

АНОТАЦІЯ

Лисецька (Соболь) О. Ю. Компактні та близькі до них напівґратки, напівгрупи та їхні розширення. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – “Математика” (Галузь знань – 11 “Математика та статистика”). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2023.

Топологічна алгебра — це одна із тих областей математики, які мають доволі стрімкий розвиток. Із списку різноманітних проблем цієї галузі можна виокремити задачу про дослідження взаємовпливу топологічної та алгебричної структур. До відомих результатів, що стосуються цієї тематики належать такі: T_0 -простір топологічної групи є цілком регулярним; інверсія в інверсній компактній напівгрупі неперервна, а в зліченно компактній — секвенціально неперервна; гаусдорфові компактна топологічна напівгрупа зі скороченнями та напівтопологічна локально компактна група є топологічними групами.

Одним із центральних об'єктів загальної топології є компактні простори, які можна визначити за допомогою багатьох еквівалентних означень для різних типів просторів (метричних та ін.): на мові замкненості, повноти, збіжних послідовностей, обмеженості та ін. Таке розмаїття призвело до виникнення різних типів топологічних просторів, які є близькими до компактних: зліченно компактні, псевдокомпактні, зліченно пракомпактні, слабо компактні, H -замкнені, \mathbb{R} -компактні і т. д. Між усіма переліченими близькими до компактних топологічними просторами можна встановити взаємозв'язки.

Досліджуючи ієрархію близьких до компактних просторів, природним чином постають такі запитання. Перше: *який вплив має алгебрична частина тополого-алгебричної структура на близькі до компактних властивості?* Друге: *які алгебричні розширення тополого-алгебричних структур зберігають компактність і за яких умов ці компактні розширення єдині?*

Топологічні властивості нескінченної (напів)топологічної напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць досліджувались Гутіком, Павлик та Рейтером в [94, 95, 100]. У [95] доведено, що для нескінченної напівтопологічної напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць B_λ існує єдина гаусдорфова трансляційно-неперервна компактна топологія τ_c і кожна псевдокомпактна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на B_λ є компактною. Також Гутік і Павлик в [95] довели, що кожен ненульовий елемент гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць B_λ є ізольованою точкою в топологічному просторі B_λ . В [94] доведено, що нескінченна напівгрупа $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць B_λ не вкладається в компакту гаусдорфову топологічну напівгрупу, кожна гаусдорфова топологічна інверсна напівгрупа S , яка містить B_λ як піднапівгрупу, містить B_λ як замкнену піднапівгрупу, тобто B_λ є *алгебрично повною* в класі гаусдорфових топологічних інверсних напівгруп. Згодом цей результат був поширений Гутіком, Лоусоном та Реповшем в [88] на так звані інверсні напівгрупи зі *щільними рядами ідеалів* і, як наслідок, на напівгрупу \mathcal{S}_λ^n . Також в [106] доведено, що для довільного натурального числа n напівгрупа \mathcal{S}_λ^n є *алгебрично h -повною* в класі гаусдорфових топологічних інверсних напівгруп, тобто кожен гомоморфний образ \mathcal{S}_λ^n є алгебрично повним у класі гаусдорфових топологічних інверсних напівгруп. У статті [11] Гутіком та Рейтером цей результат був поширений на клас гаусдорфових напівтопологічних інверсних напівгруп, а також було показано, що для довільного нескінченного кардинала λ напівгрупа \mathcal{S}_λ^n допускає єдину гаусдорфову трансляційно-неперервну топологію τ_c . Там же ж було доведено, що компактною є кожна зліченно

компактна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія τ на B_λ .

У [100] Гутік, Павлик і Рейтер довели, що топологічна напівгрупа \mathcal{I}_λ^n , у якій піднапівгрупа ідемпотентів є компактною, є абсолютно H -замкненою і кожна зліченно компактна топологічна напівгрупа не містить \mathcal{I}_λ^n , як піднапівгрупи для довільного нескінченного кардинала λ . У [100] були сформульовані достатні умови для того, щоб топологічна напівгрупа \mathcal{I}_λ^1 не була H -замкненою. Гутік у [84] довів, що нескінченна напівтопологічна напівгрупа $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць B_λ є H -замкненою в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп тоді і тільки тоді, коли простір B_λ є компактним.

Метою дисертаційної роботи є дослідження гаусдорфових трансляційно-неперервних слабо компактних топологій на напівґратці $\text{exp}_n \lambda$; встановлення алгебричних і топологічних властивостей розширень напівгруп симетричними інверсними напівгрупами обмеженого скінченного рангу; дослідження слабо компактних топологій на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ у випадку, коли сім'я \mathcal{F}_1 складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин ординала ω .

Об'єктом дослідження є напівтопологічна напівґратка $\text{exp}_n \lambda$, напівгруппове розширення $\mathcal{I}_\lambda^n(S)$, а також напівгрупа $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$.

Предмет дисертаційних досліджень — компактні та близькі до них гаусдорфові трансляційно-неперервні та напівгруппові топології та їхні властивості на напівґратці $\text{exp}_n \lambda$ та напівгрупах $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ та $\mathcal{I}_\lambda^n(S)$, а також алгебричні та топологічні властивості напівгрупи $\mathcal{I}_\lambda^n(S)$.

У процесі дослідження дисертаційної проблематики застосовуються методи загальної топології, топологічної алгебри та алгебричної теорії напівгруп.

Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та додатка.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, зазначено мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідницькою темою, особистий внесок здобувача, апробацію та публікації основних результатів дисертації.

У розділі 1 проведено огляд літератури за темою дисертації, наведено історичну довідку, мотивацію досліджень, а також сформульовано означення та допоміжні твердження з алгебри та загальної топології.

Розділ 2 складається з трьох підрозділів присвячених дослідженню слабо компактної T_1 -напівтопологічної напівґратки $\text{exp}_n \lambda$ для довільного натурального числа $n \geq 2$ та будь-якого нескінченного кардинала λ . Доведено, що кожна зліченно компактна трансляційно-неперервна T_1 -топологія, кожна слабо компактна напівгрупова T_1 -топологія та кожна напіврегулярна слабо компактна трансляційно-неперервна T_1 -топологія на $\text{exp}_n \lambda$ є гаусдорфовою напівгруповою компактною, а також описано цю топологію (теореми 2.1.7, 2.1.18, приклад 2.1.4). Ця топологія є топологією Ловсона на напівґратці $\text{exp}_n \lambda$, а тому є єдиною.

Разом з тим у розділі 2 побудовано ненапіврегулярну гаусдорфову зліченно пракомпактну, а отже, слабо компактну, некомпактну трансляційно-неперервну топологію τ_{fc}^2 на $\text{exp}_2 \lambda$ (приклад 2.1.9) та доведено (теорема 2.3.5), що для трансляційно-неперервної T_1 -топології τ на $\text{exp}_n \lambda$ такі умови еквівалентні: (i) τ — секвенціально пракомпактна; (ii) τ — цілком зліченно пракомпактна; (iii) τ — зліченно пракомпактна; (iv) τ — слабо компактна, (v) τ — $\mathfrak{D}(\omega)$ -компактна.

У розділі 3 введено та досліджується структура та топологізація напівгрупового розширення $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$ моноїда S симетричною інверсною напівгрупою обмеженого скінченного рангу \mathcal{S}_λ^n . У підрозділі 3.1 описана конструк-

ція цього розширення, а підрозділ 3.2 присвячений вивченню алгебричних властивостей розширення $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$ за модулем моноїда S . Зокрема, описано ідемпотенти та регулярні елементи напівгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$ (твердження 3.2.1, 3.2.2), а також відношення Гріна на напівгруповому розширенні $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$ для моноїда S (твердження 3.2.7).

У підрозділі 3.3 введено поняття напівгрупи із сильно щільним рядом ідеалів, знайдено умови за яких напівгрупове розширення $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$ має (сильно) щільний ряд ідеалів за модулем моноїда S (теорема 3.3.11).

Підрозділ 3.4 присвячений топологізації напівгрупового розширення $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$. Доведено, що для кожного компактного гаусдорфового напівтопологічного моноїда (S, τ_S) існує єдине його компактне топологічне розширення $(\mathcal{S}_\lambda^n(S), \tau_{\mathcal{S}}^c)$ у класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп (теорема 3.4.14) та описана його топологія.

У розділі 4 досліджується біциклічне напівгрупове розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$, введене О. Гутіком та М. Михаленичем в статті [8], у випадку, коли сім'я \mathcal{F}_1 складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин ординала ω .

Підрозділи 4.1 і 4.2 присвячені означенню напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ та вивченню її алгебричних властивостей. Зокрема, доведено, що біциклічне напівгрупове розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ ізоморфне напівгрупі $\mathcal{B}_\omega^{\uparrow}(\omega_{\min})$ — піднапівгрупі ω -розширення Брандта напівґратки (ω, \min) (теорема 4.2.4).

У підрозділі 4.3 досліджуються трансляційно-неперервні слабо компактні T_1 -топології на напівгрупі $\mathcal{B}_\omega^{\uparrow}(\omega_{\min})$. Зокрема, доведено, що кожна $\mathfrak{D}(\omega)$ -компактна трансляційно-неперервна T_1 -топологія τ на напівгрупі $\mathcal{B}_\omega^{\uparrow}(\omega_{\min})$ є компактною та секвенціально компактною, і, більше того, збігається з одноточковою компактифікацією Александра зліченного дискретного простору (теорема 4.3.6).

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дослідження.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у топологічній алгебрі, функціональному аналізі, теорії напівгруп та комп'ютерній алгебрі.

Ключові слова: *топологічна напівґратка, наівтопологічна наівґратка, наівгрупа зі щільними рядами ідеалів, наівтопологічна наівгрупа, компактна наівгрупа, слабо компактний простір.*

Abstract

Lysetska (Sobol) O. Yu. Compact and compact-like semilattices, semigroups and their extensions. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in speciality 111 — “Mathematics” (field of studies 11 — “Mathematics and statistics”). — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2023.

Topological algebra is one of those areas of mathematics that has a fairly rapid development. From the list of various problems in this field, one can highlight the problem of studying the interaction of topological and algebraic structures. Some of the known results related to this topic include: a T_0 -space of a topological group is regular; inversion in a compact semigroup is continuous, and in a countably compact — sequentially continuous; a compact Hausdorff topological semigroup with cancellations and a locally compact topological group are topological groups.

One of the central objects of general topology is compact spaces, which can be defined using many equivalent definitions for different types of spaces (metric and others): in terms of closedness, completeness, convergent sequences, boundedness, etc. Such diversity has led to the emergence of different types of topological spaces that are close to being compact: countably compact, pseudocompact, sequentially compact, feebly compact, H -closed, \mathbb{R} -compact, etc. Relationships can be established among all the aforementioned compact-like spaces.

When studying the hierarchy of compact-like spaces, natural questions arise. The first one is: *what is the influence of the algebraic part of the topological-algebraic structure on the compact-like properties?* The second one is: *which algebraic extensions of topological-algebraic structures preserve compactness, and under what conditions are these compact extensions unique?*

The topological properties of an infinite (semi)topological semigroup of

$\lambda \times \lambda$ -matrix units were studied by Gutik, Pavlyk, and Reiter in their papers [94, 95, 100]. In the paper [95] it has been proven that for an infinite topological semigroup of $\lambda \times \lambda$ -matrix units B_λ , there exists a unique Hausdorff shift-continuous compact topology τ_c , and every pseudocompact Hausdorff shift-continuous topology on B_λ is compact. In addition, Gutik and Pavlyk also proved in [95] that every non-zero element of the Hausdorff topological semigroup of $\lambda \times \lambda$ -matrix units B_λ is an isolated point in the topological space B_λ . In [94], it is proved that the infinite semigroup of $\lambda \times \lambda$ -matrix units B_λ cannot be embedded into a compact Hausdorff topological semigroup. Furthermore, every Hausdorff topological inverse semigroup S that contains B_λ as a subsemigroup, contains B_λ as a closed subsemigroup, i.e., B_λ is *algebraically complete* in the class of Hausdorff topological inverse semigroups. Later, this result was extended by Gutik, Lawson, and Repovsh in [88] to the so-called inverse semigroups with *dense ideal series*, and as a consequence, to the semigroup \mathcal{S}_λ^n . Also, in [106] it is shown that for any positive integer n , the semigroup \mathcal{S}_λ^n is *algebraically h -complete* in the class of Hausdorff topological inverse semigroups, i.e., every homomorphic image of \mathcal{S}_λ^n is algebraically complete in the class of Hausdorff topological inverse semigroups. In the article [11], Gutik and Reiter extended this result to the class of Hausdorff semitopological inverse semigroups and also showed that for any infinite cardinal λ , the semigroup \mathcal{S}_λ^n admits a unique Hausdorff shift-continuous topology τ_c . In the same paper, it was also shown that every countably compact Hausdorff shift-continuous topology τ on B_λ is compact.

In [100], Gutik, Pavlyk, and Reiter showed that the topological semigroup \mathcal{S}_λ^n whose idempotent subsemigroup is compact is absolutely H -closed, and no countably compact topological semigroup contains \mathcal{S}_λ^n as a subsemigroup for any infinite cardinal λ . The paper [100] formulated sufficient conditions for the topological semigroup \mathcal{S}_λ^1 not to be H -closed. In [84], Gutik proved that the infinite semitopological semigroup of $\lambda \times \lambda$ -matrix units B_λ is H -closed in

the class of Hausdorff semitopological semigroups if and only if the space B_λ is compact.

The purpose of the work is to study feebly compact shift-continuous topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$; determining algebraic and topological properties of the extensions of semigroups by a symmetric inverse semigroup of bounded finite rank; investigation of topological properties of the semigroup $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ when the family \mathcal{F}_1 consists of the empty set and all singletons of the ordinal ω .

Object of research are semitopological semilattice $\exp_n \lambda$, semigroup extension $\mathcal{I}_\lambda^n(S)$ and semigroup $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$.

The subjects of the study are compact and compact-like shift-continuous and semigroup topologies and their properties on the semilattice $\exp_n \lambda$ and the semigroups $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ and $\mathcal{I}_\lambda^n(S)$, and algebraic and topological properties of the semigroup $\mathcal{I}_\lambda^n(S)$.

In the thesis there are used methods and ideas of general topology, topological algebra and algebraic theory of semigroups.

The thesis consists of an abstract in Ukrainian and in English, an introduction, four chapters, conclusions, references and an appendix.

The introduction explains the relevance of the research topic, the purpose, subject, object and methods of the research. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

Chapter 1 provides a literature review concerning the topic of the thesis and an overview of the main results of this work.

Chapter 2 consists of three sections devoted to studying feebly compact T_1 -semitopological semilattice $\exp_n \lambda$ for any positive integer $n \geq 2$ and any infinite cardinal λ . It is proved that every countably compact shift-continuous T_1 -topology, every feebly compact semigroup T_1 -topology and every semiregular feebly compact shift-continuous T_1 -topology on $\exp_n \lambda$ is a Hausdorff semigroup compact topology, also a description of such topologies are presented

(Theorems 2.1.7, 2.1.18, Example 2.1.4).

It is constructed a non-semiregular Hausdorff countably pracomact (therefore feebly compact) non-compact shift-continuous topology τ_{fc}^2 on the semilattice $\exp_2 \lambda$ (Example 2.1.9) and it is proved that for any shift-continuous T_1 -topology τ on $\exp_n \lambda$ the following conditions are equivalent: (i) τ is sequentially pracomact; (ii) τ is totally countably pracomact; (iii) τ is countably pracomact; (iv) τ is feebly compact, (v) τ is $\mathfrak{D}(\omega)$ -compact. This is the Lawson's topology on the semilattice $\exp_n \lambda$, so it is unique.

In Chapter 3 the semigroup extension $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$ of a monoid S by a symmetric inverse semigroup of bounded finite rank \mathcal{S}_λ^n is studied. Sections 3.1 and 3.2 are devoted to the construction of this semigroup extension and algebraic properties of the extension $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$ of a monoid S . All idempotents, regular elements and Green's relations of the semigroup $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$ for any monoid S are described (Propositions 3.2.1, 3.2.2, 3.2.7).

In Section 3.3 it is introduced the conception of a semigroup with strongly tight ideal series, and conditions of the semigroup $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$ to be a semigroup with (strongly) tight ideal series up to the modulo of the monoid S are found (Theorem 3.3.11).

Section 3.4 is devoted to a topologisation of the semigroup extension $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$. It is proved that for any compact Hausdorff semitopological monoid (S, τ_S) there exists a unique compact topological extension $(\mathcal{S}_\lambda^n(S), \tau_{\mathcal{S}}^c)$ in the class of the Hausdorff semitopological semigroups (Theorem 3.4.14) and its topology is described.

In Chapter 4 it is studied the bicyclic semigroup extension $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ introduced by O. Gutik and M. Mykhalenych in the paper [8] in the case when the family \mathcal{F}_1 consists of the empty set and all singleton subsets of ω .

In Sections 4.1 and 4.2 there are represented the definition of the semigroup $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ and investigate its algebraic properties. In particular it is proved that the semigroup $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ is isomorphic to the semigroup $\mathcal{B}_\omega^{\uparrow}(\omega_{\min})$ which is a subsemi-

group of the Brandt ω -extension of the semilattice (ω, \min) (Theorem 4.2.4).

In Section 4.3 the shift-continuous feebly compact T_1 -topologies on the semigroup $\mathcal{B}_\omega^\uparrow(\omega_{\min})$ are studied. In particular it is proved that each $\mathfrak{D}(\omega)$ -compact shift-continuous T_1 -topology τ on $\mathcal{B}_\omega^\uparrow(\omega_{\min})$ is compact and sequentially compact, and moreover it is the Alexandrov one-point compactification of the countable discrete space (Theorem 4.3.6).

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the thesis and information on the approbation of the research results.

The practical significance of the results. The results of the thesis have theoretical significance and can be used for the development of the topological algebra, the functional analysis, the semigroup theory and the computer algebra.

Key words: *topological semilattice, semitopological semilattice, semigroup with a tight ideal series, semitopological semigroup, compact semigroup, feebly compact space.*

**Список публікацій в яких опубліковано основні результати
дисертації:**

- (1) Gutik, O., Sobol¹, O.: On feebly compact shift-continuous topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **82**, 128–136 (2016).
- (2) Gutik, O., Sobol, O.: Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **87**, 5–36 (2019).
- (3) Lysetska, O.: On feebly compact topologies on the semigroup $B_\omega^{\mathcal{F}_1}$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **90**, 48–56 (2020).
- (4) Gutik, O. V., Sobol, O. Yu.: On feebly compact semitopological semilattice $\exp_n \lambda$. Journal of Mathematical Sciences. **254**(1), 13–20 (2021).

**Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів
дисертації:**

- (1) Gutik, O., Sobol, O.: On feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. Мат. Студ. **46**(1), 29–43 (2016).
- (2) Gutik, O., Sobol, O.: Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank. In: Abstracts of the X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd, p. 48. I. I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, 20–27 August 2015.
- (3) Gutik, O., Sobol, O.: Feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. In: Abstracts of the International Conference “Complex Analysis and Related Topics”, p. 31–32. University of Lviv, Lviv, 30 May – 4 June 2016.
- (4) Gutik, O., Sobol, O.: Feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the

¹Соболь — дівоче прізвище Лисецької О. Ю.

120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, p. 48. University of Lviv, Lviv, 27 September – 1 October 2016.

- (5) Gutik, O., Sobol, O.: On feebly compact semitopological semilattice $\exp_n \lambda$. In: Abstracts of the Modern problems of Mechanics and Mathematics: collection of scientific papers in 3 vols. Edited by A. M. Samoilenko, R. M. Kushnir [Electronic resource], Vol. 3, p. 262–263. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, Lviv, 2018.
- (6) Gutik, O., Sobol, O.: Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank. In: Abstracts of the International scientific conference “Algebraic and geometric methods of analysis”, p. 26. Odessa, Ukraine, 28 May – 3 June 2019.
- (7) Lysetska, O.: On feebly compact topologies on the semigroup $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^1}$. In: Abstracts of the 13th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 49. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 6–9 July, 2021.