to the black hole angular momentum.

For the magnetic field and non-diagonal metric function exact quadrature as well as analytical asymptotic solutions are found, these results are original. The solutions for electric and magnetic fields are obtained in a general case without the assumption of additional connections between them. Relations between integration constants and black hole parameters — its mass, electric charge and angular momentum are discussed.

Thermodynamic properties of the obtained black hole solutions in the extended phase space thermodynamics are considered. It is shown that in a slow rotation limit the radial electric field, diagonal metric function and all considered thermodynamics are the same as for the corresponding static case of the first model with the power Maxwell invariant field, whereas the slow rotation affects the magnetic field and non-diagonal metric function.

The key features caused by the small rotation of three-dimensional black holes with the power Maxwell field are similar to those for higher-dimensional slowly rotating black holes in Einstein-power-Maxwell theory and which once again confirms the fact that three-dimensional black holes possess the main properties which have their higher-dimensional analogues.

The third studied model is a static, electrically and magnetically charged black hole in the Born-Infeld electrodynamics of four-dimensional spacetime with spherical, planar and hyperbolic black hole horizons with a negative cosmological constant. The electromagnetic Born-Infeld lagrangian is chosen in its original form with two field invariants. Field equations and its exact analytical solutions are obtained. The black hole is described by one diagonal metric function, radial electric and angular magnetic fields.

The ansatz for the electromagnetic field potential was chosen in the form which gives rise to the same form of electric field and field invariants for all types of considered horizon geometries. The electric field grows slowly near the origin for larger values of the magnetic charge for fixed the electric one and is finite.

Thermodynamic behavior of the obtained solutions in the extended phase space thermodynamics are examined. The first law of black hole thermodynamics and Smarr relation for finite thermodynamic quantities with additional terms of the Born-Infeld vacuum polarization are written. The black hole equation of state is obtained and its critical behavior is investigated. A phase transition occurs only for the spherical black hole horizon, and conditions for its existence are given. The thermodynamic critical ratio is found and its original features are analyzed. Also, the heat capacity at constant pressure is obtained.

The fact that the black hole mass is identified with enthalpy in extended phase space thermodynamics allows to consider the Joule-Thomson expansion during which the black hole mass remains unchanged. A condition for the existence of the Joule-Thomson expansion is obtained, inversion and isenthalpic curves are plotted, the cooling and heating regions are demonstrated. With increasing of the Born-Infeld non-linear parameter corresponding inversion curves asymptotically tend to the Reissner-Nordström one from below.

The electric and magnetic field enter into the metric function and the consi-

dered thermodynamic quantities equivalently, and thus the presence of a magnetic charge does not bring them very significant new features in contrast to the electromagnetic fields and their potentials, which depend on a magnetic charge. For all obtained results their limiting cases for the Maxwell lagrangian in the absence of a magnetic charge for spherical black hole horizon are considered, and they correspond to the Reissner-Nordström-anti-de Sitter black hole.

The uniqueness of this model is the consideration of topological black hole solutions, a magnetic charge in origin Born-Infeld electrodynamics, thermodynamic critical ratio, Joule-Thomson expansion.

The practical significance of obtained results is the replenishment of theoretical studies in the black hole physics in the context of non-linear material fields with new questions and problems in thermodynamic aspects, their comparison and independent confirmation of some results existing in the literature. All this is the basis for further similar and related research, and at least on paper brings us closer to such unattainable, exotic and simultaneously important objects like black holes.

Keywords: General Relativity, black hole, non-linear electrodynamics, power Maxwell invariant, Born-Infeld electrodynamics, Born-Infeld type fields, black hole thermodynamics, extended phase space thermodynamics, Joule-Thomson expansion, topological black holes.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. M. B. Tataryn, M. M. Stetsko. Three-dimensional static black hole with Λ and nonlinear electromagnetic fields and its thermodynamics. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 28, 1950160 (2019).

2. M. B. Tataryn, M. M. Stetsko. Three-dimensional slowly rotating black hole in Einstein-power-Maxwell theory. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 29, 2050111 (2020).

3. M. B. Tataryn, M. M. Stetsko. Thermodynamics of a static electric-magnetic black hole in Einstein-Born-Infeld-AdS theory with different horizon geometries. *General Relativity and Gravitation*. Vol. 53, 72 (2021).

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Опис статичної 3-вимірної чорної діри з нелінійними електромагнітними полями. Гравітаційне та електромагнітне поле. Термодинаміка. *Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика — 2018»*. Тези доповідей. Львів, 15-17 травня 2018 р. С. G10 (усна доповідь).

5. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Термодинамічні величини для статичної чорної діри з нелінійними електромагнітними полями у 3-вимірному випадку. *18-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статичної фізики та теорії конденсованої речовини*. Тези доповідей. Львів, 7-8 червня 2018 р. С. 43 (усна доповідь).

6. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Термодинаміка тривимірної чорної діри з нелінійним електромагнітним полем. *IX наукова конференція «Вибрані питання астрономії та астрофізики», присвячена пам'яті Богдана Бабія (1936-1993)*. Тези доповідей. Львів, 1-5 жовтня 2018 р. С. 90-91 (усна доповідь).
7. М. В. Tataryn, М. М. Stetsko. $(2 + 1)$ static black hole with Λ and nonlinear electromagnetic fields and its thermodynamics. *19-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини*. Тези доповідей. Львів, 13-14 червня 2019 р. С. 27 (усна доповідь).
8. М. В. Tataryn, М. М. Stetsko. Static and slowly rotating three-dimensional black hole in nonlinear electrodynamics. *X Young Scientists Conference «Problems of Theoretical Physics» dedicated to the 110-th anniversary of the M. M. Bogolyubov (1909-1992)*. Book of abstracts. Kyiv, December 23-24, 2019. P. 41 (усна доповідь).
9. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Ефект Джоуля-Томсона для статичної чорної діри з полем Борна-Інфельда з електричним та магнітним зарядами. *Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика — 2021»*. Тези доповідей. Львів, 18-19 травня 2021 р. С. F7 (усна доповідь).
10. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Термодинаміка чорної діри з полем Борна-Інфельда та магнітним зарядом. *Наукова конференція «Астрономія у Львівському університеті» до 250-ліття Астрономічної обсерваторії та 25-ліття кафедри астрофізики*. Тези доповідей. Львів, 14-17 вересня 2021 р. С. 94 (усна доповідь).

Зміст

Вступ	15
1. Філософсько-тематичний вступ та огляд літератури	23
1.1. Поняття чорних дір	24
1.2. Огляд літератури	27
2. Модель 1. Тривимірна статична чорна діра з нелінійними електромагнітними полями	44
2.1. Постановка задачі	44
2.2. Рівняння поля	45
2.3. Розв'язки польових рівнянь	46
2.4. Термодинамічні величини	53
2.5. Розширений фазовий термодинамічний простір	56
3. Модель 2. Тривимірна чорна діра з повільним обертанням та степеневим електромагнітним полем	63
3.1. Постановка задачі та рівняння поля	63
3.2. Діагональна метрична функція та електричне поле	64
3.3. Недіагональна метрична функція та магнітне поле	68
3.4. Термодинаміка	73
4. Модель 3. Чотиривимірна статична чорна діра з електричним та магнітним зарядами в електродинаміці Борна-Інфельда	76
4.1. Постановка задачі та польові рівняння	76
4.2. Розв'язки рівнянь поля	77
4.3. Термодинамічні величини	83
4.4. Розширений фазовий термодинамічний простір	85
4.5. Ефект Джоуля-Томсона	94
Висновки	99
Список використаних джерел	102

А. Необхідні відомості ЗТВ	114
Б. Деякі геометричні величини	118
В. Коефіцієнти асимптотичних розв'язків	123
Г. Обчислення кутового моменту	124
Г. Графічні розв'язки рівняння для v_c	126
Д. Графічні розв'язки рівняння для v_i	127
Е. Відомості про апробацію	128

Умовні скорочення

ГП	горизонт подій (чорної діри)
ЗТВ	загальна теорія відносності (айнштайнівська гравітація)
КТП	квантова теорія поля
ЧД	чорна діра
ВІ	електромагнітне поле Борна-Інфельда
ВТЗ	тривимірна чорна діра Ваñados-Teitelboim-Zanelli
ЕН	експоненційне електромагнітне поле
ЛН	логарифмічне електромагнітне поле
РМІ	степеневе електромагнітне поле (power Maxwell invariant)
RN-AdS	чорна діра Райснера-Нордстрьома в просторі анти-де Сіттера

Прийняті домовленості

- Використовується геометрична система одиниць, у якій ньютонівська гравітаційна стала, швидкість світла у вакуумі, приведена стала Планка, стала Больцмана є безрозмірними та дорівнюють одиниці, $G_N = c = \hbar = k_B = 1$.
- Сигнатура тривимірного простору-часу $(- + +)$.
- Сигнатура чотиривимірного простору-часу $(- + + +)$.
- $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ позначає часткові похідні по координатам події.
- ∇_μ позначає коваріантну похідну по координаті x^μ події.
- Для знаків компонент чотиривимірного повністю антисиметричного одиничного тензора Леві-Чивіти обрано домовленість $\varepsilon^{0123} = +1$.
- $\sinh x$ та $\cosh x$ позначають функції гіперболічного синуса та косинуса, відповідно.
- Статичність чорної діри означає, що вона не обертається.

Інші домовленості щодо означуваних величин, тензорів, спеціальних функцій і т.д. приведено у Додатку А та основному тексті безпосередньо в тому місці, де вони вперше зустрічаються.

Вступ

Обґрунтування вибору теми дослідження

Загальна теорія відносності (ЗТВ) є сучасною теорією гравітації і однією з фундаментальних фізичних теорій. Вона дає чудові результати при описі макроскопічних гравітуючих об'єктів у Всесвіті, її наслідки та передбачення перевірено багаточисельними точними спостереженнями та тонкими експериментами.

Як і будь-яка інша фізична теорія, ЗТВ має ряд обмежень у своєму застосуванні, ключовими та принциповими з яких, є гравітаційні взаємодії та структура самого простору-часу на мікроскопічних, планківських масштабах. «Природною» та перспективною можливістю просунутись у розумінні цих аспектів є розгляд фізичних систем, де однаковою мірою мають проявлятися як гравітаційні, так і квантові властивості матерії, простору, часу. Такими системами є чорні діри (ЧД), принциповою відмінною характеристикою яких, є наявність у них горизонту подій (ГП). З одного боку ЧД є канонічними релятивістськими об'єктами ЗТВ, а з іншого — їх екстремальні властивості вимагають квантовомеханічного опису, особливо при вивченні їх термодинамічної поведінки, наближені до сингулярності і т.п.

Широко та глибоко розвинуті сьогодні методи математичної фізики, потужності обчислювальних машин, набір астрономічних спостережень дають змогу будувати та вивчати моделі ЧД у різноманітних контекстах. ЧД відіграють виняткову, незамінну та ключову роль в питаннях астрофізики, космології, походження Всесвіту, стаючи таким чином чудовою теоретичною лабораторією для сучасних астрономічних та фундаментальних фізичних досліджень.

У другій половині ХХ ст. роботами Бекенштейна, Гокінґа було розроблено термодинамічний підхід до вивчення ЧД, розглянуто питання їх ентропії, температури. Не так давно було запропоновано концепцію розширеного фазового термодинамічного простору ЧД, де від'ємна космологічна стала анти-де Сіттерівського простору розглядається як термодинамічний тиск середовища

(фізичного вакууму) на ЧД, і яке може бути ефективно описаним цією космологічною сталою. Це дає змогу отримати рівняння стану ЧД, дослідити його критичну поведінку, термодинамічну стабільність. Таке розширення області застосування фізичних ідей та методів до ЧД дає змогу розглядати останні в одному контексті разом з іншими «звичними» фізичними системами, а значить виробити для всіх цих об'єктів універсальний підхід, який у свою чергу може привести до єдиного розуміння фізики цих об'єктів і всього Всесвіту загалом.

Дослідження в області струн, D-бран, супергравітації і т.д. в контексті квантової гравітації приводять до побудови теоретико-польових моделей ЧД у різних просторово-часових вимірностях та з різними геометріями ГП. Важливою особливістю згаданих теорій є виникнення у них нелінійних матеріальних полів, у першу чергу електромагнітних, на відміну від класичної теорії поля — максвелівської електродинаміки.

Про актуальність даних проблем в контексті ЧД свідчать зокрема активні теоретичні роботи та наукові публікації їх результатів. В огляді літератури до цієї дисертації приведено різну мотивацію та приклади досліджень ЧД у різних модифікаціях та узагальненнях айнштайнівської гравітації та максвелівської електродинаміки, в розширеному фазовому термодинамічному просторі, у просторі-часі різних вимірностей з різними топологіями ГП.

Зважаючи на широке та глибоке вивчення згаданих питань, на сьогодні, однак, є проблеми та окремі задачі, які не є достатньо вивченими і де можна спробувати отримати нові оригінальні результати. З метою дослідити окремі цікаві моделі ЧД в такому контексті та частково заповнити цю нішу, у цій дисертації було поставлено завдання вивчити термодинамічну поведінку кількох моделей ЧД різної вимірності, статичних та з обертанням, з різними видами нелінійного електромагнітного поля. Відповідно до цих задач, тему дисертації було сформульовано в загальному як «Термодинаміка чорних дір з нелінійними матеріальними полями».

Об'єкт дослідження: теоретико-польові моделі ЧД з різними нелінійними матеріальними полями у ЗТВ.

Предмет дослідження: розв'язки розглядуваних моделей ЧД та їх термодинамічна поведінка у розширеному фазовому термодинамічному просторі.

Мета дослідження

Із заданої постановки задачі: функціоналу дії, інтервалу та вектора електромагнітного потенціалу отримати рівняння гравітаційного та електромагнітного полів та їх розв'язки для трьох моделей ЧД із різними видами нелінійного електромагнітного поля в рамках ЗТВ для тривимірного та чотиривимірного простору-часу з від'ємною космологічною сталою; отримати термодинамічні величини ЧД та дослідити їх критичну поведінку; інтерпретувати фізичний зміст отриманих результатів, порівняти їх між собою та з існуючими в літературі.

Завдання дослідження

- Модель 1. Отримати рівняння поля та їх розв'язки для моделі статичної, електрично зарядженої ЧД зі степеневим, Борна-Інфельда, логарифмічним та експоненційним електромагнітними полями у тривимірному просторі-часі з від'ємною космологічною сталою.
- Модель 2. Отримати рівняння поля та їх розв'язки для моделі електрично зарядженої ЧД з повільним обертанням та степеневим електромагнітним полем у тривимірному просторі-часі з від'ємною космологічною сталою.
- Модель 3. Отримати рівняння поля та їх розв'язки для моделі ЧД з електричним і магнітним зарядами в електродинаміці Борна-Інфельда чотиривимірного простору-часу зі сферичною, плоскою та гіперболічною геометріями ГП з від'ємною космологічною сталою.
- Для отриманих розв'язків усіх моделей вивчити фізичний зміст отриманих констант, проаналізувати вплив на отримані розв'язки параметрів нелінійності електромагнітного поля та інших параметрів моделі.

- Дослідити термодинамічну поведінку отриманих ЧД. Обчислити температуру випромінювання Гокінга, електричний потенціал, ізобарну теплоємність. Для Моделі 3 додатково обчислити магнітний потенціал та величину поляризації вакууму Борна-Інфельда.
- Записати перший закон термодинаміки у розширеному фазовому термодинамічному просторі та дослідити у ньому критичну поведінку усіх розглянутих моделей. Для Моделі 3 додатково записати співвідношення Смарра.
- Вивчити термодинамічний ефект Джоуля-Томсона для Моделі 3.

Методи дослідження

Значна частина основного тексту дисертації носить модельно-розрахунковий характер. В роботі використовуються усталені методи дослідження теоретичної фізики. Обрано тензорний покомпонентний формалізм ЗТВ. Рівняння поля отримуються у лагранжевому формалізмі, шляхом запису функціоналу дії із наступним застосуванням до нього принципу найменшої дії. Використовуються такі розділи математики та фізики (і відповідні їм методи дослідження) як математичний аналіз, диференціальні рівняння, ріманова диференціальна геометрія разом зі своїм апаратом тензорного аналізу, теоретична механіка, максвелівська електродинаміка, термодинаміка та статистична фізика, ЗТВ.

Усі графіки побудовано за допомогою комп'ютерних програм — систем символічних обчислень. Також за їх допомоги перевірено деякі вручну отримані математичні результати.

Наукова новизна отриманих результатів

- У Моделі 1 вивчено розширений фазовий термодинамічний простір тривимірної статичної ЧД зі степеневим, Борна-Інфельда, логарифмічним та експоненційним електромагнітними полями. Вперше порівняно отримані результати для різних полів між собою, проаналізовано вплив параметрів нелінійності цих полів на отримані розв'язки.

- У Моделі 2 отримано оригінальні (нові) точні квадратурні, а також аналітичні асимптотичні розв'язки для недіагональної метричної функції та магнітного поля тривимірної ЧД зі степеневим електромагнітним полем у випадку повільного обертання. Розв'язки для електромагнітного поля знайдені у загальному випадку без накладання на них додаткових зв'язків. Розглянуто питання фізичного змісту отриманих констант моделі.
- У Моделі 3 розглянуто магнітний заряд, співвідношення Смарра з членами магнітного потенціалу $U_m Q_m$ та поляризацією вакууму Борна-Інфельда $V\beta$, термодинамічне критичне відношення, для якого виявлено цікаву особливість, ефект Джоуля-Томсона, а також топологічні розв'язки чотиривимірної статичної ЧД із загальним (оригінальним) полем Борна-Інфельда, що містить два інваріанти поля.

Особистий внесок здобувача

Постановка завдань здійснювалась науковим керівником дисертанта — М. М. Стецком. Усі наукові результати дисертації були отримані дисертантом самостійно, або при його безпосередній участі.

Апробація матеріалів дисертації

Результати, наведені у цій дисертації доповідались та обговорювались на наступних наукових конференціях (все усні доповіді):

- Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика — 2018» (Львів, 15-17 травня 2018 р.).
- 18-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 7-8 червня 2018 р.).
- IX наукова конференція «Вибрані питання астрономії та астрофізики», присвячена пам'яті Богдана Бабія (1936-1993) (Львів, 1-5 жовтня 2018 р.).
- 19-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 13-14 червня 2019 р.).

- X Young Scientists Conference «Problems of Theoretical Physics» dedicated to the 110-th anniversary of the M. M. Bogolyubov (1909-1992) (Kyiv, December 23-24, 2019).
- Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика — 2021» (Львів, 18-19 травня 2021 р.).
- Наукова конференція «Астрономія у Львівському університеті» до 250-ліття Астрономічної обсерваторії та 25-ліття кафедри астрофізики (Львів, 14-17 вересня 2021 р.).

Були апробованими на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики імені професора Івана Вакарчука Львівського національного університету імені Івана Франка:

- М. Б. Татарин. Чорні діри у Всесвіті (жовтень 2019 р.).
- М. Б. Татарин. Термодинаміка $(3+1)$ -вимірної чорної діри з електричним та магнітним зарядами в електродинаміці Борна-Інфельда (листопад 2020 р.).
- М. Б. Татарин. Термодинаміка чотиривимірної чорної діри з електричним і магнітним зарядами в теорії Айнштайна-Борна-Інфельда (лютий 2021 р.).
- М. Б. Татарин. Термодинаміка чотиривимірної статичної чорної діри з електромагнітним полем Борна-Інфельда. Ефект Джоуля-Томсона (листопад 2021 р.).
- M. B. Tataryn. Thermodynamics of a four-dimensional black hole in the Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter theory (February, 2022).

Структура та обсяг дисертації

Загалом дисертація складається із титульного аркуша, анотації, списку публікацій здобувача за темою дисертації, змісту, переліку умовних скорочень та прийнятих домовленостей, цього Вступу, Розділу 1, присвяченого філософсько-тематичному вступу в широкому фізичному контексті та огляду літератури за темою дисертації та у суміжних дослідницьких областях, Розділів 2, 3, 4, де розглядаються досліджувані Моделі 1, 2, 3, відповідно,

Висновків, Списку використаних джерел, хронологічно упорядкованих за роком їх публікації, шести Додатків та окремого додатку, присвяченого списку публікацій здобувача за темою дисертації та відомостям про апробацію результатів дисертації (у змісті цей додаток відсутній).

Загальний обсяг дисертації (без титульного аркуша) становить 130 сторінок, обсяг основного тексту (Розділи 1, 2, 3, 4 та Висновки) — 78 сторінок. Всього рисунків — 28, кількість найменувань у Списку використаних джерел — 131.

Окремі висновки щодо розглянутих моделей даються безпосередньо в основному тексті. У Висновках формулюються тільки найбільш загальні отримані результати та їх відношення до суміжних досліджень, наявних у літературі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами

Результати досліджень, описаних у цій дисертації були частково отриманими в рамках держбюджетної теми ФФ-63Нр (№. 0117U007190) Міністерства освіти і науки України.

Практичне значення отриманих результатів

Основним практичним значенням отриманих у цій дисертації результатів є поповнення літератури фізики ЧД згаданою вище новизною розглянутих питань та задач, а також порівняння, співставлення та незалежне підтвердження окремих відомих результатів у літературі. Разом все це становить базу для подальших подібних та суміжних досліджень. Окрім цього, матеріали цієї дисертації, включаючи деякі технічні розглянуті моменти, можуть бути безпосередньо корисними на практиці при вивченні, особливо молодими дослідниками, інших теоретико-польових моделей ЗТВ, нелінійної електродинаміки, термодинаміки ЧД. Окрім основного тексту, користь можуть мати Розділ 1, де приведено огляд літератури фізики ЧД із нелінійними електро-

магнітними полями та деякі модифікації айнштайнівської гравітації, а також
Додатки А, Г.

Розділ 1

Філософсько-тематичний вступ та огляд літератури

Фізика, як наука, що вивчає світ у його різноманітних природних явищах та процесах, проявах та взаємозв'язках, бере свій початок зі спостережень і ставить кінцевою метою узагальнення та систематизацію усього накопиченого теоретичного та експериментального матеріалу для опису та прогнозування, є водночас однією із діяльностей (професій) людини, зумовленою цікавістю та стремлінням до пізнання природи, у якій ми живемо. У цьому розумінні фізика є самодостатньою і безвідносною до будь-чого. Знання з фізики, набуті впродовж тисячоліть, сьогодні продовжують невпинно та стрімко поповнюватись і є надбанням усього людства. На шляху свого становлення та розвитку фізика стала своєрідним мистецтвом. Сміливі здогадки першопрохідців, жертви заради істини, радість та розчарування, нестримне бажання дізнатись більше про оточуючий нас світ, педагогічна майстерність митців в пориві зацікавити та навчити інших своєму ремеслу постійно та неспростовно нагадують нам про це.

З іншого боку, будучи фундаментальною наукою, фізика є незамінною теоретичною та практичною базою для всього створеного сьогодні людиною. Складно переоцінити весь той науково-технічний прогрес, яким веде нас фізика від початку людства і аж до сьогодні, і зовсім неможливо уявити собі, до яких ідейних та технічних здобутків приведе нас фізика у найближчому (і не дуже) майбутньому, яке особливо сьогодні є таким жаданим та зболеваним. Астрономія, хімія, біологія, геологія, математика — це малий перелік наук, становлення і розвиток яких, зазнали на собі виняткового впливу ідей та досягнень фізики. Виявляються нові взаємозв'язки та робляться важливі відкриття у міжгалузевих стиках цих наук. Фізика є експериментальною наукою, у ній важливо та необхідно бути чесним перед собою та природою. Єдиними критеріями справедливості фізичних теорій є їх узгодження в рамках свого застосування із набором спостережуваних даних та експериментом.

Окрім цього, фізика має велике значення для людини та вплив на неї, вона представляє нам практично безгоризонтне поле для пошуку і є невичерпним джерелом натхнення та пізнання. Можна не подорожувати й не бачити світу, але займаючись фізикою, неможливо не бачити краси та гармонії цього Всесвіту. Фізика дає людині можливість для самовираження, можливість побудувати свої життєстановчі принципи та сформулювати світогляд, можливість розвинути і застосувати свої творчі та розумові здібності, можливість отримати незрівнянний досвід та втілити у реальність свої мрії, можливість реалізувати себе у цьому житті, наповнити його радістю та змістом. Але фізика це ще не все.

1.1. Поняття чорних дір

У сучасній фундаментальній фізиці відомо чотири фундаментальних взаємодії у видимій області Всесвіту: гравітаційну, слабку, електромагнітну та сильну. Слабка та електромагнітна взаємодії були об'єднані в одну — квантову електрослабку теорію (Глешоу, Салам, Вайнберг, Нобелівська премія з фізики 1979 р.). Пізніше цю теорію було об'єднано із теорією сильних взаємодій — квантовою хромодинамікою, і отримано таким чином Стандартну модель, в завершеній формі сформульовану із відкриттям бозону Хіггса (Англер, Хіггс, Нобелівська премія з фізики 2013 р.). Стандартна модель описує слабку, електромагнітну та сильну взаємодії між усіма відомими елементарними частинками в термінах квантової теорії поля (КТП).

Гравітаційна взаємодія, будучи найслабшою з усіх чотирьох, сьогодні описується в рамках ЗТВ — геометричної теорії гравітації, і є проявом властивостей самого простору-часу. На сьогодні немає завершеної сформульованої теорії (Об'єднана теорія поля), яка б об'єднювала в собі усі чотири взаємодії. Робота над такою теорією є безсумнівно однією із найважливіших та найскладніших задач сучасної теоретичної фізики.

«Природним шляхом» побудови Об'єднаної теорії поля (або квантової гравітації) є вивчення об'єктів, де рівнозначно мають проявлятися як їх гравітаційні, так і квантові властивості. Такими об'єктами є ЧД. Вони є кано-

нічними об'єктами ЗТВ і, судячи з сучасних досліджень, екстремальні властивості їх сильних гравітаційних полів вимагають квантовопольового опису. Таким чином, вивчення ЧД є незамінним для розуміння гравітації, КТП і їх взаємозв'язків, а значить, нашого єдиного розуміння усієї фізики та світосприйняття природи загалом.

Очевидно, таке об'єднання теорій неможливо зробити, вивчаючи ЧД у «класичній» ЗТВ, яка сама по собі є не квантовою теорією. Тому сьогодні побудовано багато узагальнень айнштайнівської гравітації у різних просторово-часових вимірностях, розглядаються модифікації максвелівської електродинаміки, активно вивчається термодинаміка ЧД. Остання є особливо важливою, так як принципово вимагає застосування квантового опису до сильно гравітуючих систем. Все це має на меті перекинути місток між гравітацією та КТП, або хоча б знайти у них принципові об'єднуючі риси.

Вперше ідею, яка приводить до поняття ЧД, і яка фактично стала їх передбаченням, було висловлено незалежно у 1783 р. Джоном Мітчеллом та у 1795 р. П'єром-Сімоном Лапласом [15]. Виходячи із міркувань, що у ньютонівській механіці гравітація діє також на світло, було зроблено припущення про існування у природі об'єктів із такою великою густиною та сильним гравітаційним полем, на поверхні¹ яких друга космічна швидкість дорівнює швидкості світла у вакуумі, так що навіть світло, поширюючись біля поверхні цих об'єктів, не може їх покинути, а отже ці об'єкти є невидимими.

Основною відмінною характеристикою ЧД, що відділяє їх від інших небесних об'єктів в астрофізиці та інших моделей у теоретичній фізиці є наявність у них ГП. Відповідно до цього, сьогодні є два взаємодоповнювальні підходи до розуміння поняття ЧД у природі — «астрофізичне» та «фізико-теоретичне». В астрофізиці під ЧД розуміють релятивістський спостережуваний у Всесвіті об'єкт з ГП. Донедавна астрономічні дослідження ЧД велись тільки непрямыми методами, що ґрунтуються на гравітаційному впливі ЧД на рух та спектр електромагнітного випромінювання оточуючих її небесних об'єктів — зір, галактик, туманностей і т.п. Недавнє відкриття (детектування) випромінювання гравітаційних хвиль (Вайс, Баріш, Торн, проект LIGO, Нобелівська

¹Сьогодні під такою поверхнею розуміють ГП ЧД.

премія з фізики 2017 р.) стало єдиним на сьогодні прямим методом спостереження ЧД. Гравітаційне випромінювання є дуже слабким процесом і може бути виявленим при прискореному русі масивних гравітуючих об'єктів, наприклад, при злитті чорних дір, що і було зафіксовано в експерименті LIGO. Це відкриття стало можливим завдяки сучасним автоматизованим обчислювальним можливостям і є винятковим підтвердженням ЗТВ, де існування гравітаційних хвиль є її прямим наслідком.

Сам ГП, як і те, що знаходиться під ним, є неспостережуваним, тому неможливо в принципі стверджувати, чи є у даного спостережуваного астрофізичного об'єкта ГП, тобто чи є він ЧД. Однак, в окремих випадках такі об'єкти можуть бути прийняті за ЧД просто «за означенням», внаслідок їх схожості до того, що ми розуміємо під ЧД, або коли для цих об'єктів немає інших варіантів, окрім як бути ЧД. Сьогодні в астрономії є чимало кандидатів на роль ЧД у Всесвіті. У 2019 р. було отримано перше фото² ЧД — надмасивної ЧД M 87* з масою $6.5 \cdot 10^9$ мас Сонця в центрі галактики M 87, віддаленої на 55 мільйонів світлових років від нас. У тому ж році Нобелівську премію з фізики було присвоєно Д. Піблсу «за теоретичні відкриття у фізичній космології» та М. Майору разом із Д. Кело «за відкриття екзопланети, що обертається навколо сонцеподібної зорі». У 2020 р. лауреатами Нобелівської премії з фізики стали Р. Пенроуз «за відкриття, що утворення чорної діри є впевненим передбаченням ЗТВ» та Р. Генцель і А. Гез «за відкриття надмасивного компактного об'єкту в центрі нашої Галактики». Цього року було отримано фото цього «компактного об'єкту» — надмасивної ЧД Sagittarius A* з масою $4 \cdot 10^6$ мас Сонця на відстані 27 тисяч світлових років від Сонячної системи. Це стало другим фото ЧД, яке як і перше було отримано в рамках проекту Event Horizon Telescope і теж стало можливим завдяки сучасним обчислювальним можливостям комп'ютерів.

Така «астрономічна тенденція» Нобелівської премії з фізики останніх років є досить рідкісною і може свідчити про виняткові наукові досягнення в області гравітації та ЧД зокрема.

²Точніше, зображення акреційного диску в радіодіапазоні навколо темної круглої області, що і приймається за поверхню ГП ЧД.

В астрофізичних теоріях ЧД виникають внаслідок гравітаційного колапсу масивних зір на їх кінцевому етапі еволюції при певних умовах, під ГП матерія ЧД знаходиться у сингулярному стані. Також розглядаються надмасивні ЧД незоряного походження, розміщені у квазарах — активних ядрах галактик. Окрім цього, у космології є поняття гіпотетичних первинних ЧД, які могли виникнути на ранніх стадіях еволюції Всесвіту незадовго після Великого вибуху.

Інший підхід до розуміння ЧД дає теоретична фізика. Тут під ЧД розуміють клас розв'язків рівнянь ЗТВ, що характеризуються наявністю ГП. ЧД у теоретичній фізиці носять теоретико-модельний характер і часто мають досить віддалений характер від астрономічних спостережень, проте поєднання та порівняння результатів досліджень ЧД у теоретичній фізиці зі спостережуваними астрономічними даними дають змогу, і є єдиним способом, краще зрозуміти фізику цих об'єктів. Завдання перевірки наслідків ЗТВ «на практиці», зокрема шляхом астрономічних спостережень, є важливою частиною теорії. З іншого боку, результати цих спостережень дають змогу уточнювати саму теорію.

Також у теоретичній фізиці є поняття так званих планківських ЧД, які, як і первинні ЧД, залишаються сьогодні гіпотезою.

1.2. Огляд літератури

Розв'язок Шварцшильда є першим найпростішим нетривіальним точним розв'язком ЗТВ у вакуумі, опублікований Карлом Шварцшильдом у 1916 р. [3], майже одразу після публікацій Альбертом Айнштайном рівнянь ЗТВ у 1915-16 рр. [1, 2] після створення ним у 1905 р. спеціальної теорії відносності (СТВ). Цей розв'язок визначає сферично-симетричну конфігурацію простору-часу (гравітаційне поле) створювану нерухомою гравітуючою масою і характеризується одним параметром — цією масою M . Відмінною характерною особливістю розв'язку Шварцшильда є існування ГП — сферичної поверхні з центром у гравітуючій масі та з гравітаційним (шварцшильдів-

ським) радіусом³. Пізніше, у тому ж році ЧД Шварцшильда було узагальнено і отримано розв'язок електрично зарядженої ЧД Райснера-Нордстрьома [4] з кулонівським електростатичним полем. Цей розв'язок містить два параметри — M та повний електричний заряд Q_e .

У 1963 р. отримано розв'язок Керра [6] — узагальнення ЧД Шварцшильда на випадок обертання, цей розв'язок визначається двома параметрами — M та кутовим моментом (моментом імпульсу) J . У 1965 р. побудовано найбільш загальний розв'язок Керра-Ньюмена [7] — ЧД з електричним зарядом та обертанням, яка об'єднує у собі попередні три розв'язки і характеризується набором параметрів M, Q_e, J .

Ці чотири розв'язки є «класичними» моделями ЧД в айнштайнівській градації без космологічної сталої та максвелівській електродинаміці 4-вимірного простору-часу. Згідно до теореми «про відсутність у ЧД волосся» (no-hair theorem) [12], стосережуваними макроскопічними параметрами ЧД є тільки M, Q_e, J . У Всесвіті не може існувати абсолютно нерухомих ЧД, тоді як їх повний електричний заряд часто можна вважати нульовим (скомпенсованим). Таким чином, найбільш «реалістичним» із цих розв'язків для опису ЧД в астрофізиці є ЧД Керра.

У 1970-80 рр. у роботах Бекенштейна, Гокінга, Пейджа було розвинуто термодинамічний підхід до вивчення ЧД, що дало змогу описувати та досліджувати останні в термінах «звичайних» термодинамічних систем, використовуючи ті самі поняття та методи. У [8] було розглянуто ентропію S ЧД та отримано її зв'язок з площею A поверхні ГП (закон про ентропію та площу поверхні ГП ЧД):

$$S = \frac{A}{4}.$$

У статтях [9, 11] Гокінгом та Гіббонсом було розглянуто випромінювання (назване пізніше випромінюванням Гокінга) ЧД — квантовий процес народження пар елементарних частинок із фізичного вакууму в сильному гравітаційному полі поблизу ГП ЧД. Одна із цих частинок попадає під ГП, а інша поширюється від ЧД. Таке випромінювання є схожим до випроміню-

³ $r_g = 2G_N M/c^2$ у «звичайних» одиницях.

вання нагрітого тіла і характеризується певним спектром, а значить йому можна співставити температуру — температуру випромінювання Гокінга на ГП ЧД⁴. Сам цей процес, який ще називається випаровуванням ЧД, є надзвичайно слабким, і в той же час є одним із містків між гравітацією та квантовою теорією.

Як відомо, рівняння Айнштайна гравітаційного поля можуть бути записані з доданком $g_{\mu\nu}\Lambda$, лінійним за компонентами метричного тензора $g_{\mu\nu}$, де Λ — так звана космологічна стала, і яка розглядалась ще Айнштайном у своїх рівняннях в намаганнях отримати розв'язки стаціонарного Всесвіту в рамках ЗТВ. Наприкінці 1990-тих років було виявлено прискорене розширення видимого Всесвіту (Перлматтер, Шмідт, Рісс, Нобелівська премія з фізики 2011 р.), що знову привернуло інтерес до гравітації з космологічною сталою, як до можливого опису такого прискорення (ідея темної енергії). Сьогодні побудовано гравітаційні моделі як із додатнім (простір де Сіттера), так і від'ємним (простір анти-де Сіттера) значенням космологічної сталої. Проблему космологічної сталої можна знайти, наприклад, в оглядовій роботі Вайнберга [18].

Розгляд від'ємної космологічної сталої відіграє особливу роль для термодинаміки ЧД. У роботі [13] було проведено термодинамічний опис ЧД у канонічному та мікροканонічному ансамблях простору анти-де Сіттера. У статті [32] досліджено термодинамічні властивості ЧД Райснера-Нордстрьома з від'ємною космологічною сталою (RN-AdS) у великому канонічному ансамблі, тоді як у [36] розглянуто ЧД Керра-Ньюмена у канонічному та великому канонічному ансамблях. Мікроскопічні обґрунтування термодинаміки ЧД дозволяють виробити та використовувати у наступних задачах макроскопічний (феноменологічний) підхід.

При подальшому розгляді термодинаміки ЧД однією із корисних та перспективних ідей виявилась інтерпретація від'ємної космологічної сталої не як фіксованого параметра, а як однієї із термодинамічних змінних — зовнішнього тиску P на ЧД з боку середовища (фізичного вакууму) в якому знаходиться ЧД, і яке ефективно може бути описаним цією космологічною

⁴Далі для стислості часто говориться просто про температуру ЧД.

сталого [64]⁵:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}.$$

Термодинамічний простір із таким зв'язком називається розширеним фазовим термодинамічним простором ЧД⁶, у ньому перший закон термодинаміки містить член VdP , де спряжена до тиску величина V — термодинамічний об'єм має зміст «витісненого» ЧД об'єму даного середовища, і виявляється рівним⁷ просторовому об'єму, обмеженого поверхнею ГП, тому в такому термодинамічному розумінні його можна назвати об'ємом самої ЧД. Сама термодинамічна функція, для якої записують перший закон термодинаміки є масою ЧД. Для шварцшильдівської ЧД цей закон має вигляд:

$$dM = TdS + VdP,$$

де T , S — згадані вище температура випромінювання Гокінґа та ентропія ЧД, відповідно. Такий вигляд першого закону термодинаміки дає змогу інтерпретувати масу ЧД як її ентальпію⁸.

Розгляд розширеної термодинаміки значно розширює область вивчення термодинамічних властивостей ЧД, зокрема це дає змогу отримати її рівняння стану та дослідити його критичну поведінку (фазовий перехід). У [71] розглянуто шварцшильдівську ЧД з від'ємною космологічною сталою у розширеному фазовому термодинамічному просторі, записано рівняння стану, обчислено ізобарну теплоємність. Також отримано співвідношення Смарра — важливе співвідношення в термодинаміці ЧД, яке пов'язує між собою скінченні термодинамічні величини:

$$M = 2(TS - VP).$$

Авторами [76] детально вивчено розширену термодинаміку ЧД RN-AdS. Досліджено критичну поведінку рівняння стану, виявлено фазовий перехід,

⁵Інтерпретація (від'ємної) космологічної сталої як середовища (матерії) пов'язана з тим, що згаданий вище доданок $g_{\mu\nu}\Lambda$ у рівняннях Айнштайна можна розглядати як зліва у «геометричній» частині, так і справа — у тензорі енергії-імпульсу матерії.

⁶Замість цього терміну ми часто використовуватимемо поняття «розширена термодинаміка».

⁷У найпростіших випадках, наприклад, для статичних ЧД, також для ЧД з повільним обертанням.

⁸У класичній термодинаміці з фіксованою кількістю частинок диференціал ентальпії H рівний $dH = TdS + VdP$.

отримано його критичні параметри, які визначаються електричним зарядом ЧД. Встановлено аналогію між ЧД RN-AdS і реальним газом Ван дер Ваальса, зокрема спільне для них значення термодинамічного критичного відношення:

$$\frac{P_c v_c}{T_c} = \frac{3}{8},$$

де v — питомий об'єм (specific volume), пов'язаний із термодинамічним об'ємом V розмірними константами. Також для ЧД RN-AdS і газу Ван дер Ваальса співпадають усі їх критичні показники.

В [72] досліджено критичну термодинамічну поведінку ЧД Керра-Ньюмена. Порівняно зі шварцшильдівським випадком, тут до першого закону термодинаміки додаються члени, пов'язані з електричним зарядом та обертанням ЧД:

$$dM = TdS + U_e dQ_e + \Omega dJ + VdP,$$

де U_e — електричний потенціал, Ω — кутова швидкість обертання. Також розширену термодинаміку ЧД Керра-Ньюмена було обговорено у статті [77]. У цьому випадку співвідношення Смарра приймає вигляд:

$$M = 2(TS + \Omega J - VP) + U_e Q_e.$$

В оглядовій праці [86] розглянуто розширену термодинаміку ЧД Шварцшильда, Райснера-Нордстрьома та Керра. Також варто відзначити ґрунтовну роботу [100], присвячену термодинаміці ЧД, «занурених» у середовище від'ємної космологічної сталої, ототожненої з його тиском. Зокрема у цій роботі розглядається питання інтерпретації термодинамічного об'єму ЧД.

Термодинаміка ЧД розглядається і при наявності додатної космологічної сталої, яка входить у перший закон термодинаміки, але при цьому не асоціюється з тиском. Наприклад, у [48] досліджено ЧД Керра-Ньюмена у просторі де Сіттера, де окрім «звичайного» ГП з'являється космологічний ГП.

Активні дослідження теорії струн [14], D-бран [19], супергравітації [44] в контексті квантової гравітації приводять до побудови теоретико-польових моделей ЧД у різних просторово-часових вимірностях. У роботі Віттена [17] було розглянуто 3-вимірну модель гравітації та зроблено висновок про точно

розв'язувані у ній класичні та квантові системи. Канонічним прикладом ЧД у такій низьковимірній теорії є запропонована у 1992 р. модель 3-вимірної незарядженої ЧД з обертанням [21]. Така ЧД отримала назву VTZ в честь своїх авторів (М. Vañados, С. Teitelboim, J. Zanelli). Геометрію простору-часу анти-де Сіттера в околі VTZ досліджено в [22]. У статті [26] розглянуто проблему зарядженої VTZ у випадку довільного обертання. В [37] отримано розв'язки VTZ з електричним зарядом без обертання, а в [93] вивчено їх термодинамічну стабільність у канонічному та великому канонічному ансамблях. Було продемонстровано, що 3-вимірні ЧД зберігають ключові особливості, характерні своїм 4-вимірним аналогам, але при цьому є значно простішими для вивчення.

В контексті розширеної термодинаміки дослідження VTZ можна знайти, наприклад, у вищезгаданій роботі [71], де було окремо проаналізовано 3-вимірний випадок. Критичну поведінку 3-вимірних ЧД розглянуто в [77] окремо для випадків електрично зарядженої ЧД без обертання та незарядженої ЧД з обертанням, встановлено відсутність для них фазового переходу. Сьогодні 3-вимірні ЧД вивчаються у різних контекстах, що виходять за рамки айнштайнівської гравітації та максвелівської електродинаміки, деякі з них будуть розглянуті нижче.

Особливо активно термодинаміка ЧД вивчається у високовимірних теоріях гравітації. У статті [16] розв'язки Шварцшильда, Райснера-Нордстрьома та Керра були узагальнені до $d \geq 5$ -вимірного простору-часу. В [71] досліджено термодинамічні властивості d -вимірної шварцшильдівської ЧД. У роботі [65] розглянуто перший закон термодинаміки для d -вимірної ЧД Райснера-Нордстрьома без космологічної сталої.

У статті [73] вивчено термодинаміку ЧД з електричним зарядом та обертанням у просторі анти-де Сіттера різних вимірностей d із законом для тиску⁹:

$$P = -\frac{d-2}{16\pi}\Lambda.$$

⁹В деяких роботах використовується згаданий раніше закон $P = -\Lambda/8\pi$ незалежно від вимірності простору-часу, це не є суперечливим, так як просто означає різне означення Λ для різних d і відрізняється від приведеного тут сталим множником.

Розширену термодинаміку d -вимірних ЧД RN-AdS вивчено авторами [77, 78]. У згаданій вище оглядовій роботі [86] розглянуто співвідношення Смарра для $d \geq 4$ -вимірної ЧД з електричним зарядом та обертанням:

$$\frac{d-3}{d-2}M = TS + \Omega J + \frac{d-3}{d-2}U_e Q_e - \frac{2}{d-2}VP.$$

Далі також будуть наведені інші приклади гравітації у вищих вимірах та її значення для досліджень ЧД.

Перспективною можливістю поєднання ЗТВ з квантовою теорією є розгляд нелінійних матеріальних полів, особливо — електромагнітних. Такий підхід не має якихось принципових заперечень і є давно відомим та використовуваним у теоретичній фізиці, а в застосуванні до гравітуючих систем обумовлений зокрема самою нелінійністю гравітації. Необхідною умовою при побудові таких моделей є так званий принцип відповідності, згідно з яким, нова теорія у своєму граничному випадку має давати відомі спостережувані результати старої теорії, тобто повинна містити її як частковий випадок. Наприклад, теорії нелінійного електромагнітного поля мають переходити у максвелівську електродинаміку в границі слабких полів.

Першим прикладом такого підходу стала нелінійна електродинаміка Борна-Інфельда (ВІ), що виникла у спробі усунути розбіжність (безмежність) електричного поля точкового заряду в точці розміщення цього заряду у максвелівській електродинаміці. В оригінальній роботі [5] було запропоновано лагранжіан такої моделі із одним розмірним параметром нелінійності β і двома польовими інваріантами¹⁰ $F = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ та $G = F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}$:

$$L_{\text{ВІ}}^{\text{orig}} = 4\beta^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2\beta^2} - \frac{G^2}{16\beta^4}} \right).$$

Параметром $\beta > 0$ визначається верхня межа значення напруженості електричного поля, у граничному випадку $\beta \rightarrow +\infty$ (або, точніше, у випадку слабких полів, $|F| \ll \beta^2$) лагранжіан ВІ переходить у максвелівський $L_{\text{Maxwell}} = -F$. При відсутності магнітного поля інваріант $G \equiv 0$, що дозволяє для статистичних (і без магнітного заряду) систем розглядати спрощену

¹⁰Пояснення цих величин дано в Додатку А та основному тексті дисертації.

форму оригінального лагранжіану ВІ:

$$L_{\text{ВІ}} = 4\beta^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2\beta^2}} \right).$$

Сьогодні інтерес до моделі ВІ зумовлений низкою причин, насамперед, теорією струн [14], D-бран [19], де цей лагранжіан природно виникає у їх низькоенергетичних границях. Електродинаміка ВІ активно використовується при побудові різноманітних моделей ЧД в айнштайнівській (і не тільки) гравітації різних вимірностей та їх досліджень у різних аспектах, включаючи розгляд розширеної термодинаміки ЧД.

У статті [41] отримано розв'язок ЧД¹¹ в теорії Айнштейна-Борна-Інфельда з космологічною сталою, проаналізовано випадки її додатного та від'ємного значень, обчислено температуру Гокінга. Авторами [58] досліджено термодинаміку ЧД з полем ВІ у просторі анти-де Сіттера, отримано її термодинамічну функцію вільної енергії у підході евклідової дії [49]. У розгорнутій праці [77] детально вивчено термодинамічну поведінку розв'язків RN-AdS з полем ВІ, записано перший закон термодинаміки та співвідношення Смарра із додатковими членами $Vd\beta$ та $V\beta$, відповідно, що відповідають так званій поляризації вакууму Борна-Інфельда (Born-Infeld vacuum polarization) і є характерними для електродинаміки ВІ. Вивчено фазовий перехід системи, побудовано $P - v$ діаграми. В роботі [79] обчислено критичні показники ЧД з полем ВІ та від'ємною космологічною сталою. Також у [101] було досліджено питання співвідношення Смарра у нелінійній електродинаміці, і як один із прикладів, розглянуто згаданий вище член $V\beta$.

ЧД з полем ВІ вивчаються у різних вимірностях простору-часу. У статтях [45, 46] побудовано розв'язки статичної ЧД у d -вимірній теорії Айнштейна-Борна-Інфельда у просторі де Сіттера та анти-де Сіттера, проаналізовано їх геометричні та термодинамічні властивості, вивчено термодинамічну стабільність системи для випадків додатної та від'ємної космологічної сталої. У роботі [80] результати, отримані у вищезгаданій статті [79] було узагальнено до d -вимірного випадку.

¹¹Тут і далі, якщо додатково не вказано вимірність та обертання ЧД, то йдеться про 4-вимірну статичну ЧД. Також мається на увазі айнштайнівська теорія гравітації, якщо не сказано іншого.

Електродинаміка ВІ стала передумовою до виникнення інших теорій нелінійного електромагнітного поля і їх застосування зокрема до ЧД. Сюди відносяться логарифмічне (LN) [27] та експоненційне (EN) [81] поля, які належать до класу нелінійної електродинаміки типу ВІ, визначаючись одним розмірним параметром нелінійності β :

$$L_{\text{LN}} = -4\beta^2 \ln \left(1 + \frac{F}{4\beta^2} \right), \quad L_{\text{EN}} = 4\beta^2 \left(\exp \left[-\frac{F}{4\beta^2} \right] - 1 \right).$$

Граничний випадок $\beta \rightarrow +\infty$ приводить до електродинаміки Максвелла, як і у випадку поля ВІ. Розклади лагранжіанів $L_{\text{ВІ}}$, L_{LN} та L_{EN} в ряд Маклорена по степенях $1/\beta^2$ є схожими, де перші поправки до максвелівського лагранжіану $L_{\text{Maxwell}} = -F$ співпадають і є квадратичними по відношенню до F :

$$L_{\text{ВІ}} = -F + \frac{F^2}{8\beta^2} - \frac{F^3}{32\beta^4} + O(\beta^{-6}),$$

$$L_{\text{LN}} = -F + \frac{F^2}{8\beta^2} - \frac{F^3}{48\beta^4} + O(\beta^{-6}),$$

$$L_{\text{EN}} = -F + \frac{F^2}{8\beta^2} - \frac{F^3}{96\beta^4} + O(\beta^{-6}).$$

У статті [81] отримано розв'язки 3-вимірної статичної ЧД з полями ВІ, LN та EN у просторі анти-де Сіттера, обчислено температуру та електричний потенціал, записано перший закон термодинаміки. Було показано, що LN поле так само, як і ВІ усуває розбіжність електричного поля точкового заряду, тоді як EN поле приводить до його слабшої сингулярності порівняно з максвелівським випадком VTZ, але не усуває її повністю. Авторами [87] розглянуто термодинамічні величини ЧД з повільним обертанням в LN та EN електродинаміках. Зокрема було показано, що у випадку повільного обертання ні обертання, ні нелінійність електромагнітного поля не впливають на гіромагнітне відношення ЧД, залишаючи його рівним відповідному відношенню для ЧД Керра-Ньюмена. В роботі [98] досліджено критичну $P - V$ поведінку статичної $d \geq 4$ -вимірної ЧД з LN та EN полями у просторі анти-де Сіттера.

Іншим спеціальним типом нелінійного електромагнітного поля і доволі очевидним узагальненням максвелівської електродинаміки є так зване степене поле (power Maxwell invariant, PMI) [54] з лагранжіаном:

$$L_{\text{PMI}} = (-F)^s,$$

де раціональний показник степеня s є безрозмірним параметром нелінійності моделі. Частковий випадок $s = 1$ приводить до лінійного поля $L_{\text{Maxwell}} = -F$.

Як відомо, максвелівська електродинаміка є конформно-інваріантною теорією. У такій теорії скалярна кривизна дорівнює нулеві, тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля стає безслідовим (слід рівний нулю), а також виконується закон обернених квадратів $\propto 1/r^2$ для електричного поля нерухомого точкового заряду (закон Кулона). Зокрема це все має місце для ЧД Райснера-Нордстрьома без космологічної сталої. На противагу цьому, лінійні теорії електромагнітного поля у просторі-часі вимірностей відмінних від чотирьох не є конформно-інваріантними, як, наприклад, для BTZ, де електричне поле $\propto 1/r$. У PMI електродинаміці конформна інваріантність для d -вимірного простору-часу досягається за рухунок нелінійного параметра s при його значенні $s = d/4$. Таким чином, у 4-вимірному випадку конформно-інваріантною є лінійна електродинаміка і навпаки, лінійна електродинаміка є конформно-інваріантною тільки у 4-вимірному просторі-часі. Ще раніше, у статті [38] було розглянуто 3-вимірну статичну ЧД з кулонівським $\propto 1/r^2$ електричним полем, де електромагнітний лагранжіан було вибрано у вигляді $(-F)^{3/4}$, що узгоджується із приведеною вище умовою. Фізичні обмеження на допустимі значення параметра s визначаються конкретно досліджуваною системою, зокрема її вимірністю.

Конформна інваріантність має важливе значення для ЧД в контексті так званої AdS/CFT відповідності (anti-de Sitter/conformal field theory correspondence), запропонованої Малдасеною [33]. У ній розглядається дуальність між космологічним простором анти-де Сіттера в ЗТВ та конформною теорією поля — теорією, інваріантною відносно конформних перетворень у КТП. Розглянуті вище поля BI, LN та EN не володіють конформною інваріантністю, так як містять розмірний параметр β . Все це разом становить основну при-

чину для розгляду РМІ електродинаміки та її застосування до моделей ЧД.

В [54] отримано статичні розв'язки ЧД з конформним електромагнітним лагранжіаном $(-F)^{d/4}$ для різних вимірностей d простору-часу без космологічної сталої. Отримане електричне поле у цьому випадку не залежить від d і співпадає із відповідним розв'язком для ЧД Райснера-Нордстрьома, тобто $\epsilon \propto 1/r^2$. В роботі [61] тими ж авторами це дослідження було узагальнено на випадок довільного значення s . Отримано та проаналізовано розв'язки ЧД у різних виділених діапазонах значень параметра s , зокрема було показано, що вибір $d = 2s + 1$ приводить до $\propto 1/r$ залежності для електричного поля і як наслідок, до появи логарифмічного члена у метричній функції гравітаційного поля, подібно до того, як це має місце для 3-вимірної статичної ЧД з лінійним $s = 1$ електромагнітним полем, тобто для VTZ [37].

Термодинаміка ЧД з РМІ джерелом вивчається у різних контекстах. В [66] досліджено термодинамічну стабільність статичної d -вимірної ЧД. У статті [67] отримано $d \geq 4$ -вимірні розв'язки ЧД з повільним обертанням. Обчислено її збережувані та термодинамічні величини, встановлено, що повільне обертання не змінює термодинамічної поведінки ЧД порівняно з відповідним статичним випадком d -вимірної ЧД RN-AdS. Отримано гіромагнітне відношення, яке визначається тільки вимірністю простору-часу і відповідає d -вимірному аналогу ЧД Керра-Ньюмена з повільним обертанням [50]. У статті [82] розглянуто термодинамічні величини 3-вимірної ЧД без $P - V$ члена, у роботі [83] досліджено розширену термодинаміку $d \geq 4$ -вимірних статичних ЧД, записано перший закон термодинаміки, обчислено вільну енергію. Авторами [88] вивчено 3-вимірну статичну ЧД, обчислено її температуру, електричний потенціал, збережувані величини, записано перший закон термодинаміки, тоді як у [89] було досліджено особливий випадок $s = 1/2$ для такої ЧД.

Розглядаються також менш відомі нелінійні моделі. У статті [68] запропоновано узагальнення оригінального лагранжіану VI з двома параметрами:

$$L_{\text{BI}}^{\text{gen}} = 4\beta^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2\beta^2} - \frac{G^2}{16\beta^2\gamma^2}} \right),$$

як ефективну евристичну модель для опису сильних електромагнітних полів, отримано відповідні рівняння електромагнітного поля. У випадку рівності параметрів моделі, $\beta = \gamma$, лагранжіан $L_{\text{BI}}^{\text{gen}}$ співпадає з $L_{\text{BI}}^{\text{orig}}$. В [102] здійснено «степеневе» узагальнення цього лагранжіану до трипараметричної форми:

$$L_{\text{BI}}^{\sigma\text{-gen}} = 4\beta^2 \left[1 - \left(1 + \frac{F}{4\sigma\beta^2} - \frac{G^2}{32\sigma\beta^2\gamma^2} \right)^\sigma \right],$$

шляхом додавання ще одного, безрозмірного параметра σ , значення $\sigma = 1/2$ якого приводить до лагранжіану $L_{\text{BI}}^{\text{gen}}$. У роботі [103] було сконструювано розв'язок ЧД з лагранжіаном $L_{\text{BI}}^{\sigma\text{-gen}}$.

В роботі [94] розглянуто двопараметричний L_1 та однопараметричний L_2 електромагнітні лагранжіани:

$$L_1 = -F - \frac{\alpha F}{2\beta F + 1}, \quad L_2 = -\frac{F}{2\beta F + 1},$$

з безрозмірним α та розмірним β параметрами нелінійності. Граничні випадки $L_1|_{\alpha \rightarrow 0} \rightarrow -F$ для будь-якого β та $L_2|_{\beta \rightarrow 0} \rightarrow -F$ приводять до поля Максвелла. Для обох моделей було отримано скінченне значення електричного поля заряду в точці його перебування, визначене параметром β . Параметром α першої моделі задається додаткова нелінійність електромагнітного поля. У статті [95] автором цих моделей лагранжіан L_2 було використано для побудови розв'язку ЧД без космологічної константи, який у границі $\beta \rightarrow 0$ переходить у ЧД Райснера-Нордстрьома.

У статті [110] запропоновано модель:

$$L_3 = -\frac{F}{\cosh \sqrt[4]{-\beta F}},$$

яка у границі слабких електромагнітних полів, $\beta|F| \ll 1$, переходить у лінійну $L_{\text{Maxwell}} = -F$. Авторами [116] було представлено лагранжіан:

$$L_4 = -\frac{F}{1 - \sqrt{-\beta F}},$$

який переходить у максвелівський при $\beta = 0$. Було отримано розв'язки ЧД з таким полем без космологічної сталої, досліджено їх термодинамічну стабільність.

В роботі [104] було розглянуто узагальнену ефективну модель нелінійної електродинаміки типу Ейлера-Гайзенберга з інваріантом G :

$$L_{\text{EH}} = -F + \beta F^2 + \frac{\gamma G^2}{2},$$

і двома розмірними параметрами β, γ . У випадку слабких полів, $\beta F^2 \ll 1$, $\gamma G^2 \ll 1 \implies L_{\text{EH}} \longrightarrow L_{\text{Maxwell}}$. При $\gamma = 0$ лагранжіан L_{EH} переходить у квадратичну відносно F модель, розглянуту в [96], де нелінійності електромагнітного поля були обговорені в контексті квантової електродинаміки.

Окремою можливістю узагальнення електромагнітної теорії Максвелла є розгляд магнітних зарядів. ЧД з електричним та магнітним зарядами були отримані у низькоенергетичних границях теорії струн [20, 23], супергравітації [39]. Глибокий інтерес до електрично-магнітних ЧД мотивований також подальшим розвитком AdS/CFT відповідності, її застосуваннями до проблем фізики конденсованого стану, зокрема ефекту Холла [55], опису ефекту Нернста поблизу квантового фазового переходу надтекучих провідників [56], голографічних надпровідників [62].

Розгляд електрично-магнітних ЧД в лінійній електродинаміці можна знайти, наприклад, у [84]. Досліджено фазовий перехід, термодинамічну стабільність, отримано критичні показники. Показано, що для отримання співвідношення Смарра необхідно розглянути член $U_m Q_m$, пов'язаний із магнітним зарядом Q_m та спряженим до нього магнітним потенціалом U_m , що в свою чергу привносить нове «волосся» для ЧД.

Магнітні ЧД вивчаються у контексті нелінійних електромагнітних полів. У роботі Гіббонса 1995 р. [28] було розглянуто електрично-магнітну дуальність електромагнітного поля, і як приклад застосовано до ЧД з лагранжіаном VI. Показано, що електричний та магнітний заряди входять до функції, що визначає гравітаційне поле ЧД, у симетричній формі. Також розв'язок ЧД з магнітним зарядом в теорії VI без космологічної сталої сконструйовано в [40].

У статті [74] отримано статичні розв'язки ЧД з магнітним зарядом у 3-вимірній гравітації з РМІ полем, досліджено розширену термодинаміку. Також розглянуто випадок парної вимірності $d = 2 + 2n$, $n \in \mathbb{N}$ простору-часу.

В роботі [103] досліджено розв'язки магнітних ЧД з лагранжіаном $L_{\text{VI}}^{\sigma\text{-gen}}$ для довільного значення параметра σ , а в [117] розглянуто їх термодинаміку для часткового випадку $\sigma = 3/4$. У статті [110] вивчено ЧД з магнітним зарядом в електродинаміці L_3 , отримано їх температуру, досліджено термодинамічну стабільність.

ЧД з нелінійними електромагнітними полями розглядаються у «прикладних» задачах. У цьому аспекті потрібно відзначити дослідження спектру квазінормальних мод в околі ЧД. Частоти квазінормальних мод в теорії Борна-Інфельда-де Сіттера було розглянуто в [105], тоді як для РМІ поля у 3-вимірному конформному $s = 3/4$ [111], 4-вимірному $s = 7/6$ [112], 5-вимірному конформному $s = 5/4$ [123] випадках без космологічної сталої. Різні аспекти квазінормальних мод по відношенню до ЧД в контексті астрофізики та теорії струн можна знайти в оглядовій праці [75].

Як приклад ЧД з магнітним зарядом можна навести статтю [51], де було вивчено гравітаційне лінзування електрично-магнітною ЧД з полем VI. Досліджувану модель було застосовано до надмасивної ЧД в центрі галактики та ЧД невеликої маси у галактичному гало.

Розглянуті вище аспекти термодинаміки ЧД, різних просторово-часових вимірностей, нелінійної електродинаміки та магнітного заряду вивчаються також у найштайнівських теоріях гравітації — в її узагальненнях та модифікаціях. Особливо поширеними є скалярно-тензорні моделі, де до айнштайнівської дії гравітаційного поля¹² додаються члени, пов'язані зі скалярним полем.

В роботі [25] розглянуто ЧД з електричним, магнітним та конформним скалярним зарядами, у [42] досліджено ЧД з конформним скалярним полем у максвелівській електродинаміці в просторі де Сіттера. В [57] отримано чисельні розв'язки магнітної ЧД з полем VI у скалярно-тензорній гравітації з безмасовим скалярним полем, досліджено термодинамічну поведінку. У статті [63] розглянуто ентропію електрично-магнітної ЧД з дилатонним та аксіонним скалярними полями в електродинаміці VI без космологічної сталої. В [90] сконструйовано новий клас розв'язків ЧД з EN полем та дилатоном,

¹²Така дія детально розглядається у Додатку А.

досліджено їх термодинамічні властивості.

В роботі [29] розглянуто 3-вимірну статичну незаряджену ЧД у гравітації з безмасовим конформним скалярним полем та від'ємною космологічною сталою. У [106] вивчено термодинаміку 3-вимірної статичної ЧД зі степеневим електромагнітним та скалярним дилатонним полями, тоді як у [107] досліджено геодезичні фотонів в околі такої ЧД. У статті [113] розглянуто 3-вимірну статичну ЧД з полем ВІ та дилатоном, вивчено її термодинаміку.

У [59] отримано розв'язки $d \geq 4$ -вимірної ЧД з повільним обертанням, лінійним електромагнітним полем та дилатоном, тоді як у [118] було досліджено розширену термодинаміку такої ЧД, розглянуто рівняння стану та його критичну поведінку, обчислено термодинамічне критичне відношення та критичні показники.

У статті [85] вивчено термодинамічні властивості ЧД з електричним та магнітним зрядами в теорії гравітації Калуци-Клейна зі скалярним полем. Також моделі ЧД зі скалярним «волоссям» були розглянуті в оглядовій праці [97].

Автором статті [124] було вивчено розширену термодинаміку d -вимірної статичної ЧД з дилатоном та полем Янга-Міллса. Пізніше у роботі [127] ці дослідження були узагальнені на випадок максвелівського електромагнітного поля, тоді як у [128] було зроблено ще одне узагальнення на випадок ступеневої нелінійності поля Янга-Міллса та електромагнітного поля. Калібрувальне поле Янга-Міллса описує взаємодії у Стандартній моделі між елементарними частинками, тому розгляд поля такого типу у гравітації є ще одним містком між нею та КТП.

Ще одним узагальненням айнштайнівської гравітації є $f(R)$ теорія, де скалярна кривизна R входить до дії гравітаційного поля у вигляді деякої функції $f(R)$ як, наприклад, у моделях [52]:

$$f(R) = R - \frac{\mu^4}{R}, \quad f(R) = R - \frac{\mu^4}{R} + \epsilon R^2.$$

У статті [88] отримано 3-вимірну статичну ЧД з конформним $s = 3/4$ РМІ джерелом в $f(R)$ гравітації, її термодинамічні величини. В роботі [91] досліджено моделі гравітації типу Борна-Інфельда з $f(R)$ членом. Деталь-

ніше $f(R)$ моделі та їх застосування зокрема до космології можна знайти в оглядових роботах [69, 70], тоді як моделі гравітації типу Борна-Інфельда — в розгорнутій праці [114].

Також у нещодавній статті [129] було досліджено розширену термодинаміку ЧД з електричним і магнітним зарядами в електродинаміці ВІ та узагальненій теорії айнштайнівської гравітації — теорії Горндескі з членом Гаусса-Бонне у дії гравітаційного поля.

Розглянуті вище моделі ЧД характеризуються сферичним ГП з постійною додатною кривизною. Окрім цього, розглядаються так звані топологічні розв'язки ЧД з плоскою та гіберполічною геометріями ГП, що відповідають поверхням нульової та постійної від'ємної кривизни, відповідно. Наприклад, для ЧД RN-AdS квадрат інтервалу з такими топологіями має вигляд:

$$ds^2 = - \left(k - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{Q_e^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(k - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{Q_e^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_k^2,$$

де $d\Omega_k^2$ — метрика на двовимірній поверхні:

$$d\Omega_k^2 = \begin{cases} d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, & k = 1 \\ d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2, & k = 0 \\ d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\varphi^2, & k = -1. \end{cases}$$

Значення $k = 1, 0, -1$ дорівнюють постійній кривизні сферичної, плоскої та гіперболічної двовимірних поверхонь, відповідно, вкладених у 3-вимірний охоплюючий евклідовий простір¹³.

Геометричну структуру топологічних розв'язків було досліджено в [30]. Такі ЧД характеризуються незвичайними особливостями, наприклад, для гіперболічної $k = -1$ топології розв'язок ЧД (тобто ГП) існує навіть при нульовій енергії ЧД, коли $M = Q_e = 0$, що є можливим за рахунок від'ємної

¹³У цьому можна безпосередньо переконатись, застосувавши до метрики $d\Omega_k^2$ відому формулу диференціальної геометрії для гауссової кривизни k ортогонально параметризованої двовимірної поверхні з першою квадратичною формою $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$:

$$k = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{G_u}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right),$$

тут нижні індекси позначають часткові похідні по відповідним параметрам.

космологічної сталої, оскільки у цьому випадку радіус ГП, як видно із формули вище, рівний $r_+ = \sqrt{3/|\Lambda|}$. Зокрема розв'язки таких ЧД існують і для від'ємного значення маси $M < 0$.

В роботі [31] топологічні розв'язки отримано для ЧД з максвелівським полем у теорії гравітації з дилатоном та від'ємною космологічною сталою. У [53] досліджено топологічні ЧД з максвелівським електромагнітним та конформним скалярним полями для різних знаків космологічної сталої.

У статтях [60, 92] отримано топологічні розв'язки d -вимірної статичної ЧД в теорії Айнштайна-Борна-Інфельда-анти-де Сіттера зі сферичною, плоскою та гіперболічною структурами ГП, розглянуто збережувані та термодинамічні величини, записано перший закон термодинаміки та співвідношення Смарра, вивчено фазовий перехід та обчислено критичні показники. Авторами [99] досліджено електрично-магнітну ЧД в електродинаміці ВІ з різними топологіями ГП. У роботі [108] вивчено розширену термодинаміку топологічних розв'язків d -вимірної статичної ЧД з РМІ джерелом, тоді як у статті [119] це було зроблено у випадку скалярно-тензорної гравітації. У [120] сконструйовано розв'язок ЧД з РМІ полем та повільним обертанням у просторі анти-де Сіттера з плоскою структурою ГП, що відповідає тороїдальній ЧД. В роботі [125] вивчено d -вимірні топологічні розв'язки статичної ЧД з полем ВІ у скалярно-тензорній теорії гравітації з довільним значенням космологічної сталої.

Повертаючись до розширеної термодинаміки ЧД, відзначимо ще одне її застосування, розглянуте зовсім недавно. Рівняння стану ЧД дає змогу формально дослідити для них такий класичний термодинамічний процес, як ефект Джоуля-Томсона [35, 47]. У статті [109] такий процес досліджено для ЧД RN-AdS, побудовано інверсійні та ізоентальпійні криві, розглянуто області охолодження та нагрівання. Отримані результати порівняно з ефектом Джоуля-Томсона для газу Ван дер Ваальса [47]. В роботі [115] ефект Джоуля-Томсона отримано для d -вимірної ЧД RN-AdS. Також ефект Джоуля-Томсона досліджено для ЧД з максвелівським електромагнітним полем у тензорно-скалярній теорії гравітації [121]. Також у нещодавній статті [130] ефект Джоуля-Томсона було розглянуто для електрично зарядженої ЧД з полем ВІ.

Розділ 2

Модель 1. Тривимірна статична чорна діра з нелінійними електромагнітними полями

2.1. Постановка задачі

Розглядається модель статичної, електрично зарядженої ЧД з РМІ, ВІ, LN та EN нелінійними електромагнітними полями у 3-вимірному просторі-часі з від'ємною космологічною сталою в рамках айнштайнівської гравітації. Така ЧД описується двома макроскопічними параметрами — масою та повним електричним зарядом. Дану систему можна задати об'ємним інтегралом дії¹⁴:

$$I[g_{\mu\nu}, A_\mu] = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^3x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + L), \quad (2.1)$$

де інтегрування відбувається по елементу області Ω 3-вимірного простору-часу. Нелінійні електромагнітні поля задаються лагранжіанами L :

1. Степене поле¹⁵:

$$L_{\text{PMI}} = (-F)^s. \quad (2.2)$$

2. Поле Борна-Інфельда¹⁶:

$$L_{\text{BI}} = 4\beta^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2\beta^2}} \right). \quad (2.3)$$

3. Логарифмічне поле:

$$L_{\text{LN}} = -4\beta^2 \ln \left(1 + \frac{F}{4\beta^2} \right). \quad (2.4)$$

4. Експоненційне поле:

$$L_{\text{EN}} = 4\beta^2 \left(\exp \left[-\frac{F}{4\beta^2} \right] - 1 \right). \quad (2.5)$$

¹⁴Використовуваний формалізм ЗТВ, пояснення фізичних та геометричних величин, отримання рівнянь поля у лагранжевому формалізмі приведені у Додатку А.

¹⁵Величина F входить зі знаком «мінус», бо як показано нижче $F < 0$.

¹⁶Лагранжіан $L_{\text{BI}}^{\text{orig}}$ з двома польовими інваріантами розглянуто в Розділі 4.

Граничні випадки $s = 1$ для РМІ та $\beta \rightarrow +\infty$ для ВІ, LN, EN полів приводять до лінійної електродинаміки. Таким чином, розгляд нелінійних електромагнітних полів фактично зводиться до аналізу впливу параметрів нелінійності цих полів на отримані результати порівняно з максвелівськими.

2.2. Рівняння поля

Застосування принципу найменшої дії $\delta_{g_{\mu\nu}} I = 0$ до (2.1) з (2.2)-(2.5) дає:

$$\delta_{g_{\mu\nu}} I = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^3x \left[(R - 2\Lambda + L) \delta_{g_{\mu\nu}} \sqrt{-g} + \sqrt{-g} (\delta_{g_{\mu\nu}} R + \delta_{g_{\mu\nu}} L) \right]. \quad (2.6)$$

Використовуючи формули (A.5), (A.6), (A.7) Додатку А, а також:

$$\delta_{g_{\mu\nu}} L = \frac{\partial L}{\partial F} \delta_{g_{\mu\nu}} F, \quad (2.7)$$

отримуємо рівняння Айнштайна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

де тензор енергії-імпульсу:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L - 2 \frac{\partial L}{\partial F} F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho}. \quad (2.9)$$

Принцип найменшої дії $\delta_{A_{\mu}} I = 0$ з урахуванням (A.13), рівностей аналогічних до (A.15), (A.16), а також:

$$\delta_{A_{\mu}} L = \frac{\partial L}{\partial F} \delta_{A_{\mu}} F, \quad (2.10)$$

дає рівняння Максвелла¹⁷:

$$\partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial L}{\partial F} F^{\mu\nu} \right) = 0. \quad (2.11)$$

У рівняннях поля (2.8)-(2.9), (2.11) усі індекси пробігають три значення відповідно до 3-вимірності простору-часу¹⁸.

¹⁷Ми умовно називаємо рівняння електромагнітного поля (2.11) рівняннями Максвелла, незважаючи на те, що тут мова йде про нелінійну (немаксвелівську) електродинаміку.

¹⁸Втім, записані рівняння руху залишаються справедливими для довільної просторово-часової вимірності.

2.3. Розв'язки польових рівнянь

Для розв'язку рівнянь поля необхідно задати невідомі функції — метричні функції гравітаційного поля та функції електромагнітного потенціалу (або самого поля), які б враховували вибрані координати, симетрії моделі і т.п. Оскільки досліджувана ЧД є статичною, її гравітаційне поле володіє кутовою (азимутальною) симетрією. Відповідно до цього, оберемо часову координату $x^0 = t$ і полярні координати $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$ для просторової частини інтервалу. Тут $t \in (-\infty; +\infty)$ має зміст глобального часу, що вимірюється безмежно віддаленим від ЧД спостерігачем, а r та φ є радіальною та азимутальною координатами, відповідно, $r \in [0; +\infty)^{19}$, $\varphi \in [0; 2\pi)$. У такій системі координат квадрат інтервалу простору-часу в околі ЧД приймає діагональний вигляд і ми шукатимемо розв'язок у вигляді [88]:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2d\varphi^2, \quad (2.12)$$

де f — єдина метрична функція²⁰, що повністю описує гравітаційне поле ЧД.

Компоненти $g_{\mu\nu}$ та $g^{\mu\nu}$ метричного тензора та оберненого до нього, їх детермінанти приведені у Додатку Б.

Частковий випадок $L = 0$

При відсутності електромагнітного поля тензор енергії імпульсу $T_{\mu\nu} \equiv 0$ в (2.8) і ненульові компоненти рівнянь гравітаційного поля (2.8), застосовані до метрики (2.12) дають систему²¹:

$$\begin{cases} f' + 2\Lambda r = 0, & (tt), (rr) \\ f'' + 2\Lambda = 0, & (\varphi\varphi), \end{cases} \quad (2.13)$$

розв'язком якої, є функція:

$$f = -\Lambda r^2 - m, \quad (2.14)$$

¹⁹Астрофізичний зміст мають значення $r > r_+$, де r_+ — радіус ГП ЧД.

²⁰Тут і далі аргументи у різних функцій часто будуть опускаються.

²¹Тут і далі позначення ' («штрих») позначає часткову похідну за координатою r .

де стала інтегрування m лінійно пов'язана з масою ЧД, цей зв'язок встановлено далі. Це вакуумний розв'язок ЧД, який існує за рахунок від'ємної космологічної сталої, оскільки у цьому випадку існує значення радіусу ГП, $r = r_+ = \sqrt{m/|\Lambda|}$, при якому $f(r_+) = 0$.

Повернемося до загального випадку ненульового лагранжіану L в (2.1). Статичність і кутова симетрія ЧД означають, що її тензор електромагнітного поля містить тільки радіальну електростатичну компоненту $F_{rt}(r)$ ²². Відповідно до цього, ненульовою компонентою вектора електромагнітного потенціалу є тільки часова:

$$A_\mu = [A_t(r), 0, 0], \quad (2.15)$$

і:

$$F_{rt} = \frac{dA_t}{dr}. \quad (2.16)$$

Отже, у рівняннях поля (2.8)-(2.9), (2.11) невідомими є функції f , F_{rt} , які повністю описують дану модель ЧД.

Почнемо розв'язувати цю систему рівнянь з рівнянь Максвелла (2.11), так як до них не входить метрична функція²³. Інваріант поля для (2.15) рівний $F = -2F_{rt}^2$. Ненульовою компонентою рівнянь (2.11) є лише часова, яка дає диференціальне рівняння 1-го порядку для F_{rt} :

PMI:

$$(2^{s-1}srF_{rt}^{2s-1})' = 0. \quad (2.17)$$

VI:

$$\left(\frac{rF_{rt}}{\sqrt{1 - F_{rt}^2/\beta^2}} \right)' = 0. \quad (2.18)$$

LN:

$$\left(\frac{rF_{rt}}{1 - F_{rt}^2/(2\beta^2)} \right)' = 0. \quad (2.19)$$

²²Проте, у Розділі 4 буде розглянуто модель статичної ЧД з електричним та магнітним зарядами, що дозволить навіть нерухомій ЧД створювати навколо себе разом з електричним полем також магнітне.

²³Це зумовлено тим, що до рівнянь (2.11) входить тільки квадратний корінь із детермінанта метрики, і який відповідно до (2.12) не містить функції f , так як остання скорочується.

EN:

$$\left(r \exp \left[\frac{F_{rt}^2}{2\beta^2} \right] F_{rt} \right)' = 0. \quad (2.20)$$

Інтегрування цих рівнянь дає точні розв'язки²⁴:

PMI:

$$F_{rt} = \left(\frac{q_e}{2^{s-1}sr} \right)^{\frac{1}{2s-1}}. \quad (2.21)$$

VI:

$$F_{rt} = \frac{q}{\sqrt{r^2 + q_e^2/\beta^2}}. \quad (2.22)$$

LN:

$$F_{rt} = \frac{\beta^2}{q_e} \left(\sqrt{r^2 + 2q_e^2/\beta^2} - r \right). \quad (2.23)$$

EN:

$$F_{rt} = \beta \sqrt{W(z)}. \quad (2.24)$$

Тут q_e є сталою інтегрування, лінійно пов'язаною з повним електричним зарядом ЧД, цей зв'язок встановлено нижче. У формулі (2.24) для зручності введено позначення $z \equiv q_e^2/(\beta^2 r^2)$. Величина $W(z)$, що виникає для EN поля є спеціальною функцією Ламберта, визначеною співвідношенням:

$$W(x) \exp[W(x)] = x. \quad (2.25)$$

Проаналізуємо отримані електричні поля (2.21)-(2.24). Параметр s для PMI поля у (2.21) має розрив (змінює знак) при $s = 1/2$, а при $s < 1/2$

²⁴Потрібно зауважити, що у нашій статті [122], де було опубліковано результати цього розділу, для електричного поля у випадку PMI лагранжіану сталу q_e було визначено по-іншому, так, що:

$$F_{rt} = \left(\frac{q_e}{r} \right)^{\frac{1}{2s-1}},$$

тоді як у цій дисертації це змінено для більшої ясності, а також уніфікації з Розділом 3.

стає від'ємним, що приводить до необмеженого зростання напруженості електричного поля при віддалені від ЧД, коли $r \rightarrow +\infty$. З фізичних міркувань ми не розглядатимемо ці випадки, наклавши тим самим нижнє обмеження $s > 1/2$ на параметр РМІ поля. При $s = 1$ (лінійне поле) функція F_{rt} є обернено пропорційною до відстані r від ЧД, така поведінка електричного поля є характерною особливістю 3-вимірності простору-часу. Як було сказано в Розділі 1, у 4-вимірному просторі-часі для лінійного (максвелівського) електростатичного поля виконується закон обернених квадратів, $F_{rt} \propto 1/r^2$. У 3-вимірному випадку це досягається при значенні $s = 3/4$, тобто для нелінійного поля. Асимптотична поведінка функції F_{rt} для РМІ поля визначається значенням s , зростання цього параметра приводить до слабшого спадання F_{rt} на безмежності, і до слабшого зростання F_{rt} при $r \rightarrow 0$.

Поля ВІ та LN дають скінченне значення F_{rt} при $r \rightarrow 0$, тоді як поля РМІ та EN розбігаються в безмежність. На Рис. 2.1 показано графіки $F_{rt}(r)$ для усіх полів при однаковому значенні q_e . Рисунок демонструє однакову якісну поведінку розв'язків (2.21)-(2.24) для усіх типів нелінійності. З урахуванням обмеження $s > 1/2$ для РМІ поля, залежності (2.21)-(2.24) є монотонними спадними функціями r . Також із графіків видно, що на великих відстаннях криві для полів ВІ, LN, EN зливаються в одну лінію.

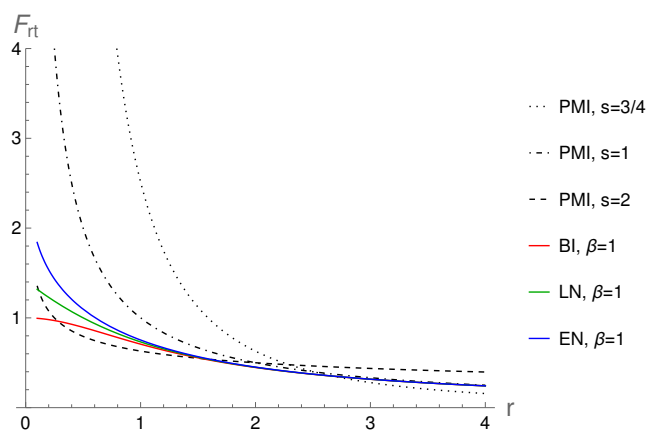


Рис. 2.1: Радіальна комопонента $F_{rt}(r)$ електричного поля при $q_e = 1$.

Перейдемо до рівнянь Айнштайна (2.8)-(2.9). Символи Крістоффеля, компоненти тензора Річчі та скалярна кривизна приведені у Додатку Б. Ненульовими компонентами рівнянь (2.8)-(2.9) є тільки діагональні, які в сукупності

для кожного із полів, з урахуванням розв'язків (2.21)-(2.24) дають диференціальне рівняння 1-го порядку для f :

PMI:

$$f' + 2\Lambda r + 2^s(2s - 1) \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} r^{-\frac{1}{2s-1}} = 0. \quad (2.26)$$

Тут варто виділити особливий випадок $s = 1$:

$$f' + 2\Lambda r + \frac{2q_e^2}{r} = 0. \quad (2.27)$$

VI:

$$f' + (2\Lambda - 4\beta^2)r + 4\beta q_e \sqrt{1 + \frac{\beta^2 r^2}{q_e^2}} = 0. \quad (2.28)$$

LN:

$$f' + (2\Lambda - 4\beta^2)r + 4\sqrt{2}\beta q_e \sqrt{1 + \frac{\beta^2 r^2}{2q_e^2}} + 4\beta^2 r \left(\ln \left(\frac{\beta^2 r^2}{q_e^2} \right) + \ln \left(\sqrt{1 + \frac{2q_e^2}{\beta^2 r^2}} - 1 \right) \right) = 0. \quad (2.29)$$

EN:

$$f' + (2\Lambda + 4\beta^2)r + 4\beta q_e \left(\sqrt{W(z)} - (\sqrt{W(z)})^{-1} \right) = 0. \quad (2.30)$$

Інтегрування цих рівнянь дає точні розв'язки:

PMI, $s = 1$:

$$f = -\Lambda r^2 - 2q_e^2 \ln r - m. \quad (2.31)$$

PMI, $s \neq 1$:

$$f = -\Lambda r^2 - \frac{2^{s-1}(2s-1)^2}{s-1} \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} r^{\frac{2(s-1)}{2s-1}} - m. \quad (2.32)$$

VI:

$$f = (2\beta^2 - \Lambda)r^2 - 2q_e^2 \operatorname{arsh} \left(\frac{\beta r}{q_e} \right) - 2\beta q_e r \sqrt{1 + \frac{\beta^2 r^2}{q_e^2}} - m. \quad (2.33)$$

LN:

$$f = (3\beta^2 - \Lambda)r^2 + (2\beta^2r^2 - 2q_e^2) \operatorname{arsh} \left(\frac{\beta r}{\sqrt{2}q_e} \right) - 3\sqrt{2}\beta q_e r \sqrt{1 + \frac{\beta^2 r^2}{2q_e^2}} - 2\beta^2 r^2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}\beta r}{q_e} \right) - m. \quad (2.34)$$

EN:

$$f = -(\Lambda + 2\beta^2)r^2 + 2q_e^2 \left(\frac{1}{W(z)} - 2 \right) \exp \left[-\frac{W(z)}{2} \right] - q_e^2 \operatorname{Ei} \left(\frac{W(z)}{2} \right) - m. \quad (2.35)$$

У метричній функції (2.31) аргумент r логарифма можна вважати знерозміреним. Наявність логарифмічної залежності для лінійного $s = 1$ поля є особливістю 3-вимірності простору-часу, пов'язаної з поведінкою електричного поля $F_{rt} \propto 1/r$ у цьому випадку. Величина $\operatorname{Ei}(x)$ є спеціальною функцією — експоненціальним інтегралом, означеним:

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt. \quad (2.36)$$

Із розв'язків (2.31)-(2.35) видно, що при великих значеннях r для усіх типів нелінійності домінуючим є член із космологічною сталою, що приводить до квадратичної асимптотичної поведінки метричної функції f . Натомість, при малих значеннях r доданок із Λ стає нехтовно малим, і поведінка f в даній області визначається членами, пов'язаними із електричним зарядом, тобто із нелінійним полем. Зокрема ці члени дають мінімум метричної функції²⁵. Через те, що f залежить від масового параметра m лінійно, його зміна приводить просто до вертикального зсуву графіка $f(r)$, що у свою чергу робить можливим існування ГП ЧД, радіус якого визначається максимальним значенням $r = r_+$, такого що $f(r_+) = 0$.

Збільшення абсолютного значення космологічної сталої приводить до більш різкого зростання метричної функції для великих значень r , і в той же час до зменшення радіусу ГП r_+ при заданих інших параметрах.

²⁵Втім, цей мінімум знаходиться під ГП.

Зростання зарядового параметра q_e для РМІ поля при $s > 1$ веде до слабшого росту функції f при збільшенні r і, відповідно, до збільшення радіусу r_+ , тоді як при $s \in (1/2; 1)$ збільшення q_e приводить до швидшого зростання функції f з відстанню, і як результат, до зменшення значення r_+ , оскільки у цьому випадку доданок, що містить q_e в (2.32) змінює знак (стає додатним) за рахунок множника $1/(s - 1)$.

Графіки функції $f(r)$ для усіх типів нелінійності при однакових фіксованих інших значеннях параметрів представлені на Рис. 2.2. Як видно, якісна поведінка всіх кривих за межами ГП є подібною, а для полів ВІ, LN, EN — практично ідентичною. Поведінка кривих РМІ поля визначається параметром s , який безпосередньо впливає на значення ГП (точка, де крива перетинає вісь абсцис), а саме — приводить до його зростання при збільшенні s . На великих відстанях від ЧД її гравітаційне поле асимптотично наближається до порожнього простору анти-де Сіттера, тобто до $-\Lambda r^2$, причому, при зростанні s (для $s > 1$) це прямування стає слабшим, оскільки збільшення s приводить до більшого внеску члена, пов'язаного із електричним зарядом в (2.32) і цей доданок є від'ємним за рахунок множника $1/(s - 1)$, тобто «сповільнює» квадратичний асимптотичний ріст функції f . Із рисунку також видно, що криві для полів ВІ, LN, EN асимптотично є близькими до лінійного $s = 1$ випадку РМІ поля при великих r . Це пов'язано з тим, що з відстанню електричне поле спадає, а оскільки $F = -2F_{rt}^2$, то $|F| \ll 1$, а це згідно з принципом відповідності означає, що лагранжіани ВІ, LN, EN прямують до лінійного (максвелівського) поля.

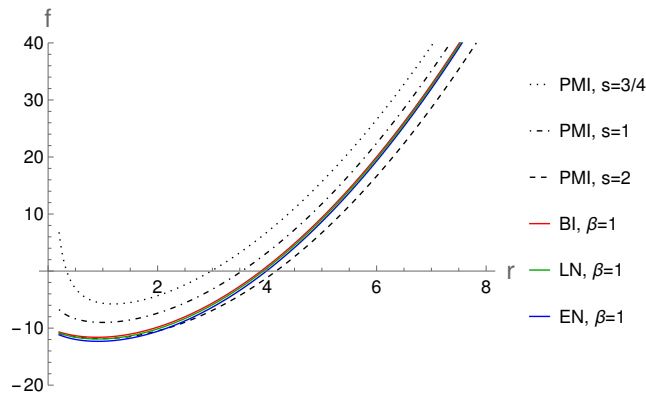


Рис. 2.2: Метрична функція $f(r)$ при $\Lambda = -1$, $q_e = 1$, $m = 10$.

Окремо слід відзначити, згаданий у Розділі 1 конформний випадок $s = d/4 = 3/4$ для РМІ поля. Для лагранжіану (2.2) з урахуванням (2.9), (2.32), слід тензора енергії-імпульсу та скалярна кривизна мають вигляд, відповідно:

$$T_{\mu}^{\mu} = \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\mu}(-F)^s + 2s(-F)^{s-1}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \left(\frac{3}{2} - 2s\right)(-F)^s, \quad (2.37)$$

$$R = -\frac{(r^2 f')'}{r^2} = 6\Lambda + 2^s(4s - 3)\left(\frac{q_e}{2^{s-1}sr}\right)^{\frac{2s}{2s-1}}. \quad (2.38)$$

При $s = 3/4$ отримуємо безслідовий тензор енергії-імпульсу, $T_{\mu}^{\mu}|_{s=3/4} = 0$, тоді як скалярна кривизна приймає постійне значення $R|_{s=3/4} = 6\Lambda$, і обертається в нуль при відсутності космологічної сталої.

2.4. Термодинамічні величини

Температура випромінювання Гокінга на ГП ЧД дається формулою [88]:

$$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{1}{2}(\nabla_{\mu}\chi_{\nu})(\nabla^{\mu}\chi^{\nu})} \Big|_{r=r_+}, \quad (2.39)$$

де χ^{μ} — вектор Кіллінга. Розпишемо частину підкореневого виразу (2.39):

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mu}\chi_{\nu})(\nabla^{\mu}\chi^{\nu}) &= (\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha}\chi^{\alpha})(g^{\mu\beta}\nabla_{\beta}\chi^{\nu}) = \\ &= (\chi^{\alpha}\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}\nabla_{\mu}\chi^{\alpha})(g^{\mu\beta}\nabla_{\beta}\chi^{\nu}). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Таким чином, для обчислення (2.39) достатньо знати дію коваріантної похідної ∇_{μ} на «контраваріантний вектор» та «коваріантний тензор» другого рангу²⁶. Для статичного випадку вектор Кіллінга χ^{μ} містить лише часову ненульову компоненту [88]:

$$\chi^{\mu} = (1, 0, 0). \quad (2.41)$$

З урахуванням цього, вираз для температури приймає вигляд:

$$T = \frac{f'}{4\pi} \Big|_{r=r_+}. \quad (2.42)$$

Використовуючи рівняння (2.26)-(2.30) для функції f , отримуємо:

²⁶Ці формули $\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}V^{\rho}$ та $\nabla_{\mu}T_{\nu\lambda} = \partial_{\mu}T_{\nu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}T_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}T_{\nu\rho}$, відповідно [10].

PMI:

$$T = -\frac{1}{4\pi} \left(2\Lambda r_+ + 2^s(2s-1) \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} r_+^{-\frac{1}{2s-1}} \right). \quad (2.43)$$

BI:

$$T = -\frac{1}{4\pi} \left((2\Lambda - 4\beta^2)r_+ + 4\beta q_e \sqrt{1 + \frac{\beta^2 r_+^2}{q_e^2}} \right). \quad (2.44)$$

LN:

$$T = -\frac{1}{4\pi} \left((2\Lambda - 4\beta^2)r_+ + 4\sqrt{2}\beta q_e \sqrt{1 + \frac{\beta^2 r_+^2}{2q_e^2}} + 4\beta^2 r_+ \left(\ln \left(\frac{\beta^2 r_+^2}{q_e^2} \right) + \ln \left(\sqrt{1 + \frac{2q_e^2}{\beta^2 r_+^2}} - 1 \right) \right) \right). \quad (2.45)$$

EN:

$$T = -\frac{1}{4\pi} \left((2\Lambda + 4\beta^2)r_+ + 4\beta q_e \left(\sqrt{W(z_+)} - (\sqrt{W(z_+)})^{-1} \right) \right). \quad (2.46)$$

В (2.46) введено позначення $z_+ \equiv z(r_+) = q_e^2/(\beta^2 r_+^2)$.

Отримані вирази для температури є монотонними зростаючими функціями радіусу r_+ для усіх типів нелінійності і демонструють подібну якісну поведінку, показану на Рис. 2.3.

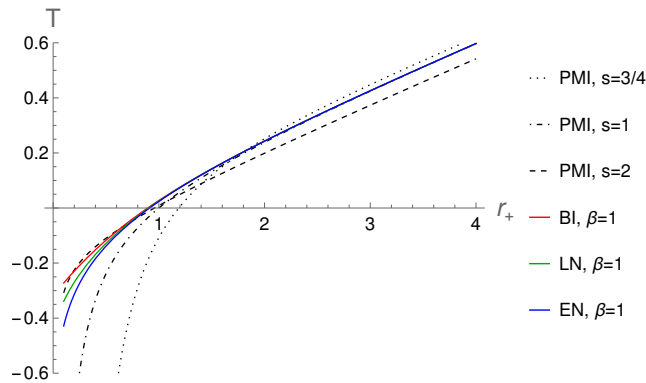


Рис. 2.3: Температура $T(r_+)$ при $\Lambda = -1$, $q_e = 1$.

Криві температури перетинають вісь абсцис, виділяючи тим самим дві області значень r_+ , де температура приймає відповідно від'ємні та додатні

значення. Першу область можна вважати нефізичною, це означатиме, що ЧД зі значеннями радіусу ГП з даної області при заданих інших параметрах не можуть існувати. Як і для функції f , криві $T(r_+)$ для полів ВІ, LN, EN зливаються в одну лінію при збільшенні аргументу, близьку до лінійного $s = 1$ випадку РМІ поля.

Електричний потенціал на ГП ЧД можна визначити формулою:

$$U_e = -A_\mu \chi^\mu \Big|_{r=r_+}. \quad (2.47)$$

Беручи до уваги зв'язок (2.16) та вираз (2.41) для вектора Кіллінга, маємо:

$$U_e = -A_t \Big|_{r=r_+} = - \int_{r=r_+} F_{rt} dr, \quad (2.48)$$

де береться значення первісної в точці $r = r_+$. Використовуючи розв'язки (2.21)-(2.24) для F_{rt} , отримуємо для електричного потенціалу:

РМІ, $s = 1$:

$$U_e = -q_e \ln r_+. \quad (2.49)$$

РМІ, $s \neq 1$:

$$U_e = -\frac{2s-1}{2(s-1)} \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{1}{2s-1}} r_+^{\frac{2(s-1)}{2s-1}}. \quad (2.50)$$

ВІ:

$$U_e = -q_e \operatorname{arsh} \left(\frac{\beta r_+}{q_e} \right). \quad (2.51)$$

LN:

$$U_e = \frac{\beta^2 r_+^2}{2q_e} - q_e \operatorname{arsh} \left(\frac{\beta r_+}{\sqrt{2}q_e} \right) - \frac{\beta r_+}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 r_+^2}{2q_e^2}}. \quad (2.52)$$

EN:

$$U_e = -q_e \exp \left[-\frac{W(z_+)}{2} \right] - \frac{q_e}{2} \operatorname{Ei} \left(\frac{W(z_+)}{2} \right). \quad (2.53)$$

Графіки залежностей $U_e(r_+)$ показані на Рис. 2.4, вони є монотонними спадними функціями r_+ .

Аналогічні розв'язки для ВТЗ з полями ВІ, LN, EN отримано у статті [81], тоді як з РМІ лагранжіаном у [88].

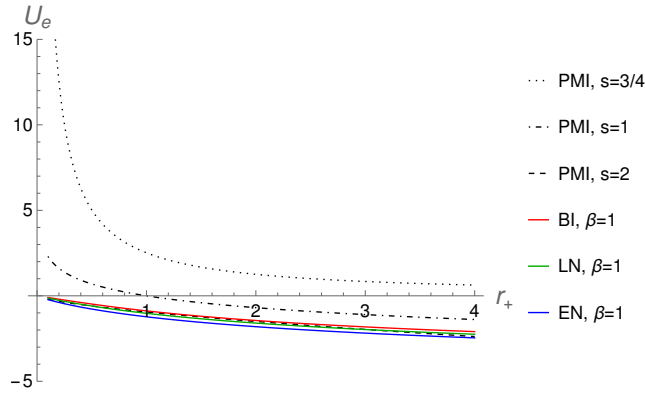


Рис. 2.4: Електричний потенціал $U_e(r_+)$ при $q_e = 1$.

2.5. Розширений фазовий термодинамічний простір

Термодинамічною функцією ЧД є її маса. Вона є лінійно пов'язаною зі значенням масового параметра $m(r_+)$ на ГП²⁷:

$$M = \lambda m(r_+), \quad (2.54)$$

де $\lambda = \text{const}$. Із закону про ентропію та площу поверхні ГП ЧД:

$$S = \frac{A}{4} \quad (2.55)$$

маємо:

$$A = \int_0^{2\pi} r_+ d\varphi = 2\pi r_+, \quad (2.56)$$

$$S = \frac{\pi r_+}{2}. \quad (2.57)$$

Таким чином, ентропія ЧД дорівнює чверті довжини кола радіуса r_+ . Далі, від космологічної сталої перейдемо до термодинамічного тиску²⁸:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (2.58)$$

²⁷Так як маса ЧД виступає в ролі термодинамічної функції, ми визначаємо її тут «термодинамічним способом», беручи за основу формулу (2.39) для температури, а також закон про ентропію та площу поверхні ГП ЧД.

²⁸Розгляд космологічної сталої як термодинамічної змінної не суперечить тому, що при варіації дії (А.4), (А.12) космологічна стала вважається константою, так як дія варіюється по відношенню до польових змінних $g_{\mu\nu}$, A_μ , а від них Λ не залежить.

Тоді перший закон термодинаміки ЧД запишеться:

$$dM = TdS + VdP + U_e dQ_e. \quad (2.59)$$

Температура T дається виразами (2.43)-(2.46). Використовуючи (2.54), (2.57), (2.59), а також $f(r_+) = 0$, маємо²⁹:

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{P, Q_e} = \lambda \frac{dr_+}{dS} \left(\frac{\partial m(r_+)}{\partial r_+} \right)_{\Lambda, q_e} = \frac{2\lambda f'}{\pi} \Big|_{r=r_+}. \quad (2.60)$$

Порівнюючи (2.60) з (2.42), отримуємо $\lambda = 1/8$, тобто $M = m(r_+)/8$ для усіх типів поля. Використовуючи розв'язки (2.31)-(2.35) для функції f , отримуємо масу ЧД в залежності від радіусу її ГП:

PMI, $s = 1$:

$$M = \frac{1}{8} (-\Lambda r_+^2 - 2q_e^2 \ln r_+). \quad (2.61)$$

PMI, $s \neq 1$:

$$M = \frac{1}{8} \left(-\Lambda r_+^2 - \frac{2^{s-1}(2s-1)^2}{s-1} \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} r_+^{\frac{2(s-1)}{2s-1}} \right). \quad (2.62)$$

VI:

$$M = \frac{1}{8} \left((2\beta^2 - \Lambda)r_+^2 - 2q_e^2 \operatorname{arsh} \left(\frac{\beta r_+}{q_e} \right) - 2\beta q_e r_+ \sqrt{1 + \frac{\beta^2 r_+^2}{q_e^2}} \right). \quad (2.63)$$

LN:

$$M = \frac{1}{8} \left((3\beta^2 - \Lambda)r_+^2 + (2\beta^2 r_+^2 - 2q_e^2) \operatorname{arsh} \left(\frac{\beta r_+}{\sqrt{2}q_e} \right) - 3\sqrt{2}\beta q_e r_+ \sqrt{1 + \frac{\beta^2 r_+^2}{2q_e^2}} - 2\beta^2 r_+^2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}\beta r_+}{q_e} \right) \right). \quad (2.64)$$

²⁹Використана рівність:

$$\frac{\partial m(r_+)}{\partial r_+} = f' \Big|_{r=r_+}$$

є справедливою для спеціального випадку формул (2.31)-(2.35), де стала m входить до функції f зі знаком «мінус», оскільки у цьому разі $m(r_+) = (f(r) + m) \Big|_{r=r_+}$. Аналогічні формули використовуються далі для похідних від $m(r_+)$ по q_e та Λ .

EN:

$$M = \frac{1}{8} \left(-(\Lambda + 2\beta^2)r_+^2 + 2q_e^2 \left(\frac{1}{W(z_+)} - 2 \right) \exp \left[-\frac{W(z_+)}{2} \right] - q_e^2 \operatorname{Ei} \left(\frac{W(z_+)}{2} \right) \right). \quad (2.65)$$

Вирази (2.61)-(2.65) можна трактувати зокрема так, що при заданому електричному зарядові ЧД її маса для даного радіусу ГП визначається космологічною сталою. Функціональні залежності $M(r_+)$ показані на Рис. 2.5. Починаючи від деякого значення r_+ (точки мінімуму), маса ЧД зростає разом зі збільшенням r_+ при фіксованих Λ , q_e . Додаючи сюди умову додатності маси, $M > 0$, отримуємо область «фізичних» значень радіусу ГП r_+ , для яких ЧД може існувати.

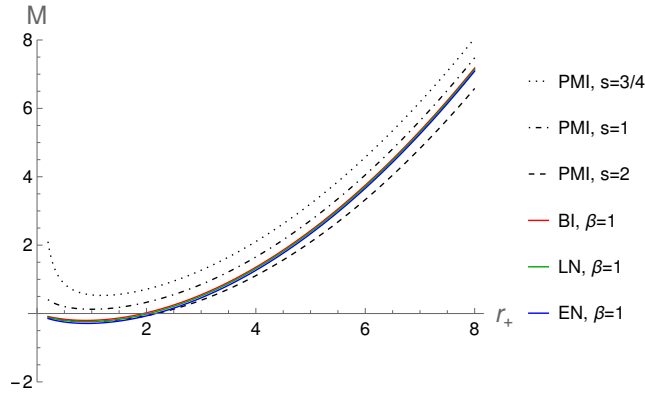


Рис. 2.5: Маса $M(r_+)$ при $\Lambda = -1$, $q_e = 1$.

Як було сказано, зарядовий параметр q_e лінійно пов'язаний з повним електричним зарядом Q_e ЧД. Нехай, $Q_e = \eta q_e$, $\eta = \text{const}$, тоді з (2.59) отримуємо:

$$U_e = \left(\frac{\partial M}{\partial Q_e} \right)_{S,P} = \frac{1}{8} \frac{dq_e}{dQ_e} \left(\frac{\partial m(r_+)}{\partial q_e} \right)_{r_+, \Lambda} = \frac{1}{8\eta} \frac{\partial f}{\partial q_e} \Big|_{r=r_+}. \quad (2.66)$$

Обчислюючи за цією формулою електричний потенціал, беручи розв'язки (2.31)-(2.35), і порівнюючи з (2.49)-(2.53), отримуємо $\eta = 1/2$, тобто $Q_e = q_e/2$ для усіх типів поля. Таким чином, від «старих» змінних r_+ , Λ , q_e ми переходимо до «нових», термодинамічних змінних S , P , Q_e , відповідно. В законі (2.59) ці величини є спряженими до T , V , U_e , відповідно. Використовуючи

(2.31)-(2.35) та закон (2.58) для тиску, отримуємо з (2.59) термодинамічний об'єм V для усіх типів поля:

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S, Q_e} = \frac{1}{8} \frac{d\Lambda}{dP} \left(\frac{\partial m(r_+)}{\partial \Lambda} \right)_{r_+, q_e} = -\pi \frac{\partial f}{\partial \Lambda} \Big|_{r=r_+} = \pi r_+^2, \quad (2.67)$$

який співпадає з площею круга радіуса r_+ .

Термодинамічна функція маси ЧД у (2.59) за своїм виглядом має зміст термодинамічної функції стану — ентальпії. Отже, до першого закону термодинаміки ЧД (2.59) входять термодинамічні величини M, T, S, V, P, U_e, Q_e , а сама функція маси M є вираженою у термодинамічних змінних S, P, Q_e . Також, враховуючи (2.57), (2.67), ентропія може бути заміненою на термодинамічний об'єм $V = 4S^2/\pi$.

Як сказано у Розділі 1, інтерпретація космологічної сталої як термодинамічного тиску середовища (вакууму), в якому знаходиться ЧД дає змогу дослідити критичну $P - V$ поведінку ЧД. У виразах (2.43)-(2.46) для температури перейдемо по приведеним вище формулам від змінних r_+, Λ, q_e до V, P, Q_e , відповідно і виразимо тиск, отримавши таким чином рівняння стану $P(V, T, Q_e)$ ЧД:

PMI:

$$P = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{\pi}{V}} + \frac{2^{s-4}(2s-1)}{\pi} \left(\frac{Q_e}{2^{s-2s}} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} \left(\frac{V}{\pi} \right)^{-\frac{s}{2s-1}}. \quad (2.68)$$

VI:

$$P = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{\pi}{V}} + \frac{\beta Q_e}{2\sqrt{\pi V}} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 V}{4\pi Q_e^2}} - \frac{\beta^2}{4\pi}. \quad (2.69)$$

LN:

$$P = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{\pi}{V}} + \frac{\beta Q_e}{\sqrt{2\pi V}} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 V}{8\pi Q_e^2}} + \frac{\beta^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\beta^2 V}{4\pi Q_e^2} \right) + \ln \left(\sqrt{1 + \frac{8\pi Q_e^2}{\beta^2 V}} - 1 \right) \right) - \frac{\beta^2}{4\pi}. \quad (2.70)$$

EN:

$$P = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{\pi}{V}} + \frac{\beta Q_e}{2} \sqrt{\frac{W(Z)}{\pi V}} - \frac{\beta Q_e}{2\sqrt{\pi V W(Z)}} + \frac{\beta^2}{4\pi}. \quad (2.71)$$

У (2.71) введено позначення $Z \equiv 4\pi Q_e^2/(\beta^2 V)$. Ізотерми $P(V, T, Q_e)$ рівнянь стану (2.68)-(2.71) при фіксованому зарядові Q_e є монотонними спадними функціями об'єму V , і $P|_{V \rightarrow 0} \rightarrow +\infty$, таку поведінку продемонстровано на Рис. 2.6.

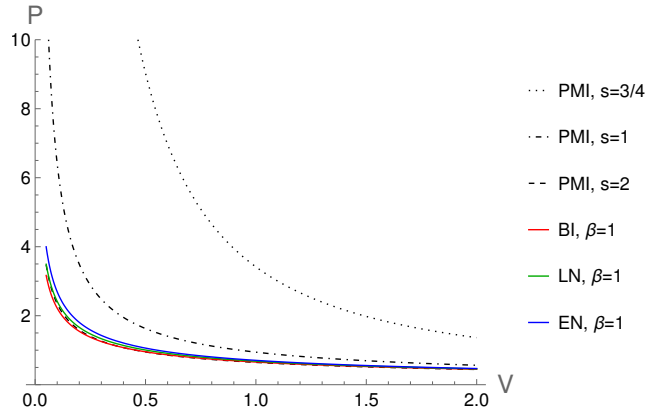


Рис. 2.6: Ізотерми рівнянь стану $P(V, T, Q_e)$ при $T = 1$, $Q_e = 1$.

Строго монотонна поведінка цих ізотерм означає відсутність для них точки перегину, тобто фазового переходу для досліджуваної термодинамічної системи ЧД. Це означає, що система рівнянь:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T, Q_e} \Big|_{V_c, T_c} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_{T, Q_e} \Big|_{V_c, T_c} = 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

не має розв'язку для критичних значень V_c , T_c в області дійсних додатних значень V , T для будь-якого типу поля, в чому можна безпосередньо переконатись, розв'язуючи систему (2.72). Таким чином, критична поведінка розглянутих 3-вимірних ЧД є тривіальною.

Розглянемо ще ізобарну теплоємність ЧД:

$$C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P, Q_e} = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_{P, Q_e}^{-1} = T \frac{dS}{dr_+} \left(\frac{\partial T}{\partial r_+} \right)_{\Lambda, q_e}^{-1}. \quad (2.73)$$

Використовуючи вирази (2.43)-(2.46) для температури та зв'язок (2.57), отримуємо:

PMI:

$$C_P = -2\pi^2 T \left(2\Lambda - 2^s \left(\frac{q_e}{2^{s-1} s r_+} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} \right)^{-1}. \quad (2.74)$$

BI:

$$C_P = -2\pi^2 T \left(2\Lambda - 4\beta^2 + \frac{4\beta^3 r_+ / q_e}{\sqrt{1 + \beta^2 r_+^2 / q_e^2}} \right)^{-1}. \quad (2.75)$$

LN:

$$\begin{aligned} C_P = & -2\pi^2 T \left(2\Lambda - 4\beta^2 + \frac{2\sqrt{2}\beta^3 r_+ / q_e}{\sqrt{1 + \beta^2 r_+^2 / (2q_e^2)}} + \right. \\ & + 4\beta^2 \left(2 - \frac{2q_e^2 / (\beta^2 r_+^2)}{\sqrt{1 + 2q_e^2 / (\beta^2 r_+^2)}} \left(\sqrt{1 + \frac{2q_e^2}{\beta^2 r_+^2}} - 1 \right)^{-1} + \right. \\ & \left. \left. + \ln \left(\frac{\beta^2 r_+^2}{q_e^2} \right) + \ln \left(\sqrt{1 + \frac{2q_e^2}{\beta^2 r_+^2}} - 1 \right) \right) \right)^{-1}. \quad (2.76) \end{aligned}$$

EN:

$$C_P = -2\pi^2 T \left(2\Lambda + 4\beta^2 - \frac{4\beta q_e}{(1 + W(z_+))r_+} \left(\sqrt{W(z_+)} + \frac{1}{\sqrt{W(z_+)}} \right) \right)^{-1}. \quad (2.77)$$

У цих виразах температура T визначається формулами (2.43)-(2.46). Тут C_P виражено в змінних Λ , q_e , r_+ , проте її можна переписати в термодинамічних величинах P , Q_e , V , використовуючи приведені вище співвідношення.

Графіки $C_P(r_+)$ показані на Рис. 2.7. Із нього видно, що для усіх типів поля існує таке значення r_+ , для якого криві теплоємності перетинають вісь абсцис. Це зумовлено нулями функції $T(r_+)$, криві температури на Рис. 2.3 теж перетинають вісь абсцис, причому, у тих же ж точках, що і криві теплоємності, це видно із (2.73). Тому на рисунку ми отримуємо дві області, де $C_P < 0$ і $C_P > 0$. В силу монотонного зростання функції $T(r_+)$ ці області співпадають із відповідними областями на Рис. 2.3 для температури, де $T < 0$

і $T > 0$. Як було зауважено вище, область значень r_+ , де $T < 0$ вважається нефізичною, тому на графіку для теплоємності ми не розглядаємо область, де $C_P < 0$, яка теж є нефізичною, оскільки, при від'ємній теплоємності термодинамічна система є нестабільною, і значить ЧД з радіусом ГП r_+ із даної області не можуть існувати. Також, оскільки менші значення r_+ мають відповідати меншій масі ЧД, умова для мінімального значення r_+ , при якому ЧД існує при заданих інших параметрах, є фактично умовою для мінімальної маси ЧД із даним радіусом ГП.

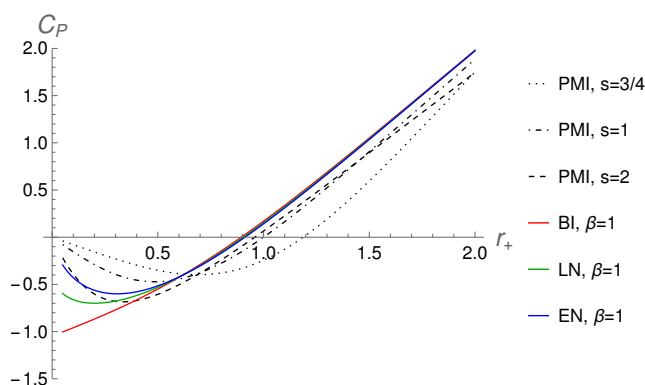


Рис. 2.7: Ізобарна теплоємність $C_P(r_+)$ при $\Lambda = -1$, $q_e = 1$.

У статті [98] було розглянуто розширену термодинаміку $d \geq 4$ -вимірної статичної ЧД з LN та EN полями. На відміну від розглянутого у цьому розділі 3-вимірному випадку, критична поведінка ЧД у вищих вимірах не є тривіальною і характеризується наявністю фазового переходу.

Розділ 3

Модель 2. Тривимірна чорна діра

з повільним обертанням

та степеневим електромагнітним полем

3.1. Постановка задачі та рівняння поля

Досліджується модель ЧД з повільним³⁰ стаціонарним обертанням та РМІ полем у 3-вимірному просторі-часі з від'ємною космологічною сталою в рамках айнштайнівської гравітації. Ця модель є узагальненням розглянутої у попередньому розділі статичної ЧД з РМІ полем на випадок її повільного обертання, тому така ЧД окрім M та Q_e , описується також J . Інтеграл дії системи співпадає із розглянутим у Розділі 2 для лагранжіану $L_{\text{РМІ}}$:

$$I[g_{\mu\nu}, A_\mu] = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^3x \sqrt{-g} [R - 2\Lambda + (-F)^s]. \quad (3.1)$$

Саме (повільне) обертання ЧД враховується при записі інтервалу та вектора потенціалу електромагнітного поля.

Рівняння Айнштайна-Максвелла співпадають з отриманими в Розділі 2 для РМІ поля:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = T_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L_{\text{РМІ}} - 2\frac{\partial L_{\text{РМІ}}}{\partial F}F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho}, \quad (3.3)$$

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{\partial L_{\text{РМІ}}}{\partial F} F^{\mu\nu} \right) = 0, \quad (3.4)$$

і дають систему Айнштайна-Максвелла:

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(-F)^s + 2s(-F)^{s-1}F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} \\ \partial_\mu (s\sqrt{-g}(-F)^{s-1}F^{\mu\nu}) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

³⁰Математичний зміст повільного обертання встановлено нижче.

3.2. Діагональна метрична функція та електричне поле

Для того, щоб врахувати обертання (не обов'язково повільне, але стаціонарне), достатньо модифікувати діагональний інтервал (2.12) статичної ЧД до недіагональної форми:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2[h(r)dt + d\varphi]^2. \quad (3.6)$$

Зокрема так було зроблено в оригінальній роботі BTZ [21]. Тут f — діагональна метрична функція, h — недіагональна метрична функція, зумовлена обертанням ЧД.

Частковий випадок $L = 0$ при довільному обертанні

При відсутності електромагнітного поля $T_{\mu\nu} \equiv 0$ в (3.2) і ненульові компоненти рівняння (3.2) разом із метрикою (3.6) дають систему:

$$\begin{cases} 4r^2 fh(rh'' + 3h') + f(2f' + r^3(h')^2 + 4\Lambda r) - \\ - r^3 h^2(2f'' - 3r^2(h')^2 + 4\Lambda) = 0, & (tt) \\ 2f(rh'' + 3h') - rh(2f'' - 3r^2(h')^2 + 4\Lambda) = 0, & (t\varphi) \\ 2f' + r^3(h')^2 + 4\Lambda r = 0, & (rr) \\ 2f'' - 3r^2(h')^2 + 4\Lambda = 0, & (\varphi\varphi), \end{cases} \quad (3.7)$$

яка у свою чергу дає:

$$\begin{cases} rh'' + 3h' = 0 \\ 2f' + r^3(h')^2 + 4\Lambda r = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

і розв'язком якої, є вакуумні функції:

$$h = -\frac{j}{2r^2} + h(+\infty), \quad f = -\Lambda r^2 + \frac{j^2}{4r^2} - m, \quad (3.9)$$

де сталі інтегрування j та m пов'язані із кутовим моментом та масою ЧД, відповідно. Розв'язки (3.9) співпадають із отриманими в оригінальній роботі BTZ [21]. Стала інтегрування $h(+\infty)$ є значенням функції h на безмежності,

і для якої можна прийняти $h(+\infty) = 0$ [26].

Частковий випадок $L = 0$ при повільному обертанні

Як видно із (3.9), обертання ЧД зумовлює появу функції h у метриці (3.6) порівняно зі статичним випадком метрики (2.12), а саме, функція h входить до компонент g_{tt} та $g_{t\varphi}$ метрики (3.6). Під повільним обертанням будемо розуміти таке обертання, при якому недіагональна функція h входить тільки до компоненти $g_{t\varphi}$, не змінюючи при цьому компоненти g_{tt} . Для зручного контролю «величини впливу» функції h на форму (3.6)³¹ введемо безрозмірний параметр малості обертання a біля функції h в (3.6):

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2[ah(r)dt + d\varphi]^2, \quad (3.10)$$

тоді повільне обертання означитиме лінеаризовану форму (3.10) по відношенню до параметра a (який вважається малим), тобто тут і далі у цьому розділі ми нехтуватимемо квадратичними і вищого порядку членами. Отже, умова повільного обертання ЧД³²:

$$o(a) = 0. \quad (3.11)$$

Сама функція h в силу свого означення не містить a . Рівняння (3.2) при $T_{\mu\nu} \equiv 0$ разом з (3.10) за умови (3.11) дають:

$$\begin{cases} f' + 2\Lambda r = 0, & (tt), (rr) \\ f(rh'' + 3h') - rh(f'' + 2\Lambda) = 0, & (t\varphi) \\ f'' + 2\Lambda = 0, & (\varphi\varphi). \end{cases} \quad (3.12)$$

Діагональні компоненти співпадають зі статичним випадком (2.13), а $t\varphi$ -компонента співпадає із першим рівнянням системи (3.8) для довільного обертання. Розв'язком системи (3.12) є:

$$h = -\frac{j}{2r^2} + h(+\infty), \quad f = -\Lambda r^2 - m. \quad (3.13)$$

³¹Тобто для контролю «інтенсивності» (швидкості) обертання ЧД.

³² $o(x)$ означає величину вищого порядку малості ніж x , тобто $\lim_{x \rightarrow 0} o(x) / \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

Отже, при повільному обертанні недиагональна функція h співпадає із випадком довільного обертання, тоді як діагональна функція f співпадає зі статичним випадком (2.14)³³. Це зокрема означає, що доданок $j^2/(4r^2)$ у (3.9) зумовлений поправками обертання порядку $o(a)$ (а саме квадратичними), що у свою чергу означає, що кутовий момент є того ж порядку малості, що і a , тобто вони є пропорційними, $J \propto a$, це буде показано нижче.

Повернемось до загального випадку ненульового електромагнітного поля в (3.1) при повільному стаціонарному обертанні. Таке обертання електрично зарядженої ЧД створює навколо себе електричне та магнітне стаціонарні поля. Отже, вектор електромагнітного потенціалу має дві ненульові компоненти — часову A_t та «азимутальну» A_φ :

$$A_\mu = [A_t(r), 0, A_\varphi(r)], \quad (3.14)$$

які відповідають електричному $F_{rt}(r)$ та магнітному $F_{r\varphi}(r)$ полям:

$$F_{rt} = \frac{dA_t}{dr}, \quad F_{r\varphi} = \frac{dA_\varphi}{dr}. \quad (3.15)$$

Оскільки магнітне поле створюється повільним обертанням ЧД, його ми вважатимемо теж малим, того ж порядку малості, що і ah , тобто в лінійному наближенні $o(a) = 0$ повільного обертання:

$$F_{r\varphi} \propto a. \quad (3.16)$$

Отже, у рівняннях поля (3.2)-(3.4) невідомими є функції f , h , F_{rt} , $F_{r\varphi}$, які повністю описують дану модель.

Компоненти метрики та оберненої до неї, їх детермінанти, символи Крістоффеля, компоненти тензора Річчі і скалярна кривизна для форми (3.10) подано у Додатку Б. При $o(a) = 0$ отримуємо інваріант поля $F = -2F_{rt}^2$, який співпадає зі статичним випадком Розділу 2. t -компонента рівнянь Максвелла (3.4) теж співпадає зі статичним випадком:

$$\left(\underbrace{2^{s-1} sr F_{rt}^{2s-1}}_{\text{const} \equiv q_e} \right)' = 0, \quad (3.17)$$

³³Тоді як при відсутності обертання можна прийняти $a \equiv 0$ в (3.10), що приводить до статичної метрики (2.12), а функція h у (3.10) втрачає свій зміст.

маємо розв'язок:

$$F_{rt} = \left(\frac{q_e}{2^{s-1} s r} \right)^{\frac{1}{2s-1}}. \quad (3.18)$$

який було детально обговорено в Розділі 2.

Діагональні компоненти рівнянь Айнштайна (3.2)-(3.3) співпадають зі статичним випадком³⁴:

$$\begin{cases} f' + 2\Lambda r + 2^s(2s-1)rF_{rt}^{2s} = 0, & (tt), (rr) \\ f'' + 2\Lambda - 2^sF_{rt}^{2s} = 0, & (\varphi\varphi), \end{cases} \quad (3.19)$$

що разом з (3.18) дає систему для f :

$$\begin{cases} f' + 2\Lambda r + 2^s(2s-1) \left(\frac{q_e}{2^{s-1} s} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} r^{-\frac{1}{2s-1}} = 0 \\ f'' + 2\Lambda - 2^s \left(\frac{q_e}{2^{s-1} s r} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

та її розв'язок:

$s = 1$:

$$f = -\Lambda r^2 - 2q_e^2 \ln r - m. \quad (3.21)$$

$s \neq 1$:

$$f = -\Lambda r^2 - \frac{2^{s-1}(2s-1)^2}{s-1} \left(\frac{q_e}{2^{s-1} s} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} r^{\frac{2(s-1)}{2s-1}} - m. \quad (3.22)$$

Вище було показано, що при нульовому електромагнітному лагранжіані повільне обертання ЧД не змінює її діагональної метричної функції (3.13) порівняно зі статичним випадком. Як видно, такий результат справедливий також і при наявності електромагнітного поля. Повільне обертання ЧД не змінює її електричне поле та діагональну метричну функцію порівняно зі статичною ЧД Розділу 2. Це пов'язано з тим, що обертання вносить вклад до F_{rt} та f у порядках вище лінійного відносно параметра малості a і для повільного обертання відкидаються. Також як і у статичному випадку, при повільному обертанні для конформного значення $s = 3/4$ маємо $T_\mu^\mu|_{s=3/4} = 0$ та $R|_{s=3/4} = 6\Lambda$.

³⁴У Розділі 2 було записано тільки одну, сумісну з іншими компоненту рівнянь гравітаційного поля, а саме, диференціальне рівняння першого порядку.

3.3. Недіагональна метрична функція та магнітне поле

φ -компонента рівнянь Максвелла (3.4):

$$\left[\underbrace{2^{s-1} s r F_{rt}^{2s-1} \left(h + \frac{f}{r^2 F_{rt}} \frac{F_{r\varphi}}{a} \right)}_{\text{const} \equiv q} \right]' = 0 \quad (3.23)$$

пов'язує між собою усі чотири функції f , h , F_{rt} , $F_{r\varphi}$. Використовуючи розв'язок (3.18) для F_{rt} , та інтегруючи (3.23), отримуємо:

$$\frac{F_{r\varphi}}{a} = \frac{r^2 F_{rt}}{f} \left(\frac{q}{q_e} - h \right), \quad (3.24)$$

де q — стала інтегрування. Звідси видно, що магнітне поле рівне нулю при нульовому електричному полі, що очевидно, оскільки нульове електричне поле означає незаряджену ЧД. Недіагональна $t\varphi$ -компонента рівнянь Айнштайна (3.2)-(3.3) дає:

$$-r h (f'' + 2\Lambda) + f (r h'' + 3h') + 2^s r F_{rt}^{2s} \left(h + \frac{2s f}{r^2 F_{rt}} \frac{F_{r\varphi}}{a} \right) = 0. \quad (3.25)$$

Домножуючи tt -компоненту (3.19) на h , і додаючи її до (3.25), маємо:

$$-r f'' h + f' h + r f h'' + 3f h' = -4 \cdot \underbrace{2^{s-1} s r F_{rt}^{2s-1} \left(h + \frac{f}{r^2 F_{rt}} \frac{F_{r\varphi}}{a} \right)}_q F_{rt}. \quad (3.26)$$

Враховуючи (3.23), і згортаючи ліву частину рівняння (3.26), отримуємо:

$$\left[\frac{f^2}{r} \left(\frac{r^2 h}{f} \right)' \right]' = -4q F_{rt}, \quad (3.27)$$

що дає точний розв'язок для h у квадратурах:

$$h = \frac{f}{r^2} \left\{ \int \frac{r}{f^2} \left[-4q \int F_{rt} dr + c_1 \right] dr + c_2 \right\}. \quad (3.28)$$

Тут невизначені інтеграли означають первісну, так як сталі інтегрування c_1 , c_2 вже враховані. Для внутрішнього інтегралу від F_{rt} , з урахуванням (3.18), маємо:

$s = 1$:

$$\int F_{rt} dr = q_e \ln r. \quad (3.29)$$

$s \neq 1$:

$$\int F_{rt} dr = \frac{2s-1}{2(s-1)} \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{1}{2s-1}} r^{\frac{2(s-1)}{2s-1}}. \quad (3.30)$$

Тоді як для зовнішнього інтегралу в (3.28) точного аналітичного розв'язку не знаходиться.

Знайдемо асимптотичний аналітичний розв'язок для функції h при великих значеннях r . Користуючись розв'язками (3.21)-(3.22), запишемо функцію f у вигляді:

$$f = -\Lambda r^2(1+z), \quad (3.31)$$

де введено допоміжну змінну:

$s = 1$:

$$z = \frac{1}{\Lambda r^2}(2q_e^2 \ln r + m). \quad (3.32)$$

$s \neq 1$:

$$z = \frac{1}{\Lambda r^2} \left(\frac{2^{s-1}(2s-1)^2}{s-1} \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} r^{\frac{2(s-1)}{2s-1}} + m \right). \quad (3.33)$$

Як було сказано у Розділі 2, на великих відстанях від ЧД домінуючим членом функції f є доданок із космологічною сталою, тому $|z| \ll 1$ при великих r . Відповідно до цього, замінимо величину $1/f^2$ у зовнішньому інтегралі (3.28) її наближеним значенням³⁵:

$$\frac{1}{f^2} = \frac{1}{\Lambda^2 r^4} (1+z)^{-2} \approx \frac{1}{\Lambda^2 r^4} (1-2z). \quad (3.34)$$

Тоді квадратура (3.28) виражається (інтегрується) в елементарних функціях:

$s = 1$:

$$h = \frac{f}{r^2} \left\{ \frac{1}{r^2} [A_1 \ln r + A_2] + \frac{1}{r^4} [A_3 \ln^2 r + A_4 \ln r + A_5] + c_2 \right\}. \quad (3.35)$$

³⁵Використано $(1+x)^m \approx 1+mx$, $|x| \ll 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

$s \neq 1$:

$$h = \frac{f}{r^2} \left\{ \frac{B_1}{r^2} + \frac{B_2}{r^4} + B_3 r^{-\frac{2s}{2s-1}} + B_4 r^{-\frac{4s}{2s-1}} + B_5 r^{-\frac{2(3s-1)}{2s-1}} + c_2 \right\}. \quad (3.36)$$

Тут введені сталі коефіцієнти $A_i, B_i, i = \overline{1,5}$, що виражаються через Λ, q_e, q, m, c_1 , і приведені у Додатку В. Підстановка (3.35)-(3.36) у вираз (3.24) дає асимптотичні аналітичні розв'язки для магнітного поля.

Представимо графічно асимптотичні залежності $h(r)$ та $F_{r\varphi}(r)/a$ разом з точними кривими, отриманими шляхом чисельного інтегрування квадратури (3.28), для цього визначимо сталі c_1, c_2 . При відсутності електричного заряду ЧД маємо $q_e \equiv 0 \implies F_{rt} \equiv 0$. Використовуючи наведену вище умову $h(+\infty) = 0$, квадратура (3.28) приймає вигляд³⁶:

$$h = \frac{\tilde{f}}{r^2} \left\{ \int \frac{c_1 r}{\tilde{f}^2} dr + c_2 \right\} = \frac{\tilde{f}}{r^2} \int_{+\infty}^r \frac{c_1 r}{\tilde{f}^2} dr = \frac{\tilde{f}}{r^2} \{H(r) - H(+\infty)\}, \quad (3.37)$$

де $\tilde{f} = -\Lambda r^2 - m$ — вакуумна метрична функція, розглянута в (3.13), і:

$$H(r) = \int \frac{c_1 r}{\tilde{f}^2} dr = -\frac{c_1}{2\Lambda(\Lambda r^2 + m)}. \quad (3.38)$$

Звідси маємо $H(+\infty) = 0 \implies c_2 = -H(+\infty) = 0$ ³⁷. Таким чином, для чисельного інтегрування використовується квадратура:

$$h = \frac{f}{r^2} \int_{+\infty}^r \frac{r}{f^2} \left[-4q \int F_{rt} dr + c_1 \right] dr, \quad (3.39)$$

де значення внутрішнього інтегралу даються виразами (3.29)-(3.30).

У Додатку Г в підході квазілокального формалізму Бровна-Йорка [24] для обчислення збережуваних величин ЧД показано, що стала c_1 при відсутності

³⁶Тут враховано скінченне значення величини:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{f}}{r^2} = -\Lambda.$$

³⁷Результат $c_2 = 0$ при умові $h(+\infty) = 0$ справедливий також і при ненульовому електричному полі, внаслідок спадної поведінки функції $F_{rt}(r)$, випадок $F_{rt} \equiv 0$ було обрано для простоти викладок.

електричного заряду є лінійно пов'язаною із кутовим моментом ЧД:

$$J = -\frac{ac_1}{8\Lambda}, \quad (3.40)$$

і як було зауважено вище, є того ж порядку малості, що і a (сама стала c_1 не містить a). Звідси видно, що стала $c_1 = -8\Lambda J/a$ залежить від космологічної сталої, і $c_1 > 0$, оскільки $\Lambda < 0$, $J > 0$. У додатку Г також показано, що величина J/a є кутовим моментом довільного обертання, що зрештою очевидно, так як параметр малості a введений просто для контролю малості обертання. Зауважимо, що зв'язок $J \propto c_1$ при відсутності електричного заряду, $q_e \equiv 0$, приводить до того, що з умови $J = 0$ випливає очевидна рівність $h = 0$, тоді як у випадку $q_e \neq 0$ умова $J = 0$ не приводить до нульової недиагональної функції h за рахунок електромагнітного поля, що видно із (3.39)³⁸.

Перейдемо нарешті до сталої q . Розглянемо для простоти випадок лінійного $s = 1$ поля, тоді з (3.18), (3.21), (3.24), (3.35) для F_{rt} , f , $F_{r\varphi}$, h , відповідно, маємо:

$$\frac{F_{r\varphi}}{a} = \frac{q_e}{|\Lambda|r} \frac{q/q_e - o\left(\frac{\ln r}{r^2}\right)}{1 + o\left(\frac{\ln r}{r^2}\right)}. \quad (3.41)$$

Обравши $q \equiv |\Lambda|q_e$, матимемо:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{F_{r\varphi}}{a} = \frac{q_e}{r}, \quad (3.42)$$

що співпадає з $F_{rt} = q_e/r$ для лінійного поля³⁹. Згідно до (3.39) випадок $q = c_1 \equiv 0$ приводить до $f \equiv 0$, що у свою чергу з урахуванням (3.24) дає $F_{r\varphi} \equiv 0$. Зауважимо, що детальний аналіз змісту сталих q та c_1 потребує додаткового дослідження, ми вважатимемо це відкритим питанням цієї моделі ЧД.

На Рис. 3.1 показано поведінку $h(r)$, ці криві починаються зі значення r_+ ГП ЧД при вибраних інших параметрах, оскільки квадратура (3.39) має розрив у цій точці (ділення на $f(r_+) = 0$). При $r \rightarrow +\infty$ функція h монотонно спадає за своїм абсолютним значенням (приймаючи при певних параметрах

³⁸Це може означити необхідність іншого означення J .

³⁹Тут варто згадати роботу [26], де було розглянуто спеціальний випадок, коли електричне та магнітне поля є пропорційними при будь-якому значенні r .

від’ємне значення) причому це спадання стає слабшим при збільшенні параметра нелінійності s . Також для менших значень s графік демонструє кращу збіжність асимптотичних аналітичних розв’язків до відповідних точних чисельних розв’язків. Нагадаємо, що хоч сама функція h не містить параметра малості a , вона входить до інтервалу (3.10) як ah за умови $o(a) = 0$, тому її внесок до гравітаційного поля ЧД з повільним обертанням є малим. Також на цьому графіку вибрано випадок $q \equiv |\Lambda|q_e$.

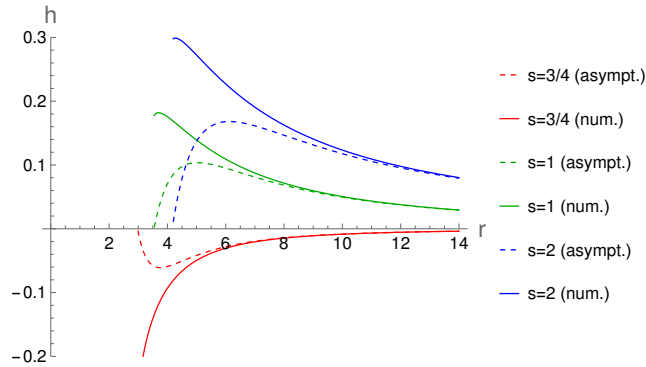


Рис. 3.1: Метрична функція $h(r)$ при $\Lambda = -1$, $q_e = 1$, $q = 1$, $m = 1$, $c_1 = 1$.

Рис. 3.2 демонструє монотонну спадну залежність для магнітного поля $F_{r\varphi}(r)/a$, як для асимптотичних аналітичних, так і для точних чисельних розв’язків. Ці криві теж починаються зі значення r_+ , як і для функції h , оскільки остання входить до виразу (3.24) для магнітного поля. Зростання параметра s приводить до слабшого спадання магнітного поля при $r \rightarrow +\infty$, що якісно повторює поведінку електричного поля F_{rt} , обговорену в Розділі 2. Проте на відміну від F_{rt} , для магнітного поля зростання параметра s веде до швидшого зростання $F_{r\varphi}$ при $r \rightarrow 0$. На ГП маємо $F_{r\varphi}|_{r \rightarrow r_+} \rightarrow +\infty$, що пов’язано із розривом функції h у цій точці. Як і для функції f , із графіка видно, що асимптотичні аналітичні та точні чисельні розв’язки для $F_{r\varphi}$ якісно є дуже схожими, їх взаємна збіжність є кращою для менших значень параметра s і навіть кращою, ніж для відповідних кривих h на Рис. 3.1.

На Рис. 3.3, 3.4 показано залежність точних чисельних розв’язків $h(r)$ у випадку лінійного $s = 1$ поля від параметрів c_1 , q , відповідно.

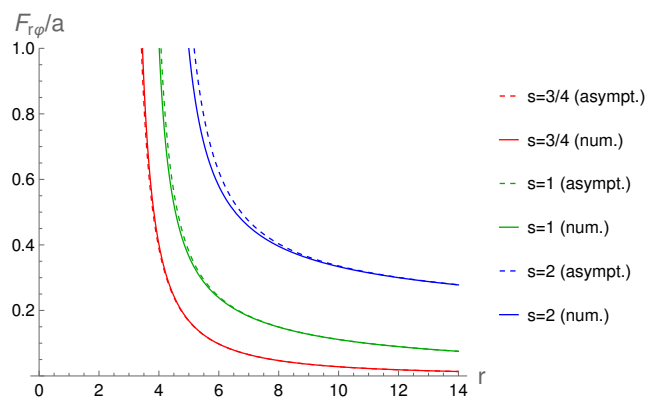


Рис. 3.2: Магнітне поле $F_{r\varphi}(r)/a$ при $\Lambda = -1$, $q_e = 1$, $q = 1$, $m = 1$, $c_1 = 1$.

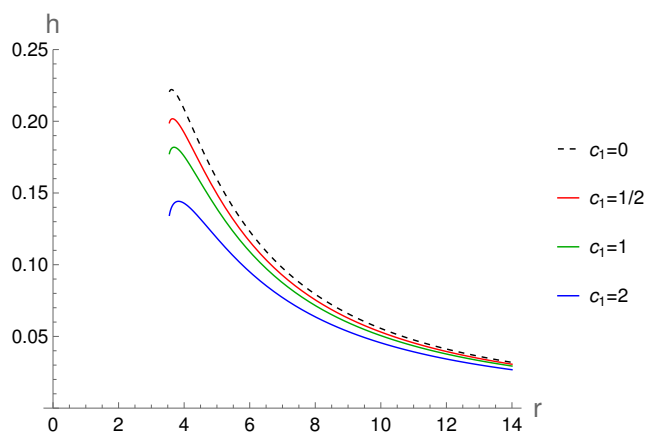


Рис. 3.3: Функція $h(r)$ при різних значеннях сталої c_1 при $\Lambda = -1$, $q_e = 1$, $q = 1$, $m = 1$.

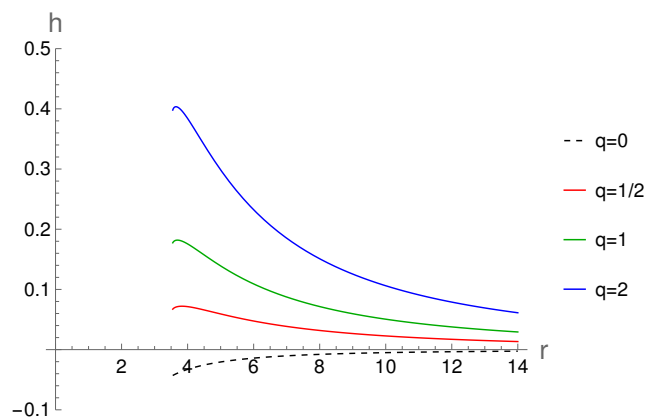


Рис. 3.4: Функція $h(r)$ для різних значеннях сталої q при $\Lambda = -1$, $q_e = 1$, $m = 1$, $c_1 = 1$.

3.4. Термодинаміка

Температура випромінювання Гокінга, визначена загальною формулою (2.39) Розділу 2, у випадку повільного обертання співпадає зі статичним ви-

падком (2.42)⁴⁰:

$$T = \frac{f'}{4\pi} \Big|_{r=r_+}, \quad (3.43)$$

поправки, пов'язані з обертанням мають порядок $o(a)$, тому і сама температура співпадає з результатом (2.43) для РМІ поля:

$$T = -\frac{1}{4\pi} \left(2\Lambda r_+ + 2^s(2s-1) \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} r_+^{-\frac{1}{2s-1}} \right). \quad (3.44)$$

Електричний потенціал (2.47) теж співпадає зі статичним випадком (2.48):

$$U_e = - \int F_{rt} dr \Big|_{r=r_+}, \quad (3.45)$$

і маємо ті самі розв'язки (2.49)-(2.50):

$s = 1$:

$$U_e = -q_e \ln r_+. \quad (3.46)$$

$s \neq 1$:

$$U_e = -\frac{2s-1}{2(s-1)} \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{1}{2s-1}} r_+^{\frac{2(s-1)}{2s-1}}. \quad (3.47)$$

Ентропія ЧД при повільному обертанні теж співпадає з (2.57) [67]:

$$S = \frac{\pi r_+}{2}, \quad (3.48)$$

тому теж маємо $M = m(r_+)/8$ і маса ЧД дається формулами (2.61)-(2.62):

$s = 1$:

$$M = \frac{1}{8} (-\Lambda r_+^2 - 2q_e^2 \ln r_+). \quad (3.49)$$

$s \neq 1$:

$$M = \frac{1}{8} \left(-\Lambda r_+^2 - \frac{2^{s-1}(2s-1)^2}{s-1} \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} r_+^{\frac{2(s-1)}{2s-1}} \right). \quad (3.50)$$

Також від космологічної сталої переходимо до термодинамічного тиску:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (3.51)$$

⁴⁰Це пов'язано з тим, що у випадку слабкого обертання вектор Кіллінга співпадає з (2.41) [67].

Як відомо [77], перший закон термодинаміки для ЧД з обертанням окрім членів, написаних у (2.59) містить доданок ΩdJ , проте у випадку повільного стаціонарного обертання ЧД її кругова частота, як і кутовий момент вважається пропорційним до параметра малості обертання a , тому член ΩdJ для повільного обертання відсутній і перший закон співпадає зі статичним випадком (2.59):

$$dM = TdS + VdP + U_e dQ_e. \quad (3.52)$$

Звідси ми отримуємо ті самі зв'язки $Q_e = q_e/2$, $V = \pi r_+^2$. Рівняння стану повторює (2.68):

$$P = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{\pi}{V}} + \frac{2^{s-4}(2s-1)}{\pi} \left(\frac{Q_e}{2^{s-2}s} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} \left(\frac{V}{\pi} \right)^{-\frac{s}{2s-1}}, \quad (3.53)$$

і є тривіальним щодо своєї критичної поведінки. Ізобарна теплоємність ЧД дається (2.74):

$$C_P = -2\pi^2 T \left(2\Lambda - 2^s \left(\frac{q_e}{2^{s-1}sr_+} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} \right)^{-1}. \quad (3.54)$$

Отже, уся роглянута термодинаміка досліджуваної моделі ЧД з повільним обертанням є ідентичною статичній ЧД Розділу 2 з РМІ полем. Причиною цьому є те, що повільне обертання ЧД не впливає на її діагональну метричну функцію f порівняно зі статичним випадком. Вплив обертання на термодинаміку 3-вимірних ЧД проявляється у порядках параметра малості обертання вище лінійного. Схожа особливість має місце і для вищих вимірностей простору-часу [67].

Розділ 4

Модель 3. Чотиривимірна статична чорна діра з електричним та магнітним зарядами в електродинаміці Борна-Інфельда

4.1. Постановка задачі та польові рівняння

Вивчається модель статичної ЧД з електричним та магнітним зарядами в електродинаміці ВІ для сферичної, плоскої та гіперболічної топологій 4-вимірного простору-часу з від'ємною космологічною сталою в рамках айнштайнівської гравітації. Така ЧД описується набором параметрів M , Q_e , Q_m . Об'ємний інтеграл дії системи:

$$I[g_{\mu\nu}, A_\mu] = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + L_{\text{ВІ}}^{\text{orig}}), \quad (4.1)$$

де інтегрування відбувається по 4-вимірному елементу області Ω простору-часу. Величина $L_{\text{ВІ}}^{\text{orig}}$ є оригінальним лагранжіаном ВІ з двома інваріантами поля F , G :

$$L_{\text{ВІ}}^{\text{orig}} = 4\beta^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2\beta^2} - \frac{G^2}{16\beta^4}} \right), \quad (4.2)$$

де:

$$F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

$$G = F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}. \quad (4.4)$$

Тут $F^{*\mu\nu} = j^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ — тензор, дуальний до тензора електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$, і:

$$j^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (4.5)$$

де $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — повністю антисиметричний одиничний тензор Леві-Чивіти.

Для статичної ЧД Розділу 2 було розглянуто спрощений лагранжіан $L_{\text{ВІ}}$ без інваріанту G , який рівний нулю при відсутності магнітного поля. У цьому

розділі система ЧД є теж статичною, однак за рахунок магнітного заряду величина G відмінна від нуля і повинна бути врахованою. Граничний випадок:

$$L_{\text{BI}}^{\text{orig}} \Big|_{\beta \rightarrow +\infty} \longrightarrow -F, \quad (4.6)$$

дає максвелівський лагранжіан, а дія (4.1) співпадає з формулою А.3 Додатку А для дії ЧД RN-AdS (також Керра-Ньюмена з космологічною сталою).

Для зручності запису наступних формул введемо позначення⁴¹:

$$\tilde{F} = \frac{F}{2\beta^2}, \quad \tilde{G} = \frac{G}{4\beta^2}. \quad (4.7)$$

Застосування принципу найменшої дії $\delta_{g_{\mu\nu}} I = 0$, $\delta_{A_\mu} I = 0$ для (4.1) відповідно до Додатку А⁴² дає рівняння Айнштайна-Максвелла:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = T_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L_{\text{BI}}^{\text{orig}} + \frac{2(F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^\rho - g_{\mu\nu}\beta^2\tilde{G}^2)}{\sqrt{1 + \tilde{F} - \tilde{G}^2}}, \quad (4.9)$$

$$\partial_\mu \left[\frac{\sqrt{-g}(F^{\mu\nu} - \tilde{G}F^{*\mu\nu})}{\sqrt{1 + \tilde{F} - \tilde{G}^2}} \right] = 0. \quad (4.10)$$

У рівняннях (4.8)-(4.10) усі індекси пробігають чотири значення відповідно до 4-вимірності простору-часу і у загальному випадку представляють собою систему із чотирнадцяти скалярних диференціальних рівнянь у часткових похідних.

4.2. Розв'язки рівнянь поля

Оскільки досліджувана модель ЧД є статичною, її гравітаційне та електромагнітне поля володіють симетричною просторовою симетрією. Відповідно до цього введемо в області Ω в околі ЧД часову та просторові сферичні

⁴¹Саме у такому вигляді інваріанти F , G використовувались у нашій статті [131], де було опубліковано результати цього розділу. Сам лагранжіан BI тоді має простіший вигляд:

$$L_{\text{BI}}^{\text{orig}} = 4\beta^2(1 - \sqrt{1 + F - G^2}).$$

У цій дисертації використовуються означення інваріантів поля у вигляді (4.3), (4.4) з уніфікаційною метою.

⁴²Варіації інваріанту G обчислюються аналогічним чином до інваріанту F .

координати, $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, де $t \in (-\infty; +\infty)$, $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0; \pi]$, $\varphi \in [0; 2\pi)$. Окрім такої сферичної ($k = 1$) симетрії розглянемо для загальності ще дві геометрії ГП, згадані в Розділі 1 — плоску ($k = 0$) та гіперболічну ($k = -1$). Це дозволить додатково отримати топологічні розв'язки ЧД. Для цих геометрій зміст координат θ , φ змінюється, ми не розглядаємо тут питання топології таких геометрії, це можна знайти, наприклад, у [30]. У вибраних системах координатах квадрат інтервалу запишеться:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_k^2, \quad (4.11)$$

де $d\Omega_k^2$ є першою квадратичною формою на двовимірній поверхні:

$$d\Omega_k^2 = \begin{cases} d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, & k = 1 \\ d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2, & k = 0 \\ d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\varphi^2, & k = -1. \end{cases} \quad (4.12)$$

Гравітаційне поле системи повністю описується однією метричною функцією f , як і у 3-вимірному статичному випадку Розділу 2. Ненульові компоненти метричного тензора та оберненого до нього, їх детермінанти для усіх значень k приведені у Додатку Б.

Наявність для статичної ЧД електричного та магнітного зарядів означає, що вона створює статичні електричне та магнітне поля. 4-вектор електромагнітного потенціалу має вигляд:

$$A_\mu = [A_t(r), 0, 0, A_\varphi(\theta)], \quad (4.13)$$

де електричне $F_{rt}(r)$ та магнітне $F_{\theta\varphi}(\theta)$ поля:

$$F_{rt} = \frac{dA_t}{dr}, \quad F_{\theta\varphi} = \frac{dA_\varphi}{d\theta}. \quad (4.14)$$

Таким чином, невідомими рівнянь поля (4.8)-(4.10) є функції f , F_{rt} , $F_{\theta\varphi}$, які описують дану модель.

Для компоненти A_φ використовується підстановка:

$$A_\varphi = \begin{cases} -Q_m \cos \theta, & k = 1 \\ (1/2)Q_m \theta^2, & k = 0 \\ Q_m \cosh \theta, & k = -1, \end{cases} \quad (4.15)$$

де стала Q_m має зміст повного магнітного заряду ЧД. Підстановку для A_φ у такому вигляді для сферичного ГП було розглянуто в [25] для ЧД з електричним та магнітним зарядами в електродинаміці Максвелла та моделі гравітації з конформним скалярним полем⁴³. Також такий «магнітний потенціал» було розглянуто, наприклад, у [84]. Для інших топологій вираз для A_φ обрано так, щоб він приводив до тих самих польових інваріантів F , G , а також часової компоненти A_t , що і для сферичного випадку так, що вони не залежать від θ , а тільки від радіальної координати r , це показано нижче. Така особливість частково пояснює вибір (4.15). Звідси маємо магнітне поле:

$$F_{\theta\varphi} = \begin{cases} Q_m \sin \theta, & k = 1 \\ Q_m \theta, & k = 0 \\ Q_m \sinh \theta, & k = -1, \end{cases} \quad (4.16)$$

яке не залежить від відстані r , що є особливістю такої моделі.

Інваріанти поля (4.3), (4.4) не залежать від k і дорівнюють:

$$F = \frac{2(Q_m^2 - r^4 F_{rt}^2)}{r^4}, \quad (4.17)$$

$$G = -\frac{4Q_m F_{rt}}{r^2}, \quad (4.18)$$

перший з яких при відсутності магнітного заряду, $Q_m \equiv 0$, приводить до $F = -2F_{rt}^2$, що співпадає з результатами Розділів 2, 3, тоді як інваріант G у цьому випадку дорівнює нулеві.

Ненульові компоненти рівнянь Максвелла (4.10) дають систему:

$$\begin{cases} \partial_r \left[\frac{\sqrt{-g}(F^{rt} - \tilde{G}F^{*rt})}{\sqrt{1 + \tilde{F} - \tilde{G}^2}} \right] = 0, & (t) \\ \partial_\theta \left[\frac{\sqrt{-g}(F^{\theta\varphi} - \tilde{G}F^{*\theta\varphi})}{\sqrt{1 + \tilde{F} - \tilde{G}^2}} \right] = 0, & (\varphi), \end{cases} \quad (4.19)$$

розв'язком якої є електричне поле:

$$F_{rt} = \frac{\beta Q_e}{\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 r^4}} \quad (4.20)$$

⁴³У цій статті електричне та магнітне поля даються виразами $F_{rt} = Q_e/r^2$, $F_{\theta\varphi} = Q_m \sin \theta$.

для усіх типів геометрії k . Величина Q_e є повним електричним зарядом ЧД⁴⁴. При $Q_m = 0$ розв'язок (4.20) дає відомий результат [77] для електричного поля ЧД з лагранжіаном VI:

$$F_{rt}|_{Q_m=0} = \frac{\beta Q_e}{\sqrt{Q_e^2 + \beta^2 r^4}}, \quad (4.21)$$

яке у свою чергу в границі $\beta \rightarrow +\infty$ дає електричне поле ЧД RN-AdS:

$$F_{rt}^{\text{RN}} = \frac{Q_e}{r^2}. \quad (4.22)$$

Графіки $F_{rt}(r)$ для різних значень Q_m представлені на Рис. 4.1, вони є монотонними спадними функціями r . При $r \rightarrow 0$ електричне поле Борна-Інфельда приймає скінченне значення, яке зростає при зменшенні Q_m при тому самому Q_e . На цьому графіку також показано електричне поле ЧД RN-AdS, яке є розбіжним при $r \rightarrow 0$.

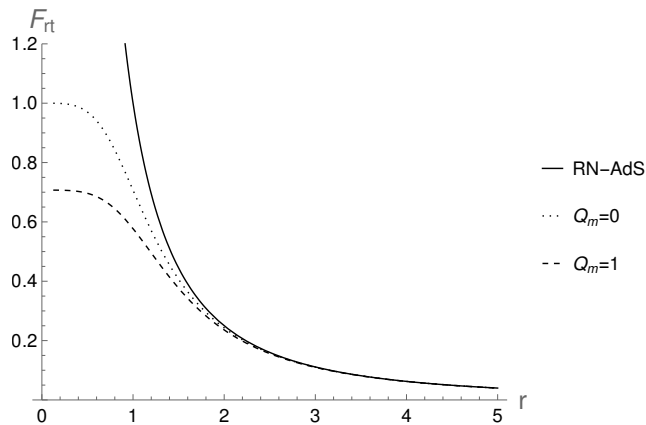


Рис. 4.1: Електричне поле $F_{rt}(r)$ при $\beta = 1$ (окрім випадку RN-AdS), $Q_e = 1$.

На Рис. 4.2 показано магнітне поле $F_{\theta\varphi}(\theta)$ для усіх типів геометрії. Для сферичного ГП воно досягає свого максимуму на екваторі ЧД ($\theta = \pi/2$) і спадає до нуля при прямованні до її полюсів ($\theta = 0$ та $\theta = \pi$). Для плоскої та гіперболічної топологій функція $F_{\theta\varphi}$ зростає за абсолютним значенням зі збільшенням $|\theta|$.

⁴⁴Тут ми одразу пов'язуємо сталу інтегрування q_e , яка виникає при інтегруванні системи (4.19), з повним електричним зарядом Q_e ЧД так, щоб у граничному випадку $\beta \rightarrow +\infty$ при переході до максвелівського лагранжіану (і $Q_m = 0$, хоча це не обов'язково) електричне поле (4.20) співпадало з кулонівським, як це має місце для ЧД RN-AdS.

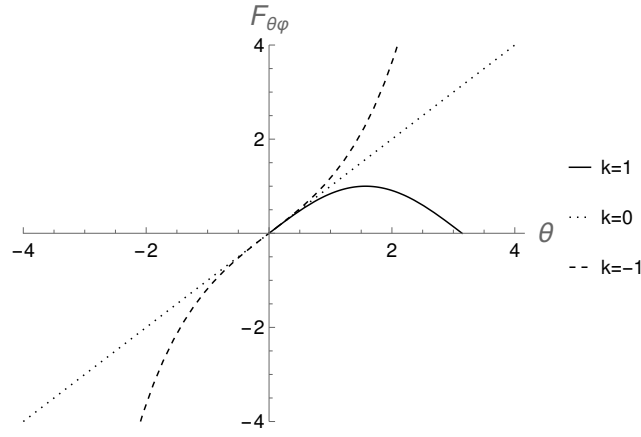


Рис. 4.2: Магнітне поле $F_{\theta\varphi}(\theta)$ при $Q_m = 1$.

Символи Крістоффеля, компоненти тензора Річчі та скалярна кривизна для метрики (4.11)-(4.12) подані у Додатку Б. Ненульовими компонентами рівнянь Айнштайна (4.8)-(4.9) є лише діагональні, які дають систему:

$$\begin{cases} (rf)' + (\Lambda - 2\beta^2)r^2 + 2\beta\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2r^4} - k = 0, & (tt), (rr) \\ [(rf)']' + 2(\Lambda - 2\beta^2)r + \frac{4\beta^3r^3}{\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2r^4}} = 0, & (\theta\theta), (\varphi\varphi), \end{cases} \quad (4.23)$$

розв'язком якої (достатньо обмежитись першим рівнянням) є:

$$f = k - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} - \frac{2}{r} \int_r^{+\infty} (\beta^2 x^2 - \beta\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 x^4}) dx. \quad (4.24)$$

Тут значенням визначеного інтегралу є спеціальна функція еліптичного інтегралу першого роду, проте ми записуємо її у вигляді квадратури. Верхню межу інтегрування у (4.24) вибрано як $+\infty$ для того, щоб граничний випадок $k = 1$, $Q_m = 0$, $\beta \rightarrow +\infty$ приводив до метричної функції ЧД RN-AdS, це показано нижче. Стала величина M є масою ЧД⁴⁵, яка з урахуванням $f(r_+) = 0$ рівна:

$$M = \frac{kr_+}{2} - \frac{\Lambda r_+^3}{6} - \int_{r_+}^{+\infty} (\beta^2 x^2 - \beta\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 x^4}) dx. \quad (4.25)$$

⁴⁵Як і у випадку електричного заряду, ми одразу пов'язуємо сталу інтегрування m , що виникає при інтегруванні першого рівняння системи (4.23) з масою ЧД так, щоб у відповідній границі отримати масу ЧД RN-AdS.

У випадку сферичного ГП при відсутності магнітного заряду у границі $\beta \rightarrow +\infty$ розв'язок (4.24) переходить у метричну функцію ЧД RN-AdS⁴⁶:

$$f^{\text{RN}} = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{Q_e^2}{r^2}. \quad (4.26)$$

Заряди Q_e, Q_m входять до функції f (4.24) еквівалентно у вигляді комбінації $\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2}$. Як показано нижче, така ситуація має місце для усіх розглянутих далі термодинамічних величин, окрім електричного та магнітного потенціалів, що є очевидним. Це дозволяє при побудові графіків таких функцій обрати $Q_m = 0$ без втрати загальності. Границя $k = 1, Q_m = 0, \beta \rightarrow +\infty$ для (4.25) дає масу ЧД RN-AdS:

$$M^{\text{RN}} = \frac{r_+}{2} - \frac{\Lambda r_+^3}{6} + \frac{Q_e^2}{2r_+}. \quad (4.27)$$

Графіки $f(r)$ для сферичного ГП при різних значеннях параметра β , а також відповідну криву для ЧД RN-AdS (4.26) показано на Рис. 4.3. Як видно, при зростанні β криві функції f прямують до RN-AdS випадку і зливаються в одну лінію при збільшенні r .

Залежність маси ЧД від радіусу r_+ сферичного ГП разом з RN-AdS випадком (4.27) показано на Рис. 4.4. Оскільки більшому радіусу ГП має відповідати більша маса ЧД, діапазоном значень r_+ , що має фізичний зміст можна вважати той, де маса є додатною і монотонно зростає з радіусом r_+ .

⁴⁶Тут використано границю для підінтегральної функції інтегралу в (4.24):

$$\beta^2 r^2 - \beta \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 r^4} \Big|_{\beta \rightarrow +\infty}^{Q_m=0} = -\frac{Q_e^2}{2r^2},$$

що дає граничне значення самого інтегралу:

$$\int_{r_0}^r (\beta^2 x^2 - \beta \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 x^4}) dx \Big|_{\beta \rightarrow +\infty}^{Q_m=0} = \frac{Q_e^2}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right),$$

де, обираючи $r_0 \rightarrow +\infty$, маємо:

$$\int_r^{+\infty} (\beta^2 x^2 - \beta \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 x^4}) dx \Big|_{\beta \rightarrow +\infty}^{Q_m=0} = -\frac{Q_e^2}{2r},$$

що і дає прехід від (4.24) до (4.26).

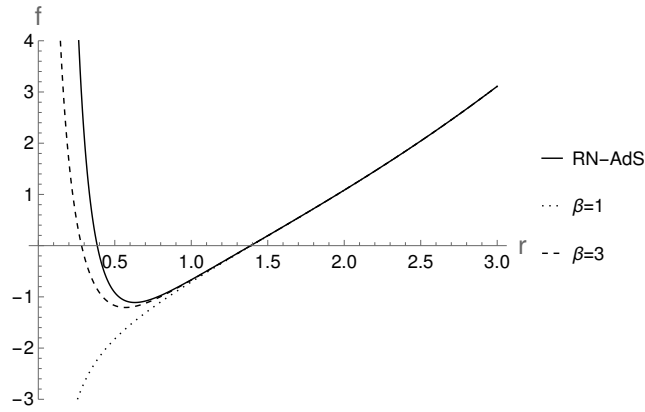


Рис. 4.3: Метрична функція $f(r)$ при $k = 1$, $\Lambda = -1$, $Q_e = 1$, $Q_m = 0$, $M = 1.5$.

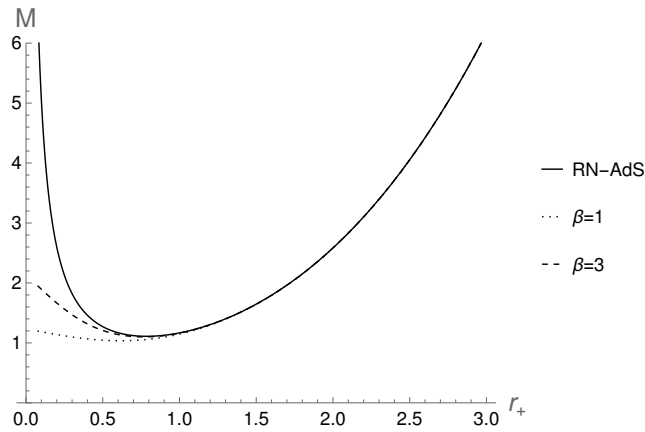


Рис. 4.4: Маса ЧД $M(r_+)$ при $k = 1$, $\Lambda = -1$, $Q_e = 1$, $Q_m = 0$.

4.3. Термодинамічні величини

Вектор Кіллінга, як і для 3-вимірної статичної ЧД Розділу 2, має тільки часову ненульову компоненту:

$$\chi^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (4.28)$$

і температура випромінювання Гокінга, визначена формулою (2.39), для метрики (4.11)-(4.12) співпадає з попередніми двома розділами:

$$T = \frac{f'}{4\pi} \Big|_{r=r_+}. \quad (4.29)$$

Беручи значення першого рівняння системи (4.23) при $r = r_+$:

$$f|_{r=r_+} + r_+ f'|_{r=r_+} + (\Lambda - 2\beta^2)r_+^2 + 2\beta\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 r_+^4} - k = 0, \quad (4.30)$$

і враховучи $f|_{r=r_+} = 0$, отримуємо з (4.29) температуру:

$$T = \frac{1}{4\pi r_+} \left(k - (\Lambda - 2\beta^2)r_+^2 - 2\beta\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 r_+^4} \right), \quad (4.31)$$

яка у границі $k = 1$, $Q_m = 0$, $\beta \rightarrow +\infty$ переходить у відповідний вираз для ЧД RN-AdS:

$$T^{\text{RN}} = \frac{1}{4\pi r_+} \left(1 - \Lambda r_+^2 - \frac{Q_e^2}{r_+^2} \right). \quad (4.32)$$

Графіки залежності температури для сферичного ГП від його радіусу r_+ для різних значень β , а також RN-AdS випадок представлені на Рис. 4.5 і є монотонно зростаючими функціями радіусу r_+ . Як і у двох попередніх розділах, тут ми маємо нефізичну область значень r_+ , де температура приймає від'ємні значення.

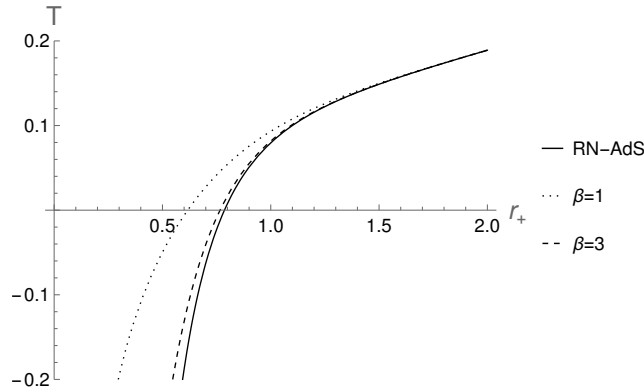


Рис. 4.5: Температура $T(r_+)$ при $k = 1$, $\Lambda = -1$, $Q_e = 1$, $Q_m = 0$.

Електричний потенціал, визначений формулою (2.47) теж співпадає із виразами, отриманими у двох попередніх розділах:

$$U_e = - \int F_{rt} dr \Big|_{r=r_+}, \quad (4.33)$$

що з урахуванням розв'язку (4.20) для F_{rt} дає⁴⁷:

$$U_e = \int_{r_+}^{+\infty} \frac{\beta Q_e}{\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 x^4}} dx. \quad (4.34)$$

⁴⁷Тут межі інтегрування теж вибрано так, щоб формула (4.34) приводила до відомого граничного випадку (4.35).

У границі $Q_m = 0$, $\beta \rightarrow +\infty$ отримуємо електричний потенціал RN-AdS:

$$U_e^{\text{RN}} = \frac{Q_e}{r_+}. \quad (4.35)$$

Залежності $U_e(r_+)$ для різних значень магнітного заряду разом з RN-AdS випадком представлені на Рис. 4.6. Значення параметрів β , Q_e , Q_m обрано такими ж, як і на Рис. 4.1 для електричного поля F_{rt} ⁴⁸.

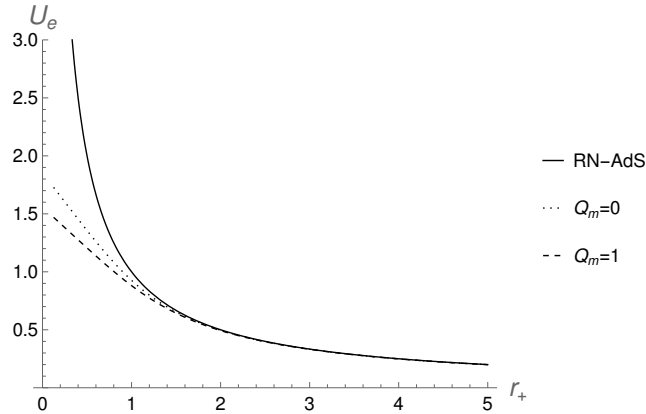


Рис. 4.6: Електричний потенціал $U_e(r_+)$ при $\beta = 1$ (окрім випадку RN-AdS), $Q_e = 1$.

4.4. Розширений фазовий термодинамічний простір

Як відомо [77], для ЧД зі сферичним ГП та електромагнітним полем ВІ без магнітного заряду має місце термодинамічний фазовий перехід. Як показано у Розділах 2, 3 критична поведінка ЧД може бути дослідженою за допомогою рівняння стану, яке у свою чергу можна отримати з виразу для температури. Із (4.31) видно, що електричний та магнітний заряди входять до температури еквівалентно, це означає, що наявність магнітного заряду не впливає на існування фазового переходу. Відповідно до цього обмежимося надалі термодинамічно нетривіальним випадком сферичного ГП.

Перший закон термодинаміки ЧД для її маси (4.25) при $k = 1$ має вигляд:

$$dM = TdS + VdP + U_e dQ_e + U_m dQ_m + Bd\beta, \quad (4.36)$$

⁴⁸Взагалі, на всіх графіках цієї дисертації в межах розділу параметри обрано однаковими там, де це сприяє кращому їх розумінню.

де порівняно з двома попередніми моделями додаються члени $U_m dQ_m$ та $Bd\beta$, їх зміст пояснено нижче. Температура T та електричний потенціал U_e визначаються отриманими виразами (4.31) при $k = 1$, і (4.34), відповідно. Ентропія ЧД зі сферичною поверхнею ГП рівна:

$$S = \frac{A}{4} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r_+^2 \sin \theta d\theta = \pi r_+^2, \quad (4.37)$$

тобто чверті площі поверхні сфери радіуса r_+ .

Зв'язок між термодинамічним тиском та від'ємною космологічною сталою обираємо в тому самому вигляді, що і для 3-вимірних моделей:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (4.38)$$

Використовуючи (4.36), термодинамічний об'єм:

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S, Q_e, Q_m, \beta} = \frac{4\pi r_+^3}{3} \quad (4.39)$$

співпадає з об'ємом кулі радіуса r_+ . Також з (4.37) маємо зв'язок:

$$S = \pi \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (4.40)$$

У першому законі (4.36) доданок $U_m dQ_m$ входить симетрично до $U_e dQ_e$, тому U_m можна назвати магнітним потенціалом ЧД⁴⁹:

$$U_m = \left(\frac{\partial M}{\partial Q_m} \right)_{S, P, Q_e, \beta} = \int_{r_+}^{+\infty} \frac{\beta Q_m}{\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 x^4}} dx. \quad (4.41)$$

Цей результат співпадає із порохованим альтернативним, «не термодинамічним» методом із використанням дуальності Ходжа (Hodge dualisation) [85], у якій електричний та магнітний заряди міняються місцями.

⁴⁹Також симетрія членів $U_e dQ_e$ та $U_m dQ_m$ в першому законі разом з еквівалентним входженням зарядів Q_e та Q_m до функції маси (4.25) означає, що магнітний потенціал може бути отриманий із електричного заміною $Q_e \rightarrow Q_m$, $Q_m \rightarrow Q_e$ у формулі (4.34) для U_e . З цієї причини ми не будемо графіків для $U_m(r_+)$, так як вони принципово повторюють якісну поведінку $U_e(r_+)$ на Рис. 4.6.

Величина B входить до (4.36) разом зі своєю спряженою величиною β , і називається поляризацією вакууму Борна-Інфельда (Born-Infeld vacuum polarization) [77], що є характерною особливістю електродинаміки ВІ⁵⁰. Маємо:

$$B = \left(\frac{\partial M}{\partial \beta} \right)_{S,P,Q_e,Q_m}, \quad (4.42)$$

$$B = \frac{2\beta r_+^3}{3} - \frac{2r_+}{3} \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 r_+^4} + \frac{1}{3} \int_{r_+}^{+\infty} \frac{Q_e^2 + Q_m^2}{\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 x^4}} dx. \quad (4.43)$$

У границі $\beta \rightarrow +\infty$ величина B зникає:

$$B|_{\beta \rightarrow +\infty} = 0, \quad (4.44)$$

так як у цьому випадку електродинаміка ВІ переходить у максвелівську і зміст B втрачається. Розгляд в першому законі (4.36) членів $U_m dQ_m$ та $Bd\beta$ є необхідним для отримання співвідношення Смарра, що пов'язує між собою скінченні термодинамічні величини:

$$M = 2(TS - VP) + U_e Q_e + U_m Q_m - B\beta. \quad (4.45)$$

Зауважимо, що співвідношення Смарра, як і перший закон термодинаміки характеризує термодинамічні властивості ЧД на їх «поверхні», тобто на ГП, оскільки величини T , V , U_e , U_m , B є функціями r_+ .

Дослідимо критичну поведінку ЧД. Переходячи у виразі (4.31) для температури при $k = 1$ від Λ та r_+ до термодинамічних змінних P (4.38) та V (4.39), відповідно, і виражаючи тиск, отримуємо рівняння стану $P(V, T, Q_e, Q_m)$ ЧД у розширеному фазовому термодинамічному просторі:

$$P = \frac{T}{2} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - 2\beta \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 (3V/(4\pi))^{4/3}} \right) - \frac{\beta^2}{4\pi} \quad (4.46)$$

⁵⁰Як сказано нижче, введення величини B є необхідним для виконання співвідношення Смарра для скінченних термодинамічних величин ЧД. У Розділі 2, де розглядаються поля ВІ та типу ВІ – LN і EN теж можна ввести величину B , проте там ми цього не робили, оскільки співвідношення Смарра не розглядалось. Розширену термодинаміку з членом B розглянуто в [98] для d -вимірних ЧД в LN та EN електродинаміках.

Це рівняння, однак, зручніше переписати, виразивши його не через термодинамічний об'єм V , а через питомий об'єм v , лінійно пов'язаний з радіусом ГП:

$$v = 2r_+, \quad (4.47)$$

Такий зв'язок отримано шляхом розмірного аналізу (переходу від геометричної системи одиниць до «фізичної») [76]. З (4.39), (4.47) маємо:

$$V = \frac{\pi v^3}{6}. \quad (4.48)$$

Тоді рівняння стану (4.46) запишеться:

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} (1 - 2\beta \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 v^4/16}) - \frac{\beta^2}{4\pi}. \quad (4.49)$$

Отримане рівняння $P(v, T, Q_e, Q_m)$ є схожим до рівняння стану газу Ван дер Ваальса:

$$P = \frac{T}{v - b} - \frac{a}{v^2}, \quad (4.50)$$

де величини a та b є параметрами моделі газу Ван дер Ваальса⁵¹.

Система рівнянь для критичних значень v_c, T_c рівняння (4.49) має вигляд:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_{T, Q_e, Q_m} \Big|_{v_c, T_c} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right)_{T, Q_e, Q_m} \Big|_{v_c, T_c} = 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

і дає рівняння для v_c, T_c :

$$\begin{cases} 8(Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 v_c^4/16)^{3/2} = \beta(Q_e^2 + Q_m^2)[16(Q_e^2 + Q_m^2) + 3\beta^2 v_c^4] \\ T_c = \frac{1}{\pi v_c} \left(1 - \frac{2\beta(Q_e^2 + Q_m^2)}{\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 v_c^4/16}} \right). \end{cases} \quad (4.52)$$

Значенням v_c, T_c відповідає критичний тиск $P_c = P(v_c, T_c, Q_e, Q_m)$. Перше рівняння системи (4.52) є кубічним по відношенню до величини v_c^4 . Його аналіз приводить до умови існування дійсного додатного кореня v_c^4 , а, значить,

⁵¹Детальніше їх зміст обговорено у наступному підрозділі при розгляді ефекту Джоуля-Томсона.

дійсного додатного значення v_c :

$$\frac{1}{\sqrt{8\beta}} < \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2}, \quad (4.53)$$

тобто існування критичних параметрів залежить від параметра β . В області:

$$\frac{1}{\sqrt{8\beta}} < \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2} < \frac{1}{2\beta} \quad (4.54)$$

існує два дійсних додатних кореня для v_c , тоді як в області:

$$\frac{1}{2\beta} < \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2} \quad (4.55)$$

тільки один. В області (4.54) ми обиратимемо більший із двох коренів v_c . Наочно графічний розв'язок першого рівняння системи (4.52) для v_c в залежності від β при різних значеннях параметрів Q_e , Q_m демонструє графік у Додатку Г. Його побудовано для неявно заданої функції $f(v_c, \beta) = 0$, отриманої з першого рівняння системи (4.52). Цей графік ілюструє нерівності (4.53) та (4.54), з нього видно, що більший корінь v_c із двох в області (4.54) обирається з міркувань «збереження неперервності» функції $v_c(\beta)$. В силу складності першого рівняння системи (4.52) ми не приводимо тут його аналітичного розв'язку.

Граничний випадок $Q_m = 0$, $\beta \rightarrow +\infty$ приводить рівняння стану (4.49) до відповідного рівняння для ЧД RN-AdS [76]:

$$P^{\text{RN}} = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q_e^2}{\pi v^4} \quad (4.56)$$

разом із його критичними параметрами:

$$P_c^{\text{RN}} = \frac{1}{96\pi Q_e^2}, \quad v_c^{\text{RN}} = 2\sqrt{6}Q_e, \quad T_c^{\text{RN}} = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q_e}. \quad (4.57)$$

Рівняння (4.56) допускає фазовий перехід для будь-якого значення Q_e ⁵², що узгоджується із умовою (4.53), оскільки в границі $Q_m = 0$, $\beta \rightarrow +\infty$ вона переходить просто в $Q_e > 0$. Також рівняння (4.56), виражене в приведених одиницях:

$$p = \frac{P}{P_c}, \quad \nu = \frac{v}{v_c}, \quad \tau = \frac{T}{T_c} \quad (4.58)$$

⁵²Електричний заряд ЧД вважається додатним, $Q_e > 0$.

не залежить від параметра Q_e (як і для газу Ван дер Ваальса не залежить від параметрів a, b [47]), приймаючи вигляд:

$$p^{\text{RN}} = \frac{8\tau}{3\nu} - \frac{2}{\nu^2} + \frac{1}{3\nu^4}, \quad (4.59)$$

тоді як рівняння (4.49) не володіє такою особливістю. При великих значеннях ν рівняння (4.49) дає ту ж асимптотику $P = T/\nu$, що і (4.56).

Ізотерми рівняння стану (4.49) у приведених одиницях на (p, ν) діаграмі для різних значень температури τ при скінченному β показано на Рис. 4.7. Для їх побудови спочатку для заданих значень параметрів Q_e, Q_m, β чисельно знаходиться корінь ν_c першого рівняння системи (4.52), далі за другою формулою системи (4.52) обчислюється T_c , а також $P_c = P(\nu_c, T_c, Q_e, Q_m)$. Після цього здійснюється перехід до приведених одиниць (4.58) і будуються ізотерми для різних значень τ : для критичного значення $\tau = 1$, в області низьких $\tau < 1$ та високих $\tau > 1$ температур. Критичній ізотермі на графіку відповідає точка перегину ($p = 1, \nu = 1$), що означає фазовий перехід 2-го роду в околі цієї точки. В області високих температур фазовий перехід відсутній, тоді як в області низьких температур маємо фазовий перехід 1-го роду, тобто співіснування фаз разом із ділянками локального мінімуму та максимуму, які у випадку газу Ван дер Ваальса відповідають метастабільним станам.

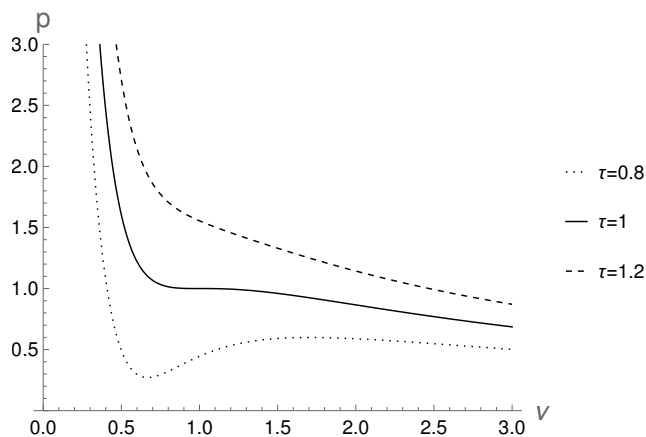


Рис. 4.7: Ізотерми $p(\nu, \tau, Q_e, Q_m)$ при $\beta = 0.5, Q_e = 1, Q_m = 0$. Для цих значень параметрів чисельний розрахунок дає $\nu_c = 4.5, T_c = 0.045, P_c = 0.0036$.

На Рис. 4.8, 4.9 критичні ізотерми представлено для різних β та Q_e , відповідно, а також для RN-AdS випадку (4.59). Із другого графіка видно, що для скінченного значення β при збільшенні заряду Q_e криві прямують до свого граничного положення. Взагалі, критичні ізотерми на цих графіках мають схожий вигляд, що свідчить про подібний якісний вплив на них параметрів Q_e (а значить і Q_m) та β .

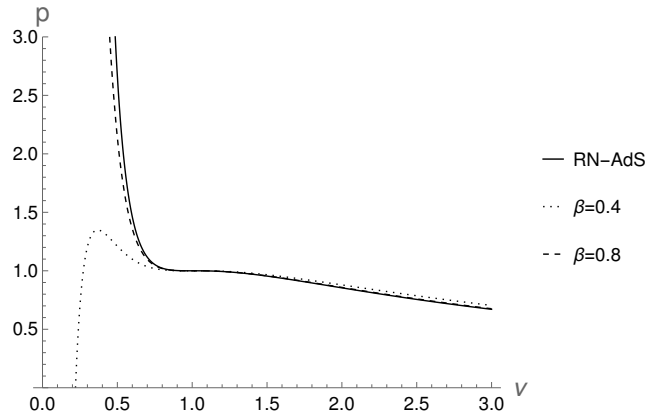


Рис. 4.8: Критичні ізотерми $p(v, \tau = 1, Q_e, Q_m)$ при $Q_e = 1, Q_m = 0$. Чисельний розрахунок дає $v_c = 4.2, T_c = 0.046, P_c = 0.0038$ для $\beta = 0.4$; $v_c = 4.8, T_c = 0.044, P_c = 0.0034$ для $\beta = 0.8$.

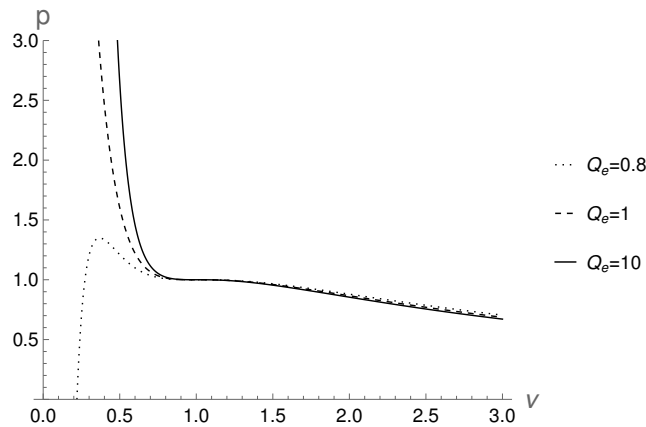


Рис. 4.9: Критичні ізотерми $p(v, \tau = 1, Q_e, Q_m)$ при $\beta = 0.5, Q_m = 0$. Чисельний розрахунок дає $v_c = 3.3, T_c = 0.057, P_c = 0.0059$ для $Q_e = 0.8$; $v_c = 4.5, T_c = 0.045, P_c = 0.0036$ для $Q_e = 1$; $v_c = 49, T_c = 0.0043, P_c = 0.000033$ для $Q_e = 10$.

Використовуючи рівняння стану (4.49) та друге рівняння системи (4.52) для T_c , отримуємо термодинамічне критичне відношення:

$$\frac{P_c v_c}{T_c} = 1 - \frac{2 + \beta^2 v_c^2 - 4\beta \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 v_c^4 / 16}}{4 - 8\beta(Q_e^2 + Q_m^2)(Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 v_c^4 / 16)^{-1/2}}, \quad (4.60)$$

де v_c задовольняє першому рівнянню системи (4.52). У границі $Q_m = 0$, $\beta \rightarrow +\infty$ це відношення переходить у:

$$\frac{P_c v_c}{T_c} \Big|_{Q_m=0}^{\beta \rightarrow +\infty} = \frac{3}{8}, \quad (4.61)$$

яке також можна безпосередньо отримати з (4.57). Цікаво зауважити, що (4.61) співпадає з відповідним результатом для газу Ван дер Ваальса [47]. Саме відношення (4.60) залежить від параметрів Q_e , Q_m , β .

Відзначимо одну особливість відношення (4.60) — його залежність тільки від комбінації параметрів $\beta\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2}$, що продемонстровано двома графіками на Рис. 4.10. Без втрати загальності прийнято $Q_m = 0$ і згадана комбінація переходить у βQ_e . Показано залежності $P_c v_c/T_c(\beta)$ для різних Q_e на лівому і $P_c v_c/T_c(Q_e)$ для різних β на правому графіках. Параметри Q_e та β підібрані так, щоб комбінація βQ_e залишалась постійною. Як видно, ці графіки є ідентичними, що і означає незалежність $P_c v_c/T_c$ від βQ_e . Це зокрема означає, що при скінченному β збільшення заряду Q_e приводить відношення (4.60) до граничного випадку (4.61) ЧД RN-AdS. Графіки на Рис. 4.10 будуються шляхом чисельного розв'язування першого рівняння системи (4.52) для v_c з наступною підстановкою у (4.60).

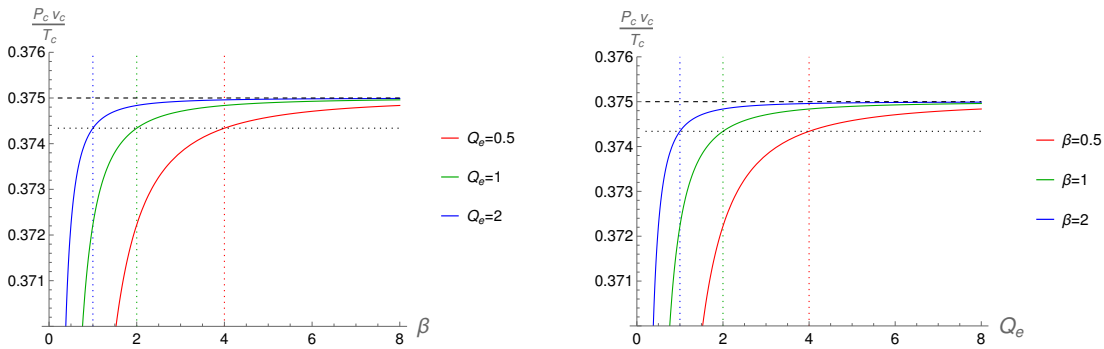


Рис. 4.10: $P_c v_c/T_c(\beta)$ та $P_c v_c/T_c(Q_e)$ при $Q_m = 0$. Вертикальні крапкові прямі відповідають $\beta = 1$, $\beta = 2$, $\beta = 4$ (лівий графік) та $Q_e = 1$, $Q_e = 2$, $Q_e = 4$ (правий графік). На горизонтальній крапковій прямій в точках її перетину із суцільними кривими маємо однакове значення $P_c v_c/T_c$. В цих точках комбінація βQ_e зберігається і рівна 2. Лівий та правий графіки є ідентичними і отримуються заміною $\beta \mapsto Q_e$, $Q_e \mapsto \beta$. Горизонтальна штрихова пряма відповідає критичному відношенню ЧД RN-AdS, рівному $3/8$.

Нарешті, обчислимо ізобарну теплоємність:

$$C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P, Q_e, Q_m} = T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_{P, Q_e, Q_m}^{-1}. \quad (4.62)$$

Замість того, щоб використовувати вираз (4.31) для температури T та зв'язок (4.37) між ентропією та радіусом ГП, і отримуючи таким чином теплоємність у змінних Λ , r_+ , як це було зроблено у двох попередніх розділах, отримуємо її у термодинамічних величинах P , v . Використовуючи рівність:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_{P, Q_e, Q_m} = \frac{dv}{dS} \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_{P, Q_e, Q_m}, \quad (4.63)$$

та залежності (4.40), (4.48), отримуємо $v = 2\sqrt{S/\pi}$, $dv/dS = 2/(\pi v)$. Виражаючи з рівняння стану (4.49) температуру:

$$T = \left(P + \frac{\beta^2}{4\pi} \right) v + \frac{1}{2\pi v} \left(1 - 2\beta \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 v^4/16} \right), \quad (4.64)$$

і підставляючи в (4.63), маємо з (4.62):

$$C_P = -2\pi^2 v^3 T \left(2 - (4\pi P + \beta^2) v^2 - \frac{4\beta(Q_e^2 + Q_m^2 - \beta^2 v^4/16)}{\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 v^4/16}} \right)^{-1}, \quad (4.65)$$

де T визначається (4.64). Границя $Q_m = 0$, $\beta \rightarrow +\infty$ дає відомий результат для теплоємності ЧД RN-AdS [76]:

$$C_P^{\text{RN}} = -2\pi^2 v^3 T \left(2 - 4\pi P v^2 - \frac{24Q_e^2}{v^2} \right)^{-1}, \quad (4.66)$$

де температуру виражено з рівняння (4.56):

$$T = Pv + \frac{1}{2\pi v} - \frac{2Q_e^2}{\pi v^3}. \quad (4.67)$$

Криві $C_P(v)$ для різних значень β , а також для RN-AdS випадку показано на Рис. 4.11. Як і у двох попередніх розділах, тут є нефізична область значень $v = 2r_+$, де $C_P < 0$, що відповідає області від'ємної температури. В області, де $C_P > 0$ маємо монотонну зростаючу поведінку теплоємності.

Аналогічні термодинамічні величини для ЧД без магнітного заряду в електродинаміці ВІ з одним інваріантом поля були отримані в роботі [77].

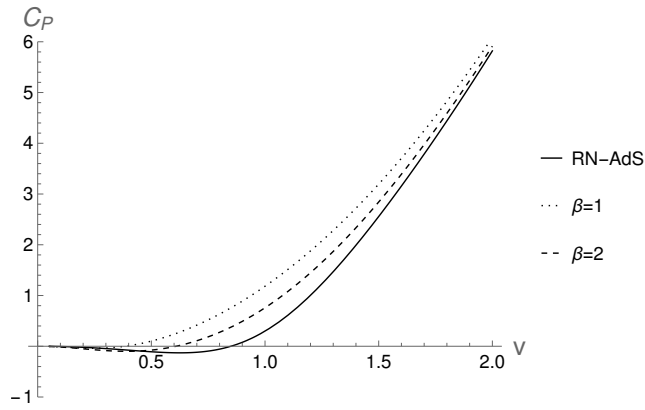


Рис. 4.11: Ізобарна теплоємність $C_P(v)$ при $P = 1$, $Q_e = 1$, $Q_m = 0$.

4.5. Ефект Джоуля-Томсона

Ототожнення від'ємної космологічної сталої з термодинамічним тиском дозволяє вивчати розширену термодинаміку ЧД в широкому контексті. Одним із класичних термодинамічних процесів є процес Джоуля-Томсона, який полягає в адіабатному повільному стаціонарному протіканні (дроселюванні) газу через пористу перегородку внаслідок підтримання сталого перепаду тиску по різні від неї сторони, де стан газу можна вважати рівноважним. Такий процес є ізентальпійним, під час нього ентальпія газу зберігається. Для ідеального газу його температура по обидві сторони від перегородки не змінюється, тоді як для реальних газів вона може як зменшуватись, так і збільшуватись. Така зміна температури газу при дроселюванні називається ефектом Джоуля-Томсона. Наприклад, газ Ван дер Ваальса з рівнянням стану (4.50) у випадку нехтування силами міжмолекулярного притягання ($a = 0$, $b \neq 0$) при такому адіабатному розширенні нагрівається (від'ємний ефект Джоуля-Томсона), тоді як у випадку нехтування розмірами молекул газу ($a \neq 0$, $b = 0$) — охолоджується (додатний ефект Джоуля-Томсона). У загальному випадку ($a \neq 0$, $b \neq 0$) охолодження чи нагрівання газу Ван дер Ваальса залежить від співвідношення між параметрами a та b , оскільки їх вплив на ефект Джоуля-Томсона протилежний, тому останній може бути як від'ємним, так і додатним [35].

Розглянемо процес Джоуля-Томсона для рівняння стану (4.46). Коефіці-

єнт Джоуля-Томсона [47]⁵³:

$$\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_M \quad (4.68)$$

характеризує зміну температури ЧД відносно зміни зовнішнього тиску при сталій ентальпії ЧД — її масі. Для подальших обчислень (4.68) зручніше переписати у вигляді:

$$\mu = \frac{T(\partial V/\partial T)_P - V}{C_P}. \quad (4.69)$$

При інверсних значеннях V_i , T_i , P_i коефіцієнт μ дорівнює нулеві, що означає дві області — охолодження ($\mu > 0$) та нагрівання ($\mu < 0$) на (T, P) діаграмі. При «розширенні» ЧД (зростанні її термодинамічного об'єму V) вона охолоджується при $\mu > 0$ і нагрівається при $\mu < 0$. Прирівнюючи (4.69) до нуля, маємо інверсну температуру T_i :

$$T_i = V \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \Big|_{V=V_i, P=P_i}. \quad (4.70)$$

Виражаючи з (4.49) температуру, переходячи від V до v згідно (4.48), враховуючи $V_i = V(v_i)$, підставляючи в отриманий вираз значення інверсного тиску $P_i = P(v_i, T_i, Q_e, Q_m)$ відповідно до (4.49), отримуємо з (4.70):

$$T_i = -\frac{1}{2\pi v_i} + \frac{\beta(Q_e^2 + Q_m^2)}{\pi v \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 v_i^4/16}}, \quad (4.71)$$

де P_i дається рівнянням стану (4.49):

$$P_i = \frac{T_i}{v_i} - \frac{1}{2\pi v_i^2} \left(1 - 2\beta \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 v_i^4/16} \right) - \frac{\beta^2}{4\pi}, \quad (4.72)$$

а T_i визначається з (4.71). Система рівнянь (4.71)-(4.72) є параметричними рівняннями $T_i = T_i(v_i)$, $P_i = P_i(v_i)$, графік функції $T_i(P_i)$ називається інверсійною кривою.

Виключаючи з системи (4.71)-(4.72) інверсну температуру, отримуємо рівняння для визначення v_i при даному P_i :

$$1 + \left(\pi P_i + \frac{\beta^2}{4} \right) v_i^2 - \frac{\beta[2(Q_e^2 + Q_m^2) + \beta^2 v_i^4/16]}{\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2 + \beta^2 v_i^4/16}} = 0. \quad (4.73)$$

⁵³Тут і далі у цьому розділі величини Q_e , Q_m , β вважаються параметрами, їх фіксування при обчисленні відповідних похідних додатково не вказується.

Це рівняння четвертого степеня для величини v_i^2 , що дає один дійсний додатний корінь для v_i в області:

$$\frac{1}{2\beta} < \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2}. \quad (4.74)$$

Зауважимо, що умова (4.74) співпадає з умовою (4.55) існування одного дійсного додатного кореня для критичного об'єму v_c . Також особливістю умови (4.74) є її незалежність від P_i . Графічні розв'язки рівняння (4.73) для v_i в залежності від β при різних фіксованих Q_e, Q_m для різних значень P_i показані на рисунках у Додатку Д. Ці графіки також наочно демонструють незалежність умови (4.74) від P_i .

У границі $Q_m = 0, \beta \rightarrow +\infty$ інверсні значення (4.71), (4.72) прямують до відповідних значень для ЧД RN-AdS [109]:

$$T_i = -\frac{1}{2\pi v_i} + \frac{4Q_e^2}{\pi v_i^3}, \quad (4.75)$$

$$P_i = \frac{T_i}{v_i} - \frac{1}{2\pi v_i^2} + \frac{2Q_e^2}{\pi v_i^4}, \quad (4.76)$$

і які приводять до рівняння для v_i :

$$\pi P_i v_i^4 + v_i^2 - 6Q_e^2 = 0, \quad (4.77)$$

розв'язок якого, будучи підставленим у (4.75), дає явне рівняння інверсійної кривої $T_i(P_i)$ [109]:

$$T_i = \frac{\sqrt{P_i}(1 + 16\pi Q_e^2 P_i - \sqrt{1 + 24\pi Q_e^2 P_i})}{\sqrt{2\pi}(-1 + \sqrt{1 + 24\pi Q_e^2 P_i})^{3/2}}. \quad (4.78)$$

Умова (4.74) у границі для ЧД RN-AdS переходить просто в умову $Q_e > 0$ для існування одного дійсного додатного кореня рівняння (4.77).

Інверсійні криві $T_i(P_i)$ для різних значень β при фіксованих зарядах Q_e, Q_m , а також для ЧД RN-AdS (4.78) показані на Рис. 4.12. В силу складності рівняння (4.73) їх побудовано поточною шляхом чисельного розв'язування цього рівняння для кожного значення аргументу P_i з наступною підстановкою у (4.71).

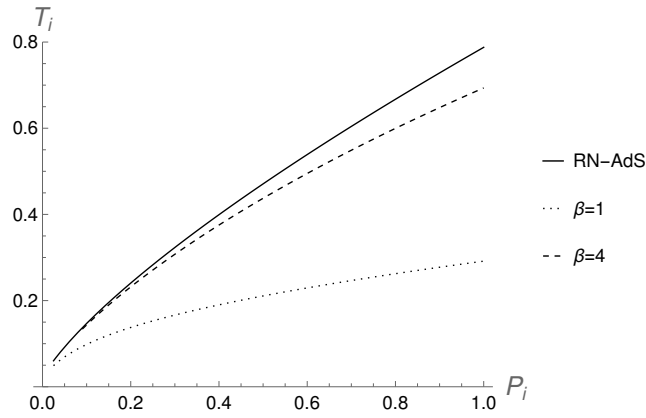


Рис. 4.12: Інверсійні криві $T_i(P_i)$ при $Q_e = 1$, $Q_m = 0$.

Побудуємо тепер ізоентальпійні криві $T(P)$ при сталій масі ЧД. Використаємо вирази для маси $M(r_+, \Lambda)$ (4.25) та температури $T(r_+, \Lambda)$ (4.31) при $k = 1$ і перейдемо від Λ до P згідно (4.38). З (4.25) виразимо P і отримаємо $P(r_+, M)$. Разом з функцією $T(r_+, P)$ маємо параметричні рівняння:

$$\begin{cases} P = P(r_+, M) \\ T = T(r_+, P(r_+, M)) \end{cases} \quad (4.79)$$

для функції $T(P, M)$ (параметром є r_+), де різні значення M відповідають ізоентальпійним кривим.

На Рис. 4.13 ізоентальпійні криві показано для різних M при скінченному β та фіксованих зрядах Q_e, Q_m . Також показано інверсійну криву $T_i(P_i)$ для тих самих значень параметрів β, Q_e, Q_m . Вона перетинає ізоентальпійні криві у точках їх максимуму, так як при інверсних значеннях P_i, T_i коефіцієнт Джоуля-Томсона (4.68) рівний нулеві, що означає екстремум функції $T(P)$ ⁵⁴. Зліва від інверсійної кривої знаходиться область охолодження ($\mu > 0$), де ЧД охолоджується, а справа — область нагрівання ($\mu < 0$), де ЧД нагрівається при ізоентальпійному розширенні. Ізоентальпійні криві на цьому графіку будуються параметрично відповідно до (4.79).

Зауважимо, що ми не даємо буквальної інтерпретації ефекту Джоуля-Томсона для ЧД, що є «пористою перегородкою» і т.п., розглядаючи його формально, використовуючи відповідне рівняння стану.

⁵⁴Протиріччя щодо того, що тут інверсійну криву показано на графіку з осями P, T , а не P_i, T_i як на Рис. 4.12), звичайно немає.

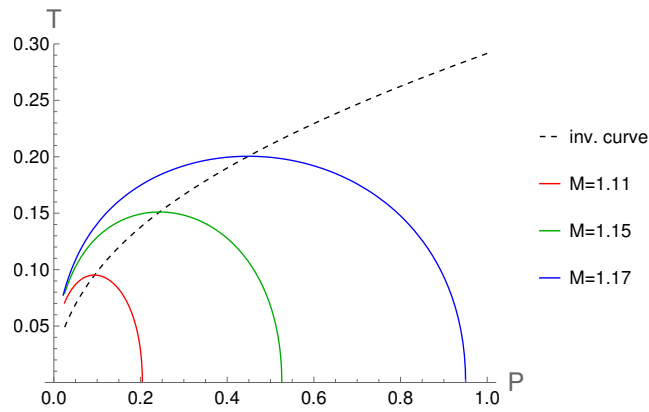


Рис. 4.13: Ізоентальпійні криві $T(P, M)$ при $\beta = 1$, $Q_e = 1$, $Q_m = 0$, а також інверсійна крива для тих самих β , Q_e , Q_m .

Ефект Джоуля-Томсона для електрично зарядженої ЧД з полем ВІ було розглянуто у нещодавній статті [130]. Цю статтю було помічено вже після отримання результатів цього підрозділу, тому в цьому розумінні вони є повністю незалежними.

Висновки

Досліджено розширену термодинаміку трьох моделей чорних дір з нелінійними матеріальними полями в айнштайнівській гравітації. Усі результати, включаючи вихідні рівняння поля та їх розв'язки були виведені незалежно з інтегралу дії системи, у цьому сенсі дана робота є самодостатнім послідовним дослідженням. Даються перехресні посилання між різними розділами дисертації та посилання на наявні дослідження у літературі. Проаналізовано фізичну поведінку отриманих розв'язків, розглянуто їх часткові та граничні випадки.

Особливістю Моделі 1 є вивчення розширеної термодинаміки для 3-вимірних статичних чорних дір зі степеневим, Борна-Інфельда, логарифмічним та експоненційним електромагнітними полями, порівняння їх між собою, аналіз впливу параметрів нелінійності цих полів на отримані розв'язки. Аналогічні рівняння та розв'язки без дослідження розширеної термодинаміки було розглянуто в [81] для поля Борна-Інфельда і полів типу Борна-Інфельда, а також в [88] для степеневого поля. В [98] розширену термодинаміку було досліджено для статичних ЧД з логарифмічним та експоненційним полями у вищих ($d \geq 4$) вимірах простору-часу.

Унікальністю Моделі 2 є отримання точних квадратурних, а також аналітичних асимптотичних розв'язків для недіагональної метричної функції та магнітного поля 3-вимірної чорної діри зі степеневим електромагнітним полем у випадку повільного обертання. Розв'язки для електромагнітного поля знайдені у загальному випадку без накладання на них додаткових зв'язків. Розглянуто питання фізичного змісту отриманих констант моделі. В [26] було розглянуто 3-вимірну чорну діру з довільним обертанням для спеціального випадку, де електричне та магнітне поля є пропорційними між собою. У [67] було досліджено $d \geq 4$ -вимірні чорні діри з повільним обертанням та степеневим електромагнітним полем.

Оригінальністю Моделі 3 є розгляд топологічних розв'язків, магнітного заряду, термодинамічного критичного відношення, а також ефекту Джоуля-Томсона для 4-вимірної статичної чорної діри з оригінальним полем Борна-

Інфельда, що містить два інваріанти поля. Деякі аналогічні результати розширеної термодинаміки 4-вимірних статичних чорних дір без магнітного заряду з одним інваріантом поля Борна-Інфельда були отримані в [77]. Ефект Джоуля-Томсона для чорної діри Райснера-Нордстрьома з від'ємною космологічною сталою було розглянуто в [130] зі зробленим наприкінці Розділу 4 зауваженням.

Отже, завдання дослідження, поставлені у Вступі цієї дисертації виконано. Результати описані у Розділах 2, 3, 4 були опубліковані автором цієї дисертації у співавторстві з моїм науковим керівником М. М. Стецком у статтях [122], [126], [131], відповідно.

Подяки

Ця кандидатська дисертація є підсумком мого навчання в аспірантурі кафедри теоретичної фізики імені професора Івана Вакарчука фізичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка.

Я дякую моєму науковому керівнику Миколі Миколайовичу Стецьку за можливість доторкнутись до сучасних теоретико-польових фізичних досліджень, взяти у них безпосередню участь, отримати навчальний та науковий досвід. Дякую за цікаву та важливу тему дисертації, що має пряме відношення до сучасних задач та проблем теоретичної фізики, пов'язаних з її різними розділами — гравітації, електродинаміки, термодинаміки, квантової теорії у застосуванні до чорних дір. Дякую за постановку задач в межах цієї теми, всебічну допомогу, терпіння та корисні зауваження в ході роботи над ними та цією дисертацією.

Я дякую професору Володимирі Михайловичу Ткачуку, завідувачу кафедрою теоретичної фізики імені професора Івана Вакарчука та старшому науковому співробітнику Богдану Ярославовичу Мелеху, завідувачу кафедрою астрофізики за підтримку на моєму навчальному та науковому шляху на цих кафедрах.

Я дякую проф. А. А. Ровенчаку за корисні поради та Технічні підказки, проф. Х. П. Гнатенко за можливість взяти участь у науковому проекті для молодих вчених, доц. В. С. Пастухову за цікаві та тривалі обговорення фізичних і не тільки питань, інж. О. Ю. Кіктевій за допомогу у різноманітних організаційних питаннях. Okремо я дякую моїй колезі Богдані Собко, з якою я мав радість навчатись разом в аспірантурі.

Більш широко, ця дисертація є результатом моїх десяти років навчання та занять астрономією і теоретичною фізикою на кафедрах астрофізики та теоретичної фізики імені професора Івана Вакарчука фізичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Я дякую викладачам фізичного, механіко-математичного та інших факультетів Львівського національного університету імені Івана Франка за моє навчання.

Я вдячний усім, завдяки кому написання цієї дисертації стало можливим.

Список використаних джерел

- [1] A. Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Sitzung der physikalisch-mathematischen klasse vom 25, 844 (1915).
- [2] A. Einstein. Die grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*. Vol. 354, 769 (1916).
- [3] K. Schwarzschild. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der Einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Gesamtsitzung vom 3, 189 (1916).
- [4] H. Reissner. Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der Einsteinschen theorie. *Annalen der Physik*. Vol. 355, 106 (1916).
- [5] M. Born, L. Infeld. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society A*. Vol. 144, 425 (1934).
- [6] Roy P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*. Vol. 11, 237 (1963).
- [7] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, R. Torrence. Metric of a rotating, charged mass. *Journal of Mathematical Physics*. Vol. 6, 918 (1965).
- [8] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*. Vol. 7, 2333 (1973).
- [9] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*. Vol. 43, 199 (1975).
- [10] S. Weinberg. Gravitation and cosmology. Principles and applications of the general theory of relativity. *John Wiley & Sons* (1972).
- [11] G. W. Gibbons, S. W. Hawking. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. *Physical Review D*. Vol. 15, 2738 (1977).
- [12] C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler. Gravitation. *Princeton University Press* (2017).

- [13] S. W. Hawking, Don N. Page. Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space. *Communications in Mathematical Physics*. Vol. 87, 577 (1983).
- [14] E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin. Non-linear electrodynamics from quantized strings. *Physics Letters B*. Vol. 163, 123 (1985).
- [15] I. Novikov, V. Kisin. Black holes and the universe. *Cambridge University Press* (1995).
- [16] R. C. Myers, M. J. Perry. Black holes in higher dimensional space-times. *Annals of Physics*. Vol. 172, 304 (1986).
- [17] Edward Witten. 2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nuclear Physics B*. Vol. 311, 46 (1988).
- [18] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*. Vol. 61, 1 (1989).
- [19] R. G. Leigh. Dirac-Born-Infeld action from Dirichlet σ -model. *Modern Physics Letters A*. Vol. 4, 2767 (1989).
- [20] Alfred Shapere, Sandip Trivedi, Frank Wilczek. Dual dilaton dyons. *Modern Physics Letters A*. Vol. 6, 2677 (1991).
- [21] Máximo Bañados, Claudio Teitelboim, Jorge Zanelli. Black hole in three-dimensional spacetime. *Physical Review Letters*. Vol. 69, 1849 (1992).
- [22] Máximo Bañados, Marc Henneaux, Claudio Teitelboim, Jorge Zanelli. Geometry of the 2 + 1 black hole. *Physical Review D*. Vol. 48, 1506 (1993).
- [23] Ashoke Sen. Electric-magnetic duality in string theory. *Nuclear Physics B*. Vol. 404, 109 (1993).
- [24] J. David Brown, James W. York, Jr. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Physical Review D*. Vol. 47, 1407 (1993).
- [25] K. S. Virbhadra, J. C. Parikh. A conformal scalar dyon black hole solution. *Physics Letters B*. Vol. 331, 302 (1994).
- [26] Masaru Kamata, Takao Koikawa. The electrically charged BTZ black hole with self (anti-self) dual Maxwell field. *Physics Letters B*. Vol. 353, 196 (1995).

- [27] Harald H. Soleng. Charged black points in general relativity coupled to the logarithmic $U(1)$ gauge theory. *Physical Review D*. Vol. 52, 6178 (1995).
- [28] G. W. Gibbons, D. A. Rasheed. Electric-magnetic duality rotations in non-linear electrodynamics. *Nuclear Physics B*. Vol. 454, 185 (1995).
- [29] Cristián Martínez, Jorge Zanelli. Conformally dressed black hole in $2 + 1$ dimensions. *Physical Review D*. Vol. 54, 3830 (1996).
- [30] Dieter R. Brill, Jorma Louko, Peter Peldán. Thermodynamics of $(3 + 1)$ -dimensional black holes with toroidal or higher genus horizon. *Physical Review D*. Vol. 56, 3600 (1997).
- [31] Rong-Gen Cai, Jeong-Young Ji, Kwang-Sup Soh. Topological dilaton black holes. *Physical Review D*. Vol. 57, 6547 (1998).
- [32] Claudia S. Peça, José P. S. Lemos. Thermodynamics of Reissner-Nordström-anti-de Sitter black holes in the grand canonical ensemble. *Physical Review D*. Vol. 59, 124007 (1999).
- [33] Juan Maldacena. The large- N limit of superconformal field theories and supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*. Vol. 38, 1113 (1999).
- [34] Per Kraus, Finn Larsen, Ruud Siebelink. The gravitational action in asymptotically AdS and flat space-times. *Nuclear Physics B*. Vol. 563, 259 (1999).
- [35] І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик. Загальний курс фізики. Т. 1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. *Техніка* (1999).
- [36] Marco M. Caldarelli, Guido Cognola, Dietmar Klemm. Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS black holes and conformal field theories. *Classical and Quantum Gravity*. Vol. 17, 399 (2000).
- [37] Cristián Martínez, Claudio Teitelboim, Jorge Zanelli. Charged rotating black hole in three spacetime dimensions. *Physical Review D*. Vol. 61, 104013 (2000).

- [38] Mauricio Cataldo, Norman Cruz, Sergio del Campo, Alberto Carcía. $(2 + 1)$ -dimensional black hole with Coulomb-like field. *Physics Letters B*. Vol. 484, 154 (2000).
- [39] A. H. Chamseddine, W. A. Sabra. Magnetic and dyonic black holes in $D = 4$ gauged supergravity. *Physics Letters B*. Vol. 485, 301 (2000).
- [40] Marion Wirschins, Abha Sood, Jutta Kunz. Non-Abelian Einstein-Born-Infeld black holes. *Physical Review D*. Vol. 63, 084002 (2001).
- [41] Sharmanthie Fernando, Don Krug. Charged black hole solutions in Einstein-Born-Infeld gravity with a cosmological constant. *General Relativity and Gravitation*. Vol. 35, 129 (2003).
- [42] Cristián Martínez, Ricardo Troncoso, Jorge Zanelli. De Sitter black hole with a conformally coupled scalar field in four dimensions. *Physical Review D*. Vol. 67, 024008 (2003).
- [43] L. Landau, E. Lifshitz. The classical theory of fields. *Butterworth-Heinemann* (1980).
- [44] M. Cvetič, H. Lü, C. N. Pope. Charged rotating black holes in five dimensional $U(1)^3$ gauged $N = 2$ supergravity. *Physical Review D*. Vol. 70, 081502 (2004).
- [45] Tanay Kumar Dey. Born-Infeld black holes in the presence of a cosmological constant. *Physics Letters B*. Vol. 595, 484 (2004).
- [46] Rong-Gen Cai, Da-Wei Pang, Anzhong Wang. Born-Infeld black holes in (A)dS spaces. *Physical Review D*. Vol. 70, 124034 (2004).
- [47] L. Landau, E. Lifshitz. Statistical physics. *Butterworth-Heinemann* (1980).
- [48] Y. Sekiwa. Thermodynamics of de Sitter black holes: thermal cosmological constant. *Physical Review D*. Vol. 73, 084009 (2006).
- [49] Sharmanthie Fernando. Thermodynamics of Born-Infeld-anti-de Sitter black holes in the grand canonical ensemble. *Physical Review D*. Vol. 74, 104032 (2006).

- [50] A. N. Aliev. Rotating black holes in higher dimensional Einstein-Maxwell gravity. *Physical Review D*. Vol. 74, 024011 (2006).
- [51] Ernesto F. Eiroa. Gravitational lensing by Einstein-Born-Infeld black holes. *Physical Review D*. Vol. 73, 043002 (2006).
- [52] T. Multamäki, I. Vilja. Spherically symmetric solutions of modified field equations in $f(R)$ theories of gravity. *Physical Review D*. Vol. 74, 064022 (2006).
- [53] Cristián Martínez, Ricardo Troncoso, Juan Pablo Staforelli. Topological black holes with a conformally coupled scalar field and electric charge. *Physical Review D*. Vol. 74, 044028 (2006).
- [54] Mokhtar Hassaine, Cristián Martínez. Higher-dimensional black holes with a conformally invariant Maxwell source. *Physical Review D*. Vol. 75, 027502 (2007).
- [55] Sean. A. Hartnoll, Pavel K. Kovtun. Hall conductivity from dyonic black holes. *Physical Review D*. Vol. 76, 066001 (2007).
- [56] Sean A. Hartnoll, Pavel K. Kovtun, Markus Müller, Subir Sachdev. Theory of the Nernst effect near quantum phase transitions in condensed matter and in dyonic black holes. *Physical Review B*. Vol. 76, 144502 (2007).
- [57] Ivan Zh. Stefanov, Stoytcho S. Yazadjiev, Michail D. Todorov. Scalar-tensor black holes coupled to Born-Infeld nonlinear electrodynamics. *Physical Review D*. Vol. 75, 084036 (2007).
- [58] Yun Soo Myung, Yong-Wan Kim, Young-Jai Park. Thermodynamics and phase transitions in the Born-Infeld-anti-de Sitter black holes. *Physical Review D*. Vol. 78, 084002 (2008).
- [59] Ahmad Sheykhi. Rotating black holes in Einstein-Maxwell-dilaton gravity. *Physical Review D*. Vol. 77, 104022 (2008).
- [60] Olivera Mišković, Rodrigo Olea. Thermodynamics of Einstein-Born-Infeld black holes with negative cosmological constant. *Physical Review D*. Vol. 77, 124048 (2008).

- [61] Mokhtar Hassaine, Cristián Martínez. Higher-dimensional charged black hole solutions with a nonlinear electrodynamics source. *Classical and Quantum Gravity*. Vol. 25, 195023 (2008).
- [62] Tameem Albash, Clifford V. Johnson. A holographic superconductor in an external magnetic field. *Journal of High Energy Physics*. Vol. 9, 121 (2008).
- [63] Wissam A. Chemissany, Mees de Roo, Sudhakar Panda. Thermodynamics of Born-Infeld black holes. *Classical and Quantum Gravity*. Vol. 25, 225009 (2008).
- [64] David Kastor, Sourya Ray, Jennie Traschen. Enthalpy and the mechanics of AdS black holes. *Classical and Quantum Gravity*. Vol. 26, 195011 (2009).
- [65] Yi-Huan Wei. Understanding first law of thermodynamics of black holes. *Physics Letters B*. Vol. 672, 98 (2009).
- [66] Hernán A. González, Mokhtar Hassaine, Cristián Martínez. Thermodynamics of charged black holes with nonlinear electromagnetic source. *Physical Review D*. Vol. 80, 104008 (2009).
- [67] S. H. Hendi. Slowly rotating black holes in Einstein-generalized Maxwell gravity. *Progress of Theoretical Physics*. Vol. 124, 493 (2010).
- [68] S. I. Kruglov. On generalized Born-Infeld electrodynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. Vol. 43, 375402 (2010).
- [69] Antonio De Felice, Shinji Tsujikawa. $f(R)$ theories. *Living Reviews in Relativity*. Vol. 13, 3 (2010).
- [70] Thomas P. Sotiriou, Valerio Faraoni. $f(R)$ theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*. Vol. 82, 451 (2010).
- [71] Brian P. Dolan. The cosmological constant and black hole thermodynamic potentials. *Classical and Quantum Gravity*. Vol. 28, 125020 (2011).
- [72] Brian P. Dolan. Pressure and volume in the first law of black hole thermodynamics. *Classical and Quantum Gravity*. Vol. 28, 235017 (2011).

- [73] M. Cvetič, G. W. Gibbons, D. Kubizňák, C. N. Pope. Black hole enthalpy and an entropy inequality for the thermodynamic volume. *Physical Review D*. Vol. 84, 024037 (2011).
- [74] S. Habib Mazharimousavi, O. Gurtug, M. Halilsoy, O. Unver. 2 + 1 dimensional magnetically charged solutons in Einstein-power-Maxwell theory. *Physical Review D*. Vol. 84, 124021 (2011).
- [75] R. A. Konoplya, Alexander Zhidenko. Quasinormal modes of black holes: from astrophysics to string theory. *Reviews of Modern Physics*. Vol. 83, 793 (2011).
- [76] David Kubizňák, Robert B. Mann. $P - V$ criticality of charged AdS black holes. *Journal of High Energy Physics*. Vol. 7, 33 (2012).
- [77] Sharmila Gunasekaran, David Kubizňák, Robert B. Mann. Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization. *Journal of High Energy Physics*. Vol. 11, 110 (2012).
- [78] A. Belhaj, M. Chabab, H. El. Mounni, M. B. Sedra. On thermodynamics of AdS black holes in arbitrary dimensions. *Chinese Physics Letters*. Vol. 29, 100401 (2012).
- [79] Rabin Banerjee, Dibakar Roychowdhury. Critical phenomena in Born-Infeld AdS black holes. *Physical Review D*. Vol. 85, 044040 (2012).
- [80] Rabin Banerjee, Dibakar Roychowdhury. Critical behavior of Born-Infeld AdS black holes in higher dimensions. *Physical Review D*. Vol. 85, 104043 (2012).
- [81] S. H. Hendi. Asymptotic charged BTZ black hole solutions. *Journal of High Energy Physics*. Vol. 3, 65 (2012).
- [82] O. Gurtug, S. Habib Mazharimousavi, M. Halilsoy. 2 + 1-dimensional electrically charged black holes in Einstein-power-Maxwell theory. *Physical Review D*. Vol. 85, 104004 (2012).

- [83] S. H. Hendi, M. H. Vahidinia. Extended phase space thermodynamics and $P - V$ criticality of black holes with a nonlinear source. *Physical Review D*. Vol. 88, 084045 (2013).
- [84] Suvankar Dutta, Akash Jain, Rahul Soni. Dyonic black hole and holography. *Journal of High Energy Physics*. Vol. 12, 60 (2013).
- [85] H. Lü, Yi Pang, C. N. Pope. AdS dyonic black hole and its thermodynamics. *Journal of High Energy Physics*. Vol. 11, 33 (2013).
- [86] Natacha Altamirano, David Kubizňák, Robert B. Mann, Zeinab Sherkatghadan. Thermodynamics of rotating black holes and black rings: Phase transitions and thermodynamic volume. *Galaxies*. Vol. 2, 89 (2014).
- [87] S. H. Hendi, M. Allahverdizadeh. Slowly rotating black holes with nonlinear electrodynamics. *Advances in High Energy Physics*. Vol. 2014, 390101 (2014).
- [88] S. H. Hendi, B. Eslam Panah, R. Saffari. Exact solutions of three-dimensional black holes: Einstein gravity versus $F(R)$ gravity. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 23, 1450088 (2014).
- [89] S. Habib Mazharimousavi, M. Halilsoy, O. Gurtug. A new Einstein-nonlinear electrodynamics solution in $2+1$ dimensions. *The European Physical Journal C*. Vol. 74, 2735 (2014).
- [90] A. Sheykhi, S. Hajkhalili. Dilaton black holes coupled to nonlinear electrodynamical field. *Physical Review D*. Vol. 89, 104019 (2014).
- [91] Andrey N. Makarenko, Sergei Odinstov, Gonzalo J. Olmo. Born-Infeld $f(R)$ gravity. *Physical Review D*. Vol. 90, 024066 (2014).
- [92] De-Cheng Zou, Shao-Jun Zhang, Bin Wang. Critical behavior of Born-Infeld AdS black holes in the extended phase space thermodynamics. *Physical Review D*. Vol. 89, 044002 (2014).
- [93] S. H. Hendi, S. Panahiyan, R. Mamasani. Thermodynamic stability of charged BTZ black holes: ensemble dependency problem and its solution. *General Relativity and Gravitation*. Vol. 47, 91 (2015).

- [94] S. I. Kruglov. A model of nonlinear electrodynamics. *Annals of Physics*. Vol. 353, 299 (2015).
- [95] S. I. Kruglov. Nonlinear electrodynamics and black holes. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. Vol. 12, 1550073 (2015).
- [96] Caio V. Costa, Dmitry M. Gitman, Anatoly E. Shabad. Finite field-energy of a point charge in QED. *Physica Scripta*. Vol. 90, 074012 (2015).
- [97] Carlos A. R. Herdeiro, Eugen Radu. Asymptotically flat black holes with scalar hair: a review. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 24, 1542014 (2015).
- [98] S. H. Hendi, S. Panahiyan, B. Eslam Panah. $P - V$ criticality and geometrical thermodynamics of black holes with Born-Infeld type nonlinear electrodynamics. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 25, 1650010 (2016).
- [99] Shoulong Li, H. Lü, Hao Wei. Dyonic (a)dS black holes in Einstein-Born-Infeld theory in diverse dimensions. *Journal of High Energy Physics*. Vol. 7, 4 (2016).
- [100] David Kubizňák, Robert B. Mann, Mae Teo. Black hole chemistry: thermodynamics with Lambda. *Classical and Quantum Gravity*. Vol. 34, 063001 (2017).
- [101] Leonardo Balart, Sharmanthie Fernando. A Smarr formula for charged black holes in nonlinear electrodynamics. *Modern Physics Letters A*. Vol. 32, 1750219 (2017).
- [102] S. I. Kruglov. Notes on Born-Infeld type electrodynamics. *Modern Physics Letters A*. Vol. 32, 1750201 (2017).
- [103] S. I. Kruglov. Born-Infeld-type electrodynamics and magnetic black holes. *Annals of Physics*. Vol. 383, 550 (2017).
- [104] S. I. Kruglov. Remarks on Heisenberg-Euler-type electrodynamics. *Modern Physics Letters A*. Vol. 32, 1750092 (2017).

- [105] Nora Bretón, Tyler Clark, Sharmanthie Fernando. Quasinormal modes and absorption cross-section of Born-Infeld-de Sitter black holes. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 26, 1750112 (2017).
- [106] S. H. Hendi, B. Eslam Panah, S. Panahiyan, A. Sheykhi. Dilatonic BTZ black holes with power-law field. *Physics Letters B*. Vol. 767, 214 (2017).
- [107] Wei Xu, De-Cheng Zou. $(2 + 1)$ -dimensional charged black holes with scalar hair in Einstein-power-Maxwell theory. *General Relativity and Gravitation*. Vol. 49, 73 (2017).
- [108] S. H. Hendi, B. Eslam Panah, S. Panahiyan, M. S. Talezadeh. Geometrical thermodynamics and $P - V$ criticality of the black holes with power-law Maxwell field. *The European Physical Journal C*. Vol. 77, 133 (2017).
- [109] Özgür Ökcü, Ekrem Aydiner. Joule-Thomson expansion of the charged AdS black holes. *The European Physical Journal C*. Vol. 77, 24 (2017).
- [110] S. I. Kruglov. Magnetically charged black hole in framework of nonlinear electrodynamics model. *International Journal of Modern Physics A*. Vol. 33, 1850023 (2018).
- [111] Ángel Rincón, Grigoris Panotopoulos. Quasinormal modes of scale dependent black holes in $(1 + 2)$ -dimensional Einstein-power-Maxwell theory. *Physical Review D*. Vol. 97, 024027 (2018).
- [112] Grigoris Panotopoulos, Ángel Rincón. Quasinormal modes of black holes in Einstein-power-Maxwell theory. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 27, 1850034 (2018).
- [113] B. Eslam Panah, S. H. Hendi, S. Panahiyan, M. Hassaine. BTZ dilatonic black holes coupled to Maxwell and Born-Infeld electrodynamics. *Physical Review D*. Vol. 98, 084006 (2018).
- [114] Jose Beltrán Jiménez, Lavinia Heisenberg, Gonzalo J. Olmo, Diego Rubiera-Garcia. Born-Infeld inspired modifications of gravity. *Physics Reports*. Vol. 727, 1 (2018).

- [115] Jie-Xiong Mo, Gu-Qiang Li, Shan-Quan Lan, Xiao-Bao Xu. Joule-Thomson expansion of d -dimensional charged AdS black holes. *Physical Review D*. Vol. 98, 124032 (2018).
- [116] S. Habib Mazharimousavi, M. Halilsoy. Electric black holes in a model of nonlinear electrodynamics. *Annalen der Physik*. Vol. 2019, 1900236 (2019).
- [117] S. I. Kruglov. Dyonic black holes in framework of Born-Infeld-type electrodynamics. *General Relativity and Gravitation*. Vol. 51, 121 (2019).
- [118] M. M. Stetsko. Slowly rotating Einstein-Maxwell-dilaton black hole and some aspects of its thermodynamics. *The European Physics Journal C*. Vol. 79, 244 (2019).
- [119] M. M. Stetsko. Topological black hole in the theory with nonminimal derivative coupling with power-law Maxwell field and its thermodynamics. *Physical Review D*. Vol. 99, 044028 (2019).
- [120] Grigoris Panotopoulos, Ángel Rincón. Charged slowly rotating toroidal black holes in the $(1 + 3)$ -dimensional Einstein-power-Maxwell theory. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 28, 1950016 (2019).
- [121] Adolfo Cisterna, Shi-Qian Hu, Xiao-Mei Kuang. Joule-Thomson expansion in AdS black holes with momentum relaxation. *Physics Letters B*. Vol. 797, 134883 (2019).
- [122] M. B. Tataryn, M. M. Stetsko. Three-dimensional static black hole with Λ and nonlinear electromagnetic fields and its thermodynamics. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 28, 1950160 (2019).
- [123] Grigoris Panotopoulos. Quasinormal modes of charged black holes in higher-dimensional Einstein-power-Maxwell theory. *Axioms*. Vol. 9, 33 (2020).
- [124] M. M. Stetsko. Static spherically symmetric Einstein-Yang-Mills-dilaton black hole and its thermodynamics. *Physical Review D*. Vol. 101, 124017 (2020).

- [125] M. M. Stetsko. Static topological black hole with a nonminimal derivative coupling and a nonlinear electromagnetic field of Born-Infeld type. *Physical Review D*. Vol. 101, 104004 (2020).
- [126] M. B. Tataryn, M. M. Stetsko. Three-dimensional slowly rotating black hole in Einstein-power-Maxwell theory. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 29, 2050111 (2020).
- [127] M. M. Stetsko. Static spherically symmetric black hole's solution in Einstein-Maxwell-Yang-Mills-dilaton theory. *International Journal of Modern Physics A*. Vol. 36, 2150034 (2021).
- [128] M. M. Stetsko. Static dilatonic black hole with nonlinear Maxwell and Yang-Mills fields of power-law type. *General Relativity and Gravitation*. Vol. 53, 2 (2021).
- [129] Kun Meng, Liazhen Cao, Jiaqiang Zhao, Tao Zhou, Fuyong Qin, Meihua Deng. Dyonic Born-Infeld black hole in four-dimensional Horndeski gravity. *Physics Letters B*. Vol. 819, 136420 (2021).
- [130] Shihao Bi, Minghao Du, Jun Tao, Feiyu Yao. Joule-Thomson expansion of Born-Infeld AdS black holes. *Chinese Physics C*. Vol. 45, 025109 (2021).
- [131] M. B. Tataryn, M. M. Stetsko. Thermodynamics of a static electromagnetic black hole in Einstein-Born-Infeld-AdS theory with different horizon geometries. *General Relativity and Gravitation*. Vol. 53, 72 (2021).

Додаток А. Необхідні відомості ЗТВ

Тут приводяться основні поняття та використовується «машинерія» ЗТВ у тензорному покомпонентному формалізмі, а також деякі технічні деталі обчислень, що зустрічаються при розгляді моделей у Розділах 2, 3, 4. Даний матеріал стосується рівнянь поля айнштайнівської гравітації та максвелівської електродинаміки в 4-вимірному просторі-часі з космологічною сталою, однак окремі розглянуті тут результати використовуються у Розділах 2, 3, 4 у випадках 3-вимірного простору-часу та нелінійного електромагнітного поля.

ЗТВ є геометричною теорією гравітації, згідно до якої, вся матерія у Всесвіті рухається у викривленому 4-вимірному просторі-часі, і в той же час, ця матерія формує геометричну структуру цього простору-часу. Таким чином, ЗТВ є нелінійною теорією, матерія і простір-час перебувають між собою у постійній взаємодії, рух матерії формує простір-час, а простір-час визначає рух матерії.

Простір-час ЗТВ є 4-вимірним рімановим многовидом із псевдоевклідовою метрикою, його геометрична структура визначається першою квадратичною формою⁵⁵:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = \overline{0, 3}, \quad (\text{A.1})$$

де скалярні функції $g_{\mu\nu}$ події простору-часу є компонентами метричного тензора. Локально простір-час ЗТВ є лінійним простором Мінковського в СТВ з діагональною метрикою:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (\text{A.2})$$

тобто достатньо малий окіл події многовиду простору-часу із відповідною точністю розглядається як плоский простір-час. ЗТВ є узагальненням СТВ на випадок гравітаційної взаємодії, яка розглядаються як прояв кривизни простору-часу, таким чином, викривлений простір-час і є гравітаційним полем⁵⁶.

⁵⁵Історично її називають квадратом інтервалу.

⁵⁶Геометрія може сприйматись як взаємодія, подібно до того, як два жуки, які в даний момент повзуть поруч сусідніми меридіанами поверхні сфери, з часом будуть зближуватись між собою, що може бути інтерпретовано як їх взаємне притягання.

Розподіл матерії та її рух у ЗТВ задається тензором енергії-імпульсу $T_{\mu\nu}$. У випадку, коли матерією є максвелівське електромагнітне поле тензор $T_{\mu\nu}$ є пов'язаний із цим полем. Основними рівняннями ЗТВ у цьому випадку є рівняння Айнштейна для гравітаційного поля та рівняння Максвелла для електромагнітного поля. Ці рівняння є детерміністичними і визначають динамічну взаємодію між гравітаційним та електромагнітним полями подібно до того, як 2-й закон Ньютона визначає зв'язок між прискоренням тіла та силами, що на нього діють. Принциповою відмінністю є те, що на відміну від ньютонівської механіки, ЗТВ є нелінійною теорією, 2-й закон Ньютона є системою із 3-х скалярних звичайних лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку для функцій $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, і прискорення тіла не впливає на сили, що на нього діють, тоді як рівняння Айнштейна є системою, взагалі кажучи, із 10-ти скалярних нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку у часткових похідних для функцій $g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Саме складність та громіздкість рівнянь Айнштейна є основною математично-технічною проблемою ЗТВ.

Як і закон динаміки Ньютона, рівняння Айнштейна та Максвелла можуть бути виведені у лагранжевому формалізмі. Функціонал дії айнштайнівського гравітаційного та максвелівського електромагнітного полів у 4-вимірному просторі часі з космологічною сталою Λ може бути записаний у вигляді:

$$I[g_{\mu\nu}, A_\mu] = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda - F). \quad (\text{A.3})$$

Тут інтегрування відбувається по елементу «об'єму» простору-часу і охоплює його область Ω , компоненти $g_{\mu\nu}$ метричного тензора та компоненти A_μ вектора потенціалу електромагнітного поля є польовими змінними гравітаційного та електромагнітного полів, відповідно. Позначення $g \equiv \det g_{\mu\nu}$ є детермінантом матриці метричного тензора, величина $R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ є слідом тензора Річчі і називається скалярною кривизною простору-часу, величини $g^{\mu\nu}$ є компонентами оберненого метричного тензора, $g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu$, де δ_μ^ν — символ Кронекера. Величина $F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, рівна згортці тензора електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$ із самим собою є максвелівським інваріантом поля, тензор

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ у свою чергу виражається через компоненти електромагнітного потенціалу шляхом антисиметризації.

Принцип найменшої дії $\delta_{g_{\mu\nu}} I = 0$ для (A.3) приводить до рівнянь Айнштайна. Маємо:

$$\delta_{g_{\mu\nu}} I = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \left[(R - 2\Lambda - F) \delta_{g_{\mu\nu}} \sqrt{-g} + \sqrt{-g} (\delta_{g_{\mu\nu}} R - \delta_{g_{\mu\nu}} F) \right]. \quad (\text{A.4})$$

Варіація $\delta_{g_{\mu\nu}} \sqrt{-g}$ рівна⁵⁷:

$$\delta_{g_{\mu\nu}} \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta_{g_{\mu\nu}} g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.5})$$

У варіації $\delta_{g_{\mu\nu}} R = R_{\mu\nu} \delta_{g_{\mu\nu}} g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta_{g_{\mu\nu}} R_{\mu\nu}$ другий доданок може бути опущений в силу рівності:

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta_{g_{\mu\nu}} R_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Використовуючи антисиметричність $F_{\mu\nu}$ та перепозначаючи індекси, маємо для $\delta_{g_{\mu\nu}} F$:

$$\delta_{g_{\mu\nu}} F = F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \delta_{g_{\mu\nu}} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) = 2F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} \delta_{g_{\mu\nu}} g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

Враховуючи довільність $\delta_{g_{\mu\nu}} g^{\mu\nu}$, отримуємо рівняння Айнштайна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.8})$$

де тензор енергії-імпульсу дається виразом:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} F + 2F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho}. \quad (\text{A.9})$$

Тензор Річчі $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$ є слідом тензора кривизни Рімана-Крістоффеля, тоді як останній виражається шляхом антисиметризації з використанням символів Крістоффеля 2-го роду та їх перших похідних:

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\chi} = \partial_\nu \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\chi} - \partial_\chi \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho} \Gamma^{\rho}{}_{\mu\chi} - \Gamma^{\lambda}{}_{\chi\rho} \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}. \quad (\text{A.10})$$

Нарешті, символи Крістоффеля виражаються через компоненти метричного тензора та їх перші похідні:

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.11})$$

⁵⁷Див., наприклад, [43].

Символи Крістоффеля задають афінну зв'язність на многовиді простору-часу і не є компонентами тензора. Вигляд формули (A.11) дає підстави називати $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ гравітаційним полем, а $g_{\mu\nu}$ його потенціалом.

Принцип найменшої дії $\delta_{A_\mu} I = 0$ для (A.3) приводить до рівнянь Максвелла. Маємо:

$$\delta_{A_\mu} I = -\frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \delta_{A_\mu} F. \quad (\text{A.12})$$

Використовуючи симетричність $g_{\mu\nu}$, антисиметричність $F_{\mu\nu}$ та перепозначаючи індекси, маємо для $\delta_{A_\mu} F$:

$$\begin{aligned} \delta_{A_\mu} F &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta_{A_\mu} (F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) = 2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \delta_{A_\mu} F_{\mu\nu} = \\ &= 2F^{\mu\nu} \delta_{A_\mu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 4F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta_{A_\mu} A_\nu, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

і що дає:

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta_{A_\mu} A_\nu = 0. \quad (\text{A.14})$$

Використовуючи рівності:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu} \delta_{A_\mu} A_\nu) = \delta_{A_\mu} A_\nu \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) + \sqrt{-g} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta_{A_\mu} A_\nu, \quad (\text{A.15})$$

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu} \delta_{A_\mu} A_\nu) = 0, \quad (\text{A.16})$$

і довільність $\delta_{A_\mu} A_\mu$, отримуємо рівняння Максвелла:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0. \quad (\text{A.17})$$

Систему рівнянь (A.8)-(A.9), (A.17) називають рівняннями поля Айнштайна-Максвелла, їх розв'язком є польові змінні $g_{\mu\nu}$ та A_μ (або $F_{\mu\nu}$).

На практиці для розв'язування рівнянь поля до них додають деякі відомості про модель досліджуваної системи, які містять інформацію про вибрані координати, симетрії і т.п. Це робиться шляхом задання невідомих метричних функцій та функцій потенціалу електромагнітного поля (або самих компонент електромагнітного поля).

Додаток Б. Деякі геометричні величини

Сюди винесено компоненти $g_{\mu\nu}$ та $g^{\mu\nu}$ метричного тензора та оберненого до нього, їх детермінанти $\det g_{\mu\nu}$ та $\det g^{\mu\nu}$, символи Крістоффеля $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, компоненти $R_{\mu\nu}$ тензора Річчі, а також скалярну кривизну R для усіх трьох досліджуваних моделей. Для величин з індексами приведено тільки їх ненульові значення, а також з урахуванням їх симетрій.

Модель 1

Метрика та детермінанти

$$\begin{aligned}g_{tt} &= -f, & g_{rr} &= \frac{1}{f}, & g_{\varphi\varphi} &= r^2, \\g^{tt} &= -\frac{1}{f}, & g^{rr} &= f, & g^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r^2}, \\ \det g_{\mu\nu} &= -r^2, & \det g^{\mu\nu} &= -\frac{1}{r^2}.\end{aligned}$$

Символи Крістоффеля

$$\begin{aligned}\Gamma^t_{tr} &= \frac{f'}{2f}, \\ \Gamma^r_{tt} &= \frac{f'f}{2}, & \Gamma^r_{rr} &= -\frac{f'}{2f}, & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -rf, \\ \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

Тензор Річчі

$$\begin{aligned}R_{tt} &= \frac{rf''f + f'f}{2r}, \\ R_{rr} &= -\frac{rf'' + f'}{2rf}, \\ R_{\varphi\varphi} &= -rf' .\end{aligned}$$

Скалярна кривизна

$$R = -\frac{rf'' + 2f'}{r}.$$

Модель 2

Метрика та детермінанти

$$\begin{aligned}g_{tt} &= -f, & g_{t\varphi} &= ar^2h, & g_{rr} &= \frac{1}{f}, & g_{\varphi\varphi} &= r^2, \\g^{tt} &= -\frac{1}{f}, & g^{t\varphi} &= \frac{ah}{f}, & g^{rr} &= f, & g^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r^2}, \\ \det g_{\mu\nu} &= -r^2, & \det g^{\mu\nu} &= -\frac{1}{r^2}.\end{aligned}$$

Як видно, у випадку повільного обертання ЧД отримані детермінанти співпадають із відповідним статичним випадком Моделі 1.

Символи Крістоффеля

$$\begin{aligned}\Gamma^t_{tr} &= \frac{f'}{2f}, & \Gamma^t_{r\varphi} &= -\frac{ar^2h'}{2f}, \\ \Gamma^r_{tt} &= \frac{f'f}{2}, & \Gamma^r_{t\varphi} &= -\frac{arf(rh' + 2h)}{2}, & \Gamma^r_{rr} &= -\frac{f'}{2f}, & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -rf, \\ \Gamma^\varphi_{tr} &= -\frac{a(rf'h - rfh' - 2fh)}{2rf}, & \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

Ті символи Крістоффеля, що не містять функції h співпадають з відповідними величинами Моделі 1, а решта — $\Gamma^t_{r\varphi}$, $\Gamma^r_{t\varphi}$, Γ^φ_{tr} — зумовлені наявністю функції h , тобто повільного обертання ЧД.

Тензор Річчі

$$\begin{aligned}R_{tt} &= \frac{rf''f + f'f}{2r}, \\ R_{t\varphi} &= -\frac{ar(2f'h + rfh'' + 3fh')}{2}, \\ R_{rr} &= -\frac{rf'' + f'}{2rf}, \\ R_{\varphi\varphi} &= -rf'.\end{aligned}$$

Діагональні компоненти співпадають із відповідними величинами Моделі 1, а компонента $R_{t\varphi}$ пов'язана з повільним обертанням ЧД.

Скалярна кривизна

$$R = -\frac{rf'' + 2f'}{r}.$$

Наявність повільного обертання не змінює значення скалярної кривизни порівняно зі статичним випадком Моделі 1.

Модель 3

Метрика та детермінанти

$k = 1$:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -f, & g_{rr} &= \frac{1}{f}, & g_{\theta\theta} &= r^2, & g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2 \theta, \\ g^{tt} &= -\frac{1}{f}, & g^{rr} &= f, & g^{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2}, & g^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \\ \det g_{\mu\nu} &= -r^4 \sin^2 \theta, & \det g^{\mu\nu} &= -\frac{1}{r^4 \sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

$k = 0$:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -f, & g_{rr} &= \frac{1}{f}, & g_{\theta\theta} &= r^2, & g_{\varphi\varphi} &= r^2 \theta^2, \\ g^{tt} &= -\frac{1}{f}, & g^{rr} &= f, & g^{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2}, & g^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r^2 \theta^2}, \\ \det g_{\mu\nu} &= -r^4 \theta^2, & \det g^{\mu\nu} &= -\frac{1}{r^4 \theta^2}. \end{aligned}$$

$k = -1$

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -f, & g_{rr} &= \frac{1}{f}, & g_{\theta\theta} &= r^2, & g_{\varphi\varphi} &= r^2 \operatorname{sh}^2 \theta, \\ g^{tt} &= -\frac{1}{f}, & g^{rr} &= f, & g^{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2}, & g^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r^2 \operatorname{sh}^2 \theta}, \\ \det g_{\mu\nu} &= -r^4 \operatorname{sh}^2 \theta, & \det g^{\mu\nu} &= -\frac{1}{r^4 \operatorname{sh}^2 \theta}. \end{aligned}$$

Видно, що відповідні компоненти $g_{\mu\nu}$ та $g^{\mu\nu}$ для різних значень k відрізняються між собою тільки $\varphi\varphi$ -компонентами, які є функціями окрім r , також і θ , що очевидно, і що в свою чергу впливає на значення детермінантів відповідних метрик та обернених до них.

Символи Крістоффеля

$k = 1$:

$$\Gamma^{t}_{tr} = \frac{f'}{2f},$$

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{f'f}{2}, \quad \Gamma^r_{rr} = -\frac{f'}{2f}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -rf, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -rf \sin^2 \theta,$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\frac{\sin 2\theta}{2},$$

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg} \theta.$$

$k = 0$:

$$\Gamma^{t}_{tr} = \frac{f'}{2f},$$

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{f'f}{2}, \quad \Gamma^r_{rr} = -\frac{f'}{2f}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -rf, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -rf\theta^2,$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\theta,$$

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{1}{\theta}.$$

$k = -1$:

$$\Gamma^{t}_{tr} = \frac{f'}{2f},$$

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{f'f}{2}, \quad \Gamma^r_{rr} = -\frac{f'}{2f}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -rf, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -rf \operatorname{sh}^2 \theta,$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\frac{\operatorname{sh} 2\theta}{2},$$

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \operatorname{cth} \theta.$$

Ті символи Крістоффеля, які є функціями тільки r є однаковими для усіх трьох геометрій.

Тензор Річчі

$k = 1$:

$$\begin{aligned}R_{tt} &= \frac{r f'' f + 2 f' f}{2r}, \\R_{rr} &= -\frac{r f'' + 2 f'}{2r f}, \\R_{\theta\theta} &= -r f' - f + 1, \\R_{\varphi\varphi} &= -(r f' + f - 1) \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

$k = 0$:

$$\begin{aligned}R_{tt} &= \frac{r f'' f + 2 f' f}{2r}, \\R_{rr} &= -\frac{r f'' + 2 f'}{2r f}, \\R_{\theta\theta} &= -r f' - f, \\R_{\varphi\varphi} &= -(r f' + f) \theta^2.\end{aligned}$$

$k = -1$:

$$\begin{aligned}R_{tt} &= \frac{r f'' f + 2 f' f}{2r}, \\R_{rr} &= -\frac{r f'' + 2 f'}{2r f}, \\R_{\theta\theta} &= -r f' - f - 1, \\R_{\varphi\varphi} &= -(r f' + f + 1) \operatorname{sh}^2 \theta.\end{aligned}$$

Ті компоненти тензора Річчі, які є функціями тільки r , на відміну від символів Крістоффеля, не є однаковими для різних геометрій. Так, $\theta\theta$ -компонента, будучи функцією тільки r , залежить від значення k , і може бути записаною у вигляді $R_{\theta\theta} = -r f' - f + k$.

Скалярна кривизна

$$R = -\frac{r^2 f'' + 4r f' + 2f - 2k}{r^2}.$$

Скалярна кривизна теж є функцією тільки r , але залежить від k подібно до компоненти $R_{\theta\theta}$.

Додаток В. Коефіцієнти асимптотичних розв'язків

Нижче представлені вирази для коефіцієнтів A_i та B_i , $i = \overline{1, 5}$ асимптотичних розв'язків для функції h Моделі 2, визначеної виразами (3.35) та (3.36), відповідно.

A_i , $i = \overline{1, 5}$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2q_e q}{\Lambda^2}, \\ A_2 &= \frac{2q_e q - c_1}{2\Lambda^2}, \\ A_3 &= -\frac{4q_e^3 q}{\Lambda^3}, \\ A_4 &= \frac{q_e^2 c_1 - 2q_e^3 q - 2q_e q m}{\Lambda^3}, \\ A_5 &= \frac{q_e^2 c_1 - 2q_e^3 q + 2c_1 m - 2q_e q m}{4\Lambda^3}. \end{aligned}$$

B_i , $i = \overline{1, 5}$:

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{c_1}{2\Lambda^2}, \\ B_2 &= \frac{c_1 m}{2\Lambda^3}, \\ B_3 &= -\frac{1 - 7s + 16s^2 - 12s^3}{\Lambda^2 s(s-1)(3s-1)} q \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{1}{2s-1}}, \\ B_4 &= -\frac{1 - 8s + 24s^2 - 32s^3 + 16s^4}{\Lambda^3 s^2 (s-1)^2} q_e q \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{2}{2s-1}}, \\ B_5 &= \frac{1}{\Lambda^3 (s-1)(3s-1)} \left(2[q_e c_1 - qm - 4sq_e c_1 + 4sqm + 4s^2 q_e c_1 - \right. \\ &\quad \left. - 4s^2 qm] \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{1}{2s-1}} - 2^{s-1} c_1 [1 - 4s + 4s^2] \left(\frac{q_e}{2^{s-1}s} \right)^{\frac{2s}{2s-1}} \right). \end{aligned}$$

Додаток Г. Обчислення кутового моменту

Розглянемо квазілокальний формалізм Бровна-Йорка [24] для знаходження збережуваної величини ЧД — її кутового моменту у випадку 3-вимірної моделі з повільним обертанням Розділу 3. Для цього до об'ємної дії (3.1) потрібно додати поверхневі доданки — Gibbons-Hawking-York (GHY) [24] та спеціальний контрчлен, пов'язаний із наявністю космологічної сталої [34]. Цим доданкам відповідає поверхневий тензор енергії-імпульсу [93]:

$$T_{\mu\nu}^{\text{bound}} = \frac{1}{8\pi} \left(\underbrace{\Theta_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}\Theta}_{\text{GHY term}} + \underbrace{\gamma_{\mu\nu}\sqrt{-\Lambda}}_{\text{counterterm}} \right). \quad (\text{Г.1})$$

Тоді кутовий момент ЧД можна визначити з:

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{\sigma} T_{\mu\nu}^{\text{bound}} u^\mu \zeta^\nu. \quad (\text{Г.2})$$

Тут:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu,$$

$$\Theta = \Theta_\mu^\mu = \gamma^{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu},$$

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu,$$

$$n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu,$$

$$\Theta_{\mu\nu} = -\delta_\mu^\lambda \nabla_\lambda n_\nu = -\delta_\mu^\lambda (\partial_\lambda n_\nu - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} n_\rho),$$

$$\sigma \equiv \det \sigma_{\mu\nu},$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu,$$

$$u^\mu = g^{\mu\nu} u_\nu.$$

Величини n_μ та u_μ є компонентами просторовоподібного та часовоподібного одиничних векторів, відповідно, $n_\mu n^\mu = 1$, $u_\mu u^\mu = -1$, величини ζ^μ є компонентами вектора Кіллінга $\zeta \equiv \partial/\partial\varphi$.

Маємо $n_\mu = (0, n_r, 0) = (0, 1/\sqrt{f}, 0)$, $u_\mu = (u_t, 0, 0) = (\sqrt{f}, 0, 0)$, $\zeta^\mu = (0, 0, 1)$, що дає $n^\mu = (0, \sqrt{f}, 0)$, $u^\mu = (-1/\sqrt{f}, 0, ah/\sqrt{f})$, а також:

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{tt} & \gamma_{t\varphi} \\ \gamma_{\varphi t} & \gamma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f & ar^2h \\ ar^2h & r^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{Г.3})$$

та $\sigma_{\mu\nu} = (\sigma_{\varphi\varphi}) = (r^2)$, $\sigma = r^2$. Ненульові компоненти тензора $\Theta_{\mu\nu}$ з урахуванням його симетричності:

$$\Theta_{tt} = \frac{f'\sqrt{f}}{2}, \quad \Theta_{t\varphi} = -\frac{ar\sqrt{f}(rh' + 2h)}{2}, \quad \Theta_{\varphi\varphi} = -r\sqrt{f}. \quad (\text{Г.4})$$

Слід рівний:

$$\Theta = -\frac{f'}{2\sqrt{f}} - \frac{\sqrt{f}}{r}. \quad (\text{Г.5})$$

Ненульові компоненти $T_{\mu\nu}^{\text{bound}}$ з урахуванням його симетричності:

$$T_{tt}^{\text{bound}} = -\frac{f}{8\pi} \left(\frac{\sqrt{f}}{r} + \sqrt{-\Lambda} \right), \quad (\text{Г.6})$$

$$T_{t\varphi}^{\text{bound}} = \frac{ar^2h}{8\pi} \left(\frac{f'}{2\sqrt{f}} - \frac{\sqrt{f}h'}{2h} + \sqrt{-\Lambda} \right), \quad (\text{Г.7})$$

$$T_{\varphi\varphi}^{\text{bound}} = \frac{r^2}{8\pi} \left(\frac{f'}{2\sqrt{f}} + \sqrt{-\Lambda} \right). \quad (\text{Г.8})$$

Нарешті, кутовий момент:

$$J = \frac{ar^3h'}{8}. \quad (\text{Г.9})$$

Запишемо квадратуру (3.28) для функції h з урахуванням результату $c_2 = 0$, і при відсутності електричного заряду, $q_e \equiv 0 \implies F_{rt} \equiv 0$, яка у цьому випадку інтегрується:

$$h = \frac{\tilde{f}}{r^2} \int \frac{c_1 r}{\tilde{f}^2} dr = -\frac{c_1 \tilde{f}}{2\Lambda r^2} \int \frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}^2} = \frac{c_1}{2\Lambda r^2}, \quad (\text{Г.10})$$

де $\tilde{f} = -\Lambda r^2 - m$. Тоді кутовий момент (Г.9) рівний:

$$J = -\frac{ac_1}{8\Lambda}. \quad (\text{Г.11})$$

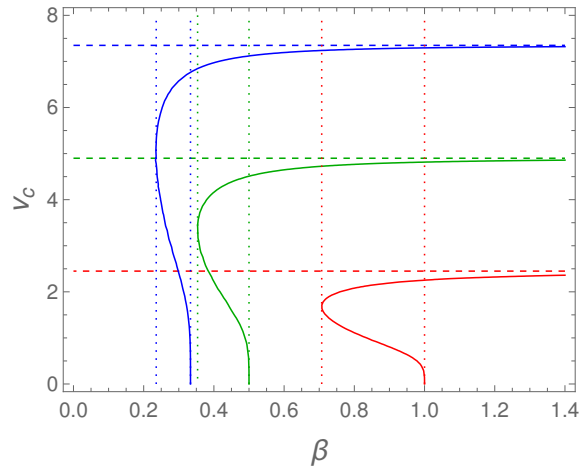
Виражаючи з (Г.11) сталу c_1 і підставляючи її в (Г.10), маємо:

$$h = -\frac{4J}{r^2 a}, \quad (\text{Г.12})$$

де J/a є кутовим моментом довільного обертання. Порівнюючи (Г.12) з результатом (3.13) для ВТЗ, $h = -j/(2r^2)$, отримуємо $J/a = j/8$ ⁵⁸.

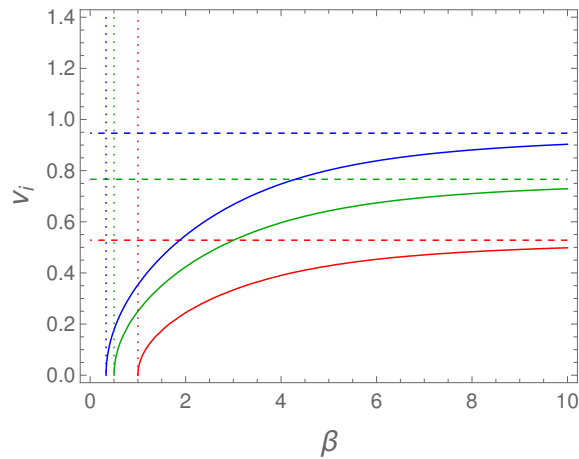
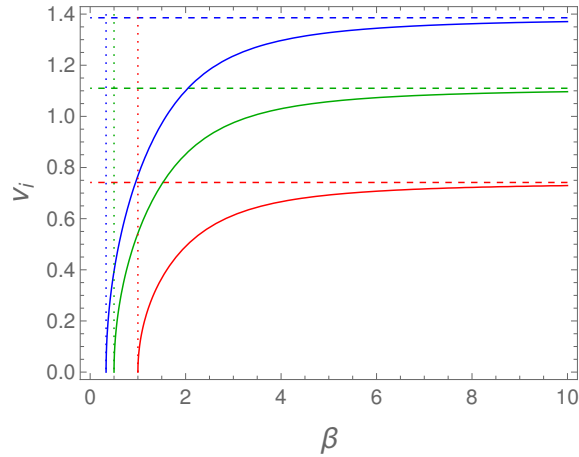
⁵⁸Під виразом J/a слід розуміти одну величину, тому це не означає, що $a = 8$.

Додаток Г. Графічні розв'язки рівняння для v_c



Графічний розв'язок першого рівняння системи (4.52) для $v_c(\beta)$ при $Q_e = 0.5, 1, 1.5$ (справа наліво), $Q_m = 0$. Горизонтальні штрихові прямі відповідають значенням v_c у випадку RN-AdS для відповідних значень Q_e . Вертикальні крапкові прямі вказують область визначену умовою (4.54) для існування двох дійсних додатних коренів для v_c . З рисунку видно, що при чисельному розв'язуванні першого рівняння системи (4.52) для v_c в області (4.54) ми обраємо більше значення кореня v_c з двох існуючих задля збереження неперервності функції $v_c(\beta)$, так як починаючи зі значення параметра β , визначеного умовою (4.55) ми маємо тільки одне значення v_c .

Додаток Д. Графічні розв'язки рівняння для v_i



Графічні розв'язки рівняння (4.73) для $v_i(\beta)$ при $Q_e = 0.5, 1, 1.5$ (справа наліво), $Q_m = 0$ для $P_i = 1$ (верхній рисунок), $P_i = 5$ (нижній рисунок). Горизонтальні штрихові прямі відповідають значенням v_i у випадку RN-AdS для відповідних значень Q_e, P_i . Вертикальні крапкові прямі вказують початок області, визначеної умовою (4.74) для існування кореня v_i рівняння (4.73). Ця умова не залежить від значення тиску P_i , що і демонструють ці два графіки, так як видно, що положення вертикальних крапкових ліній на них співпадають.

Додаток Е. Відомості про апробацію

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Публікації, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. M. B. Tataryn, M. M. Stetsko. Three-dimensional static black hole with Λ and nonlinear electromagnetic fields and its thermodynamics. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 28, 1950160 (2019).
2. M. B. Tataryn, M. M. Stetsko. Three-dimensional slowly rotating black hole in Einstein-power-Maxwell theory. *International Journal of Modern Physics D*. Vol. 29, 2050111 (2020).
3. M. B. Tataryn, M. M. Stetsko. Thermodynamics of a static electric-magnetic black hole in Einstein-Born-Infeld-AdS theory with different horizon geometries. *General Relativity and Gravitation*. Vol. 53, 72 (2021).

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Опис статичної 3-вимірної чорної діри з нелінійними електромагнітними полями. Гравітаційне та електромагнітне поле. Термодинаміка. *Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика — 2018»*. Тези доповідей. Львів, 15-17 травня 2018 р. С. G10 (усна доповідь).
5. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Термодинамічні величини для статичної чорної діри з нелінійними електромагнітними полями у 3-вимірному випадку. *18-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі стати-*

стичної фізики та теорії конденсованої речовини. Тези доповідей. Львів, 7-8 червня 2018 р. С. 43 (усна доповідь).

6. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Термодинаміка тривимірної чорної діри з нелінійним електромагнітним полем. *IX наукова конференція «Вибрані питання астрономії та астрофізики», присвячена пам'яті Богдана Бабія (1936-1993)*. Тези доповідей. Львів, 1-5 жовтня 2018 р. С. 90-91 (усна доповідь).

7. М. В. Tataryn, М. М. Stetsko. $(2 + 1)$ static black hole with Λ and nonlinear electromagnetic fields and its thermodynamics. *19-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини*. Тези доповідей. Львів, 13-14 червня 2019 р. С. 27 (усна доповідь).

8. М. В. Tataryn, М. М. Stetsko. Static and slowly rotating three-dimensional black hole in nonlinear electrodynamics. *X Young Scientists Conference «Problems of Theoretical Physics» dedicated to the 110-th anniversary of the M. M. Bogolyubov (1909-1992)*. Book of abstracts. Kyiv, December 23-24, 2019. P. 41 (усна доповідь).

9. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Ефект Джоуля-Томсона для статичної чорної діри з полем Борна-Інфельда з електричним та магнітним зарядами. *Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики «Еврика — 2021»*. Тези доповідей. Львів, 18-19 травня 2021 р. С. F7 (усна доповідь).

10. М. Б. Татарин, М. М. Стецко. Термодинаміка чорної діри з полем Борна-Інфельда та магнітним зарядом. *Наукова конференція «Астрономія у Львівському університеті» до 250-ліття Астрономічної обсерваторії та 25-ліття кафедри астрофізики*. Тези доповідей. Львів, 14-17 вересня 2021 р. С. 94 (усна доповідь).

Апробація матеріалів дисертації

Результати досліджень дисертації апробовано на перерахованих вище наукових конференціях, а також на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики імені професора Івана Вакарчука Львівського національного університету імені Івана Франка:

1. М. Б. Татарин. Чорні діри у Всесвіті (жовтень 2019 р.).
2. М. Б. Татарин. Термодинаміка $(3 + 1)$ -вимірної чорної діри з електричним та магнітним зарядами в електродинаміці Борна-Інфельда (листопад 2020 р.).
3. М. Б. Татарин. Термодинаміка чотиривимірної чорної діри з електричним і магнітним зарядами в теорії Айнштейна-Борна-Інфельда (лютий 2021 р.).
4. М. Б. Татарин. Термодинаміка чотиривимірної статичної чорної діри з електромагнітним полем Борна-Інфельда. Ефект Джоуля-Томсона (листопад 2021 р.).
5. М. В. Tataryn. Thermodynamics of a four-dimensional black hole in the Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter theory (February, 2022).