Львівський національний університет імені Івана Франка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Лисецька Олександра Юріївна

УДК 512.3+512.536+512.568.2

ДИСЕРТАЦІЯ

Компактні та близькі до них напівґратки, напівгрупи та їхні розширення

Спеціальність — 111 “Математика”
Галузь знань — 11 “Математика та статистика”

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _____ О. Ю. Лисецька

Науковий керівник **Гутік Олег Володимирович**,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
старший науковий співробітник

Львів — 2023

АНОТАЦІЯ

Лисецька (Соболь) О. Ю. Компактні та близькі до них напівґратки, напівгрупи та їхні розширення. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – "Математика" (Галузь знань – 11 "Математика та статистика"). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2023.

Топологічна алгебра — це одна із тих областей математики, які мають доволі стрімкий розвиток. Із списку різноманітних проблем цієї галузі можна виокремити задачу про дослідження взаємовпливу топологічної та алгебричної структур. До відомих результатів, що стосуються цієї тематики належать такі: T_0-простір топологічної групи є цілком регулярним; інверсія в інверсній компактній напівгрупі неперервна, а в зліченно компактній — секвенціально неперервна; гаусдорфові компактна топологічна напівгрупа зі скороченнями та напівтопологічна локально компактна група є топологічними групами.

Одним із центральних об'єктів загальної топології є компактні простори, які можна визначити за допомогою багатьох еквівалентних означень для різних типів просторів (метричних та ін.): на мові замкненості, повноти, збіжних послідовностей, обмеженості та ін. Таке розмаїття призвело до виникнення різних типів топологічних просторів, які є близькими до компактних: зліченно компактні, псевдокомпактні, зліченно пракомпактні, слабко компактні, H-замкнені, $\mathbb{R}$-компактні і т. д. Між усіма переліченими близькими до компактних топологічними просторами можна встановити взаємозв'язки.

Досліджуючи ієрархію близьких до компактних просторів, природним чином постають такі запитання. Перше: *який вплив має алгебрична частина тополого-алгебричної структури на близькі до компактних властивості*? Друге: *які алгебричні розширення тополого-алгебричних структур зберігають компактність і за яких умов ці компактні розширення єдині*?

Топологічні властивості нескінченної (напів)топологічної напівгрупи $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць досліджувались Гутіком, Павлик та Рейтером в [94, 95, 100]. У [95] доведено, що для нескінченної напівтопологічної напівгрупи $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць B_λ існує єдина гаусдорфова трансляційно-неперервна компактна топологія τ_c і кожна псевдокомпактна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на B_λ є компактною. Також Гутік і Павлик в [95] довели, що кожен ненульовий елемент гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць B_λ є ізольованою точкою в топологічному просторі B_λ. В [94] доведено, що нескінченна напівгрупа $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць B_λ не вкладається в компактну гаусдорфову топологічну напівгрупу, кожна гаусдорфова топологічна інверсна напівгрупа S, яка містить B_λ як піднапівгрупу, містить B_λ як замкнену піднапівгрупу, тобто B_λ є *алгебрично повною* в класі гаусдорфових топологічних інверсних напівгруп. Згодом цей результат був поширений Гутіком, Лоусоном та Реповшем в [88] на так звані інверсні напівгрупи зі *щільними рядами ідеалів* і, як наслідок, на напівгрупу $\mathscr{I}_\lambda^n$. Також в [106] доведено, що для довільного натурального числа n напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ є *алгебрично h-повною* в класі гаусдорфових топологічних інверсних напівгруп, тобто кожен гомоморфний образ $\mathscr{I}_\lambda^n$ є алгебрично повним у класі гаусдорфових топологічних інверсних напівгруп. У статті [11] Гутіком та Рейтером цей результат був поширений на клас гаусдорфових напівтопологічних інверсних напівгруп, а також було показано, що для довільного нескінченного кардинала λ напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ допускає єдину гаусдорфову трансляційно-неперервну то-

пологію τ_c. Там же ж було доведено, що компактною є кожна зліченно компактна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія τ на B_λ.

У [100] Гутік, Павлик і Рейтер довели, що топологічна напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$, у якої піднапівгрупа ідемпотентів є компактною, є абсолютно H-замкненою і кожна зліченно компактна топологічна напівгрупа не містить $\mathscr{I}_\lambda^n$, як піднапівгрупи для довільного нескінченого кардинала λ. У [100] були сформульовані достатні умови для того, щоб топологічна напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^1$ не була H-замкненою. Гутік у [84] довів, що нескінченна напівтопологічна напівгрупа $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць B_λ є H-замкненою в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп тоді і тільки тоді, коли простір B_λ є компактним.

Метою дисертаційної роботи є дослідження гаусдорфових трансляційно-неперервних слабко компактних топологій на напівґратці $\exp_n \lambda$; встановлення алгебричних і топологічних властивостей розширень напівгруп симетричними інверсними напівгрупами обмеженого скінченного рангу; дослідження слабко компактних топологій на напівгрупі $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$ у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_1$ складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин ординала ω.

Об'єктом дослідження є напівтопологічна напіґратка $\exp_n \lambda$, напівгрупове розширення $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$, а також напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$.

Предмет дисертаційних досліджень — компактні та близькі до них гаусдорфові трансляційно-неперервні та напівгрупові топології та їхні властивості на напівґратці $\exp_n \lambda$ та напівгрупах $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$ та $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$, а також алгебричні та топологічні властивості напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

У процесі дослідження дисертаційної проблематики застосовуються методи загальної топології, топологічної алгебри та алгебричної теорії напівгруп.

Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та додатка.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, зазначено мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідницькою темою, особистий внесок здобувача, апробацію та публікації основних результатів дисертації.

У розділі 1 проведено огляд літератури за темою дисертації, наведено історичну довідку, мотивацію досліджень, а також сформульовано означення та допоміжні твердження з алгебри та загальної топології.

Розділ 2 складається з трьох підрозділів присвячених дослідженню слабко компактної T_1-напівтопологічної напівґратки $\exp_n \lambda$ для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ та будь-якого нескінченного кардинала λ. Доведено, що кожна зліченно компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія, кожна слабко компактна напівгрупова T_1-топологія та кожна напіврегулярна слабко компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія на $\exp_n \lambda$ є гаусдорфовою напівгруповою компактною, а також описано цю топологію (теореми 2.1.7, 2.1.18, приклад 2.1.4). Ця топологіє є топологією Ловсона на напівґратці $\exp_n \lambda$, а тому є єдиною.

Разом з тим у розділі 2 побудовано ненапіврегулярну гаусдорфову зліченно пракомпактну, а отже, слабко компактну, некомпактну трансляційно-неперервну топологію τ^2_{fc} на $\exp_2 \lambda$ (приклад 2.1.9) та доведено (теорема 2.3.5), що для трансляційно-неперервної T_1-топології τ на $\exp_n \lambda$ такі умови еквівалентні: (i) τ — секвенціально пракомпактна; (ii) τ — цілком зліченно пракомпактна; (iii) τ — зліченно пракомпактна; (iv) τ — слабко компактна, (v) τ — $\mathfrak{D}(\omega)$-компактна.

У розділі 3 введено та досліджується структура та топологізація напівгрупового розширення $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ моноїда S симетричною інверсною напівгрупою обмеженого скінченного рангу $\mathscr{I}^n_\lambda$. У підрозділі 3.1 описана конструк-

ція цього розширення, а підрозділ 3.2 присвячений вивченню алгебричних властивостей розширення $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ за модулем моноїда S. Зокрема, описано ідемпотенти та регулярні елементи напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$(твердження 3.2.1, 3.2.2), а також відношення Ґріна на напівгруповому розширенні $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ для моноїда S (твердження 3.2.7).

У підрозділі 3.3 введено поняття напівгрупи із сильно щільним рядом ідеалів, знайдено умови за яких напівгрупове розширення $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ має (сильно) щільний ряд ідеалів за модулем моноїда S (теорема 3.3.11).

Підрозділ 3.4 присвячений топологізації напівгрупового розширення $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Доведено, що для кожного компактного гаусдорфового напівтопологічного моноїда (S, τ_S) існує єдине його компактне топологічне розширення $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$ у класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп (теорема 3.4.14) та описана його топологія.

У розділі 4 досліджується біциклічне напівгрупове розширення $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$, введене О. Гутіком та М. Михаленичем в статті [8], у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_1$ складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин ординала ω.

Підрозділи 4.1 і 4.2 присвячені означенню напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$ та вивченню її алгебричних властивостей. Зокрема, доведено, що біциклічне напівгрупове розширення $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$ ізоморфне напівгрупі $\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})$ — піднапівгрупі ω-розширення Брандта напівґратки $(\omega, \min)$ (теорема 4.2.4).

У підрозділі 4.3 досліджуються трансляційно-неперервні слабко компактні T_1-топології на напівгрупі $\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})$. Зокрема, доведено, що кожна $\mathfrak{D}(\omega)$-компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія τ на напівгрупі $\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})$ є компактною та секвенціально компактною, і, більше того, збігається з одноточковою компактифікацією Алєксандрова зліченного дискретного простору (теорема 4.3.6).

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дослідження.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у топологічній алгебрі, функціональному аналізі, теорії напівгруп та комп'ютерній алгебрі.

Ключові слова: *топологічна напівґратка, напівтопологічна напівґратка, напівгрупа зі щільними рядами ідеалів, напівтопологічна напівгрупа, компактна напівгрупа, слабко компактний простір.*

Abstract

Lysetska (Sobol) O. Yu. Compact and compact-like semilattices, semigroups and their extensions. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in speciality 111 — "Mathematics" (field of studies 11 — "Mathematics and statistics"). — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2023.

Topological algebra is one of those areas of mathematics that has a fairly rapid development. From the list of various problems in this field, one can highlight the problem of studying the interaction of topological and algebraic structures. Some of the known results related to this topic include: a T_0-space of a topological group is regular; inversion in a compact semigroup is continuous, and in a countably compact — sequentially continuous; a compact Hausdorff topological semigroup with cancellations and a locally compact topological group are topological groups.

One of the central objects of general topology is compact spaces, which can be defined using many equivalent definitions for different types of spaces (metric and others): in terms of closedness, completeness, convergent sequences, boundedness, etc. Such diversity has led to the emergence of different types of topological spaces that are close to being compact: countably compact, pseudocompact, sequentially compact, feebly compact, H-closed, $\mathbb{R}$-compact, etc. Relationships can be established among all the aforementioned compact-like spaces.

When studying the hierarchy of compact-like spaces, natural questions arise. The first one is: *what is the influence of the algebraic part of the topological-algebraic structure on the compact-like properties*? The second one is: *which algebraic extensions of topological-algebraic structures preserve compactness, and under what conditions are these compact extensions unique*?

The topological properties of an infinite (semi)topological semigroup of

$\lambda\times\lambda$-matrix units were studied by Gutik, Pavlyk, and Reiter in their papers [94, 95, 100]. In the paper [95] it has been proven that for an infinite topological semigroup of $\lambda \times \lambda$-matrix units B_λ, there exists a unique Hausdorff shift-continuous compact topology τ_c, and every pseudocompact Hausdorff shift-continuous topology on B_λ is compact. In addition, Gutik and Pavlyk also proved in [95] that every non-zero element of the Hausdorff topological semigroup of $\lambda \times \lambda$-matrix units B_λ is an isolated point in the topological space B_λ. n [94], it is proved that the infinite semigroup of $\lambda \times \lambda$-matrix units B_λ cannot be embedded into a compact Hausdorff topological semigroup. Furthermore, every Hausdorff topological inverse semigroup S that contains B_λ as a subsemigroup, contains B_λ as a closed subsemigroup, i.e., B_λ is *algebraically complete* in the class of Hausdorff topological inverse semigroups. Later, this result was extended by Gutik, Lawson, and Repovsh in [88] to the so-called inverse semigroups with *dense ideal series*, and as a consequence, to the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$. Also, in [106] it is shown that for any positive integer n, the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ is *algebraically h-complete* in the class of Hausdorff topological inverse semigroups, i.e., every homomorphic image of $\mathscr{I}_\lambda^n$ is algebraically complete in the class of Hausdorff topological inverse semigroups. In the article [11], Gutik and Reiter extended this result to the class of Hausdorff semitopological inverse semigroups and also showed that for any infinite cardinal λ, the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ admits a unique Hausdorff shift-continuous topology τ_c. In the same paper, it was also shown that every countably compact Hausdorff shift-continuous topology τ on B_λ is compact.

In [100], Gutik, Pavlyk, and Reiter showed that the topological semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ whose idempotent subsemigroup is compact is absolutely H-closed, and no countably compact topological semigroup contains $\mathscr{I}_\lambda^n$ as a subsemigroup for any infinite cardinal λ. The paper [100] formulated sufficient conditions for the topological semigroup $\mathscr{I}_\lambda^1$ not to be H-closed. In [84], Gutik proved that the infinite semitopological semigroup of $\lambda \times \lambda$-matrix units B_λ is H-closed in

the class of Hausdorff semitopological semigroups if and only if the space B_λ is compact.

The purpose of the work is to study feebly compact shift-continuous topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$; determining algebraic and topological properties of the extensions of semigroups by a symmetric inverse semigroup of bounded finite rank; investigation of topological properties of the semigroup $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$ when the family $\mathscr{F}_1$ consists of the empty set and all singletons of the ordinal ω.

Object of research are semitopological semilattice $\exp_n \lambda$, semigroup extension $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ and semigroup $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$.

The subjects of the study are compact and compact-like shift-continuous and semigroup topologies and their properties on the semilattice $\exp_n \lambda$ and the semigroups $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$ and $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$, and algebraic and topological properties of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

In the thesis there are used methods and ideas of general topology, topological algebra and algebraic theory of semigroups.

The thesis consists of an abstract in Ukrainian and in English, an introduction, four chapters, conclusions, references and an appendix.

The introduction explains the relevance of the research topic, the purpose, subject, object and methods of the research. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

Chapter 1 provides a literature review concerning the topic of the thesis and an overview of the main results of this work.

Chapter 2 consists of three sections devoted to studying feebly compact T_1-semitopological semilattice $\exp_n \lambda$ for any positive integer $n \geqslant 2$ and any infinite cardinal λ. It is proved that every countably compact shift-continuous T_1-topology, every feebly compact semigroup T_1-topology and every semiregular feebly compact shift-continuous T_1-topology on $\exp_n \lambda$ is a Hausdorff semigroup compact topology, also a description of such topologies are presented

(Theorems 2.1.7, 2.1.18, Example 2.1.4).

It is constructed a non-semiregular Hausdorff countably pracompact (therefore feebly compact) non-compact shift-continuous topology τ^2_{fc} on the semilattice $\exp_2 \lambda$ (Example 2.1.9) and it is proved that for any shift-continuous T_1-topology τ on $\exp_n \lambda$ the following conditions are equivalent: (i) τ is sequentially pracompact; (ii) τ is totally countably pracompact; (iii) τ is countably pracompact; (iv) τ is feebly compact, (v) τ is $\mathfrak{D}(\omega)$-compact. This is the Lowson's topology on the semilattice $\exp_n \lambda$, so it is unique.

In Chapter 3 the semigroup extension $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ of a monoid S by a symmetric inverse semigroup of bounded finite rank $\mathscr{I}^n_\lambda$ is studied. Sections 3.1 and 3.2 are devoted to the construction of this semigroup extension and algebraic properties of the extension $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ of a monoid S. All idempotents, regular elements and Green's relations of the semigroup $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ for any monoid S are described (Propositions 3.2.1, 3.2.2, 3.2.7).

In Section 3.3 it is introduced the conception of a semigroup with strongly tight ideal series, and conditions of the semigroup $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ to be a semigroup with (strongly) tight ideal series up to the modulo of the monoid S are finded (Theorem 3.3.11).

Section 3.4 is devoted to a topologisation of the semigroup extension $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$. It is proved that for any compact Hausdorff semitopological monoid (S, τ_S) there exists a unique compact topological extension $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}})$ in the class of the Hausdorff semitopological semigroups (Theorem 3.4.14) and its topology is described.

In Chapter 4 it is studied the bicyclic semigroup extension $\boldsymbol{B}^{\mathscr{F}_1}_\omega$ introduced by O. Gutik and M. Mykhalenych in the paper [8] in the case when the family $\mathscr{F}_1$ consists of the empty set and all singleton subsets of ω.

In Sections 4.1 and 4.2 there are represented the definition of the semigroup $\boldsymbol{B}^{\mathscr{F}_1}_\omega$ and investigate its algebraic properties. In particular it is proved that the semigroup $\boldsymbol{B}^{\mathscr{F}_1}_\omega$ is isomorphic to the semigroup $\mathscr{B}^{\Rsh}_\omega(\omega_{\min})$ which is a subsemi-

group of the Brandt ω-extension of the semilattie $(\omega, \min)$ (Theorem 4.2.4).

In Section 4.3 the shift-continuous feebly compact T_1-topologies on the semigroup $\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min})$ are studied. In particular it is proved that each $\mathfrak{D}(\omega)$-compact shift-continuous T_1-topology τ on $\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min})$ is compact and sequentially compact, and moreover it is the Alexandrov one-point compactification of the countable discrete space (Theorem 4.3.6).

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the thesis and information on the approbation of the research results.

The practical significance of the results. The results of the thesis have theoretical significance and can be used for the development of the topological algebra, the functional analysis, the semigroup theory and the computer algebra.

Key words: *topological semilattice, semitopological semilattice, semigroup with a tight ideal series, semitopological semigroup, compact semigroup, feebly compact space.*

Список публікацій в яких опубліковано основні результати дисертації:

(1) Gutik, O., Sobol[1], O.: On feebly compact shift-continuous topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **82**, 128–136 (2016).

(2) Gutik, O., Sobol, O.: Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **87**, 5–36 (2019).

(3) Lysetska, O.: On feebly compact topologies on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **90**, 48–56 (2020).

(4) Gutik, O. V., Sobol, O. Yu.: On feebly compact semitopological semilattice $\exp_n \lambda$. Journal of Mathematical Sciences. **254**(1), 13–20 (2021).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

(1) Gutik, O., Sobol, O.: On feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. Мат. Студ. **46**(1), 29–43 (2016).

(2) Gutik, O., Sobol, O.: Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank. In: Abstracts of the X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd, p. 48. I. I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, 20–27 August 2015.

(3) Gutik, O., Sobol, O.: Feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. In: Abstracts of the International Conference "Complex Analysis and Related Topics", p. 31–32. University of Lviv, Lviv, 30 May – 4 June 2016.

(4) Gutik, O., Sobol, O.: Feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. In: Abtracts of the International Conference dedicated to the

[1] Соболь — дівоче прізвище Лисецької О. Ю.

120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, p. 48. University of Lviv, Lviv, 27 September – 1 October 2016.

(5) Gutik, O., Sobol, O.: On feebly compact semitopological semilattice $\exp_n \lambda$. In: Abstracts of the Modern problems of Mechanics and Mathematics: collection of scientific papers in 3 vols. Edited by A. M. Samoilenko, R. M. Kushnir [Electronic resource], Vol. 3, p. 262–263. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, Lviv, 2018.

(6) Gutik, O., Sobol, O.: Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank. In: Abtracts of the International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis", p. 26. Odessa, Ukraine, 28 May – 3 June 2019.

(7) Lysetska, O.: On feebly compact topologies on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. In: Abtracts of the 13th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 49. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 6–9 July, 2021.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Топологічні властивості нескінченної (напів)топологічної напівгрупи $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць досліджувались Гутіком, Павлик та Рейтером в [94,95,100]. У [95] доведено, що для нескінченної напівтопологічної напівгрупи $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць B_λ існує єдина гаусдорфова трансляційно-неперервна компактна топологія τ_c і кожна псевдокомпактна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на B_λ є компактною. Також Гутік і Павлик в [95] довели, що кожен ненульовий елемент гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць B_λ є ізольованою точкою в топологічному просторі B_λ. В [94] доведено, що нескінченна напівгрупа $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць B_λ не вкладається в компактну гаусдорфову топологічну напівгрупу, кожна гаусдорфова топологічна інверсна напівгрупа S, яка містить B_λ як піднапівгрупу, містить B_λ як замкнену піднапівгрупу, тобто B_λ є *алгебрично повною* в класі гаусдорфових топологічних інверсних напівгруп. Згодом цей результат був поширений Гутіком, Лоусоном та Реповшем в [88] на так звані інверсні напівгрупи зі *щільними рядами ідеалів* і, як наслідок, на напівгрупу $\mathscr{I}_\lambda^n$. Також в [106] доведено, що для довільного натурального числа n напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ є *алгебрично h-повною* в класі гаусдорфових топологічних інверсних напівгруп, тобто кожен гомоморфний образ $\mathscr{I}_\lambda^n$ є алгебрично повним у класі гаусдорфових топологічних інверсних напівгруп. У статті [11] Гутіком та Рейтером цей результат був поширений на клас гаусдорфових напівтопологічних інверсних напівгруп, а також було показано, що для довільного нескінченного кардинала λ напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ допускає єдину гаусдорфову трансляційно-неперервну топологію τ_c. Там же ж було доведено, що компактною є кожна зліченно компактна гаусдорфова трансляційно-непе-

рервна топологія τ на B_λ. У [100] Гутік, Павлик і Рейтер показали, що топологічна напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$, у якої піднапівгрупа ідемпотентів є компактною, є абсолютно H-замкненою і кожна зліченно компактна топологічна напівгрупа не містить $\mathscr{I}_\lambda^n$, як піднапівгрупи для довільного нескінченого кардинала λ. У [100] були сформульовані достатні умови для того, щоб топологічна напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^1$ не була H-замкненою. Гутік у [84] довів, що нескінченна напівтопологічна напівгрупа $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць B_λ є H-замкненою в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп тоді і тільки тоді, коли простір B_λ є компактним.

В [22] доведено, що *кожна псевдокомпактна топологічна група є секвенціально слабко компактною.* А також, в [68] доведено, що канторів куб $D^{\mathfrak{c}}$ є селективно секвенціально слабко компактним. Добре відомо (див. [74]), що простір $D^{\mathfrak{c}}$ не є секвенціально компактним. Тому маємо, що компактна топологічна група $G = D^{\mathfrak{c}}$ є селективно секвенціально слабко компактною, але не секвенціально слабко компактною. А також, існує щільна селективно псевдокомпактна, але не селективно секвенціально псевдокомпактна підгрупа в $\mathbb{Z}_2^{\mathfrak{c}}$, де $\mathbb{Z}_2^{\mathfrak{c}}$ — континуум степінь циклічної двоелементної групи ([176]). Тому виникає природна задача про описання близьких до компактних, а саме селективно (секвенціально) слабко компакних, трансляційно-неперервних топологій на напівґратці $\exp_n \lambda$.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри геометрії і топології (з 2020 року кафедри алгебри, топології та основ математики) механіко-математичного факультету та кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми "Топологія та її застосуван-

ня у фрактальній геометрії та математичній економіці" (номер державної реєстрації 0116U001537) та теми "Методи розв'язування детермінованих та стохастичних задач локалізацією функціональних невизначеностей" (номер державної реєстрації 0121U110450).

Мета і завдання дослідження. За *мету* було поставлено дослідити слабко компактні топології на топологічній (напівтопологічній) напівґратці $\exp_n \lambda$; встановити алгебричні та топологічні властивості розширень напівгруп симетричними інверсними напівгрупами обмеженого скінченного рангу; дослідити слабко-компактні топології на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_1$ складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин у ω.

Завдання дослідження полягають у розв'язанні таких задач:

1) описати всі компактні та близькі до них напівґраткові трансляційно-неперервні T_1-топології на напівґратці $\exp_n \lambda$;
2) описати алгебричні (топологічні) властивості напівгрупи $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}(S)$ як розширення (напівтопологічного) моноїда S за модулем алгебричних (топологічних) властивостей моноїда S;
3) описати компактні та близькі до компактних трансляційно-неперервні T_1-топології на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_1$ складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин ординала ω.

Об'єктом дослідження є напівтопологічна напіґратка $\exp_n \lambda$, напівгрупове розширення $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}(S)$, а також напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$.

Предмет досліджень — компактні та близькі до них трансляційно-неперервні та напівгрупові топології та їхні властивості на напівґратці $\exp_n \lambda$ та напівгрупах $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ та $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}(S)$, а також алгебричні та топологічні властивості напівгрупи $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}(S)$.

Методи дослідження. У процесі дослідження дисертаційної проблематики застосовуються методи загальної топології, топологічної алгебри, теорії топологічних напівгруп, а також алгебричної теорії напівгруп.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі результати отримані в дисертаційній роботі є новими. Основні наукові результати, що виносяться на захист:

1. Описано зліченно компактні трансляційно-неперервні T_1-топології на напівґратці $\exp_n \lambda$ та доведено, що вони є напівґратковими компактними для довільних натурального числа $n \geqslant 2$ та нескінченного кардинала λ.
2. Побудовано некомпактну зліченно пракомпактну H-замкнену квазірегулярну ненапіврегулярну трансляційно-неперервну топологію τ^2_{fc} на $\exp_2 \lambda$ та доведено, що напіврегулярна слабко компактна напівтопологічна напівґратка $\exp_n \lambda$ є компактною топологічною напівґраткою.
3. Доведено, що для довільної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на $\exp_n \lambda$ такі умови еквівалентні: (i) τ — секвенціально пракомпактна; (ii) τ — цілком зліченно пракомпактна; (iii) τ — слабко компактна; (iv) τ — $\mathfrak{D}(\omega)$-компактна.
4. Описано будову напівгрупового розширення $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ моноїда S за модулем напівгрупи S та доведено, що для кожного компактного гаусдорфового напівтопологічного моноїда існує єдине його компактне топологічне розширення $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ у класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп і описано його топологію.
5. Описано алгебричну структуру біциклічного напівгрупового розширення $\boldsymbol{B}^{\mathscr{F}_1}_\omega$ у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_1$ складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин у ω. Доведено, що кожна $\mathfrak{D}(\omega)$-компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія τ на

$\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min})$ є компактною та секвенціально компактною, і збігається з одноточковою компактифікацією Алєксандрова зліченного дискретного простору.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у топологічній алгебрі.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані авторкою самостійно. В опублікованих спільно з науковим керівником працях, О. В. Гутіку належать постановка задач, вибір методів дослідження та обговорення одержаних результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах:

1) X-мій Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда, Одеса, 2015;
2) Міжнародній конференції "Complex Analysis and Related Topics", м. Львів, 2016;
3) Міжнародній конференції присвяченій 120-річчю Казіміра Куратовського, м. Львів, 2016;
4) Всеукраїнському конкурсі студентських наукових робіт із галузі "Математичні науки", м. Вінниця, 2017;
5) Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики", м. Львів, 2018;
6) Метематичному семінарі відділу Математики та інформатики Вроцлавського університету, м. Вроцлав, Польща, 2018;
7) Міжнародній науковій конференції "Алгебричні та геометричні методи в аналізі", м. Одеса, 2019;
8) Міжнародній науковій конференції "The 13th International Algebraic

Conference in Ukraine", м. Київ, 2021;

9) Семінарі "Теорія полігонів і спектральні простори" у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2016, 2017, 2018, 2019, 2021;

10) Семінарі "Топологічна алгебра" у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2021.

Публікації. Основні результати роботи опубліковано в 11 працях, серед яких: 3 статті у журналах, які входять до переліку наукових фахових видань України ([113], [114], [150]); 1 стаття у науковому виданні, віднесеному до третього квартиля (Q3) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank [115]; 1 стаття у виданні, яке не входить у перелік фахових ([112]); 6 тез у матеріалах міжнародних конференцій ([116], [117], [118], [119], [120], [151]).

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та одного додатка. Повний обсяг роботи — 154 сторінки. Список використаної літератури займає 17 сторінок і налічує 194 найменування.

Подяка. Авторка висловлює подяку науковому керівнику кандидату фізико-математичних наук, старшому науковому співробітнику, доценту кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету імені Івана Франка Олегу Володимировичу Гутіку за постановку задач і допомогу в роботі над дисертацією.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, МОТИВАЦІЯ ДОСЛІДЖЕНЬ І ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Історична довідка, огляд літератури та мотивація досліджень

У 1970 році вийшов з друку перший том вузькоспеціалізованого журналу з алгебри Semigroup Forum, зайнявши з перших номерів і до сьогодні дуже високий рейтинг, а за цей час вже вийшло понад 100 томів у видавництві Springer. Ідея створення такого алгебричного видання виникла внаслідок бурхливого розвитку теорії напівгруп та її застосування в 50-60-х роках минулого століття. Справді, дуже важко знайти розділ алгебри, відмінний від теорії напівгруп, аплікацію якого в математиці, а також у технічних та гуманітарних науках, за значимістю рівноцінно можна порівняти із застосуваннями диференціального числення в природничих науках.

Теорія напівгруп породила сучасні розділи теоретичної інформатики (теорію формальних мов, алгебричну теорію кодів і шифрування), а також ряд дисциплін, які мають безпосереднє застосування в математичній біології, математичній економіці та соціальних науках [59, 137, 149]. Так, зокрема, принципи 5G-кодування стільникового зв'язку запропоновані ще в 1960 році французькою школою з комбінаторної теорії напівгруп та алгебраїчної теорії кодів, очолюваної Марселем Шутценбергером. Дана галузь стрімко розвивається з 50-х років XX століття, а її застосування у різних розділах математики дає вагомі результати. Одним із підсумків первинного застосування теорії напівгруп є монографія Гілла "Функціональний аналіз і напівгрупи", яка неодноразово перевидавалася та перекладалася різними

мовами [123].

Серед істориків математики побутує думка, що сучасна алгебра бере свій початок саме з Ерлангенської програми Фелікса Кляйна, проголошеної ним на своїй габілітаційній лекції в Ерлангенському університеті в жовтні 1872 року [142]. Саме в ті часи Софус Лі побудував теорію неперервних псевдогруп перетворень геометричних об'єктів. Захоплюючись цією теорією, Кляйн сформулював концепцію алгебраїзації не тільки геометрії, а й усієї математики — дослідження неперевних математичних структур за допомогою алгебр перетвореннь. Таким чином, Ерлангенська програма не лише спонукала до розвитку абстрактних алгебричних теорій та груп Лі, а й дала потужний поштовх в математичній фізиці та інших розділах математики.

Хоча термін "напівгрупа" ("semi-group") був уперше вжитий Леонардом Е. Діксоном у 1905 році [67] для еквівалентного означення поняття групи, але дослідження з теорії напівгруп були нечисленними в міжвоєнний період, на відміну від їхнього застосування у функціональному аналізі та диференціальному численні. Найзначимішими у цьому періоді є статті А. Сушкевича про структуру мінімального ідеала скінченної напівгрупи та будову скінченних простих напівгруп [16, 179, 180] та А. Мальцева про занурення напівгруп у групи [12]. На думку Девіда Ріса, члена групи Аллана Тьюрінга, величезний поштовх до розвитку теорії напівгруп надала алгебрична модель взламу п'ятого колеса шифрувальної машини Еніґма. А сам Ріс ще в 1940 році [168] спростив дуже складно описану Сушкевичем будову цілком простих напівгруп на мові матричних напівгруп над групами.

Перші праці з теорії топологічних напівгруп з'явилися лише після Другої світової війни, хоча класики цієї теорії, Карл Г. Гофман [127–130] і Джиммі Д. Лоусон [147, 148], вважають, що перші цеглини (зокрема теорію однопараметричних напівгруп) було закладено ще в 1821 році в праці Нільса Г. Абеля [19].

Фундаментальні дослідження структури компактних топологічних напівгруп запропоновані в працях Катсумі Нумакури [160–162], Стефана Шварца [173–175], Александра Д. Воллеса [185,186,189,192] та його учнів. Класичним результатом першого періоду розвитку галузі є теорема Нумакури про те, що *кожна компактна гаусдорфова топологічна напівгрупа зі скороченнями є топологічною групою* [160]. Цей факт також був незалежно встановлений багатьма іншими науковцями. Підсумком першого "компактного" періоду розвитку теорії топологічних напівгруп є огляд А. Д. Воллеса [192], де і була поставлена знаменита проблема Воллеса: *чи зліченно компактна топологічна напівгрупа зі скороченнями є топологічною групою?* Негативну відповідь на це запитання дали незалежно Томіта [182] та Роббі із Свєтлічним [170] у певних теоретико-множинних припущеннях, однак розв'язку в ZFC досі немає. Зауважимо, що для багатьох класів топологічних напівгруп, які близькі до компактних, проблема Воллеса розв'язана позитивно (див. [18,60,81,169]).

Другий період розвитку теорії топологічних напівгруп ознаменований дослідженнями компактних (та близьких до них) зв'язних топологічних напівгруп. Основні результати, які були отримані за цією тематикою, викладені в огляді П. Мостерта [157] та монографії К. Г. Гофманна та П. Мостерта [134], остання серед англомовних спеціалістів отримала коротку назву "HofMos". Цей період охоплює 50-70-і роки минулого століття та характеризується тим, що до вивчення топологічних напівгруп долучаються не лише алгебраїсти, а й спеціалісти інших різних областей математики. Це посприяло тому, що навколо теорії топологічних напівгруп утворилась низка інших напрямків досліджень, які поглиблюють переплетення методів теорії топологічних напівгруп з методами функціонального аналізу, теорії міри, теоретико-множинної топології та теорії множин.

Саме наприкінці 1960-их років на основі теорії топологічних напівгруп виникають і починають потужно розвиватися такі напрямки, які надалі пе-

ретворились в окремі розділи топологічної алгебри та загальної топології:

- напівтопологічні напівгрупи [56, 171];
- лівотопологічні (правотопологічні) напівгрупи та напівгрупи ультрафільтрів [57, 125];
- міри на топологічних напівгрупах і аменабельні напівгрупи [58, 66, 158];
- напівгрупи неперервних перетворень [152–154];
- частково впорядковані топологічні простори, топологічні напівґратки та неперервні ґратки [79, 80, 133];
- напівгрупи Лі [122, 135].

Усі вищеперелічені напрямки поєднуються теоретико-множинними топологічними задачами та методами досліджень теорії топологічних напівгруп. Зокрема, фундаментальна теорема Еліса (див. [72, 73]) про те, що *кожна локально компактна паратопологічна (напівтопологічна) група є топологічною групою*, спонукала не лише до дослідження нарізно неперервних операцій у топологічній алгебрі, а й до створення теорії паратопологічних груп (див. [21]). Цілісний фундамент цієї галузі був добудованим працями О. Равського та Т. Банаха, які дали значний поштовх для її розвитку у пряцях львівських, китайських та мексиканських топологів. Дослідження цього періоду підсумовано в двохтомній монографії Каррута, Гільдебрандта та Коха [61].

Останні дослідження в теорії топологічних і напівтопологічних напівгруп зумовлені впливом на неї результатів з теоретико-множинної топології та інших розділів математики. До основних напрямків сучасних досліджень належать:

- дослідження структури класів топологічних і напівтопологічних напівгруп і напівґраток з певними алгебричними та топологічними властивостями [3, 5, 10, 11, 24, 30, 33, 35–40, 42, 44, 45, 52, 54, 83, 85, 92, 94, 97–100, 102–104, 106, 107, 109, 111];

- проблема занурення (алгебричних) напівгруп у певні класи топологічних напівгруп, універсальні об'єкти в різних категоріях топологічних напівгруп, побудова різних розширень та категорії топологічних і напівтопологічних напівгруп [3, 4, 6, 31, 32, 34, 41, 43, 49, 55, 138];
- дослідження замикання піднапівгруп у напівтопологічних і топологічних напівгрупах, класифікація повнот у різних категоріях або класах (напів)топологічних напівгруп [9, 26–29, 93, 94];
- топологізація напівгруп і продовження топологій [46, 47, 52, 63, 64, 77, 86, 89–91, 110, 111].

Саме останнім трьом напрямкам присвячені результати цієї дисертаційної роботи.

Питання про недискретну топологізацію груп вперше було поставлено А. А. Марковим у 1945 році [13], хоча Л. Понтрягін вже сформулював критерій недискретної топологізації груп ще в 1930 році [15]. У 1980 році Ольшанський [14] побудував приклад нетопологізовної зліченної групи, тобто такої, що кожна групова T_0-топологія на ній дискретна. Спроби недискретної напівгрупової топологізації напівгруп розпочалися з праць Ебергарта і Селеденa [71] та Тайманова [17], де вперше було наведено приклади нетопологізовних напівгруп. Ці результати про нетопологізовні напівгрупи були поширені на інші напівгрупи в працях [77, 86, 89, 91]. Також для деяких напівгруп гаусдорфові локально компактні напівгрупові (або навіть трансляціно-неперервні) топології є дискретними [47, 52, 52, 63, 64, 89, 90, 101, 110, 111, 156], а в деяких випадках справджується аналог теореми Вейля для локально компактних груп [193]: *трансляційно неперервні гаусдорфові локально компактні топології на таких напівгратках є або компактними, або дискретними* [46, 85]. Для багатьох напівгруп гаусдорфові трансляційно-неперервні топології на них, які близькі до компактних (зліченно компактні, слабко компактні) є компактними, зокрема такою є напівгрупа $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць (див. [95]). Тому виникають природні запи-

тання: *для яких напівгруп близька до компактної трансляціно-неперервна топологія на них посилюється до компактної? І чи на таких напівгрупах існує єдина гаусдорфова компактна трансляційно-неперервна топологія?*

У випадку топологічних λ^0-розширень Брандта [99] кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна компактна (секвенціально компактна, зліченно компактна) топологія на моноїді S продовжується єдиним чином до трансляційно-неперервної компактної (секвенціально компактної, зліченно компактної) на λ^0-розширенні Брандта $B^0_\lambda(S)$ і єдиність продовження забезпечується додатковими умовами на простір $B^0_\lambda(S)$. Тому виникає природне запитання: *які алгебричні розширення напівгруп подібно до λ^0-розширень Брандта моноїдів, витримують однозначне продовження трансляційно-неперервних (напівгрупових) компактних (близьких до компактних) топологій з моноїдів на ці розширення?*

Також λ^0-розширення Брандта зберігають різні типи алгебричних та топологічних повнот топологічних та напівтопологічних напівгруп, зокрема H-замкненість та абсолютну H-замкненість (див. [9,10,54,84,93]). Тому постає природне запитання: *які розширення моноїдів (напівгруп) зберігають повноту топологічних і напівтопологічних напівгруп (в певних категоріях чи класах)?*

1.2. Означення та допоміжні твердження

У цьому підрозділі наведено означення та допоміжні твердження, які використовуються в тексті дисертаційної роботи. Термінологію, означення та позначення використано такі, як у монографіях [61, 65, 74, 80, 166, 171].

У дисертаційній роботі великими латинськими літерами позначатимемо множини, топологічні простори та напівгрупи, а малими – їхні елементи. Усі топологічні простори вважатимемо гаусдорфовими, якщо не зазначено інше.

Множини X та Y називаються *рівнопотужними*, якщо існує взаємно однозначне відображення множини X на Y. У цьому випадку пишемо $|X| = |Y|$, де $|X|$ – найменший ординал рівнопотужний множині X. Такі ординали називають *кардиналами (кардинальними числами)* або *потужністю множини* X. Через ω будемо позначати найменший нескінченний ординал. Через $\mathbb{N}$ позначатимемо множину натуральних чисел.

Якщо $f : X \to Y$ відображення з множини X у множину Y, то традиційно образ елемента $x \in X$ при відображенні f позначаємо через $f(x)$, а у випадку перестановки $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ — праворуч $(i)\sigma$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Через 2^X або $\mathscr{P}(X)$ позначимо множину всіх підмножин непорожньої множини X.

Відношенням (або *бінарним відношенням*) на множині X називається підмножина декартового добутку $\rho \subseteq X \times X$. Якщо елементи x та y є у відношенні ρ, то будемо це записувати так $(x, y) \in \rho$ або $x\rho y$.

Відношення ρ на множині X називається *відношенням еквівалентності*, якщо виконуються наступні умови:

(1) $x\rho x$ для кожного $x \in X$;

(2) якщо $x\rho y$, то $y\rho x$ для всіх $x, y \in X$;

(3) якщо $x\rho y$ і $y\rho z$, то $x\rho z$ для всіх $x, y, z \in X$.

Кожне відношення еквівалентності ρ на множині X розбиває X на диз'юнкт-

ні класи еквівалентності за відношенням ρ:

$$x\rho = \{y \in X |\, y\rho x\}.$$

Множина, елементами якої є класи еквівалентності множини X за відношенням ρ, називається *фактор-множиною множини X за відношенням ρ* і позначається X/ρ. Відображення $\bar{\rho}\colon X \to X/\rho$ означене $(x)\bar{\rho} = x\rho$ називається *природним*.

Відношення $\leqslant$ на множині X називається *частковим порядком*, якщо виконуються наступні умови:

(1) $x \leqslant x$ для кожного $x \in X$;

(2) якщо $x \leqslant y$ і $y \leqslant x$, то $x = y$ для $x, y \in X$;

(3) якщо $x \leqslant y$ і $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ для $x, y, z \in X$.

Множина X із заданим на ній частковим порядком $\leqslant$ називається *частково впорядкованою*, і позначається $(X, \leqslant)$. Елементи x та y частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називаються *порівняльними*, якщо виконується хоча б одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$; у протилежному випадку елементи x та y називаються *непорівняльними*.

Підмножина A частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається *лінійно впорядкованою*, якщо два довільні елементи з A є порівняльними. У цьому випадку кажуть, що $(A, \leqslant)$ — *лінійно впорядкована множина* або *ланцюг*, і $\leqslant$ — *лінійний порядок* на A.

Нехай $(X, \leqslant)$ — частково впорядкована множина, A — деяка підмножина X, а x є довільним елементом A. Введемо такі позначення:

- $\downarrow A = \{y \in X :$ існує $x \in A$ такий, що $y \leqslant x\}$;
- $\uparrow A = \{y \in X :$ існує $x \in A$ такий, що $x \leqslant y\}$;
- $\downarrow x = \downarrow \{x\}$;
- $\uparrow x = \uparrow \{x\}$;
- A називається *ідеалом*, якщо $A = \downarrow A$;

- A називається *головним ідеалом*, якщо $A = \downarrow x$ для деякого елемента $x \in A$.

Сім'я непорожніх множин $\{A_i \colon i \in \mathscr{I}\}$ називається Δ-*системою* (*соняшником* або Δ-*сім'єю*), якщо попарні перетини її членів є однаковими, тобто $A_i \cap A_j = S$ для деякої множини S (для $i \neq j$ в $\mathscr{I}$) [145]. Наступне твердження відоме як *лема про соняшник* або *лема про* Δ-*систему* (див. [145, с. 107]).

Лема 1.2.1. *Кожна нескінченна сім'я n-елементних множин ($n < \omega$) містить нескінченну Δ-підсім'ю.*

Напівгрупою називається непорожня множина із заданою на ній бінарною асоціативною операцією.

Елемент 1 напівгрупи S називається *одиницею*, якщо $s \cdot 1 = 1 \cdot s = s$ для всіх $s \in S$. Напівгрупа з одиницею називається *моноїдом*.

Група — це така напівгрупа G, в якій для довільних елементів $a, b \in G$ існують елементи $x, y \in G$ такі, що виконуються рівності:

$$ax = b \quad \text{і} \quad ya = b.$$

Непорожня підмножина T напівгрупи S називається *піднапівгрупою* в S, якщо для довільних елементів a, b з T виконується умова $ab \in T$ і *підгрупою* в S, якщо $aT = Ta = T$ для кожного елемента a з T.

Нехай A — підмножина напівгрупи S. Перетин всіх піднапівгруп напівгрупи S, які містять A, є піднапівгрупою; цю напівгрупу називають *напівгрупою, породженою множиною* A і позначають $\langle A \rangle$.

Лівим (правим) ідеалом напівгрупи S називається така непорожня підмножина A в S, що $SA \subseteq A$ ($AS \subseteq A$). *Двобічним ідеалом* (або просто *ідеалом*) називається підмножина напівгрупи, яка одночасно є і лівим, і правим ідеалом. Лівий (правий, двобічний) ідеал називається *головним лівим* (*правим*, *двобічним*) ідеалом, якщо він породжується одним елементом.

Елемент e напівгрупи S називається *ідемпотентом*, якщо $ee = e$. Якщо

S – напівгрупа, то підмножину усіх її ідемпотентів позначатимемо через $E(S)$. Напівгрупу ідемпотентів називатимемо *в'язкою*. Якщо $E(S)$ є непорожньою множиною, то напівгрупова операція на в'язці $E(S)$ визначає частковий порядок $\leqslant$ на ній:

$$e \leqslant f \text{ тоді і лише тоді, коли } ef = fe = e \text{ для } e, f \in E(S).$$

Так визначений порядок називається *природним*. *Напівґратка* — це комутативна напівгрупа ідемпотентів. Напівґратка E називається *лінійно впорядкованою* або *ланцюгом*, якщо напівгрупова операція індукує на E лінійний природний порядок.

Елемент a напівгрупи S називається *регулярним*, якщо $aba = a$ для деякого $b \in S$. Напівгрупа S називається:

- *регулярною*, якщо кожний її елемент є регулярним;
- *ортодоксальною*, якщо S регулярна і $E(S)$ є піднапівгрупою в S;
- *інверсною*, якщо для кожного елемента x з S існує єдиний $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. У цьому випадку елемент x^{-1} називається *інверсним до* $x \in S$.

Очевидно, що кожна інверсна напівгрупа є ортодоксальною, а кожна ортодоксальна напівгрупа є регулярною. Якщо S – інверсна напівгрупа, то відображення $\mathrm{inv}\colon S \to S$, яке ставить у відповідність кожному елементові x з S його інверсний елемент x^{-1}, називається *інверсією*.

На інверсній напівгрупі S визначимо відношення $\leqslant$ так:

$$a \leqslant b \text{ тоді і лише тоді, коли } ab^{-1} = aa^{-1} \text{ для } a, b \in S.$$

Це відношення називається *природним частковим порядком на інверсній напівгрупі* S.

Теорема 1.2.2 ([65, теорема 1.17]). *Для напівгрупи S такі умови еквівалентні:*

(*i*) *S регулярна і довільні два її ідемпотенти комутують;*

(*ii*) *кожен головний правий (лівий) ідеал напівгрупи S породжується єдиним ідемпотентом;*

(*iii*) *S — інверсна напівгрупа.*

Нехай S і S' — напівгрупи. Відображення $\varphi : S \to S'$ називається *гомоморфізмом*, якщо виконується умова $(ab)\varphi = (a)\varphi(b)\varphi$ для всіх $a, b \in S$. Бієктивний гомоморфізм напівгрупи S у напівгрупу S' називається *ізоморфізмом* з S у S', або *ізоморфним зануренням* S у S'.

Нехай S — напівгрупа, тоді:

- через S^1 позначатимемо напівгрупу S із приєднаною одиницею [65];
- через S^0 позначатимемо напівгрупу S із приєднаним нулем [65].

Якщо S — напівгрупа, то через $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ та $\mathscr{H}$ будемо позначати відношення Ґріна на S (див. [82] чи [65, розділ 2.1]):

$$a\mathscr{R}b \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad aS^1 = bS^1;$$
$$a\mathscr{L}b \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad S^1a = S^1b;$$
$$a\mathscr{J}b \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad S^1aS^1 = S^1bS^1;$$
$$\mathscr{D} = \mathscr{L} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{L};$$
$$\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}.$$

Згідно з [144], напівгрупа S називається:

- *стійкою зліва*, якщо для $a, b \in S$, з $Sa \subseteq Sab$ випливає $Sa = Sab$;
- *стійкою справа*, якщо для $c, d \in S$, з $cS \subseteq dcS$ випливає $cS = dcS$;
- *стійкою*, якщо S одночасно є стійкою зліва та справа.

Підмножина D напівгрупи S називається *ω-нестійкою*, якщо D є нескінченною й $aB \cup Ba \nsubseteq D$ для всіх $a \in D$ і для довільної нескінченної підмножини $B \subseteq D$.

Згідно з [114] підмножина D напівгрупи S називається *сильно ω-нестійкою*, якщо D є нескінченною й $aB \cup Bb \nsubseteq D$ для всіх $a, b \in D$ і для довільної нескінченної підмножини $B \subseteq D$. Очевидно, що кожна сильно ω-нестійка підмножина є ω-нестійкою.

Нехай A — непорожня множина і k — довільне натуральне число. Під-

множина $B \subseteq A^k$ називається *k-симетричною*, якщо з того, що $(b_1, \ldots, b_k) \in B$ випливає, що $\left(b_{(1)\sigma}, \ldots, b_{(k)\sigma}\right) \in B$ для довільної перестановки $\sigma\colon \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$.

Означення 1.2.3 ([88]). *Рядом ідеалів* для напівгрупи S називається ланцюг ідеалів

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n = S.$$

Називатимемо ряд ідеалів *щільним*, якщо I_0 — скінченна множина та $D_k = I_k \setminus I_{k-1}$ є ω-нестійкою підмножиною для всіх $k = 1, \ldots, n$.

Скінченний прямий добуток напівгруп зі щільними рядами ідеалів є напівгрупою зі щільними рядами ідеалів, а також гомоморфний образ напівгрупи зі щільними рядами ідеалів зі скінченними прообразами також є напівгрупою із щільними рядами ідеалів [88].

Означення 1.2.4 ([114]). Називатимемо ряд ідеалів

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n = S$$

сильно щільним, якщо I_0 скінченна множина та $D_k = I_k \setminus I_{k-1}$ є сильно ω-нестійкою підмножиною для всіх $k = 1, \ldots, n$.

Нехай λ — довільний ненульовий кардинал. Відображення α з підмножини D із λ в λ називається *частковим перетворенням* (або *частковим відображенням*) кардинала λ. У такому випадку множину D називають *областю визначення* часткового відображення α і позначають $\operatorname{dom}\alpha$. Образ елемента $x \in \operatorname{dom}\alpha$ стосовно відображення α позначатимемо $x\alpha$. Множина $\{x \in \lambda\colon y\alpha = x \text{ для деякого } y \in Y\}$ називається *областю значень* часткового відображення α і позначається $\operatorname{ran}\alpha$. Потужність множини $\operatorname{ran}\alpha$ називається *рангом часткового відображення* α і позначається $\operatorname{rank}\alpha$. Для зручності через $\varnothing$ позначатимемо *порожнє перетворення*, тобто таке часткове відображення, для якого $\operatorname{dom}\varnothing = \operatorname{ran}\varnothing = \varnothing$.

Через $\mathscr{I}_\lambda$ будемо позначати множину всіх часткових ін'єктивних перетворень ненульового кардинала λ з визначеною на ній напівгруповою

операцією:

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta, \text{ якщо } x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \mid y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\},$$

для $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda$. Напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda$ називається *симетричною інверсною напівгрупою* над кардиналом λ. Симетрична інверсна напівгрупа введена Вагнером [2] і відіграє важливу роль в теорії напівгруп.

Покладемо

$$\mathscr{I}_\lambda^\infty = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda \colon \operatorname{rank}\alpha < \infty\} \quad \text{і} \quad \mathscr{I}_\lambda^n = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda \colon \operatorname{rank}\alpha \leqslant n\},$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Очевидно, що $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ і $\mathscr{I}_\lambda^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — інверсні напівгрупи, $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ є ідеалом в $\mathscr{I}_\lambda$, а $\mathscr{I}_\lambda^n$ — ідеал в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$, для всіх $n \in \mathbb{N}$. Надалі називатимемо напівгрупу $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ *симетричною інверсною напівгрупою скінченних перетворень*, а $\mathscr{I}_\lambda^n$ — *симетричною інверсною напівгрупою скінченних перетворень рангу* $\leqslant n$ ([88]). Елементи напівгруп $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ та $\mathscr{I}_\lambda^n$ називаються *скінченними бієктивними перетвореннями* (*частковими бієкціями*) кардинала λ. Через $\left(\begin{smallmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{smallmatrix}\right)$ позначатимемо часткову бієкцію, яка відображає x_1 в y_1, …, x_n в y_n, а через 0 — порожнє перетворення. Очевидно, що в такому випадку маємо, що $x_i \neq x_j$ і $y_i \neq y_j$ для $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Часткове порожнє перетворення $0\colon \lambda \rightharpoonup \lambda$ є нулем напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$.

Очевидно, що для довільного нескінченного кардинала λ та будь-якого натурального числа n напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ має щільний ряд ідеалів:

$$0 \subseteq \mathscr{I}_\lambda^1 \subseteq \mathscr{I}_\lambda^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{I}_\lambda^n.$$

Для будь-якого натурального числа n та довільного ненульового кардинала λ покладемо:

$$\exp_n \lambda = \{A \subseteq \lambda \colon |A| \leqslant n\}.$$

Очевидно, що для будь-якого натурального числа n та довільного ненульового кардинала λ множина $\exp_n \lambda$, разом із заданою на ній бінарною

операцією перетину множин $\cap$, є напівґраткою. Надалі через $\exp_n \lambda$ позначатимемо напівґратку $(\exp_n \lambda, \cap)$. Легко бачити, що $\exp_n \lambda$ ізоморфна в'язці напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ для довільного натурального числа n.

Нехай λ — ненульовий кардинал. На множині $B_\lambda = (\lambda \times \lambda) \cup \{0\}$, де $0 \notin \lambda \times \lambda$, визначимо напівгрупову операцію "$\cdot$":

$$(a,b)\cdot(c,d) = \begin{cases} (a,d), & \text{якщо } \ b=c; \\ 0, & \text{якщо } \ b \neq c, \end{cases}$$

і $(a,b)\cdot 0 = 0\cdot(a,b) = 0\cdot 0 = 0$ для $a,b,c,d \in \lambda$. Напівгрупа B_λ називається *напівгрупою* $\lambda\times\lambda$*-матричних одиниць* (див [65]). Очевидно, що для довільного кардинала $\lambda > 0$, напівгрупа $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць B_λ є ізоморфна напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^1$.

Нехай S — напівгрупа з нулем і λ — ненульовий кардинал. Визначимо напівгрупову операцію на множині $B_\lambda(S) = (\lambda \times S \times \lambda) \cup \{0\}$ так:

$$(\alpha,a,\beta)\cdot(\gamma,b,\delta) = \begin{cases} (\alpha,ab,\delta), & \text{якщо } \beta=\gamma; \\ 0, & \text{якщо } \beta \neq \gamma, \end{cases}$$

і $(\alpha,a,\beta)\cdot 0 = 0\cdot(\alpha,a,\beta) = 0\cdot 0 = 0$, для всіх $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \lambda$ і $a,b \in S$. Якщо $S = S^1$, то напівгрупа $B_\lambda(S)$ називається λ*-розширенням Брандта напівгрупи* S [7, 9]. Зрозуміло, якщо S напівгрупа з нулем, то множина

$$\mathcal{J} = \{0\} \cup \{(\alpha, 0_S, \beta) \colon 0_S \text{ — нуль в } S\}$$

є ідеалом напівгрупи $B_\lambda(S)$. Покладемо $B_\lambda^0(S) = B_\lambda(S)/\mathcal{J}$. Напівгрупа $B_\lambda^0(S)$ називається λ^0*-розширенням Брандта напівгрупи* S *з нулем* [96].

Алгебричні властивості напівгрупи $B_\lambda(S)$ та її узагальнення λ^0-розширення Брандта $B_\lambda^0(S)$ напівгрупи S вивчались в [7, 96]. Топологізацію напівгруп $B_\lambda(S)$ та $B_\lambda^0(S)$, а також їхні категорні властивості, застосування й узагальнення досліджувалися у працях [9, 10, 48, 54, 87, 93, 96, 98–100, 103, 104, 107, 109, 114, 165].

Біциклічним моноїдом, або *біциклічною напівгрупою*, називається напівгрупа $\mathscr{C}(p,q)$ з одиницею 1, породжена двома елементами p та q, які задовольняють умову $pq = 1$ [65]. Різні елементи $\mathscr{C}(p,q)$ можна зобразити у вигляді нескінченної таблиці

$$\begin{matrix} 1 & p & p^2 & p^3 & \cdots \\ q & qp & qp^2 & qp^3 & \cdots \\ q^2 & q^2p & q^2p^2 & q^2p^3 & \cdots \\ q^3 & q^3p & q^3p^2 & q^3p^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix},$$

а напівгрупова операція на $\mathscr{C}(p,q)$ визначається так:

$$q^kp^l \cdot q^mp^n = q^{k+m-\min\{l,m\}}p^{l+n-\min\{l,m\}}.$$

Якщо X — топологічний простір і $A \subseteq X$, тоді через $\mathrm{cl}_X(A)$ та $\mathrm{int}_X(A)$ позначатимемо топологічне замикання та внутрішність множини A в топологічному просторі X, відповідно.

Топологічний простір X називається:

- T_0-*простором*, якщо для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існує така відкрита підмножина U в X, що містить тільки одну з цих точок;
- T_1-*простором*, якщо для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існує така відкрита підмножина U в X, що $x \in U$ і $y \notin U$;
- T_2-*простором* (*гаусдорфовим простором*), якщо для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існує такі відкриті підмножини U, V в X, що $x \in U$, $y \in V$ і $U \cap V = \varnothing$;
- T_3-*простором* (*регулярним простором*), якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та будь-якої такої замкненої підмножини F в X, що $x \notin F$, існують такі відкриті підмножини U, V в X, що $x \in U$, $F \subset V$ і $U \cap V = \varnothing$;

- $T_{3\frac{1}{2}}$-*простором* (*тихоновським або цілком регулярним простором*), якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та будь-якої такої замкненої підмножини F в X, що $x \notin F$, існує неперервна функція $f\colon X \to [0;1]$ така, що $f(x) = 0$ і $f(y) = 1$, для всіх $y \in F$;
- T_4-*простором* (*нормальним простором*), якщо X є T_1-простором і для довільних диз'юнктних замкнених підмножин F_1, F_2 в X існують такі дві відкриті підмножини U та V в X, що $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$ і $U \cap V = \varnothing$;
- *функціонально гаусдорфовим*, якщо для кожних двох різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує неперервна функція $f\colon X \to [0,1]$ така, що $f(x_1) = 0$ і $f(x_2) = 1$;
- *метризовним*, якщо його топологія породжується деякою метрикою.

Теорема 1.2.5 ([74, теорема 1.5.16]). *Кожен зліченний регулярний простір — нормальний.*

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X та Y називається *гомеоморфізмом*, якщо f взаємооднозначно відображає X на Y і обернене відображення $f^{-1}\colon Y \to X$ є неперервним. *Вкладенням* (*зануренням*) топологічного простору X у топологічний простір Y називається гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ з простору X у простір Y, тобто на образ $f(X)$.

Неперервне відображення $f\colon X \to X$ називається *ретракцією простору* X, якщо $ff = f$; множина всіх значень ретракції простору X називається *ретрактом* простору X.

Твердження 1.2.6 ([74, задача 1.5.C]). *Довільний ретракт гаусдорфового простору є замкненою підмножиною в цьому просторі.*

Позначимо через $\mathfrak{D}(\omega)$ та $\mathbb{R}$, відповідно, нескінченний зліченний дискретний простір та множину дійсних чисел із природною топологією.

Якщо $\{X_i\colon i \in \mathscr{I}\}$ — сім'я множин, $X = \prod\{X_i\colon i \in \mathscr{I}\}$ — їх декартів

добуток і p — точка в X, то підмножина

$$\Sigma(p, X) = \{x \in X\colon\ |\{i \in \mathscr{I} : x(i) \neq p(i)\}| \leqslant \omega\}$$

в X називається Σ-*добутком* $\{X_i\colon i \in \mathscr{I}\}$ з базовою точкою $p \in X$. У випадку, коли $\{X_i\colon i \in \mathscr{I}\}$ є сім'єю топологічних просторів, припускаємо, що $\Sigma(p, X)$ є підпростором тихоновського добутку $X = \prod\{X_i\colon i \in \mathscr{I}\}$.

Підмножина A топологічного простору X називається:

- *щільною* в X, якщо $\mathrm{cl}_X(A) = X$;
- *канонічно відкритою*, якщо $\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(A)) = A$.

Сім'я $\mathscr{B}$ називається *базою топологічного простору* X, якщо довільну непорожню відкриту множину простору X можна подати у вигляді об'єднання деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ називається *базою топологічного простору* X *в точці* x, якщо для довільного околу U точки x існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in V \subset U$.

Сім'я $\mathscr{P}$ називається *передбазою топологічного простору* X, якщо сім'я всіх скінченних перетинів $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$, де $U_i \in \mathscr{P}$ для $i = 1, 2, \ldots, k$, є базою топологічного простору X.

Нехай (X, τ) — топологічний простір і для кожного елемента x простору X задано базу $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *сім'єю околів топологічного простору* (X, τ). Кожна система околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ задовольняє такі властивості ([74]):

(PB1) Для кожного елемента x в X сім'я $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ і для кожного елемента U сім'ї $\mathscr{B}(x)$ маємо $x \in U$;

(BP2) Якщо $x \in U \in \mathscr{B}(x)$, то існує елемент V сім'ї $\mathscr{B}(x)$ такий, що $V \subset U$;

(BP3) Для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує елемент U сім'ї $\mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subset U_1 \cap U_2$.

Твердження 1.2.7 ([74, твердження 1.5.2]). *Нехай X — топологічний простір і $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ — сім'я околів простору X, яка задовольняє властивості* ***(BP1)–(BP3)****. Крім того, нехай сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ задовольняє властивість:*

(BP4) *для довільної пари різних точок $x, y \in X$ існують такі відкриті множини $U, V \in \mathscr{B}(x)$, що $U \cap V \neq \varnothing$.*

Тоді топологічний простір X, породжений сім'єю $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$, є гаусдорфовим.

Теорема 1.2.8 ([183, теорема Урисона]). *Для того, щоб топологічний простір зі зліченною базою був метризовним, необхідно і достатньо, щоб він був нормальним.*

Точка x називається *ізольованою* в топологічному просторі X, якщо $\{x\}$ є відкритою підмножиною в X.

Точка x називається *точкою накопичення* підмножини A в топологічному просторі X, якщо кожен відкритий окіл точки x містить нескінченну кількість елементів множини A.

Покриттям множини X називається сім'я $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ підмножин в X така, що $\bigcup_{s\in S} A_s = X$. Підсім'я $\mathscr{A}_0$ в $\mathscr{A}$ називається *підпокриттям* множини X, якщо $\mathscr{A}_0$ — покриття множини X. Якщо X — топологічний простір, то сім'ю $\mathscr{A}$ називають *відкритим покриттям* простору X, якщо всі елементи сім'ї $\mathscr{A}$ є відкритими підмножинами в X.

Сім'я $\{A_s\}_{s\in S}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для довільної точки $x \in X$ існує відкритий окіл U точки x такий, що множина $\{s \in S \colon U \cap A_s \neq \varnothing\}$ — скінченна.

Теорема 1.2.9 ([74, теорема 1.1.11]). *Для кожної локально скінченної сім'ї $\{A_s\}_{s\in S}$ виконується рівність $\overline{\bigcup_{s\in S} A_s} = \bigcup_{s\in S} \overline{A_s}$.*

Топологічний простір X називатимемо

- 0-*вимірним*, якщо X має базу, яка складається з відкрито-замкнених підмножин з X (див. [74]);

- *напіврегулярним*, якщо X має базу, яка складається з канонічно відкритих підмножин;
- *квазірегулярним*, якщо для довільної непорожньої відкритої множини $U \subset X$ існує непорожня відкрита множина $V \subset U$ така, що $\mathrm{cl}_X(V) \subseteq U$;
- *досконало нормальним*, якщо X є нормальним і кожна замкнена підмножина в X є G_δ-множиною;
- *колективно нормальним*, якщо X є T_1-простором і для кожної дискретної сім'ї $\{F_s\}_{s\in\mathscr{A}}$ замкнених підмножин в X існує дискретна сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathscr{A}}$ відкритих підмножин в X таких, що $F_s \subseteq U_s$ для всіх $s \in \mathscr{A}$ (див. [74]);
- *розрідженим*, якщо X не містить непорожнього щільного в собі підпростору;
- *спадково незв'язним*, якщо X не містить жодної зв'язної підмножини, відмінної від одноточкової;
- *компактним*, якщо кожне відкрите покриття X містить скінченне підпокриття;
- *секвенціально компактним*, якщо з кожної послідовності $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ в X можна вибрати збіжну підпослідовність в X;
- *зліченно компактним*, якщо з кожного відкритого зліченного покриття X можна вибрати скінченне підпокриття;
- *H-замкненим*, якщо X є замкненим підпростором кожного гаусдорфового топологічного простору, що його містить;
- *інфра H-замкненим*, якщо замкненим є образ кожного неперервного відображення з X у довільний гаусдорфовий простір з першою аксіомою зліченності (див. [121]);
- *зліченно компактним в підмножині $A \subseteq X$*, якщо кожна нескінченна підмножина $B \subseteq A$ містить точку накопичення x в X;
- *зліченно пракомпактним*, якщо існує така щільна підмножина A в

X, що X є зліченно компактним в A;

- *слабко компактним*, якщо кожне локально-скінченне відкрите покриття простору X є скінченним [23];
- *d-слабко компактним* (чи DFCC), якщо скінченною є кожна дискретна сім'я відкритих підмножин у X (див. [155]);
- *псевдокомпактним*, якщо X — тихоновський та кожна неперервна дійснозначна функція на X обмежена;
- *цілком зліченно пракомпактним*, якщо існує така щільна підмножина D простору X, що кожна послідовність точок множини D має підпослідовність з компактним замиканням в X;
- *секвенціально пракомпактним*, якщо в просторі X існує така щільна підмножина D, що кожна послідовність точок множини D має збіжну підпослідовність [105];
- *селективно секвенціально слабко компактним*, якщо для кожної сім'ї $\{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ непорожніх відкритих підмножин X існують точки $x_n \in U_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ такі, що послідовність $\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ містить збіжну підпослідовність (див. [68]);
- *секвенціально слабко компактним*, якщо для кожної сім'ї $\{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ непорожніх відкритих підмножин у X існують нескінченна множина $J \subseteq \mathbb{N}$ і точка $x \in X$ такі, що $\{n \in J\colon W \cap U_n = \varnothing\}$ є скінченною множиною для кожного відкритого околу W точки x ([69]);
- *селективно слабко компактним*, якщо для кожної послідовності $\{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ непорожніх відкритих підмножин X можна вибрати точку $x \in X$ та точки $x_n \in U_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ такі, що множина $\{n \in \mathbb{N}\colon x_n \in W\}$ є нескінченною для кожного відкритого околу W точки x (див. [68]);
- *Y-компактним* для деякого топологічного простору Y, якщо для довільного неперервного відображення $f\colon X \to Y$ образ $f(X)$ є ком-

пактним .

Теорема 1.2.10 (теорема Александера про передбазу [74, задача 3.12.2]). *Нехай X — топологічний простір і $\mathscr{P}$ — деяка його передбаза. Простір X компактний тоді і тільки тоді, коли із кожного покриття простору X елементами сім'ї $\mathscr{P}$ можна вибрати скінченне підпокриття.*

Теорема 1.2.11 ([74, теорема 3.1.10]). *Неперервний образ компактного простору є компактним простором.*

Теорема 1.2.12 ([74, теорема 3.1.13]). *Кожне неперервне взаємооднозначне відображення компактного простору на гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.*

Твердження 1.2.13 ([1, твердження 1]). *Якщо X — псевдокомпактний простір, то X є зліченно компактним в множині всіх своїх ізольованих точок.*

Твердження 1.2.14 ([104, твердження 4]). *Кожен H-замкнений простір є слабко компактним.*

Твердження 1.2.15 ([74, задача 3.12.5]). *Регулярний простір є H-замкненим тоді і тільки тоді, коли він є компактним.*

Теорема 1.2.16 ([184, теорема 5.7]). *Кожен зліченно компактний розріджений T_3-простір є секвенціально компактним.*

Теорема 1.2.17 ([74, теорема 3.10.3]). *Для довільного топологічного простору X такі умови є еквівалентними:*

(*i*) *простір X зліченно компактний;*

(*ii*) *довільна локально скінченна сім'я непорожніх множин в X є скінченною;*

(*iii*) *довільна локально скінченна сім'я одноточкових підмножин простору X є скінченною;*

(*iv*) *довільна нескінченна підмножина простору X має строго граничну точку;*

(*v*) *довільна зліченна нескінченна підмножина простору X має стро-*

го граничну точку.

Теорема 1.2.18 ([74, теорема 3.10.4]). *Кожен замкнений підпростір зліченно компактного простору є зліченно компактним.*

Теорема 1.2.19 ([23, теорема 14]). *Топологічний простір є слабко компактним тоді і лише тоді, коли слабко компактною є кожна власна підмножина, яка є замиканням відкритої підмножини.*

Відношення між різними видами близьких до компактного просторів ілюструє діаграма зображена на рис. 1.1.

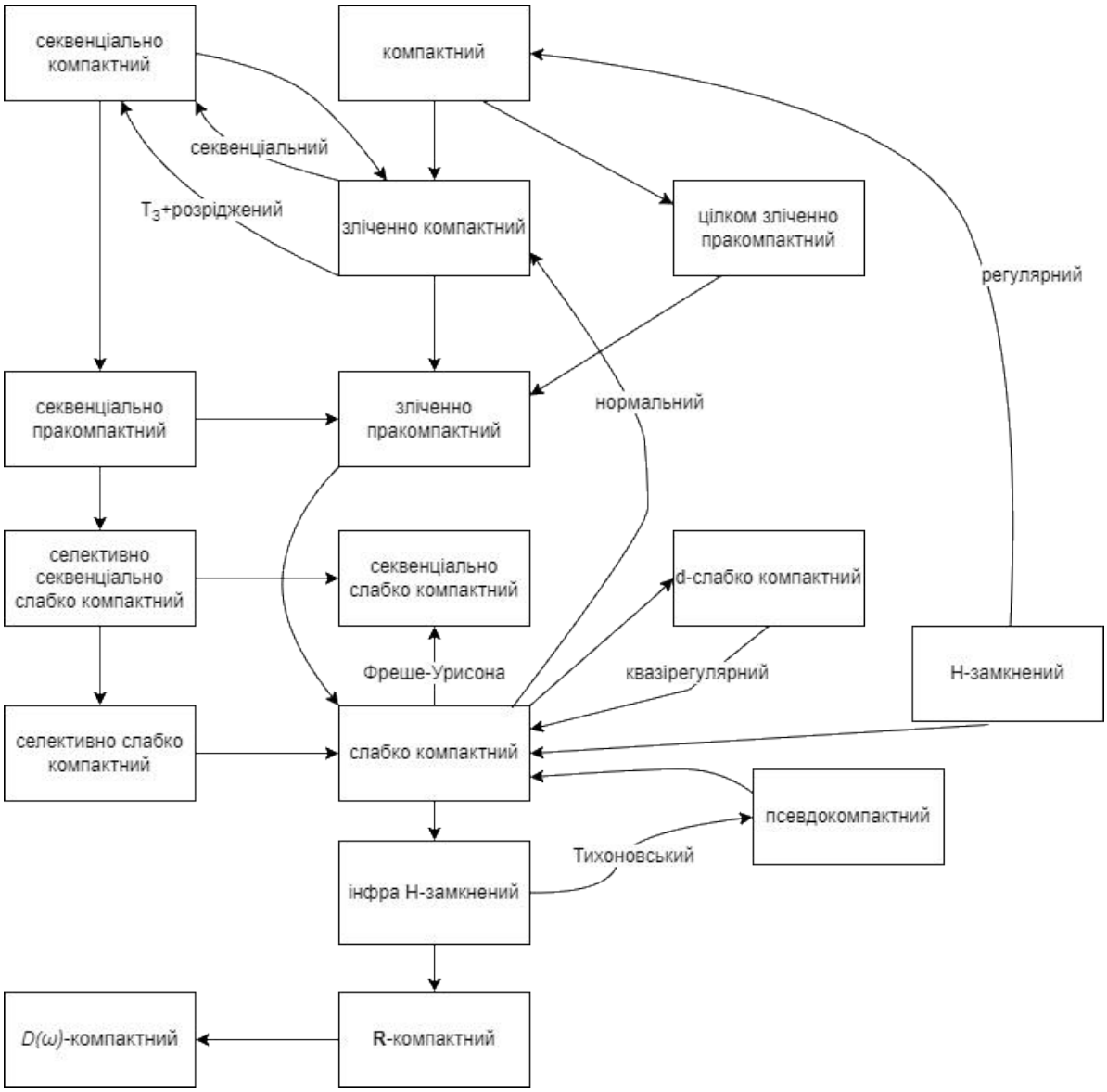

Рис. 1.1. Взаємозв'язки між просторами близькими до компактного

Напівтопологічною напівгрупою називається топологічний простір разом із заданою на ньому нарізно неперервною напівгруповою операцією.

Топологічною напівгрупою називається топологічний простір разом з неперервною напівгруповою операцією. Якщо S — напівгрупа й τ — топологія на S така, що (S, τ) є топологічною напівгрупою, то називатимемо τ *напівгруповою топологією* на S.

Нехай S та T — топологічні напівгрупи. Відображення φ називається *топологічним ізоморфізмом*, якщо φ є одночасно ізоморфізмом напівгруп S та T і гомеоморфізмом топологічних просторів S та T. *Топологічним вкладеннм* (*зануренням*) топологічної напівгрупи S у топологічну напівгрупу T називається топологічний ізоморфізм напівгрупи S у напівгрупу T.

Лема 1.2.20 ([51, лема 2]). *Нехай S — гаусдорфова топологічна інверсна напівгрупа, для якої виконуються умови:*

(*i*) *кожна максимальна підгрупа напівгрупи S є H-замкненою в класі топологічних груп;*

(*ii*) *всі немінімальні елементи напівґратки $E(S)$ є ізольованими точками в $E(S)$.*

Тоді якщо існує топологічна інверсна напівгрупа T така, що S є щільною піднапівгрупою в T і $T \setminus S \neq \varnothing$, то для всіх $x \in T \setminus S$ принаймні одна з точок $x \cdot x^{-1}$ чи $x^{-1} \cdot x$ належить до $T \setminus S$.

Топологічною (*напівтопологічною*) *напівґраткою* називатимемо топологічний простір разом із неперервною (нарізно неперервною) напівґратковою операцією. Якщо S — напівґратка і τ — така топологія на S, що (S, τ) є топологічною напівґраткою, то τ називатимемо *напівґратковою топологією* на S. А якщо τ — така топологія на S, що (S, τ) є напівтопологічною напівґраткою, то називатимемо τ *трансляційно-неперервною топологією* на S.

Теорема 1.2.21 ([146, теорема 6.6]). *Кожна компактна гаусдорфова на-*

півтопологічна напівґратка є топологічною напівґраткою.

Нехай $\mathfrak{S}$ — клас напівтопологічних напівгруп. Напівгрупа $S \in \mathfrak{S}$ називається *H-замкненою* в $\mathfrak{S}$, якщо S є замкненою піднапівгрупою довільної напівтопологічної напівгрупи $T \in \mathfrak{S}$, що містить S одночасно як піднапівгрупу і як топологічний простір. H-замкнені топологічні напівгрупи введені Степом в [178] і називались *максимальними напівгрупами.* Алгебрична напівгрупа S називається *алгебрично повною в* $\mathfrak{S}$, якщо S із заданою на ній такою довільною гаусдорфовою топологією τ, що $(S, \tau) \in \mathfrak{S}$ є H-замкненою в $\mathfrak{S}$. Різні типи H-замкненостей топологічних та напівтопологічних напівгруп вивчались в працях [25]– [62], [84]– [94], [106], [108].

Теорема 1.2.22 ([100, теорема 5]). *Нескінченна напівгрупа матричних одиниць не вкладається в зліченно компактну гаусдорфову топологічну напівгрупу.*

Наслідок 1.2.23 ([99, наслідок 13]). *Для довільного гаусдорфового секвенціально компактного (відп. компактного) напівтопологічного моноїда (S, τ) з нулем і для довільного кардинала $\lambda \geqslant 1$ існує єдине гаусдорфове секвенціально компактне (відп. компактне) топологічне λ^0-розширення Брандта $\left(B^0_\lambda(S), \tau^S_B\right)$ моноїда (S, τ) у класі напівтопологічних напівгруп.*

Твердження 1.2.24 ([88, твердження 10]). *Нехай S — напівтопологічна інверсна напівгрупа з неперервною інверсією. Якщо T є інверсною піднапівгрупою в S, яка допускає щільні ряди ідеалів, то T є замкненою в S.*

РОЗДІЛ 2
СЛАБКО КОМПАКТНІ ТОПОЛОГІЇ НА НАПІВҐРАТЦІ $\exp_n \lambda$

Основні результати, викладені в цьому розділі, опубліковано в статтях [112], [113] та [115].

Оскільки для будь-якого нескінченного кардинала λ і для довільної трансляційно-неперервної топології τ на $\exp_1 \lambda$ кожен ненульовий ідемпотент є ізольованою точкою в $(\exp_1 \lambda, \tau)$ (див. [100]), то довільна трансляційно-неперервна $\mathfrak{D}(\omega)$-компактна T_1-топологія на $\exp_1 \lambda$ є компактною. Тому надалі в цьому розділі вважатимемо, що $n \geqslant 2$.

2.1. Зліченно компактні топології на напівґратці $\exp_n \lambda$

Твердження 2.1.1. *Нехай n — довільне натуральне число та λ — будь-який нескінченний кардинал. Тоді для кожної трансляційно неперервної T_1-топології τ на $\exp_n \lambda$ виконуються такі умови:*

- (i) $(\exp_n \lambda, \tau)$ *— замкнена підмножина довільної T_1-напівтопологічної напівґратки S, що містить $\exp_n \lambda$ як піднапівґратку;*
- (ii) *для кожного $x \in \exp_n \lambda$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в $(\exp_n \lambda, \tau)$ такий, що $U(x) \subseteq \uparrow x$;*
- (iii) *$\uparrow x$ — відкрито-замкнена підмножина в $(\exp_n \lambda, \tau)$ для кожної точки $x \in \exp_n \lambda$;*
- (iv) *топологічний простір $(\exp_n \lambda, \tau)$ є функціонально гаусдорфовим і квазірегулярним, а отже, і гаусдорфовим;*
- (v) $(\exp_n \lambda, \tau)$ *є розрідженим спадково незв'язним простором.*

Доведення. (i) Доведення проведемо методом математичної індукції по n. Нехай $n = 1$ і S — довільна T_1-напівтопологічна напівґратка, що містить $\exp_1 \lambda$ як власну піднапівґратку. Зафіксуємо довільну точку $x \in S \setminus \exp_1 \lambda$.

Припустимо протилежне: кожний відкритий окіл $U(x)$ точки x в топологічному просторі S перетинає напівґратку $\exp_1 \lambda$. Спочатку доведемо, що $ex = 0$ для довільного елемента $e \in \exp_1 \lambda$, де 0 — нуль напівґратки $\exp_1 \lambda$. Припустимо, що існує такий елемент $e \in \exp_1 \lambda$, що $ex = y \neq 0$. Оскільки S є T_1-простором, то існує такий відкритий окіл $U(y)$ точки y в S, що $0 \notin U(y)$. З означення напівґраткової операції на $\exp_1 \lambda$ і з нарізної неперервності напівґраткові операції на S випливає, що $0 \in e \cdot V(x) \subseteq U(y)$ для деякого відкритого околу $V(x)$ точки x в S, оскільки окіл $V(x)$ містить нескінченну кількість точок із напівґртаки $\exp_1 \lambda$. Це суперечить вибору околу $U(y)$. З отриманого протиріччя випливає, що $ex = 0$ для всіх $e \in \exp_1 \lambda$. Зафіксуємо довільний окіл $U(x)$ точки x в S такий, що $0 \notin U(x)$. Тоді з нарізної неперервності напівґраткової операції на S випливає, що існує відкритий окіл $V(x)$ точки x в S такий, що $x \cdot V(x) \subseteq U(x)$. Оскільки $V(x) \cap \exp_1 \lambda \neq \varnothing$, то $0 \in x \cdot V(x)$, протиріччя. Тому, $\exp_1 \lambda$ є замкненою піднапівґраткою в S.

Припустимо, що для всіх $j < k$ напівґратка $\exp_j \lambda$ є замкненою піднапівґраткою довільної T_1-напівтопологічної напівґратки, що містить $\exp_j \lambda$, як власну піднапівґратку, де $k \leqslant n$. Доведемо, що ця властивість виконується і для напівґратки $\exp_k \lambda$. Припустимо протилежне: існує T_1-напівтопологічна напівґратка S, що містить $\exp_k \lambda$ як незамкнену піднапівґратку. Тоді існує такий елемент $x \in S \setminus \exp_k \lambda$, що кожен відкритий окіл $U(x)$ точки x в топологічному просторі S перетинає напівґратку $\exp_k \lambda$. З припущення індукції випливає, що існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x в S, що

$$U(x) \cap \exp_k \lambda \subseteq \exp_k \lambda \setminus \exp_{k-1} \lambda.$$

Тепер, як і у випадку напівґратки $\exp_1 \lambda$, з нарізної неперервності напівґраткової операції на S випливає, що $e \cdot x \in \exp_{k-1} \lambda$ для всіх $e \in \exp_k \lambda \setminus \exp_{k-1} \lambda$. Справді, припустимо протилежне: існує такий елемент $e \in \exp_k \lambda \setminus \exp_{k-1} \lambda$, що $e \cdot x = z \notin \exp_{k-1} \lambda$. Тоді з припущення

індукції випливає, що $\exp_{k-1}\lambda$ є замкненою піднапівґраткою в S, а отже, існує відкритий окіл $U(y)$ точки y в S такий, що $U(y)\cap\exp_{k-1}\lambda=\varnothing$. Тепер, з нарізної неперервності напівґраткової операції на S випливає, що існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x в S, що $e\cdot U(x)\subseteq U(y)$. Тоді з властивостей напівґраткової операції в $\exp_k\lambda$ випливає, що $(e\cdot U(x))\cap\exp_{k-1}\lambda\neq\varnothing$, що суперечить вибору околу $U(y)$.

Зафіксуємо такий довільний відкритий окіл $U(x)$ точки x в S, що

$$U(x)\cap\exp_k\lambda\subseteq\exp_k\lambda\setminus\exp_{k-1}\lambda.$$

З нарізної неперервності напівґраткової операції на S випливає, що існує такий відкритий окіл $V(x)\subseteq U(x)$ точки x в S, що $x\cdot V(x)\subseteq U(x)$. За припущенням множина $V(x)\cap\exp_k\lambda\setminus\exp_{k-1}\lambda$ є нескінченною, а тому

$$(x\cdot V(x))\cap\exp_{k-1}\lambda\neq\varnothing,$$

а це суперечить вибору околу $U(x)$. З отриманого протиріччя випливає, що $\exp_k\lambda$ є замкненою підмножиною в S.

(ii) Це твердження є тривіальним у випадку, коли $x=0$, а тому припустимо, що $x\neq 0$. З означення напівґратки $\exp_n\lambda$ випливає, що існує таке найменше натуральне число k, що $x\in\exp_k\lambda$ і $x\notin\exp_{k-1}\lambda$. За твердженням (i) існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x у просторі $(\exp_n\lambda,\tau)$, що $U(x)\subseteq\exp_n\lambda\setminus\exp_{k-1}\lambda$. З нарізної неперервності напівґраткової операції на $(\exp_n\lambda,\tau)$ випливає, що існує відкритий окіл $V(x)\subseteq U(x)$ такий, що $x\cdot V(x)\subseteq U(x)$. Якщо $V(x)\nsubseteq\uparrow x$, то за означенням напівґраткової операції на $\exp_n\lambda$ існує такий елемент $y\in V(x)$, що $xy\in\exp_{k-1}\lambda$, а це суперечить вибору елемента x. Отже, $V(x)\subseteq\uparrow x$.

(iii) Оскільки топологічний простір є T_1-простором тоді і лише тоді, коли кожна його точка є замкненою підмножиною, то з нарізної неперервності напівґраткової операції випливає, що $\uparrow x$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі $(\exp_n\lambda,\tau)$ для всіх $x\in\exp_n\lambda$. А також, з (ii)

випливає, що

$$\uparrow x = \bigcup \{V(y) \colon y \in \uparrow x \text{ і } V(y) \text{ – відкритий окіл точки } y \text{ такий, що } V(y) \subseteq \uparrow y\}$$

є відкритою підмножиною в топологічному просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$ для всіх $x \in \exp_n \lambda$.

(iv) Зафіксуємо два довільні різні елементи x_1 та x_2 напівтопологічної напівґратки $(\exp_n \lambda, \tau)$. Тоді маємо, що або $x_1 \notin \uparrow x_2$, або $x_2 \notin \uparrow x_1$. У випадку, коли $x_1 \notin \uparrow x_2$, визначимо відображення $f \colon (\exp_n \lambda, \tau) \to [0, 1]$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \uparrow x_2; \\ 0, & \text{якщо } x \notin \uparrow x_2. \end{cases}$$

Тоді $f(x_1) = 0$ і $f(x_2) = 1$, а за твердженням (iii) множина $\uparrow x_2$ — відкрито-замкнена в $(\exp_n \lambda, \tau)$, а отже, так визначене відображення f є неперервним.

З означення напівґратки $\exp_n \lambda$ випливає, що кожна непорожня відкрита підмножина в $(\exp_n \lambda, \tau)$ містить максимальний елемент x стосовно природного часткового порядку на $\exp_n \lambda$. Тоді з твердження (iii) випливає, що $\uparrow x$ є відкрито-замкненою підмножиною в $(\exp_n \lambda, \tau)$, а тому x є ізольованою точкою в $(\exp_n \lambda, \tau)$. Оскільки τ є T_1-топологією, то $\mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(\{x\}) = \{x\} \subseteq U$, з чого випливає, що $(\exp_n \lambda, \tau)$ — квазірегулярний простір.

(v) Доведемо, що кожна непорожня підмножина A з $(\exp_n \lambda, \tau)$ містить в собі ізольовану точку. Зафіксуємо довільну непорожню підмножину A з $(\exp_n \lambda, \tau)$. Якщо $A \cap \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda \neq \varnothing$, то за твердженням (ii) кожна точка $x \in A \cap \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ є ізольованою в $(\exp_n \lambda, \tau)$, а тому x є ізольованою точкою в A. В іншому випадку існує таке натуральне число $k < n$, що $A \subseteq \exp_k \lambda$ і $A \nsubseteq \exp_{k-1} \lambda$. Тоді за твердженням (ii) кожна точка $x \in A \cap \exp_k \lambda \setminus \exp_{k-1} \lambda$ є ізольованою в A.

Спадкова незв'язність простору $(\exp_n \lambda, \tau)$ випливає з твердження (iii). Справді, якщо $x \nleq y$ в $\exp_n \lambda$, то за твердженням (iii) маємо, що множина

$\uparrow x$ є таким відкрито-замкненим околом точки x в $(\exp_n \lambda, \tau)$, що $y \notin \uparrow x$. З цього випливає, що простір $(\exp_n \lambda, \tau)$ не містить жодної зв'язної неодноточкової підмножини. $\square$

Із твердження 2.1.1(i) випливає.

Наслідок 2.1.2. *Нехай n — довільне натуральне число та λ — будь-який нескінченний кардинал. Тоді напівґратка $\exp_n \lambda$ є алгебрично повною в класі T_1-напівтопологічних напівґраток.*

З прикладу 2.1.3 випливає, що твердження 2.1.1(iv) не виконується у випадку, коли топологічна напівґратка $(\exp_n \lambda, \tau)$ є T_0-простором.

Приклад 2.1.3. Для довільного натурального числа n і довільного кардинала λ визначимо топологію τ_0 на $\exp_n \lambda$ так:

(i) всі ненульові елементи напівґратки $\exp_n \lambda$ є ізольованими точками в $(\exp_n \lambda, \tau_0)$; і

(ii) $\exp_n \lambda$ — єдиний відкритий окіл нуля в $(\exp_n \lambda, \tau_0)$.

Легко бачити, що напівґраткова операція на $(\exp_n \lambda, \tau_0)$ неперервна.

Приклад 2.1.4. Для довільного натурального числа n та будь-якого нескінченного кардинала λ визначимо топологію τ_{c}^n на $\exp_n \lambda$ так: сім'я $\{\mathscr{B}_{\mathsf{c}}^n(x) \colon x \in \exp_n \lambda\}$, де

$$\mathscr{B}_{\mathsf{c}}^n(x) = \{U_x(x_1, \ldots, x_j) = \uparrow x \setminus (\uparrow x_1 \cup \cdots \cup \uparrow x_j) : x_1, \ldots, x_j \in \uparrow x \setminus \{x\}\},$$

утворює систему відкритих околів топологічного простору $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^n)$. Очевидно, що сім'я $\{\mathscr{B}_{\mathsf{c}}^n(x) \colon x \in \exp_n \lambda\}$ задовольняє умови **(BP1)**–**(BP4)**, а тому топологічний простір $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^n)$ є гаусдорфовим.

Твердження 2.1.5. *Нехай n — будь-яке натуральне число та λ — довільний нескінченний кардинал. Тоді $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^n)$ є компактною 0-вимірною топологічною напівґраткою.*

Доведення. З означення сім'ї $\{\mathscr{B}_{\mathsf{c}}^n(x) \colon x \in \exp_n \lambda\}$ випливає, що для довільного елемента $x \in \exp_n \lambda$ множина $\uparrow x$ є відкрито-замкненою в просторі

$(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^n)$, а тому сім'я $\{\mathscr{B}_{\mathsf{c}}^n(x) \colon x \in \exp_n \lambda\}$ є базою топологічного простору $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^n)$, що складається з відкрито-замкнених підмножин.

Тепер за індукцією доведемо компактність простору $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^n)$. У випадку, коли $n = 1$, компактність простору $\left(\exp_1 \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^1\right)$ випливає з означення сім'ї $\left\{\mathscr{B}_{\mathsf{c}}^1(x) \colon x \in \exp_1 \lambda\right\}$. Далі доведемо, що з того, що простір $\left(\exp_i \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^i\right)$ є компактним для всіх натуральних чисел $i < k \leqslant n$, випливає компактність простору $\left(\exp_k \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^k\right)$. Виберемо довільне відкрите покриття $\mathscr{U}$ топологічного простору $\left(\exp_k \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^k\right)$. З означення топології τ_{c}^k випливає існування такого елемента $U_0 \in \mathscr{U}$, що $0 \in U_0$, а тому існує такий відкритий окіл $U_0(x_1, \ldots, x_j) \in \mathscr{B}_{\mathsf{c}}^k(0)$, що $U_0(x_1, \ldots, x_j) \subseteq U_0$. З означення напівґратки $\exp_n \lambda$ випливає, що для всіх $x_1, \ldots, x_j \in \exp_k \lambda$ піднапівґратки $\uparrow x_1, \ldots, \uparrow x_j$ в $\exp_k \lambda$ є ізоморфними напівґраткам $\exp_{i_1} \lambda, \ldots, \exp_{i_j} \lambda$, відповідно, для деяких натуральних чисел $i_1, \ldots, i_j < k$. З цього факту, а також з означення топології τ_{c}^k та припущення індукції випливає, що $\uparrow x_1, \ldots, \uparrow x_j$ є компактними підмножинами в $\left(\exp_k \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^k\right)$. А тому існує скінченна кількість таких елементів відкритого покриття $U_1, \ldots, U_m \in \mathscr{U}$, що

$$\uparrow x_1 \cup \cdots \cup \uparrow x_j \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_m,$$

а отже, $\{U_0, U_1, \ldots, U_m\}$ — скінченне підпокриття топологічного простору $\left(\exp_k \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^k\right)$.

Оскільки у гаусдорфовій компактній напівтопологічній напівґратці напівґраткова операція є неперервною (див. теорему 1.2.21), то достатньо довести, що напівґраткова операція на $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^n)$ є нарізно неперервною.

Нехай a та b — довільні елементи напівґратки $\exp_n \lambda$. Розглянемо такі три випадки:

$$\textbf{(I)}\ a = b; \qquad \textbf{(II)}\ a < b; \qquad \text{і} \qquad \textbf{(III)}\ a \text{ та } b \text{ — непорівняльні.}$$

У випадку **(I)** маємо, що

$$a \cdot U_a(x_1, \ldots, x_k) = \{a\} \subseteq U_a(x_1, \ldots, x_k)$$

для довільного $U_a(x_1,\ldots,x_k)\in\mathscr{B}^n_{\mathsf{c}}(a)$.

У випадку **(II)** отримуємо, що

$$a\cdot U_b(b_1,\ldots,b_l)=\{a\}\subseteq U_a(x_1,\ldots,x_k)$$

і

$$U_a(x_1,\ldots,x_k)\cdot b\subseteq U_a(x_1,\ldots,x_k)$$

для довільних елементів $U_a(x_1,\ldots,x_k)\in\mathscr{B}^n_{\mathsf{c}}(a)$ і $U_b(b_1,\ldots,b_l)\in\mathscr{B}^n_{\mathsf{c}}(b)$, оскільки якщо $a\subseteq x\subseteq y$ і $a\subseteq b$ в $\exp_n\lambda$, то $a\subseteq x\cap b\subseteq y$.

У випадку **(III)** розглянемо два можливі підвипадки: $\uparrow a\cap\uparrow b=\varnothing$ і $\uparrow a\cap\uparrow b\neq\varnothing$. Покладемо $d=ab=a\cap b$. Якщо $\uparrow a\cap\uparrow b=\varnothing$, то

$$a\cdot U_b(b_1,\ldots,b_l)=\{d\}\subseteq U_d(z_1,\ldots,z_k)$$

і

$$U_a(x_1,\ldots,x_k)\cdot b\subseteq U_d(z_1,\ldots,z_k)$$

для довільних елементів $U_a(x_1,\ldots,x_k)\in\mathscr{B}^n_{\mathsf{c}}(a)$, $U_b(b_1,\ldots,b_l)\in\mathscr{B}^n_{\mathsf{c}}(b)$ і $U_d(z_1,\ldots,z_k)\in\mathscr{B}^n_{\mathsf{c}}(d)$, в цьому підвипадку маємо, що $\uparrow a\cdot\uparrow b=d$. Якщо $\uparrow a\cap\uparrow b\neq\varnothing$, то аналогічно можна довести, що

$$a\cdot U_b(b_1,\ldots,b_l,u)=\{d\}\subseteq U_d(z_1,\ldots,z_k)$$

і

$$U_a(x_1,\ldots,x_k,u)\cdot b\subseteq U_d(z_1,\ldots,z_k)$$

для всіх елементів $U_a(x_1,\ldots,x_k,u)\in\mathscr{B}^n_{\mathsf{c}}(a)$, $U_b(b_1,\ldots,b_l,u)\in\mathscr{B}^n_{\mathsf{c}}(b)$ і $U_d(z_1,\ldots,z_k)\in\mathscr{B}^n_{\mathsf{c}}(d)$, де $u=a\cup b$ в $\exp_n\lambda$.

Це і завершує доведення даного твердження. □

Зауваження 2.1.6. За твердженням 2.1.1(v) топологічний простір $(\exp_n\lambda,\tau^n_c)$ є розрідженим. Оскільки за теоремою 1.2.16 кожний зліченно компактний розріджений T_3-простір є секвенціально компактним, то $(\exp_n\lambda,\tau^n_c)$ є секвенціально компактним простором.

Теорема 2.1.7. *Нехай n — довільне натуральне число та λ — будь-який нескінченний кардинал. Тоді для кожної T_1-топології τ на $\exp_n \lambda$ такі умови є еквівалентними:*

(i) $(\exp_n \lambda, \tau)$ — *компактна топологічна напівґратка;*

(ii) $\tau = \tau_{\mathsf{c}}^n$;

(iii) $(\exp_n \lambda, \tau)$ — *зліченно компактна топологічна напівґратка;*

(iv) $(\exp_n \lambda, \tau)$ — *слабко компактна топологічна напівґратка;*

(v) $(\exp_n \lambda, \tau)$ — *компактна напівтопологічна напівґратка;*

(vi) $(\exp_n \lambda, \tau)$ — *зліченно компактна напівтопологічна напівґратка.*

Доведення. Не зменшуючи загальності, за твердженням 2.1.1 можемо вважати, що τ — гаусдорфова топологія на $\exp_n \lambda$. Очевидними є такі імплікації: $(i) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (iv)$, $(iii) \Rightarrow (vi)$, $(i) \Rightarrow (v)$ та $(v) \Rightarrow (vi)$. А імплікація $(ii) \Rightarrow (i)$ випливає з твердження 2.1.5.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Припустимо, що τ є напівґратковою компактною топологією на $\exp_n \lambda$. За твердженням 2.1.1(iii) тотожне відображення

$$\mathsf{id}_{\exp_n \lambda} \colon (\exp_n \lambda, \tau) \to (\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^n)$$

є неперервним, а отже, за теоремою 1.2.12 є гомеоморфізмом. А тому $\tau = \tau_{\mathsf{c}}^n$.

Імплікація $(v) \Rightarrow (i)$ випливає з твердження 1.2.14 (а також із теореми 1.2.21).

$(vi) \Rightarrow (v)$. Доведемо цю імплікацію методом математичної індукції.

Нехай $n = 1$. Припустимо протилежне: існує зліченно-компактна некомпактна трансляційно-неперервна топологія τ на $\exp_1 \lambda$. Тоді існує відкрите покриття $\mathscr{U}$ простору $(\exp_1 \lambda, \tau)$, з якого не можна вибрати скінченне підпокриття. Звідси випливає, що існує відкрита множина $U \in \mathscr{U}$ така, що $0 \in U$ і $\exp_1 \lambda \setminus U$ є нескінченною підмножиною в $\exp_1 \lambda$. Тоді за твердженням 2.1.1(iii) простір $(\exp_1 \lambda, \tau)$ містить відкрито-замкнений дискретний

підпростір, що суперечить теоремі 1.2.17. Отже, $(\exp_1 \lambda, \tau)$ є компактною напівтопологічною напівґраткою.

Доведемо, якщо компактною є кожна зліченно компактна напівтопологічна напівґратка $(\exp_i \lambda, \tau)$ для всіх натуральних чисел $i < k \leqslant n$, то компактною буде також і зліченно компактна напівтопологічна напівґратка $(\exp_k \lambda, \tau)$. Припустимо протилежне: існує відкрите покриття $\mathscr{U}$ топологічного простору $(\exp_k \lambda, \tau)$, яке не містить скінченне підпокриття. З твердження 2.1.1(i) випливає, що $\exp_{k-1} \lambda$ є замкненою підмножиною в $(\exp_k \lambda, \tau)$, а тому за теоремою 1.2.18 є зліченно компактним простором. З припущення індукції випливає, що $\exp_{k-1} \lambda$ — компактний підпростір в $(\exp_k \lambda, \tau)$, а тому відкрите покриття $\mathscr{U}$ топологічного простору $(\exp_k \lambda, \tau)$ містить скінченне підпокриття $\mathscr{U}_0$ його підпростору $\exp_{k-1} \lambda$. Якщо відкрите покриття $\mathscr{U}$ топологічного простору $(\exp_k \lambda, \tau)$ не містить скінченне підпокриття в $(\exp_k \lambda, \tau)$, то з твердження 2.1.1(iii) випливає, що $\exp_k \lambda \setminus \bigcup \mathscr{U}_0$ — відкрито-замкнений дискретний підпростір, що суперечить теоремі 1.2.17. Отож, $(\exp_k \lambda, \tau)$ є компактною напівтопологічною напівґраткою. Це завершує доведення даної імплікації.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Доведемо цю імплікацію методом математичної індукції.

Нехай $n = 1$. Припустимо протилежне: існує така слабко компактна топологія τ на $\exp_1 \lambda$, що $(\exp_1 \lambda, \tau)$ не є зліченно компактним простором. Тоді існує зліченне відкрите покриття $\mathscr{U}$ простору $(\exp_1 \lambda, \tau)$, яке не містить скінченного підпокриття. Отже, існує така відкрита множина $U \in \mathscr{U}$, що $0 \in U$ та $\exp_1 \lambda \setminus U$ є нескінченною підмножиною в $\exp_1 \lambda$. За твердженням 2.1.1(iii) простір $(\exp_1 \lambda, \tau)$ містить відкрито-замкнений дискретний підпростір, що суперечить тому, що простір $(\exp_1 \lambda, \tau)$ є слабко компактним. Отож, $(\exp_1 \lambda, \tau)$ — зліченно компактний простір.

Нехай тепер кожна слабко компактна топологічна напівґратка $(\exp_i \lambda, \tau)$ є зліченно компактною для всіх натуральних чисел $i < k \leqslant n$. Доведемо, що зліченно компактною буде також і слабко компактна топологічна на-

півґратка $(\exp_k \lambda, \tau)$.

Припустимо протилежне: для всіх натуральних чисел $i < k \leqslant n$ кожна слабко компактна топологічна напівґратка $(\exp_i \lambda, \tau)$ є зліченно компактною, але існує слабко компактна топологічна напівґратка $(\exp_k \lambda, \tau)$, яка не є зліченно компактною. Тоді за теоремою 1.2.17 топологічна напівґратка $(\exp_k \lambda, \tau)$ містить нескінченний замкнений дискретний підпростір A. Оскільки за твердженням 2.1.1(ii), підпростір $\exp_k \lambda \setminus \exp_{k-1} \lambda$ є відкритим і дискретним в $(\exp_k \lambda, \tau)$, то з того, що напівґратка $(\exp_k \lambda, \tau)$ є слабко компактною випливає, що $A \subseteq \exp_{k-1} \lambda$. За твердженням 2.1.1$(iii)$, оскільки $\uparrow x$ є відкрито-замкненою підмножиною в $(\exp_k \lambda, \tau)$ для всіх $x \in \exp_k \lambda$, то $\uparrow x$ є слабко компактним підпростором простору $(\exp_k \lambda, \tau)$. Очевидно, що для довільного ненульового елемента $x \in \exp_k \lambda$ піднапівґратка $\uparrow x$ в $\exp_k \lambda$ ізоморфна напівґратці $\exp_m \lambda$ для деякого натурального числа $m < k$. Звідси та з припущення індукції випливає, що $\uparrow x$ — зліченно компактний підпростір в $(\exp_k \lambda, \tau)$ для будь-якого ненульового елемента x напівґратки $\exp_k \lambda$. Отже, ми отримали, що множина $A \cap \uparrow x$ є скінченною для будь-якого елемента x напівґратки $\exp_k \lambda$.

Нехай i — деяке натуральне число таке, що $2 \leqslant i < n$, $(\exp_n \lambda, \tau)$ — слабко компактна топологічна напівґратка, в якій існує відкритий окіл $U(0)$ нуля 0 такий, що $U(0)$ не містить нескінченної підмножини A в $\exp_i \lambda \setminus \exp_{i-1} \lambda$ такої, що $A \cap \uparrow x$ є скінченною множиною для кожного ненульового елемента $x \in \exp_i \lambda$. Доведемо методом математичної індукції таке: якщо напівґратка $\uparrow x$ є зліченно компактною, то існує відкритий окіл $V(0) \subseteq U(0)$ нуля 0 в $(\exp_n \lambda, \tau)$ такий, що $V(0)$ не містить такої нескінченної підмножини A_+ в $\exp_{i+1} \lambda \setminus \exp_i \lambda$, що $A_+ \cap \uparrow x$ є скінченною множиною для кожного ненульового елемента $x \in \exp_i \lambda$.

Припустимо, що у слабко компактній топологічній напівґратці $(\exp_n \lambda, \tau)$ існує відкритий окіл $U(0)$ нуля 0 такий, що $U(0) \cap A = \varnothing$ для деякої нескінченної підмножини $A = \{x_i \colon i \in \mathbb{N}\} \subseteq \exp_1 \lambda \setminus \{0\}$. Тоді з неперервності

напівґраткової операції в $(\exp_n \lambda, \tau)$ випливає, що існує такий відкритий окіл $V(0) \subseteq U(0)$ нуля в $(\exp_n \lambda, \tau)$, що $V(0) \cdot V(0) \subseteq U(0)$. Припустимо, що існують деякі різні елементи $x_{i_0}, x_{i_1} \in A$, що $\{x_{i_0}, x_{i_1}\} \in V(0)$. Тоді з включення $V(0) \cdot V(0) \subseteq U(0)$ отримуємо, що

$$\{\{x_{i_0}, x_i\} : i \in \mathbb{N} \setminus \{i_0, i_1\}\} \cap V(0) = \varnothing.$$

Звідси випливає, що підпростір $\uparrow\{x_{i_0}\}$ у $(\exp_n \lambda, \tau)$ містить замкнений дискретний підпростір, що суперечить зліченній компактності простору $\uparrow\{x_{i_0}\}$. Отже, ми отримали, що $V(0) \cap A_+ = \varnothing$, де

$$A_+ = \{\{x_k, x_l\} : x_k, x_l \text{ — різні елементи } A\}.$$

Припустимо, що у слабко компактній топологічній напівґратці $(\exp_n \lambda, \tau)$ існують відкритий окіл $U(0)$ нуля 0 і така нескінченна підмножина $A \subseteq \exp_n \lambda$, що $U(0) \cap A = \varnothing$ та $|x| = j > 1$ для всіх $x \in A$. Оскільки для кожного ненульового елемента $a \in \exp_n \lambda$ простір $\uparrow a$ є зліченно компактним, то не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує зліченна множина $A_1 = \{x_i \colon i \in \mathbb{N}\}$, яка містить такі одноелементні підмножини в $\exp_n \lambda$, що множина $A \cap \uparrow x_i$ є одноелементною для довільного натурального числа i. З неперервності напівґраткової операції в $(\exp_n \lambda, \tau)$ випливає існування такого відкритого околу $V(0) \subseteq U(0)$ нуля в $(\exp_n \lambda, \tau)$, що $V(0) \cdot V(0) \subseteq U(0)$. Ми стверджуємо, що для довільних різних елементів $x_p, x_s \in A_1$, $s, p \in \mathbb{N}$ не існує такого елемента $x \in \uparrow x_p$, що $y = \{\{x_s\} \cup x\} \notin V(0)$. Справді, в іншому випадку окіл $V(0)$ не містив би множини $\{\{x_q\} \cup x \colon x_q \in A \setminus \{x_s\}\}$. З цього випливає, що підпростір $\uparrow x_p$ в $(\exp_n \lambda, \tau)$ містить нескінченний замкнений дискретний підпростір, що суперечить припущенню, що $\uparrow x_p$ є зліченно компактним підпростором у $(\exp_n \lambda, \tau)$. Отже, ми отримали, що $V(0) \cap A_+ = \varnothing$, де

$$A_+ = \{\{x_i\} \cup x \colon x_i \in A_1 \text{ і } x \in A\}.$$

З вищенаведених аргументів отримуємо, що топологічна напівґратка $(\exp_n \lambda, \tau)$ містить нескінченний відкрито-замкнений дискретний підпростір, а це суперечить тому, що простір $(\exp_n \lambda, \tau)$ є слабко компактним. З отриманого протиріччя випливає доведення імплікації. $\square$

З твердження 2.1.1(*iii*) випливає такий наслідок.

Наслідок 2.1.8. *Нехай λ — довільний нескінченний кардинал. Тоді компактною є кожна слабко компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія τ на напівґратці $\exp_1 \lambda$, а тому $(\exp_1 \lambda, \tau)$ є топологічною напівґраткою.*

Однак, з прикладу 2.1.9 випливає, що для довільного нескінченного кардинала λ та для будь-якого натурального числа $n \geqslant 2$ існує така гаусдорфова слабко компактна трансляційно-неперервна топологія τ на напівґратці $\exp_n \lambda$, що $(\exp_n \lambda, \tau)$ не є зліченно компактним простором.

Приклад 2.1.9. Нехай λ — довільний нескінченний кардинал та τ_{c}^2 — топологія на напівґратці $\exp_2 \lambda$, яка визначається як у прикладі 2.1.4. Побудуємо сильнішу топологію τ_{fc}^2 за τ_{c}^2 на $\exp_2 \lambda$. Через $\pi\colon \lambda \to \exp_2 \lambda\colon a \mapsto \{a\}$ позначимо природне вкладення λ в $\exp_2 \lambda$. Зафіксуємо довільну нескінченну підмножину $A \subseteq \lambda$. Для кожного ненульового елемента $x \in \exp_2 \lambda$ покладемо: база $\mathscr{B}_{\mathsf{fc}}^2(x)$ топології τ_{fc}^2 в точці x збігається з базою топології τ_{c}^2 в x, а сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathsf{fc}}^2(0) = \big\{U_B(0) = U(0) \setminus \pi(B)\colon U(0) \in \mathscr{B}_{\mathsf{c}}^2(0), B \subseteq \lambda \\ \text{і множина } A \setminus B \cup B \setminus A \text{ — скінченна}\big\}$$

породжує базу топології τ_{fc}^2 в нулі 0 напівґратки $\exp_2 \lambda$. Очевидно, що сім'я $\big\{\mathscr{B}_{\mathsf{fc}}^2(x)\colon x \in \exp_2 \lambda\big\}$ задовольняє умови **(BP1)**–**(BP4)**, а тому за теоремою 1.2.7, τ_{fc}^2 є гаусдорфовою топологією на $\exp_2 \lambda$.

Твердження 2.1.10. *Нехай λ — довільний нескінченний кардинал. Тоді $\big(\exp_2 \lambda, \tau_{\mathsf{fc}}^2\big)$ є зліченно пракомпактною напівтопологічною напівґраткою такою, що $\big(\exp_2 \lambda, \tau_{\mathsf{fc}}^2\big)$ є H-замкненим ненапіврегулярним простором.*

Доведення. З означення топології τ^2_{fc} випливає, що достатньо довести, що напівґраткова операція на $\big(\exp_2\lambda, \tau^2_{\mathsf{fc}}\big)$ є нарізно неперервною у випадку $x \cdot 0$. Зафіксуємо довільний базовий окіл $U_B(0)$ нуля в просторі $\big(\exp_2\lambda, \tau^2_{\mathsf{fc}}\big)$. Якщо x — одноелементна підмножина кардинала λ, тобто $x = \{x_0\}$ в $\exp_2\lambda$, то отримуємо, що $x \cdot V_B(0) = \{0\} \subseteq U_B(0)$, де $V(0) = U(0) \setminus \uparrow x$. У випадку, якщо x є двоелементною підмножиною в λ, де $x = \{x_1, x_2\}$ для деяких $x_1, x_2 \in \lambda$, то $x \cdot W_B(0) = \{0\} \subseteq U_b(0)$, де $W(0) = U(0) \setminus (\uparrow\{x_1\} \cup \uparrow\{x_2\})$.

Також з означення топології τ^2_{fc} на $\exp_2\lambda$ випливає, що підмножина $\exp_2\lambda \setminus \exp_1\lambda$ є щільною в $\big(\exp_2\lambda, \tau^2_{\mathsf{fc}}\big)$ і кожна нескінченна підмножина в $\exp_2\lambda \setminus \exp_1\lambda$ має точку накопичення в просторі $\big(\exp_2\lambda, \tau^2_{\mathsf{fc}}\big)$, а тому топологічний простір $\big(\exp_2\lambda, \tau^2_{\mathsf{fc}}\big)$ є зліченно пракомпактним.

Припустимо протилежне: $\big(\exp_2\lambda, \tau^2_{\mathsf{fc}}\big)$ не є H-замкненим топологічним простором. Тоді існує гаусдорфовий топологічний простір X, що містить $\big(\exp_2\lambda, \tau^2_{\mathsf{fc}}\big)$ як щільний власний підпростір. Зафіксуємо довільну точку $x \in X \setminus \exp_2\lambda$. Оскільки простір X є гаусдорфовим, то існують диз'юнктні відкриті околи $U(x)$ та $U(0)$ точок x і 0 напівґратки $\exp_2\lambda$ в просторі X, відповідно. Тоді існує базовий окіл $V_B(0)$ нуля в $\big(\exp_2\lambda, \tau^2_{\mathsf{fc}}\big)$ такий, що $V_B(0) \subseteq \exp_2\lambda \cap U(0)$. Також, з означення бази $\mathscr{B}^2_{\mathsf{fc}}(0)$ топології τ^2_{fc} в нулі 0 напівґратки $\exp_2\lambda$ випливає, що існує скінченна кількість таких ненульових елементів $x_1, \ldots, x_m$ напівґратки $\exp_2\lambda$, що

$$\exp_2\lambda \setminus (\uparrow x_1 \cup \ldots \cup \uparrow x_m \cup V_B(0)) \subseteq B.$$

А оскільки за твердженням 2.1.1(iii) підмножини $\uparrow x_1, \ldots, \uparrow x_m$ є відкрито-замкненими в $\big(\exp_2\lambda, \tau^2_{\mathsf{fc}}\big)$, то, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $U(x) \cap \exp_2\lambda \subseteq B$. Якщо множина $U(x) \cap \exp_2\lambda \subseteq B$ є нескінченною, то простір $\big(\exp_2\lambda, \tau^2_{\mathsf{fc}}\big)$ містить нескінченний відкритий підпростір, що суперечить псевдокомпактності простору $\big(\exp_2\lambda, \tau^2_{\mathsf{fc}}\big)$. З отриманого протиріччя випливає, що простір $\big(\exp_2\lambda, \tau^2_{\mathsf{fc}}\big)$ є H-замкненим. $\square$

Зауваження 2.1.11. Якщо n — довільне натуральне число $\geqslant 3$, λ — будь-який нескінченний кардинал і τ_{c}^n — топологія на напівґратці $\exp_n \lambda$, визначена у прикладі 2.1.4, то ми можемо побудувати більш сильну топологію τ_{fc}^n на $\exp_n \lambda$, ніж τ_{c}^2. Зафіксуємо довільний елемент $x \in \exp_n \lambda$ такий, що $|x| = n-2$. Легко бачити, що піднапівґратка $\uparrow x$ в $\exp_n \lambda$ ізоморфна напівґратці $\exp_2 \lambda$ і нехай $h\colon \exp_2 \lambda \to \uparrow x$ — цей ізоморфізм.

Зафіксуємо довільну підмножину $A \subseteq \lambda$. Для кожного ненульового елемента $y \in \exp_n \lambda \setminus \uparrow x$ покладемо: база $\mathscr{B}_{\mathsf{fc}}^n(y)$ топології τ_{fc}^n в точці y збігається з базою топології τ_{c}^n в точці y. Множина $\uparrow x$ є відкрито-замкненою в $\exp_n \lambda$ і топологія на $\uparrow x$ породжується відображенням $h\colon \left(\exp_2 \lambda, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right) \to \uparrow x$. Аналогічно, як і в твердженні 2.1.10 доводиться, що $(\exp_n \lambda, \tau_{fc}^n)$ є зліченно пракомпактною напівтопологічною напівґраткою такою, що $(\exp_n \lambda, \tau_{fc}^n)$ є H-замкненим квазірегулярним ненапіврегулярним простором.

Зауваження 2.1.12. Легко бачити, що $\left(\exp_2 \lambda, \tau_{fc}^2\right)$ не є 0-вимірним простором. З цього випливає, що термін "спадкова незв'язність" у твердженні 2.1.1(v) не можна замінити на "0-вимірність".

Твердження 2.1.13. *Нехай λ — довільний нескінченний кардинал і τ — трансляційно-неперервна T_1-топологія на $\exp_1 \lambda$. Тоді простір $(\exp_1 \lambda, \tau)$ є колективно нормальним.*

Доведення. Припустимо, що $\{F_s\}_{s\in\mathscr{A}}$ — дискретна сім'я замкнених підмножин у просторі $(\exp_1 \lambda, \tau)$. За твердженням 2.1.1(iii) всі ненульові елементи напівґратки $\exp_1 \lambda$ є ізольованими точками в просторі $(\exp_1 \lambda, \tau)$. Отже, якщо існує відкритий окіл $U(0)$ нуля в $(\exp_1 \lambda, \tau)$ такий, що $U(0) \cap F_s = \varnothing$ для всіх $s \in \mathscr{A}$, то покладемо $U_s = F_s$ для всіх $s \in \mathscr{A}$. В іншому випадку існує такий відкритий окіл $U(0)$ нуля в $(\exp_1 \lambda, \tau)$, що $U(0) \cap F_{s_0} \neq \varnothing$ для деякого $s_0 \in \mathscr{A}$ і $U(0) \cap F_s = \varnothing$ для всіх $s \in \mathscr{A} \setminus \{s_0\}$.

Покладемо

$$U_s = \begin{cases} F_s, & \text{якщо } s \in \mathscr{A} \setminus \{s_0\}\,; \\ F_{s_0} \cup U(0), & \text{якщо } s = s_0. \end{cases}$$

Тоді з твердження 2.1.1(*ii*) випливає, що $\{U_s\}_{s\in\mathscr{A}}$ є дискретною сім'єю відкритих підмножин у просторі $(\exp_1 \lambda, \tau)$ таких, що $F_s \subseteq U_s$ для всіх $s \in \mathscr{A}$, а тому простір $(\exp_1 \lambda, \tau)$ є колективно нормальним. □

Зауваження 2.1.14. Якщо λ — довільний незліченний кардинал, то $\left(\exp_1 \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^1\right)$ є компактним простором, який не є досконало нормальним.

Теорема 2.1.15. *Нехай n — довільне натуральне число та λ — будь-який нескінченний кардинал. Тоді кожна напівґраткова T_1-топологія на $\exp_n \lambda$ є регулярною.*

Доведення. Припустимо, що τ — напівґраткова T_1-топологія на $\exp_n \lambda$. У випадку, коли n=1 доведення випливає із твердження 2.1.13. Отже, припустимо, що $n \geqslant 2$.

За твердженням 2.1.1(*iii*), $\uparrow x$ є відкрито-замкненою піднапівґраткою в $(\exp_n \lambda, \tau)$ для всіх $x \in \exp_n \lambda$, а тому достатньо довести, що для кожного відкритого околу $U(0)$ нуля в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$ існує відкритий окіл $V(0)$ нуля в $(\exp_n \lambda, \tau)$ такий, що $\mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(V(0)) \subseteq U(0)$.

Зафіксуємо довільний відкритий окіл $U(0)$ нуля в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$. З неперервності напівґраткової операції в $(\exp_n \lambda, \tau)$ випливає, що існує такий відкритий окіл $V(0) \subseteq U(0)$ нуля в $(\exp_n \lambda, \tau)$, що $V(0) \cdot V(0) \subseteq U(0)$. Припустимо, що існує $x \in \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(V(0)) \setminus V(0)$. За твердженням 2.1.1(*ii*) маємо, що $x \in \downarrow V(0)$. Припустимо, що $x = \{a_1, \ldots, a_i\}$, як скінченна підмножина кардинала λ, де $i < n$, тобто, що $x \in \exp_i \lambda \setminus \exp_{i-1} \lambda$. Тоді $V(x) \cap V(0) \neq \varnothing$ для кожного відкритого околу $V(x)$ точки x в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$. З твердження 2.1.1(*iii*) випливає, що не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $V(x) \subseteq \uparrow x$. Зафіксуємо довільний елемент $y \in (V(0) \cap V(x)) \setminus \{x\}$. Можемо вважати, що $y = \{a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j\}$,

як скінченна підмножина кардинала λ, де $i < j \leqslant n$. Покладемо

$$x_1 = \{a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}\}, \quad \ldots, \quad x_{j-i} = \{a_1, \ldots, a_i, a_j\},$$

як скінченні підмножини кардинала λ. Тоді з визначення напівґраткової операції на $\exp_n \lambda$ випливає, що

$$y \in \uparrow x_1 \cup \cdots \cup \uparrow x_{j-i} \subseteq \uparrow x$$

і $y \cdot z = x$ для всіх $z \in \uparrow x \setminus (\uparrow x_1 \cup \cdots \cup \uparrow x_{j-i})$. Оскільки

$$x \in \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(V(0)) \setminus V(0),$$

то з твердження 2.1.1(iii) випливає, що $W(x) = V(x) \setminus (\uparrow x_1 \cup \cdots \cup \uparrow x_{j-i})$ є відкритим околом точки x у просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$. Тоді з вищенаведених аргументів випливає, що

$$x = y \cdot W(x) \subseteq V(0) \cdot V(0) \subseteq U(0),$$

а тому $\mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(V(0)) \subseteq U(0)$. □

Оскільки в довільному зліченному T_1-просторі кожна відкрита підмножина є F_σ-множиною, то з теорем 1.2.5 та 2.1.15 випливає такий наслідок.

Наслідок 2.1.16. *Нехай n — довільне натуральне число. Тоді кожна напівґраткова T_1-топологія на $\exp_n \omega$ є досконало нормальною.*

Надалі нам буде потрібна така лема:

Лема 2.1.17. *Нехай n — довільне натуральне число, λ — довільний нескінченний кардинал і $(\exp_n \lambda, \tau)$ — гаусдорфова слабко компактна напівтопологічна напівґратка. Тоді для відкритого околу $U(0)$ нуля в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$ існує скінченна кількість ненульових елементів $x_1, \ldots, x_i \in \exp_n \lambda$ таких, що*

$$\exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda \subseteq U(0) \cup \uparrow x_1 \cup \ldots \cup \uparrow x_i.$$

Доведення. За твердженням 2.1.1(*ii*) кожна точка $x \in \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ є ізольованою в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$. Далі, застосуємо факт, що $(\exp_n \lambda, \tau)$ — слабко компактна напівґратка, а також твердження 2.1.1(*iii*). □

Теорема 2.1.18. *Нехай n — довільне натуральне число і λ — довільний нескінченний кардинал. Тоді компактною є кожна напіврегулярна слабко компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія τ на $\exp_n \lambda$, а тому в цьому випадку напівґраткова операція на $(\exp_n \lambda, \tau)$ є неперервною.*

Доведення. Доведення проведемо за індукцією. У випадку, коли $n{=}1$ доведення теореми випливає з наслідку 2.1.8. Тому вважаємо, що $n = 2$. Припустимо протилежне: існує напіврегулярна слабко компактна некомпактна T_1-топологічна напівґратка $(\exp_2 \lambda, \tau)$. За теоремою 2.1.7 топологічний простір $(\exp_2 \lambda, \tau)$ не є зліченно компактним, а тому з теореми 1.2.17 випливає, що $(\exp_2 \lambda, \tau)$ містить нескінченний замкнений дискретний підпростір X. З твердження 2.1.1(*iii*) випливає, що $\exp_2 \lambda \setminus \exp_1 \lambda$ є відкритим дискретним підпростором в $(\exp_2 \lambda, \tau)$, а оскільки простір $(\exp_2 \lambda, \tau)$ слабко компактний, то не зменшуючи загальності можемо вважати, що $X \subseteq \exp_1 \lambda \setminus \{0\}$. Зафіксуємо довільний канонічно відкритий окіл $U(0)$ нуля в $(\exp_2 \lambda, \tau)$ такий, що $U(0) \cap X = \varnothing$.

Для кожної точки $x \in \exp_1 \lambda \setminus \{0\}$ підмножина $\uparrow x$ є відкрито-замкненою в $(\exp_2 \lambda, \tau)$, а тому простір $\uparrow x$ слабко компактний. Оскільки напівґратка $\uparrow x$ алгебрично ізоморфна напівґратці $\exp_1 \lambda$, то з наслідку 2.1.8 випливає, що простір $\uparrow x$ компактний. За лемою 2.1.17 існує скінченна кількість ненульових елементів $x_1, \ldots, x_i \in \exp_2 \lambda$ таких, що

$$\exp_2 \lambda \setminus \exp_1 \lambda \subseteq U(0) \cup \uparrow x_1 \cup \ldots \cup \uparrow x_i.$$

З означення напівґраткової операції на $(\exp_2 \lambda, \tau)$ випливає, що не зменшуючи загальності можемо вважати, що $x_1, \ldots, x_i$ є одноелементними підмножинами кардинала λ. З цього та з вищенаведених аргументів випливає, що $\mathrm{cl}_{\exp_2 \lambda}(U(0)) \cap X \neq \varnothing$. Більше того, множина $\mathrm{cl}_{\exp_2 \lambda}(U(0)) \setminus U(0)$ скла-

дається з одноелементних підмножин кардинала λ. Тоді для кожної точки $x \in \mathrm{cl}_{\exp_2 \lambda}(U(0)) \setminus U(0)$ за наслідком 2.1.8, піднапівґратка $\uparrow x$ є компактною топологічною піднапівґраткою в $(\exp_2 \lambda, \tau)$. З теореми 2.1.7 і леми 2.1.17 випливає, що

$$x \in \mathrm{int}_{\exp_2 \lambda}\left(\mathrm{cl}_{\exp_2 \lambda}(U(0))\right) = U(0),$$

що суперечить припущенню $U(0) \cap X = \varnothing$. З отриманого протиріччя випливає, що $(\exp_2 \lambda, \tau)$ є компактною напівтопологічною напівґраткою.

Нам ще залишилось довести крок індукції. Нехай маємо, що для кожного натурального числа $l < n$ напіврегулярна слабко компактна T_1-напівтопологічна напівґратка $(\exp_l \lambda, \tau)$ є компактною. Доведемо, що компактною також є напіврегулярна слабко компактна T_1-напівтопологічна напівґратка $(\exp_n \lambda, \tau)$. Припустимо протилежне, що існує напіврегулярна слабко компактна T_1-напівтопологічна напівґратка $(\exp_n \lambda, \tau)$, яка не є компактною. За теоремою 2.1.7 топологічний простір $(\exp_n \lambda, \tau)$ не є зліченно компактним, а тому з теореми 1.2.17 випливає, що $(\exp_n \lambda, \tau)$ містить нескінченний замкнений дискретний підпростір X. За твердженням 2.1.1(iii), $\exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ є відкритим дискретним підпростором в $(\exp_n \lambda, \tau)$, а оскільки простір $(\exp_n \lambda, \tau)$ слабко компактний, то не зменшуючи загальності можемо вважати, що $X \subseteq \exp_{n-1} \lambda \setminus \{0\}$.

Нехай $k < n$ — максимальне натуральне число, для якого множина $\exp_k \lambda \setminus \exp_{k-1} \lambda \cap X$ є нескінченною. Ми довели, що для довільного ненульового елемента $x \in \exp_n \lambda$ піднапівґратка $\uparrow x$ в $\exp_n \lambda$ алгебрично ізоморфна напівґратці $\exp_j \lambda$ для деякого натурального числа $j < n$, а оскільки за твердженням 2.1.1(iii) піднапівґратка $\uparrow x$ є відкрито-замкненою підмножиною слабко компактної напівтопологічної напівґратки $(\exp_n \lambda, \tau)$, то за припущенням індукції маємо, що $\uparrow x$ є компактною піднапівґраткою в $(\exp_n \lambda, \tau)$. З цього випливає, що не існує такої скінченної кількості ненульових елементів $y_1, \ldots, y_s$ напівтопологічної напівґратки $(\exp_n \lambda, \tau)$, що

$X \subseteq \uparrow y_1 \cup \ldots \cup \uparrow y_s$.

Зафіксуємо довільний канонічно відкритий окіл $U(0)$ нуля в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$ такий, що $U(0) \cap X = \varnothing$. З вищенаведених аргументів випливає, що

$$\mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(V(0)) \cap (\exp_k \lambda \cap X) \neq \varnothing.$$

Більше того, множина $\mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0)) \setminus U(0)$ містить нескінченну кількість k-елементних підмножин кардинала λ, які належить множині X. Тоді для кожної такої точки $x \in \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0)) \setminus U(0)$ з припущення індукції випливає, що $\uparrow x$ є компактною топологічною піднапівґраткою в $(\exp_n \lambda, \tau)$. З теореми 2.1.7 і леми 2.1.17 випливає, що точка x належить множині $\mathrm{int}_{\exp_n \lambda}\big(\mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\big) = U(0)$, що суперечить припущенню $U(0) \cap X = \varnothing$. З отриманого протиріччя випливає, що $(\exp_n \lambda, \tau)$ є компактною напівтопологічною напівґраткою.

Нарешті, останнє висловлення у формулюванні теореми випливає з теореми 2.1.7. $\square$

2.2. Слабко компактні трансляційно-неперервні топології на напівґратці $\exp_n \lambda$

Перейдемо до дослідження трансляційно-неперервних топологій на напівґратці $\exp_n \lambda$.

Доведення наступної леми аналогічне до доведень леми 1.2.20 або твердження 1.2.13.

Лема 2.2.1. *Кожний гаусдорфовий d-слабко компактний топологічний простір, що містить щільний підпростір, є зліченно пракомпактним.*

За твердженням 2.1.1, для довільного натурального числа n та будь-якого нескінченного кардинала λ кожна трансляційно-неперервна T_1-топологія τ на $\exp_n \lambda$ є функціонально гаусдорфовою та квазірегулярною, а тому є гаусдорфовою.

Твердження 2.2.2. *Нехай n — довільне натуральне число та λ — довільний нескінченний кардинал. Тоді для кожної d-слабко компактної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на $\exp_n \lambda$ підмножина $\exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ є щільною в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$.*

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує така d-слабко компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія τ на $\exp_n \lambda$, що множина $\exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ не є щільною в напівтопологічній напівґратці $(\exp_n \lambda, \tau)$. Тоді існує така точка $x \in \exp_{n-1} \lambda$, що

$$x \notin \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(\exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda).$$

Отже, існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$, що

$$U(x) \cap (\exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda) = \varnothing.$$

З означення напівґратки $\exp_n \lambda$ випливає, що існує така точка $y \in U(x)$, що $\uparrow y \cap U(x) = \{y\}$. За твердженням 2.1.1$(iii)$, $\uparrow y$ — відкрито-замкнена підмножина в $(\exp_n \lambda, \tau)$, а тому підпростір $\uparrow y$ є d-слабко компактний. Справді,

якщо припустити, що підпростір $\uparrow y$ не є d-слабко компактним, то множина $\uparrow y$ містить нескінченну дискретну сім'ю $\mathscr{O}$ відкритих непорожніх підмножин у просторі $\uparrow y$. З цього випливає, що $\mathscr{O}$ є нескінченною дискретною сім'єю в $(\exp_n \lambda, \tau)$, оскільки $\uparrow y$ — відкрито-замкнена підмножина в $(\exp_n \lambda, \tau)$.

Очевидно, що напівґратка $\uparrow y$ алгебрично ізоморфна напівґратці $\exp_k \lambda$ для деякого натурального числа $k \leqslant n$. З цього та з вищенаведених аргументів випливає, що не зменшуючи загальності можемо вважати, що x є ізольованим нулем в d-слабко компактній напівґратці $(\exp_n \lambda, \tau)$.

Тепер зафіксуємо довільну нескінченну послідовність $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ різних елементів кардинала λ. Для кожного натурального числа j покладемо

$$a_j = \left\{x_{n(j-1)+1}, x_{n(j-1)+2}, \ldots, x_{nj}\right\}.$$

Тоді $a_j \in \exp_n \lambda$, і більше того, a_j є найбільшим елементом напівґратки $\exp_n \lambda$ для кожного натурального числа j. З означення напівґратки $\exp_n \lambda$ випливає, що для кожного ненульового елемента a з $\exp_n \lambda$ існує щонайбільше один такий елемент a_j, що $a_j \in \uparrow a$. Тоді за твердженням 2.1.1(iii) для кожного натурального числа j, a_j є ізольованою точкою в $(\exp_n \lambda, \tau)$, а тому з вищенаведених аргументів випливає, що $\{a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots\}$ є нескінченною дискретною сім'єю відкритих підмножин у просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$. А це суперечить тому, що напівтопологічна напівґратка $(\exp_n \lambda, \tau)$ є d-слабко компактною. З отриманого протиріччя випливає наше твердження. $\square$

З прикладу 2.2.3 випливає, що обернене висловлення до твердження 2.2.2 не виконується у випадку топологічних напівґраток.

Приклад 2.2.3. Зафіксуємо довільний нескінченний кардинал λ та нескінченну підмножину A в λ таку, що $|\lambda \setminus A| \geqslant \omega$. Позначимо через

$$\pi\colon \lambda \to \exp_1 \lambda\colon a \mapsto \{a\}$$

природне вкладення λ в $\exp_1 \lambda$. На $\exp_1 \lambda$ визначимо топологію τ_{dm} так:

(*i*) усі ненульові елементи напівґратки $\exp_n \lambda$ є ізольованими точками в $(\exp_n \lambda, \tau_0)$; і

(*ii*) сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathsf{dm}} = \{U_B = \{0\} \cup \pi(B) \colon B \subseteq A \text{ і } |A \setminus B| < \infty\}$$

є базою топології τ_{dm} в нулі 0 напівґратки $\exp_1 \lambda$.

Легко бачити, що τ_{dm} — гаусдорфова локально компактна напівґраткова топологія на $\exp_1 \lambda$, яка не є компактною, а тому за наслідком 2.1.8 не є слабко компактною.

Зауваження 2.2.4. Якщо $\lambda = \omega$, то за твердженням 2.1.13 топологічний простір $(\exp_1 \lambda, \tau_{\mathsf{dm}})$ є колективно нормальним і має зліченну базу, а тому простір $(\exp_1 \lambda, \tau_{\mathsf{dm}})$ є метризовним за метризаційною теоремою Урисона (теорема 1.2.8). Більше того, якщо $|B| = \omega$, то простір $(\exp_1 \lambda, \tau_{\mathsf{dm}})$ є метризовним для кожного нескінченного кардинала λ, як топологічна сума метризовного простору $(\exp_1 \omega, \tau_{\mathsf{dm}})$ та дискретного простору потужності ω.

Зауваження 2.2.5. Якщо n — довільне натуральне число більше за 2, λ — нескінченний кардинал і τ_{c}^n — єдина компактна напівґраткова топологія на напівґратці $\exp_n \lambda$, визначена в прикладі 2.1.4, то можна побудувати сильнішу за τ_{c}^n топологію τ_{dm}^n на $\exp_n \lambda$. Зафіксуємо довільний елемент $x \in \exp_n \lambda$ такий, що $|x| = n - 1$. Легко бачити, що піднапівґратка $\uparrow x$ в $\exp_n \lambda$ ізоморфна піднапівґратці $\exp_1 \lambda$, через $h \colon \exp_1 \lambda \to \uparrow x$ позначатимемо цей ізоморфізм.

Зафіксуємо довільну підмножину A в λ таку, що $|\lambda \setminus A| \geqslant \omega$. Нехай для кожного ненульового елемента $y \in \exp_n \lambda \setminus \uparrow x$ база $\mathscr{B}_{\mathsf{dm}}^n(y)$ топології τ_{dm}^n в точці y збігається з базою топології τ_{c}^n в точці y. Нехай $\uparrow x$ — відкрито-замкнена підмножина, а топологія на $\uparrow x$ породжується відображенням $h \colon \left(\exp_2 \lambda, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right) \to \uparrow x$. Легко бачити, що $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{dm}}^n)$ є локально компактною топологічною напівґраткою такою, що множина $\exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ є щільною в просторі $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{dm}}^n)$. Більше того, тополо-

гічний простір $(\exp_n \lambda, \tau^n_{\mathsf{dm}})$ не є d-слабко компактним, оскільки він містить відкрито-замкнений не-d-слабко компактний підпростір $\uparrow x$.

З аналогічних міркувань, як і в доведеннях тверджень 2.2.2 та 2.1.1(*iii*), випливає такий наслідок.

Наслідок 2.2.6. *Нехай n — довільне натуральне число та λ — будь-який нескінченний кардинал. Тоді для кожної d-слабко компактної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на $\exp_n \lambda$, точка x є ізольованою в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$ тоді і лише тоді, коли $x \in \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$.*

Зауваження 2.2.7. Зауважимо, що із прикладу наведеного в зауваженні 2.2.5 випливає існування локально компактної не-d-слабко компактної напівтопологічної напівґратки $(\exp_n \lambda, \tau^n_{\mathsf{dm}})$, яка задовольняє таку властивість: *точка x є ізольованою в просторі $(\exp_n \lambda, \tau^n_{\mathsf{dm}})$ тоді і лише тоді, коли $x \in \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$.*

Наступне твердження описує "хорошу" властивість для системи околів нуля в T_1-слабко компактній напівтопологічній напівґратці $\exp_n \lambda$.

Твердження 2.2.8. *Нехай n — довільне натуральне число, λ — будь-який нескінченний кардинал і τ — трансляційно-неперервна слабко компактна T_1-топологія на напівґратці $\exp_n \lambda$. Тоді для кожного відкритого околу $U(0)$ нуля 0 в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$ існує скінченна кількість таких елементів $x_1, \ldots, x_m \in \lambda$, що*

$$\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0)) \subseteq \uparrow x_1 \cup \cdots \cup \uparrow x_m.$$

Доведення. Припустимо протилежне: існує відкритий окіл $U(0)$ нуля в гаусдорфовій слабко компактній напівтопологічній напівґратці $(\exp_n \lambda, \tau)$ такий, що

$$\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0)) \not\subseteq \uparrow x_1 \cup \cdots \cup \uparrow x_m$$

для довільної скінченної кількості $x_1, \ldots, x_m \in \lambda$.

Зафіксуємо такий довільний елемент $y_1 \in \lambda$, що

$$\big(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\big) \cap \uparrow y_1 \neq \varnothing.$$

З твердження 2.1.1(iii) випливає, що множина $\uparrow y_1$ є відкритою в $(\exp_n \lambda, \tau)$, а тому множина $\big(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\big) \cap \uparrow y_1$ також є відкритою в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$. За твердженням 2.2.2, існує така ізольована точка $m_1 \in \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$, що

$$m_1 \in \big(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\big) \cap \uparrow y_1.$$

Отже, за нашим припущенням існує елемент $y_2 \in \lambda$ такий, що

$$\big(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\big) \cap (\uparrow y_2 \setminus \uparrow y_1) \neq \varnothing.$$

Знову, оскільки за твердженням 2.1.1(iii) обидві множини $\uparrow y_1$ та $\uparrow y_2$ є відкрито-замкненими в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$, то з твердження 2.2.2 випливає існування такої ізольованої точки $m_2 \in \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ в $(\exp_n \lambda, \tau)$, що

$$m_2 \in \big(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\big) \cap (\uparrow y_2 \setminus \uparrow y_1)\,.$$

Отож, за індукцією можна побудувати послідовність $\{y_i \colon i{=}1, 2, 3, \ldots\}$ різних точок з λ, а також послідовність таких ізольованих точок

$$\{m_i \colon i = 1, 2, 3, \ldots\} \subset \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$$

в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$, що для для довільного натурального числа k виконуються такі умови:

(i) $\big(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\big) \cap (\uparrow y_k \setminus (\uparrow y_1 \cup \cdots \cup \uparrow y_{k-1})) \neq \varnothing$;

(ii) $m_k \in \big(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\big) \cap (\uparrow y_k \setminus (\uparrow y_1 \cup \cdots \cup \uparrow y_{k-1}))$.

За аналогічними міркуваннями, як і у доведенні твердження 2.2.2 маємо, що сім'я

$$\{\{m_i\} : i = 1, 2, 3, \ldots\}$$

є нескінченною та локально скінченною, що суперечить слабкій компактності напівґратки $(\exp_n \lambda, \tau)$. З отриманого протиріччя випливає твердження. $\square$

З твердження 2.1.1(iii) випливає, що для довільного елемента $x \in \exp_n \lambda$ множина $\uparrow x$ є відкрито-замкненою в T_1-напівтопологічній напівґратці $(\exp_n \lambda, \tau)$, а тому за теоремою 1.2.19 маємо, що для кожного елемента $x \in \exp_n \lambda$ множина $\uparrow x$ є слабко компактною T_1-напівтопологічною напівґраткою в $(\exp_n \lambda, \tau)$. Отже, з твердження 2.2.8 випливає.

Твердження 2.2.9. *Нехай n — довільне натуральне число, λ — будь-який нескінченний кардинал і τ — трансляційно-неперервна слабко компактна T_1-топологія на напівґратці $\exp_n \lambda$. Тоді для довільної точки $x \in \exp_n \lambda$ та кожного відкритого околу $U(x)$ точки x в просторі $(\exp_n \lambda, \tau)$ існує така скінченна кількість точок $x_1, \ldots, x_m \in \uparrow x \setminus \{x\}$, що*

$$\uparrow x \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(x)) \subseteq \uparrow x_1 \cup \cdots \cup \uparrow x_m.$$

Основним результатом цього підрозділу є така теорема.

Теорема 2.2.10. *Нехай n — довільне натуральне число та λ — довільний нескінченний кардинал. Тоді для кожної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на $\exp_n \lambda$ такі умови еквівалентні:*

(i) *τ — зліченно пракомпактна;*

(ii) *τ — слабко компактна;*

(iii) *τ — d-слабко компактна;*

(iv) *простір $(\exp_n \lambda, \tau)$ є H-замкненим.*

Доведення. Імплікації $(i) \Rightarrow (ii)$ та $(ii) \Rightarrow (iii)$ є тривіальними, а імплікація $(iii) \Rightarrow (i)$ випливає з твердження 2.1.1, леми 2.2.1 та твердження 2.2.2.

Імплікація $(iv) \Rightarrow (ii)$ випливає із твердження 1.2.14.

Доведемо імплікацію $(ii) \Rightarrow (iv)$ методом математичної індукції.

За наслідком 2.1.8 компактною є кожна трансляційно-неперервна слабко компактна T_1-топологія τ на напівґратці $\exp_1 \lambda$, а тому $(\exp_1 \lambda, \tau)$ є H-замкненим топологічним простором.

Доведемо тепер, якщо наше припущення справджується для всіх натуральних чисел $j < k \leqslant n$, то воно буде правильним і для $j = k$. Нехай слабко компактна T_1-напівтопологічна напівґратка $(\exp_k \lambda, \tau)$ є підпростором гаусдорфового топологічного простору X. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$ і будь-який відкритий окіл $V(x)$ цієї точки в просторі X. Оскільки простір X гаусдорфовий, то існують диз'юнктні відкриті околи $U(x) \subseteq V(x)$ та $U(0)$ точки x та нуля 0 напівґратки $\exp_k \lambda$ в X, відповідно. Тоді $\mathrm{cl}_X(U(0)) \cap U(x) = \varnothing$, а тому з твердження 2.2.8 випливає, що існує скінченна кількість таких елементів $x_1, \ldots, x_m \in \lambda$, що

$$\exp_k \lambda \cap U(x) \subseteq \uparrow x_1 \cup \cdots \cup \uparrow x_m.$$

Але для всіх $x \in \lambda$ піднапівґратка $\uparrow x$ в $\exp_k \lambda$ алгебрично ізоморфна напівґратці $\exp_{k-1} \lambda$. За твердженням 2.1.1(iii) та теоремою 1.2.19, $\uparrow x$ є слабко компактною T_1-напівтопологічною напівґраткою, а з припущення індукції випливає, що $\uparrow x_1, \ldots, \uparrow x_m$ є замкненими підмножинами в просторі X. Звідси випливає, що

$$W(x) = U(x) \setminus (\uparrow x_1 \cup \cdots \cup \uparrow x_m)$$

є відкритим околом точки x у просторі X таким, що $W(x) \cap \exp_k \lambda = \varnothing$. Отже, $(\exp_k \lambda, \tau)$ є H-замкненим топологічним простором. □

Теорема 2.2.11 дає достатню умову для того, щоб d-слабко компактний простір був слабко компактним.

Теорема 2.2.11. *Кожен квазірегулярний d-слабко компактний простір є слабко компактним.*

Доведення. Припустимо протилежне: існує квазірегулярний d-слабко компактний простір X, який не є слабко компактним. Тоді не існує не-

скінченної локально скінченної сім'ї $\mathscr{U}_0$ непорожніх відкритих підмножин в X.

Побудуємо за індукцією нескінченну дискретну сім'ю непорожніх відкритих підмножин у топологічному просторі X.

Зафіксуємо довільну множину $U_1 \in \mathscr{U}_0$ і будь-яку точку $x_1 \in U_1$. Позаяк сім'я $\mathscr{U}_0$ є локально скінченною, то існує відкритий окіл $U(x_1) \subseteq U_1$ точки x_1 у просторі X такий, що $U(x_1)$ перетинає скінченну кількість елементів сім'ї $\mathscr{U}_0$. З квазірегулярності простору X випливає існування такої непорожньої відкритої підмножини $V_1 \subseteq U(x_1)$, що $\mathrm{cl}_X(V_1) \subseteq U(x_1)$. Покладемо

$$\mathscr{U}_1 = \{U \in \mathscr{U}_0 \colon U(x_1) \cap U = \varnothing\}\,.$$

Оскільки сім'я $\mathscr{U}_0$ є локально скінченною та нескінченною, то такою є і сім'я $\mathscr{U}_1$. Зафіксуємо довільну множину $U_2 \in \mathscr{U}_1$ і будь-яку точку $x_2 \in U_2$. Позаяк сім'я $\mathscr{U}_1$ є локально скінченною, то існує відкритий окіл $U(x_2) \subseteq U_2$ точки x_2 у просторі X такий, що $U(x_2)$ перетинає скінченну кількість елементів сім'ї $\mathscr{U}_1$. Оскільки топологічний простір X є квазірегулярним, то існує непорожня відкрита підмножина $V_2 \subseteq U(x_2)$ така, що $\mathrm{cl}_X(V_2) \subseteq U(x_2)$. З нашої побудови випливає, що замкнені множини $\mathrm{cl}_X(V_1)$ та $\mathrm{cl}_X(V_2)$ є диз'юнктними, а тому такими є і множини V_1 та V_2. Тепер покладемо

$$\mathscr{U}_2 = \{U \in \mathscr{U}_1 \colon U(x_2) \cap U = \varnothing\}\,.$$

Очевидно, що $U(x_1) \cap U = \varnothing$ для всіх $U \in \mathscr{U}_1$.

Припустимо, що для деякого натурального числа $k > 1$ ми побудували:

(a) послідовність нескінченних локально скінченних підсімей непорожніх відкритих підмножин $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_{k-1}$ в $\mathscr{U}_0$;

(b) послідовність відкритих підмножин $U_1, \ldots, U_k$ в X;

(c) послідовність точок $x_1, \ldots, x_k$ в X та послідовність їх відповідних відкритих околів $U(x_1), \ldots, U(x_k)$ в X;

(d) послідовність диз'юнктних непорожніх підмножин $V_1, \ldots, V_k$ в X, для яких виконуються такі умови:

(i) $\mathscr{U}_i$ є власною підсім'єю в $\mathscr{U}_{i-1}$;

(ii) $U_i \in \mathscr{U}_{i-1}$ та $U_i \cap U = \varnothing$ для всіх $U \in \mathscr{U}_j$, де $i \leqslant j \leqslant k$;

(iii) $x_i \in U_i$ та $U(x_i) \subseteq U_i$;

(iv) V_i є відкритою підмножиною в U_i і $\mathrm{cl}_X(V_i) \subseteq U(x_i)$,

для всіх $i = 1, \ldots, k$, а також

(v) множини $\mathrm{cl}_X(V_1), \ldots, \mathrm{cl}_X(V_k)$ — диз'юнктні.

Далі покладемо

$$\mathscr{U}_k = \{U \in \mathscr{U}_{k-1} \colon U(x_1) \cap U = \ldots = U(x_k) \cap U = \varnothing\}.$$

Оскільки сім'я $\mathscr{U}_{k-1}$ є нескінченною та локально скінченною, то існує нескінченна локально скінченна підсім'я $\mathscr{U}_k$ в $\mathscr{U}_{k-1}$. Зафіксуємо довільну множину $U_{k+1} \in \mathscr{U}_k$ та будь-яку точку $x_{k+1} \in U_{k+1}$. Оскільки сім'я $\mathscr{U}_k$ є локально скінченною, то існує відкритий окіл $U(x_{k+1}) \subseteq U_{k+1}$ точки x_{k+1} у просторі X такий, що $U(x_{k+1})$ перетинає скінченну кількість елементів сім'ї $\mathscr{U}_k$. Оскільки топологічний простір X є квазірегулярним, то існує така непорожня відкрита підмножина $V_{k+1} \subseteq U(x_{k+1})$, що $\mathrm{cl}_X(V_{k+1}) \subseteq U(x_{k+1})$. Легко бачити, що умови $(i) - (iv)$ виконуються для натурального числа $k+1$.

Отже, за індукцією ми побудували такі дві нескінченні зліченні сім'ї відкритих непорожніх підмножин у просторі X:

$$\mathscr{U} = \{U_i \colon i = 1, 2, 3, \ldots\} \qquad \text{і} \qquad \mathscr{V} = \{V_i \colon i = 1, 2, 3, \ldots\},$$

що $\mathrm{cl}_X(V_i) \subseteq U_i$ для всіх натуральних чисел i. Оскільки $\mathscr{U}$ — підсім'я в $\mathscr{U}_0$ і сім'я $\mathscr{U}_0$ є локально скінченною в просторі X, то $\mathscr{U}$ також є локально скінченною в X. З вищенаведених аргументів випливає, що $\mathscr{V}$ і

$$\overline{\mathscr{V}} = \{\mathrm{cl}_X(V_i) \colon i = 1, 2, 3, \ldots\}$$

також є локально скінченними сім'ями в топологічному просторі X.

Доведемо тепер, що сім'я $\mathscr{V}$ є дискретною в просторі X. Справді, оскільки сім'я $\overline{\mathscr{V}}$ є локально скінченною в X, то за теоремою 1.2.9 об'єднання $\bigcup\overline{\mathscr{V}}$ є замкненою підмножиною в просторі X, а тому довільна точка $x \in X\setminus\bigcup\overline{\mathscr{V}}$ має відкритий окіл, який не перетинає елементів сім'ї $\mathscr{V}$. Якщо $x \in \mathrm{cl}_X(V_i)$ для деякого натурального числа i, то за побудовою $U(x_i)$ є відкритим околом точки x у просторі X, який перетинає лише множину $V_i \in \mathscr{V}$. Отже, топологічний простір X містить нескінченну дискретну сім'ю $\mathscr{V}$ непорожніх відкритих підмножин в X, що суперечить припущенню про те, що простір X є d-слабко компактним. З отриманого протиріччя випливає твердження теореми. $\square$

2.3. $\mathfrak{D}(\omega)$-компактні трансляційно-неперервні топології на $\exp_n \lambda$

У цьому підрозділі досліджуються слабко компактні трансляційно-неперервні топології на напівґратці $\exp_n \lambda$. Доведено, що T_1-топологія є секвенціально пракомпактною тоді і лише тоді, коли вона є $\mathfrak{D}(\omega)$-компактною.

Лема 2.3.1. *Нехай n — довільне натуральне число та λ — будь-який нескінченний кардинал. Тоді множина ізольованих точок T_1-напівтопологічної напівґратки $\exp_n \lambda$ є щільною в ній.*

Доведення. Зафіксуємо довільну непорожню відкриту підмножину U в $\exp_n \lambda$. Тоді існує такий елемент $y \in \exp_n \lambda$, що $\uparrow y \cap U = \{y\}$. За твердженням 2.1.1$(iii)$, $\uparrow y$ — відкрито-замкнена підмножина простору $\exp_n \lambda$, а тому y — ізольована точка в $\exp_n \lambda$. □

Твердження 2.3.2. *Нехай n — будь-яке натуральне число та λ — довільний нескінченний кардинал. Тоді кожна слабко компактна T_1-напівтопологічна напівґратка $\exp_n \lambda$ є секвенціально пракомпактною.*

Доведення. Припустимо протилежне: існує слабко компактна T_1-напівтопологічна напівґратка $\exp_n \lambda$, яка не є секвенціально пракомпактною. Тоді кожна щільна підмножина D в просторі $\exp_n \lambda$ містить таку послідовність точок з D, яка не має збіжної підпослідовності.

За твердженням 2.2.2 підмножина $\exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ є щільною в $\exp_n \lambda$, а з твердження 2.1.1(ii) випливає, що кожна точка множини $\exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ є ізольованою в просторі $\exp_n \lambda$. Тоді множина $\exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ містить нескінченну послідовність точок $\{x_p \colon p \in \mathbb{N}\}$, з якої не можна вибрати збіжну підпослідовність. За лемою 1.2.1 послідовність $\{x_p \colon p \in \mathbb{N}\}$ містить нескінченну Δ-підсім'ю, тобто таку нескінченну підпослідовність $\{x_{p_i} \colon i \in \mathbb{N}\}$, для якої існує елемент $x \in \exp_n \lambda$, що виконується умова $x_{p_i} \cap x_{p_j} = x$ для довільних різних $i, j \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що $x = 0$ є нулем напівґратки $\exp_n \lambda$. Оскільки послідов-

ність $\{x_{p_i} : i \in \mathbb{N}\}$ є нескінченною Δ-підсім'єю, то для кожного ненульового елемента $y \in \exp_n \lambda$ перетини множин $\{x_{p_i} : i \in \mathbb{N}\}$ та $\uparrow y$ збігаються. Отож, $\exp_n \lambda$ містить нескінченну локально скінченну сім'ю відкритих непорожніх підмножин, що суперечить тому, що топологічний простір $\exp_n \lambda$ є слабко компактним.

Якщо ж x — ненульовий елемент напівґратки $\exp_n \lambda$, то за твердженням 2.1.1(iii), $\uparrow x$ — відкрито-замкнений підпростір в топологічному просторі $\exp_n \lambda$, а тому за теоремою 1.2.19, простір $\uparrow x$ слабко компактний. Ми отримали, що x є нулем напівґратки $\uparrow x$, що суперечить попередній частині доведення. □

Твердження 2.3.3. *Нехай n — будь-яке натуральне число та λ — довільний нескінченний кардинал. Тоді кожна слабко компактна T_1-напівтопологічна напівґратка $\exp_n \lambda$ є цілком зліченно пракомпактним простором.*

Доведення. Покладемо $D = \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$. За твердженням 2.2.2 підмножина D є щільною в просторі $\exp_n \lambda$, а з твердження 2.1.1(ii) випливає, що кожна точка множини D є ізольованою в просторі $\exp_n \lambda$. Зафіксуємо довільну послідовність $\{x_p : p \in \mathbb{N}\}$ точок з множини D. За лемою 1.2.1 послідовність $\{x_p : p \in \mathbb{N}\}$ містить нескінченну Δ-підсім'ю, тобто таку нескінченну підпослідовність $\{x_{p_i} : i \in \mathbb{N}\}$, для якої існує елемент $x \in \exp_n \lambda$, що виконується умова $x_{p_i} \cap x_{p_j} = x$ для довільних різних $i, j \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що $x = 0$ є нулем напівґратки $\exp_n \lambda$. Оскільки послідовність $\{x_{p_i} : i \in \mathbb{N}\}$ є нескінченною Δ-підсім'єю, то перетин $\{x_{p_i} : i \in \mathbb{N}\} \cap \uparrow y$ містить щонайбільше одну точку з послідовності $\{x_{p_i} : i \in \mathbb{N}\}$ для кожного ненульового елемента $y \in \exp_n \lambda$. За твердженням 2.1.1(ii) для довільної точки $a \in \exp_n \lambda \setminus \{0\}$ існує такий її відкритий окіл $U(a)$ в просторі $\exp_n \lambda$, що $U(a) \subseteq \uparrow a$. Отже, з наших припущень випливає, що нуль 0 єдина точка накопичення послідовності $\{x_{p_i} : i \in \mathbb{N}\}$ в топологічному просторі $\exp_n \lambda$. Оскільки за лемою 2.1.17 для довільного відкритого околу $W(0)$ ну-

ля 0 в просторі $\exp_n \lambda$ існує скінченна кількість таких ненульових елементів $y_1, \ldots, y_k \in \exp_n \lambda$, що

$$(\exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda) \subseteq W(0) \cup \uparrow y_1 \cup \cdots \cup \uparrow y_k,$$

то отримуємо, що

$$\mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(\{x_{p_i} \colon i \in \mathbb{N}\}) = \{0\} \cup \{x_{p_i} \colon i \in \mathbb{N}\}$$

є компактною підмножиною в просторі $\exp_n \lambda$.

Якщо ж x — ненульовий елемент напівґратки $\exp_n \lambda$, то за твердженням 2.1.1(iii), $\uparrow x$ — відкрито-замкнений підпростір в топологічному просторі $\exp_n \lambda$, а тому за теоремою 1.2.19 простір $\uparrow x$ є слабко компактним. Тоді x є нулем напівґратки $\uparrow x$, а за попередньо доведеним,

$$\mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(\{x_{p_i} \colon i \in \mathbb{N}\}) = \{x\} \cup \{x_{p_i} \colon i \in \mathbb{N}\}$$

є компактною підмножиною в просторі $\exp_n \lambda$. □

Твердження 2.3.4. *Нехай n — довільне натуральне число та λ — будь-який нескінченний кардинал. Тоді кожна $\mathfrak{D}(\omega)$-компактна T_1-напівтопологічна напівґратка $\exp_n \lambda$ є слабко компактною.*

Доведення. Проведемо доведення від супротивного. Нехай існує $\mathfrak{D}(\omega)$-компактна T_1-напівтопологічна напівґратка $\exp_n \lambda$, яка не є слабко компактною. Тоді існує нескінченна локально скінченна сім'я $\mathscr{U} = \{U_i\}$ відкритих непорожніх підмножин у просторі $\exp_n \lambda$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що сім'я $\mathscr{U} = \{U_i\}$ є зліченною, тобто $\mathscr{U} = \{U_i \colon i \in \mathbb{N}\}$. З леми 2.3.1 випливає, що для кожної відкритої множини $U_i \in \mathscr{U}$ існує точка $a_i \in U_i$ така, що $\mathscr{U}^* = \{\{a_i\} \colon i \in \mathbb{N}\}$ — сім'я ізольованих точок у просторі $\exp_n \lambda$. Позаяк сім'я $\mathscr{U}$ є локально скінченною, то не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $a_i \neq a_j$ для різних $i, j \in \mathbb{N}$. З того, що сім'я $\mathscr{U}$ є локально скінченною випливає, що сім'я $\mathscr{U}^*$ є також локально скінченною. Оскільки $\exp_n \lambda$ є T_1-простором, то об'єднання $\bigcup \mathscr{U}^*$ є замкненою

підмножиною в ньому, а тому неперервним є відображення $f\colon\ \exp_n\lambda\to\mathbb{N}_{\mathfrak{d}}$, де $\mathbb{N}_{\mathfrak{d}}$ — множина натуральних чисел разом із заданою на ній дискретною топологією:

$$f(b)=\begin{cases} 1, & \text{якщо } b\in\exp_n\lambda\setminus\bigcup\mathscr{U}^*;\\ i+1, & \text{якщо } b=a_i \text{ для деяких } i\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

А це суперечить $\mathfrak{D}(\omega)$-компактності простору $\exp_n\lambda$, оскільки довільні два нескінченні зліченні дискретні простори гомеоморфні. □

Підсумуємо отримані результати в теоремі 2.3.5.

Теорема 2.3.5. *Нехай n — довільне натуральне число і λ — будь-який нескінченний кардинал. Тоді для кожної T_1-напівтопологічної напівґратки $\exp_n\lambda$ наступні умови є еквівалентними:*

(i) $\exp_n\lambda$ — *секвенціально пракомпактна;*

(ii) $\exp_n\lambda$ — *цілком зліченно пракомпактна;*

(iii) $\exp_n\lambda$ — *слабко компактна;*

(iv) $\exp_n\lambda$ — *$\mathfrak{D}(\omega)$-компактна.*

Доведення. Імплікації $(i)\Rightarrow(iii)$, $(ii)\Rightarrow(iii)$ та $(iii)\Rightarrow(iv)$ тривіальні. Обернені імплікації $(iii)\Rightarrow(i)$, $(iii)\Rightarrow(ii)$ та $(iv)\Rightarrow(iii)$ випливають із тверджень 2.3.2, 2.3.3 і 2.3.4, відповідно. □

2.4. Висновки до розділу 2

У цьому розділі доведено, що кожна зліченно компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія, кожна слабко компактна напівгрупова T_1-топологія та кожна напіврегулярна слабко компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія на $\exp_n \lambda$ є гаусдорфовою напівгруповою компактною, а також описано цю топологію (теореми 2.1.7, 2.1.18, приклад 2.1.4). Побудовано зліченно пракомпактну некомпактну ненапіврегулярну гаусдорфову трансляційно-неперервну топологію τ^2_{fc} на $\exp_2 \lambda$ (приклад 2.1.9) та доведено (теорема 2.3.5), що для трансляційно-неперервної T_1-топології τ на $\exp_n \lambda$ такі умови еквівалентні: (i) τ — секвенціально пракомпактна; (ii) τ — цілком зліченно пракомпактна; (iii) τ — слабко компактна; (iv) τ — $\mathfrak{D}(\omega)$-компактна.

РОЗДІЛ 3
РОЗШИРЕННЯ НАПІВГРУП СИМЕТРИЧНИМИ ІНВЕРСНИМИ НАПІВГРУПАМИ ОБМЕЖЕНОГО СКІНЧЕННОГО РАНГУ

Основні результати цього розділу опубліковано в статті [114].

3.1. Конструкція напівгрупового розширення $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$

λ-розширення Брандта $B_\lambda(S)$ напівгрупи S можна розглядати, як напівгрупове розширення напівгрупи S напівгрупою $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць B_λ. Аналогічне розширення ми будуємо, використовуючи напівгрупу $\mathscr{I}_\lambda^n$.

Конструкція 3.1.1. Нехай S — напівгрупа, λ — ненульовий кардинал, n та k — натуральні числа такі, що $k \leqslant n \leqslant \lambda$. Ототожнимо кожний елемент $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n$ з його графіком $\mathsf{Gr}(\alpha) \subset \lambda \times \lambda$. Покладемо

$$\mathscr{I}_\lambda^n(S) = \{\alpha_S\colon\ \mathsf{Gr}(\alpha) \to S\colon \alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n\}\,,$$

а кожне відображення з порожнього відображення 0 в напівгрупу S ототожнимо з порожнім відображенням $\varnothing\colon \lambda \times \lambda \rightharpoonup S$ і позначимо його через 0. Довільний елемент множини $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ з $0 \neq \operatorname{rank}\alpha \leqslant n$ позначимо через

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ s_1 & \cdots & s_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix},$$

де $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{smallmatrix}\right)$, а $((x_1, y_1))\,\alpha = s_1,\ \ldots,\ ((x_k, y_k))\,\alpha = s_k$. Також для елемента $\alpha_S \in \mathscr{I}_\lambda^n(S)$ такого, що

$$\alpha_S = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ s_1 & \cdots & s_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix}$$

позначимо $\mathbf{d}(\alpha_S) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ і $\mathbf{r}(\alpha_S) = \{y_1, \ldots, y_k\}$.

Далі визначимо бінарну операцію "$\cdot$" на множині $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ так:

(i) $\alpha_S \cdot 0 = 0 \cdot \alpha_S = 0 \cdot 0 = 0$ для всіх $\alpha_S \in \mathscr{I}_\lambda^n(S)$;

(ii) якщо $\alpha \cdot \beta = 0$ в $\mathscr{I}_\lambda^n$, то $\alpha_S \cdot \beta_S = 0$ для всіх $\alpha_S, \beta_S \in \mathscr{I}_\lambda^n(S)$;

(iii) якщо $\alpha_S = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix}$, $\beta_S = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_j \\ t_1 & \cdots & t_j \\ d_1 & \cdots & d_j \end{pmatrix}$ і

$$\alpha \cdot \beta = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_j \\ d_1 & \cdots & d_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_1} & \cdots & a_{i_m} \\ d_{j_1} & \cdots & d_{j_m} \end{pmatrix} \neq 0$$

в $\mathscr{I}_\lambda^n$, то $\alpha_S \cdot \beta_S = \begin{pmatrix} a_{i_1} & \cdots & a_{i_m} \\ s_{i_1} t_{j_1} & \cdots & s_{i_m} t_{j_m} \\ d_{j_1} & \cdots & d_{j_m} \end{pmatrix}$.

Легко бачити, що так визначена бінарна операція на множині $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ є асоціативною, а тому $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ — напівгрупа. Очевидно, що напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^1(S)$ ізоморфна λ-розширенню Брандта $B_\lambda(S)$ напівгрупи S.

3.2. Алгебричні властивості розширення $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$

Твердження 3.2.1 описує підмножину ідемпотентів напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

Твердження 3.2.1. *Для довільного натурального числа $i \leqslant n$ ненульовий елемент $\alpha_S = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix}$ напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ є ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли $a_1 = b_1, \ldots, a_i = b_i$ і $s_1, \ldots, s_i \in E(S)$.*

Доведення. Імплікація ($\Leftarrow$) очевидна.

($\Rightarrow$) Припустимо, що $\alpha_S \cdot \alpha_S = \alpha_S$. З означення напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає, що різними є всі символи в наборах $\{a_1, \ldots, a_i\}$ і $\{b_1, \ldots, b_i\}$. З вищенаведених аргументів та з рівності $\alpha_S \cdot \alpha_S = \alpha_S$ випливає, що $\{a_1, \ldots, a_i\} = \{b_1, \ldots, b_i\}$. Припустимо, що $a_k \neq b_k = a_l$ для деяких натуральних чисел $k, l \in \{1, \ldots, i\}$, $k \neq l$. Тоді $a_l \neq b_l \neq b_k$, що суперечить рівності $\alpha_S \cdot \alpha_S = \alpha_S$. З отриманого протиріччя випливають рівності $a_1 = b_1, \ldots, a_i = b_i$. Отже,

$$\alpha_S \cdot \alpha_S = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ a_1 & \cdots & a_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ a_1 & \cdots & a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 s_1 & \cdots & s_i s_i \\ a_1 & \cdots & a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ a_1 & \cdots & a_i \end{pmatrix} = \alpha_S,$$

а тому $s_1 s_1 = s_1, \ldots, s_i s_i = s_i$. Це і завершує доведення. $\square$

Твердження 3.2.2. *Для довільного натурального числа $i \leqslant n$ ненульовий елемент $\alpha_S = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix}$ напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ є регулярним тоді і лише тоді, коли регулярними є елементи $s_1, \ldots, s_i$ в напівгрупі S.*

Доведення. Імплікація ($\Leftarrow$) очевидна. Справді, $\alpha_S = \alpha_S \beta_S \alpha_S$ для $\beta_S = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ a_1 & \cdots & a_i \end{pmatrix}$, де елементи $t_1, \ldots, t_i$ напівгрупи S є такими, що

$$s_1 = s_1 t_1 s_1, \ldots, s_i = s_i t_i s_i.$$

($\Rightarrow$) Припустимо, що α_S є регулярним елементом напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Тоді існує такий елемент $\beta_S = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_k \\ t_1 & \cdots & t_k \\ d_1 & \cdots & d_k \end{pmatrix}$ напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$, $0 < k \leqslant n$, що $\alpha_S = \alpha_S \cdot \beta_S \cdot \alpha_S$. Звідси випливає, що $\{b_1, \ldots, b_i\} \subseteq \{c_1, \ldots, c_k\}$, а тому $k \geqslant i$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $b_1 = c_1, \ldots, b_i = c_i$. Тоді з рівності $\alpha_S = \alpha_S \cdot \beta_S \cdot \alpha_S$ і з означення напівгрупової операції на

$\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає, що $d_1 = a_1, \ldots, d_i = a_i$, а тому

$$\begin{aligned}
\alpha_S &= \alpha_S \cdot \beta_S \cdot \alpha_S = \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_k \\ t_1 & \cdots & t_k \\ d_1 & \cdots & d_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_i & c_{i+1} & \cdots & c_k \\ t_1 & \cdots & t_i & t_{i+1} & \cdots & t_k \\ a_1 & \cdots & a_i & d_{i+1} & \cdots & d_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 t_1 s_1 & \cdots & s_i t_i s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отож, рівності $s_1 = s_1 t_1 s_1$, $\ldots$, $s_i = s_i t_i s_i$ виконуються в S, що і завершує доведення нашого твердження. $\square$

З означення напівгрупової операції в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає.

Твердження 3.2.3. *Нехай λ — довільний ненульовий кардинал, n та i — довільні натуральні числа такі, що $i \leqslant n \leqslant \lambda$, S — напівгрупа, $a_1, \ldots, a_i, b_1, \ldots, b_i \in \lambda$. Якщо елементи s_1 і t_1, $\ldots$, s_i і t_i є попарно інверсними в S, то елементи $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ a_1 & \cdots & a_i \end{pmatrix}$ є попарно інверсними в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.*

Нехай S — напівгрупа, тоді через S^n позначатимемо прямий n-степінь напівгрупи S, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$, тобто декартовий n-степінь напівгрупи S з операцією поточкового множення.

Для довільної напівгрупи S, кожного натурального числа $i \leqslant n$, будь-якого набору непорожніх підмножин $A_1, \ldots, A_i$ з S, а також довільних двох наборів різних елементів $\{a_1, \ldots, a_i\}$ і $\{b_1, \ldots, b_i\}$ з кардинала λ визначимо підмножину

$$[A_1, \ldots, A_i]_{(b_1,\ldots,b_i)}^{(a_1,\ldots,a_i)} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} : s_1 \in A_1, \ldots, s_i \in A_i \right\}$$

в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. У тому випадку, коли $A_1 = \ldots = A_i = A$ в S покладемо

$$[A]_{(b_1,\ldots,b_i)}^{(a_1,\ldots,a_i)} = [A_1, \ldots, A_i]_{(b_1,\ldots,b_i)}^{(a_1,\ldots,a_i)}.$$

Очевидно, що для кожної підмножини A напівгрупи S і довільної підстановки $\sigma\colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$ виконується рівність

$$[A]^{(a_{(1)\sigma},\ldots,a_{(i)\sigma})}_{(b_{(1)\sigma},\ldots,b_{(i)\sigma})} = [A]^{(a_1,\ldots,a_i)}_{(b_1,\ldots,b_i)}.$$

Твердження 3.2.4. *Нехай λ — ненульовий кардинал і n — довільне натуральне число $\leqslant \lambda$. Тоді для кожної напівгрупи S, довільного натурального числа $i \leqslant n$ та для будь-якого набору різних елементів $\{a_1,\ldots,a_i\}$ з λ піднапівгрупа $S^{(a_1,\ldots,a_i)}_{(a_1,\ldots,a_i)}$ в $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ ізоморфна прямому степеню S^i напівгрупи S.*

Доведення. З означення напівгрупової операції на $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ випливає, що множина $S^{a_1,\ldots,a_i}_{a_1,\ldots,a_i}$ є піднапівгрупою в $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ для довільного набору різних елементів $\{a_1,\ldots,a_i\}$ кардинала λ. Ізоморфізм $\mathfrak{h}\colon S^i \to S^{(a_1,\ldots,a_i)}_{(a_1,\ldots,a_i)}$ визначимо за формулою $(s_1,\ldots,s_i)\mathfrak{h} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ a_1 & \cdots & a_i \end{smallmatrix}\right)$. □

Твердження 3.2.5. *Для кожної напівгрупи S, довільного ненульового кардинала λ та будь-якого натурального числа $n \leqslant \lambda$ виконуються такі умови:*

- (i) *напівгрупа $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ — регулярна тоді і лише тоді, коли напівгрупа S — регулярна;*
- (ii) *напівгрупа $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ — ортодоксальна тоді і лише тоді, коли напівгрупа S — ортодоксальна;*
- (iii) *напівгрупа $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ — інверсна тоді і лише тоді, коли напівгрупа S — інверсна.*

Доведення. (i) випливає з твердження 3.2.2.

(ii) $(\Leftarrow)$ Припустимо, що S — ортодоксальна напівгрупа. З (i) випливає, що напівгрупа $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ є регулярною. За твердженням 3.2.1 кожен ненульовий ідемпотент напівгрупи $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ має вигляд $\left(\begin{smallmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ e_1 & \cdots & e_i \\ a_1 & \cdots & a_i \end{smallmatrix}\right)$, де $0 < i \leqslant n$ і $e_1,\ldots,e_i$ є ідемпотентами в напівгрупі S. З цього випливає, що добуток двох ідемпотентів напівгрупи $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ є також ідемпотентом, а тому напівгрупа $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ є ортодоксальною.

($\Rightarrow$) Припустимо, що $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ — ортодоксальна напівгрупа. За твердженням 3.2.4 напівгрупа $S_{(a)}^{(a)}$ є піднапівгрупою в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ для всіх $a \in \lambda$, а тому напівгрупа $S_{(a)}^{(a)}$ є ортодоксальною. З твердження 3.2.4 випливає, що напівгрупа S також є ортодоксальною.

(iii) ($\Leftarrow$) Припустимо, що S — інверсна напівгрупа. З (i) випливає, що напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ є регулярною. За твердженням 3.2.1 ідемпотенти напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ комутують, а тому за теоремою 1.2.2 напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ є інверсною.

($\Rightarrow$) Припустимо, що $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ — інверсна напівгрупа. За твердженням 3.2.4 напівгрупа $S_{(a)}^{(a)}$ є піднапівгрупою в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ для всіх $a \in \lambda$, а за твердженням 3.2.3 вона є інверсною піднапівгрупою. Отже, за твердженням 3.2.4 напівгрупа S є інверсною. $\square$

Зауваження 3.2.6. Очевидно, що для двох ненульових елементів $\alpha_S = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix}$ та $\beta_S = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_k \\ t_1 & \cdots & t_k \\ d_1 & \cdots & d_k \end{pmatrix}$ напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ із кожної з умов $\alpha_S \mathscr{R} \beta_S$, $\alpha_S \mathscr{L} \beta_S$, $\alpha_S \mathscr{D} \beta_S$, $\alpha_S \mathscr{J} \beta_S$ чи $\alpha_S \mathscr{H} \beta_S$ випливає рівність $i = k$.

Твердження 3.2.7 описує відношення Ґріна на напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

Твердження 3.2.7. *Нехай S — моноїд, λ — довільний ненульовий кардинал, $n \leqslant \lambda$ і $\alpha_S = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix}$ та $\beta_S = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix}$ — ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Тоді:*

(i) *$\alpha_S \mathscr{R} \beta_S$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ тоді і лише тоді, коли існує перестановка $\sigma\colon \{1, \ldots, i\} \to \{1, \ldots, i\}$ така, що*

$$a_1 = c_{(1)\sigma}, \ldots, a_i = c_{(i)\sigma} \quad \text{і} \quad s_1 \mathscr{R} t_{(1)\sigma}, \ldots, s_i \mathscr{R} t_{(i)\sigma} \text{ в } S;$$

(ii) *$\alpha_S \mathscr{L} \beta_S$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ тоді і лише тоді, коли існує перестановка $\sigma\colon \{1, \ldots, i\} \to \{1, \ldots, i\}$ така, що*

$$b_1 = d_{(1)\sigma}, \ldots, b_i = d_{(i)\sigma} \quad \text{і} \quad s_1 \mathscr{L} t_{(1)\sigma}, \ldots, s_i \mathscr{L} t_{(i)\sigma} \text{ в } S;$$

(iii) *$\alpha_S \mathscr{D} \beta_S$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ тоді і лише тоді, коли існує перестановка $\sigma\colon \{1, \ldots, i\} \to \{1, \ldots, i\}$ така, що $s_1 \mathscr{D} t_{(1)\sigma}, \ldots, s_i \mathscr{D} t_{(i)\sigma}$ в S;*

(*iv*) $\alpha_S \mathscr{H} \beta_S$ *в* $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ *тоді і лише тоді, коли існують перестановки* $\sigma, \rho\colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$ *такі, що*

$$s_1 \mathscr{R} t_{(1)\sigma}, \ldots, s_i \mathscr{R} t_{(i)\sigma} \quad i \quad s_1 \mathscr{L} t_{(1)\rho}, \ldots, s_i \mathscr{L} t_{(i)\rho} \text{ в } S;$$

(*v*) $\alpha_S \mathscr{J} \beta_S$ *в* $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ *тоді і лише тоді, коли існує перестановка* $\pi\colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$ *така, що* $s_1 \mathscr{J} t_{(1)\pi}, \ldots, s_i \mathscr{J} t_{(i)\pi}$ *в* S.

Доведення. (*i*) ($\Rightarrow$) Припустимо, що $\alpha_S \mathscr{R} \beta_S$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Тоді існують ненульові елементи $\gamma_S = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_k \\ u_1 & \cdots & u_k \\ f_1 & \cdots & f_k \end{pmatrix}$ та $\delta_S = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_j \\ v_1 & \cdots & v_j \\ h_1 & \cdots & h_j \end{pmatrix}$ напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ такі, що $\alpha_S = \beta_S \gamma_S$, $\beta_S = \alpha_S \delta_S$, $i \leqslant j \leqslant n$ і $i \leqslant k \leqslant n$. Також з означення напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає, що не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $j = k = i$. Тоді з рівностей

$$\alpha_S = \beta_S \gamma_S \quad \text{і} \quad \beta_S = \alpha_S \delta_S$$

випливає, що

$$\{a_1,\ldots,a_i\}=\{c_1,\ldots,c_i\}, \{b_1,\ldots,b_i\}=\{g_1,\ldots,g_i\} \text{ і } \{d_1,\ldots,d_i\}=\{e_1,\ldots,e_i\}.$$

З означення напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає, що існують такі перестановки $\sigma, \rho, \zeta\colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$, що

$$a_1 = c_{(1)\sigma}, \ldots, a_i = c_{(i)\sigma}, d_1 = e_{(1)\rho}, \ldots, d_i = e_{(i)\rho} \text{ і } b_1 = g_{(1)\zeta}, \ldots, b_i = g_{(i)\zeta},$$

а тому

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_i \\ u_1 & \cdots & u_i \\ f_1 & \cdots & f_i \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & d_i \\ u_{(1)\rho} & \cdots & u_{(i)\rho} \\ f_{(1)\rho} & \cdots & f_{(i)\rho} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 u_{(1)\rho} & \cdots & t_i u_{(i)\rho} \\ f_{(1)\rho} & \cdots & f_{(i)\rho} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ t_{(1)\sigma} u_{((1)\rho)\sigma} & \cdots & t_{(i)\sigma} u_{((i)\rho)\sigma} \\ f_{((1)\rho)\sigma} & \cdots & f_{((i)\rho)\sigma} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_i \\ v_1 & \cdots & v_i \\ h_1 & \cdots & h_i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_i \\ v_{(1)\zeta} & \cdots & v_{(i)\zeta} \\ h_{(1)\zeta} & \cdots & h_{(i)\zeta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 v_{(1)\zeta} & \cdots & s_i v_{(i)\zeta} \\ h_{(1)\zeta} & \cdots & h_{(i)\zeta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ s_{(1)\sigma^{-1}} v_{((1)\zeta)\sigma^{-1}} & \cdots & s_{(i)\sigma^{-1}} v_{((i)\zeta)\sigma^{-1}} \\ h_{((1)\zeta)\sigma^{-1}} & \cdots & h_{((i)\zeta)\sigma^{-1}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Тому отримуємо, що

$$\begin{aligned} &s_1 = t_{(1)\sigma} u_{((1)\rho)\sigma}, \quad \ldots, \quad s_i = t_{(i)\sigma} u_{((i)\rho)\sigma}, \\ &t_1 = s_{(1)\sigma^{-1}} v_{((1)\zeta)\sigma^{-1}}, \ \ldots \ t_i = s_{(i)\sigma^{-1}} v_{((i)\zeta)\sigma^{-1}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Позаяк $\sigma\colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$ є перестановкою, то з умов (3.1) випливає, що $s_1 \mathscr{R} t_{(1)\sigma}, \ldots, s_i \mathscr{R} t_{(i)\sigma}$ в S.

($\Leftarrow$) Припустимо, що для $\alpha_S, \beta_S \in \mathscr{I}_\lambda^n(S)$ існує така перестановка $\sigma\colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$, що

$$a_1 = c_{(1)\sigma}, \ldots, a_i = c_{(i)\sigma}$$

і $s_1 \mathscr{R} t_{(1)\sigma}, \ldots, s_i \mathscr{R} t_{(i)\sigma}$ в S. Тоді існують такі $u_1, \ldots, u_i, v_1, \ldots, v_i \in S^1$, що

$$s_1 = t_{(1)\sigma} u_1, \quad \ldots, \quad s_i = t_{(i)\sigma} u_i, \quad t_1 = s_{(1)\sigma^{-1}} v_1, \quad \ldots \quad t_i = s_{(i)\sigma^{-1}} v_i.$$

Ми отримали, що

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} c_{(1)\sigma} & \cdots & c_{(i)\sigma} \\ t_{(1)\sigma} u_1 & \cdots & t_{(i)\sigma} u_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 u_{(1)\sigma^{-1}} & \cdots & t_i u_{(i)\sigma^{-1}} \\ b_{(1)\sigma^{-1}} & \cdots & b_{(i)\sigma^{-1}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & d_i \\ u_{(1)\sigma^{-1}} & \cdots & u_{(i)\sigma^{-1}} \\ b_{(1)\sigma^{-1}} & \cdots & b_{(i)\sigma^{-1}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} a_{(1)\sigma^{-1}} & \cdots & a_{(i)\sigma^{-1}} \\ s_{(1)\sigma^{-1}}v_1 & \cdots & s_{(i)\sigma^{-1}}v_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 v_{(1)\sigma} & \cdots & s_i v_{(i)\sigma} \\ d_{(1)\sigma} & \cdots & d_{(i)\sigma} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_i \\ v_{(1)\sigma} & \cdots & v_{(i)\sigma} \\ d_{(1)\sigma} & \cdots & d_{(i)\sigma} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

а тому $\alpha_S \mathscr{R} \beta_S$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

Доведення твердження (ii) є аналогічним до доведення твердження (i).

(iii) $(\Rightarrow)$ Припустимо, що $\alpha_S \mathscr{D} \beta_S$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Тоді існує ненульовий елемент $\gamma_S = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_i \\ u_1 & \cdots & u_i \\ f_1 & \cdots & f_i \end{pmatrix}$ напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ такий, що $\alpha_S \mathscr{R} \gamma_S$ і $\gamma_S \mathscr{L} \beta_S$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. За твердженням (i) існує така перестановка $\zeta\colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$, що $e_1 = a_{(1)\zeta}, \ldots, e_i = a_{(i)\zeta}$, а також $u_1 \mathscr{R} s_{(1)\zeta}, \ldots, u_i \mathscr{R} s_{(i)\zeta}$ в S. З твердження (ii) випливає, що існує така перестановка $\varsigma\colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$, що $f_1 = d_{(1)\varsigma}, \ldots, f_i = d_{(i)\varsigma}$, а також $u_1 \mathscr{L} s_{(1)\varsigma}, \ldots, u_i \mathscr{L} s_{(i)\varsigma}$ в S. З цього випливає, що $s_1 \mathscr{D} t_{(1)\sigma}, \ldots, s_i \mathscr{D} t_{(i)\sigma}$ в S для перестановки $\sigma = \zeta \circ \varsigma^{-1}$ множини $\{1,\ldots,i\}$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що існує така перестановка $\sigma\colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$, що $s_1 \mathscr{D} t_{(1)\sigma}, \ldots, s_i \mathscr{D} t_{(i)\sigma}$ в S. Тоді з означення відношення $\mathscr{D}$ випливає існування таких $u_1,\ldots,u_i \in S$, що

$$s_1 \mathscr{R} u_1, \ldots, s_i \mathscr{R} u_i,$$

$$u_1 \mathscr{L} t_{(1)\sigma}, \ldots, u_i \mathscr{L} t_{(i)\sigma}$$

в S. Для елемента $\gamma_S = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ u_1 & \cdots & u_i \\ d_{(1)\sigma} & \cdots & d_{(i)\sigma} \end{pmatrix}$ напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ за твердженнями (i) та (ii) випливає, що $\alpha_S \mathscr{R} \gamma_S$ і $\gamma_S \mathscr{L} \beta_S$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

(iv) випливає із тверджень (i) та (ii).

(v) $(\Rightarrow)$ Припустимо, що $\alpha_S \mathscr{J} \beta_S$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Тоді існують ненульові елементи $\gamma_S^l = \begin{pmatrix} e_1^l & \cdots & e_{k_l}^l \\ u_1^l & \cdots & u_{k_l}^l \\ f_1^l & \cdots & f_{k_l}^l \end{pmatrix}$, $\gamma_S^r = \begin{pmatrix} e_1^r & \cdots & e_{k_r}^r \\ u_1^r & \cdots & u_{k_r}^r \\ f_1^r & \cdots & f_{k_r}^r \end{pmatrix}$, $\delta_S^l = \begin{pmatrix} g_1^l & \cdots & g_{j_l}^l \\ v_1^l & \cdots & v_{j_l}^l \\ h_1^l & \cdots & h_{j_l}^l \end{pmatrix}$ і $\delta_S^r = \begin{pmatrix} g_1^r & \cdots & g_{j_r}^r \\ v_1^r & \cdots & v_{j_r}^r \\ h_1^r & \cdots & h_{j_r}^r \end{pmatrix}$

напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ такі, що

$$\alpha_S = \gamma_S^l \beta_S \gamma_S^r, \quad \beta_S = \delta_S^l \alpha_S \delta_S^r \quad \text{і} \quad i \leqslant k_l, k_r, j_l, j_r \leqslant n.$$

Також з означення напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає, що не зменшуючи загальності можемо вважати, що $k_l = k_r = j_l = j_r = i$. Тоді з рівностей $\alpha_S = \gamma_S^l \beta_S \gamma_S^r$ і $\beta_S = \delta_S^l \alpha_S \delta_S^r$ випливає, що

$$\begin{aligned}
\{a_1, \ldots, a_i\} &= \{g_1^l, \ldots, g_i^l\} = \{h_1^l, \ldots, h_i^l\},\\
\{b_1, \ldots, b_i\} &= \{f_1^r, \ldots, f_i^r\} = \{g_1^r, \ldots, g_i^r\},\\
\{c_1, \ldots, c_i\} &= \{g_1^l, \ldots, g_i^l\} = \{f_1^l, \ldots, f_i^l\},\\
\{d_1, \ldots, d_i\} &= \{e_1^r, \ldots, e_i^r\} = \{h_1^r, \ldots, h_i^r\}.
\end{aligned}$$

З означення напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає, що існують перестановки $\sigma, \rho, \zeta, \varsigma, \nu, \kappa \colon \{1, \ldots, i\} \to \{1, \ldots, i\}$ такі, що

$$\begin{aligned}
a_1 &= e_{(1)\sigma}^l, \ldots, a_i = e_{(i)\sigma}^l, \quad c_1 = f_{(1)\rho}^l, \ldots, c_i = f_{(i)\rho}^l,\\
d_1 &= e_{(1)\zeta}^r, \ldots, d_i = e_{(i)\zeta}^r, \quad c_1 = g_{(1)\varsigma}^l, \ldots, c_i = g_{(i)\varsigma}^l,\\
a_1 &= h_{(1)\nu}^l, \ldots, a_i = h_{(i)\nu}^l, \quad b_1 = g_{(1)\kappa}^r, \ldots, b_i = g_{(i)\kappa}^r,
\end{aligned}$$

а тому отримуємо, що

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e_1^l & \cdots & e_{k_l}^l \\ u_1^l & \cdots & u_{k_l}^l \\ f_1^l & \cdots & f_{k_l}^l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1^r & \cdots & e_{k_r}^r \\ u_1^r & \cdots & u_{k_r}^r \\ f_1^r & \cdots & f_{k_r}^r \end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix} e_{(1)\rho}^l & \cdots & e_{(i)\rho}^l \\ u_{(1)\rho}^l & \cdots & u_{(i)\rho}^l \\ c_1 & \cdots & c_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & d_i \\ u_{(1)\varsigma}^r & \cdots & u_{(i)\varsigma}^r \\ f_{(1)\varsigma}^r & \cdots & f_{(i)\varsigma}^r \end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix} e_{(1)\rho}^l & \cdots & e_{(i)\rho}^l \\ u_{(1)\rho}^l t_1 u_{(1)\varsigma}^r & \cdots & u_{(i)\rho}^l t_i u_{(i)\varsigma}^r \\ f_{(1)\varsigma}^r & \cdots & f_{(i)\varsigma}^r \end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix} e_1^l & \cdots & e_i^l \\ u_1^l t_{(1)\rho^{-1}} u_{((1)\zeta)\rho^{-1}}^r & \cdots & u_1^l t_{(i)\rho^{-1}} u_{((i)\zeta)\rho^{-1}}^r \\ f_{((1)\zeta)\rho^{-1}}^r & \cdots & f_{((i)\zeta)\rho^{-1}}^r \end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ u_{(1)\sigma}^l t_{((1)\rho^{-1})\sigma} u_{(((1)\zeta)\rho^{-1})\sigma}^r & \cdots & u_{(i)\sigma}^l t_{((i)\rho^{-1})\sigma} u_{(((i)\zeta)\rho^{-1})\sigma}^r \\ f_{(((1)\zeta)\rho^{-1})\sigma}^r & \cdots & f_{(((i)\zeta)\rho^{-1})\sigma}^r \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g_1^l & \cdots & g_i^l \\ v_1^l & \cdots & v_i^l \\ h_1^l & \cdots & h_i^l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1^r & \cdots & g_i^r \\ v_1^r & \cdots & v_i^r \\ h_1^r & \cdots & h_i^r \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} g_1^l & \cdots & g_i^l \\ v_1^l & \cdots & v_i^l \\ h_1^l & \cdots & h_i^l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_i \\ v_{(1)\kappa}^r & \cdots & v_{(i)\kappa}^r \\ h_{(1)\kappa}^r & \cdots & h_{(i)\kappa}^r \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} g_{(1)\nu}^l & \cdots & g_{(i)\nu}^l \\ v_{(1)\nu}^l s_1 v_{(1)\kappa}^r & \cdots & v_{(i)\nu}^l s_i v_{(i)\kappa}^r \\ h_{(1)\kappa}^r & \cdots & h_{(i)\kappa}^r \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} g_1^l & \cdots & g_i^l \\ v_1^l s_{(1)\nu^{-1}} v_{((1)\kappa)\nu^{-1}}^r & \cdots & v_i^l s_{(i)\nu^{-1}} v_{((i)\kappa)\nu^{-1}}^r \\ h_{((1)\kappa)\nu^{-1}}^r & \cdots & h_{((i)\kappa)\nu^{-1}}^r \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ v_{(1)\zeta}^l s_{((1)\nu^{-1})\varsigma} v_{(((1)\kappa)\nu^{-1})\varsigma}^r & \cdots & v_{(i)\zeta}^l s_{((1)\nu^{-1})\varsigma} v_{(((i)\kappa)\nu^{-1})\varsigma}^r \\ h_{(((1)\kappa)\nu^{-1})\varsigma}^r & \cdots & h_{(((i)\kappa)\nu^{-1})\varsigma}^r \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тоді з означення напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливають такі рівності

$$d_1 = h_{(((1)\kappa)\nu^{-1})\varsigma}^r, \qquad \ldots\ , \qquad d_i = h_{(((i)\kappa)\nu^{-1})\varsigma}^r.$$

Тепер з рівності $\alpha_S = \gamma_S^l \beta_S \gamma_S^r$ отримуємо, що

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^l & \cdots & e_{k_l}^l \\ u_1^l & \cdots & u_{k_l}^l \\ f_1^l & \cdots & f_{k_l}^l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1^r & \cdots & e_{k_r}^r \\ u_1^r & \cdots & u_{k_r}^r \\ f_1^r & \cdots & f_{k_r}^r \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} e_1^l & \cdots & e_{k_l}^l \\ u_1^l & \cdots & u_{k_l}^l \\ f_1^l & \cdots & f_{k_l}^l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ v_{(1)\zeta}^l s_{((1)\nu^{-1})\varsigma} v_{(((1)\kappa)\nu^{-1})\varsigma}^r & \cdots & v_{(i)\zeta}^l s_{((1)\nu^{-1})\varsigma} v_{(((i)\kappa)\nu^{-1})\varsigma}^r \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1^r & \cdots & e_{k_r}^r \\ u_1^r & \cdots & u_{k_r}^r \\ f_1^r & \cdots & f_{k_r}^r \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} e_{(1)\rho}^l & \cdots & e_{(i)\rho}^l \\ u_{(1)\rho}^l & \cdots & u_{(i)\rho}^l \\ c_1 & \cdots & c_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ v_{(1)\zeta}^l s_{((1)\nu^{-1})\varsigma} v_{(((1)\kappa)\nu^{-1})\varsigma}^r & \cdots & v_{(i)\zeta}^l s_{((1)\nu^{-1})\varsigma} v_{(((i)\kappa)\nu^{-1})\varsigma}^r \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & d_i \\ u_{(1)\zeta}^r & \cdots & u_{(i)\zeta}^r \\ f_{(1)\zeta}^r & \cdots & f_{(i)\zeta}^r \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} e_{(1)\rho}^l & \cdots & e_{(i)\rho}^l \\ u_{(1)\rho}^l v_{(1)\zeta}^l s_{((1)\nu^{-1})\varsigma} v_{(((1)\kappa)\nu^{-1})\varsigma}^r u_{(1)\zeta}^r & \cdots & u_{(i)\rho}^l v_{(i)\zeta}^l s_{((1)\nu^{-1})\varsigma} v_{(((i)\kappa)\nu^{-1})\varsigma}^r u_{(1)\zeta}^r \\ f_{(1)\zeta}^r & \cdots & f_{(i)\zeta}^r \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

звідки випливають такі рівності

$$\begin{aligned}
s_1 &= u_{(1)\sigma}^l v_{(((1)\zeta)\rho^{-1})\sigma}^l s_{((((1)\nu^{-1})\varsigma)\rho^{-1})\sigma} v_{(((((1)\kappa)\nu^{-1})\varsigma)\rho^{-1})\sigma}^r u_{(((1)\zeta)\rho^{-1})\sigma}^r \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
s_i &= u_{(i)\sigma}^l v_{(((i)\zeta)\rho^{-1})\sigma}^l s_{((((i)\nu^{-1})\varsigma)\rho^{-1})\sigma} v_{(((((i)\kappa)\nu^{-1})\varsigma)\rho^{-1})\sigma}^r u_{(((i)\zeta)\rho^{-1})\sigma}^r.
\end{aligned}$$

Отже, для перестановки

$$\pi = \nu^{-1}\varsigma\rho^{-1}\sigma \colon \{1, \ldots, i\} \to \{1, \ldots, i\}$$

маємо, що $s_1 \mathscr{J} t_{(1)\pi}, \ldots, s_i \mathscr{J} t_{(i)\pi}$ в S.

($\Leftarrow$) Припустимо, що для елементів $\alpha_S, \beta_S \in \mathscr{I}_\lambda^n(S)$ існує така перестановка $\sigma\colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$, що $s_1 \mathscr{J} t_{(1)\sigma}, \ldots, s_i \mathscr{J} t_{(i)\sigma}$ в S. Тоді існують $u_1,\ldots,u_i,v_1,\ldots,v_i,x_1,\ldots,x_i,y_1,\ldots,y_i \in S^1$ такі, що

$$\begin{array}{lll} s_1{=}x_1 t_{(1)\sigma} u_1, & \ldots, & s_i{=}x_i t_{(i)\sigma} u_i, \\ t_1{=}y_1 s_{(1)\sigma^{-1}} v_1, & \ldots, & t_i{=}y_i s_{(i)\sigma^{-1}} v_i. \end{array}$$

Отже, отримали, що

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_{(1)\sigma} & \cdots & c_{(i)\sigma} \\ x_1 t_{(1)\sigma} u_1 & \cdots & x_i t_{(i)\sigma} u_i \\ b_{(1)\sigma} & \cdots & b_{(i)\sigma} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ x_{(1)\sigma^{-1}} t_1 u_{(1)\sigma^{-1}} & \cdots & x_{(i)\sigma^{-1}} t_i u_{(i)\sigma^{-1}} \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ x_{(1)\sigma^{-1}} & \cdots & x_{(i)\sigma^{-1}} \\ c_1 & \cdots & c_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_i \\ u_{(1)\sigma^{-1}} & \cdots & u_{(i)\sigma^{-1}} \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i \\ t_1 & \cdots & t_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{(1)\sigma^{-1}} & \cdots & a_{(i)\sigma^{-1}} \\ y_1 s_{(1)\sigma^{-1}} v_1 & \cdots & y_i s_{(i)\sigma^{-1}} v_i \\ d_{(1)\sigma^{-1}} & \cdots & d_{(i)\sigma^{-1}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ y_{(1)\sigma} s_1 v_{(1)\sigma} & \cdots & y_{(i)\sigma} s_i v_{(i)\sigma} \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ y_{(1)\sigma} & \cdots & y_{(i)\sigma} \\ a_1 & \cdots & a_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & d_i \\ v_{(1)\sigma} & \cdots & v_{(i)\sigma} \\ d_1 & \cdots & d_i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а тому $\alpha_S \mathscr{J} \beta_S$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. $\square$

Зауваження 3.2.8. З твердження 3.2.7(iv) випливає, якщо існує така перестановка $\sigma\colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$, що $s_1 \mathscr{H} t_{(1)\sigma}, \ldots, s_i \mathscr{H} t_{(i)\sigma}$ в S, то $\alpha_S \mathscr{H} \beta_S$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Але з прикладу 3.2.9 випливає, що обернене твердження не виконується.

Приклад 3.2.9. Нехай λ — довільний кардинал $\geqslant 2$ і $S = \mathscr{C}(p,q)$ — біциклічний моноїд. Зафіксуємо довільні різні елементи a_1 та a_1 з λ і покладемо

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ qp & q^2p^2 \\ a_1 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad \beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ qp^2 & q^2p \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо, що

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ qp^2 & q^2p \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ p & q \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad \beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ qp & q^2p^2 \\ a_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ p & q \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

а тому $\alpha\mathscr{R}\beta$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ і аналогічно отримуємо, що

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ p & q \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ qp^2 & q^2p \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad \beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ p & q \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ qp & q^2p^2 \\ a_1 & a_1 \end{pmatrix},$$

отже, $\alpha\mathscr{L}\beta$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Отож, $\alpha\mathscr{H}\beta$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$, але елементи qp та q^2p^2 не є попарно $\mathscr{H}$-еквівалентними до qp^2 та q^2p, відповідно, для довільної перестановки $\sigma\colon \{1,2\} \to \{1,2\}$.

Доведемо, що структура напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ зберігає стійкість зліва та справа.

Твердження 3.2.10. *Для довільної напівгрупи S, кожного ненульового кардинала λ та довільного натурального числа $n \leqslant \lambda$ виконуються такі умови:*

- (i) *напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ — стійка справа тоді і тільки тоді, коли S — стійка справа напівгрупа;*
- (ii) *напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ — стійка зліва тоді і тільки тоді, коли S — стійка зліва напівгрупа;*
- (iii) *напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ — стійка тоді і тільки тоді, коли S — стійка напівгрупа.*

Доведення. (i) $(\Leftarrow)$ Припустимо, що напівгрупа S є стійкою справа і $\alpha_S = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix}$ і $\beta_S = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_k \\ t_1 & \cdots & t_k \\ d_1 & \cdots & d_k \end{pmatrix}$ — елементи напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ такі, що $\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S) \subseteq \beta_S\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. З цього включення та з означення напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає, що $i \leqslant k$ і, що

$$\{a_1, \ldots, a_i\} \subseteq \{c_1, \ldots, c_k\} \cap \{d_1, \ldots, d_k\}.$$

Не зменшуючи загальності можемо вважати, що $d_1 = a_1, \ldots, d_i = a_i$. Тоді з включення $\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S) \subseteq \beta_S\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає існування такої перестановки

$\sigma\colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$, що $c_1 = a_{(1)\sigma}, \ldots, c_i = a_{(i)\sigma}$. Отже, з означення напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ отримуємо, що

$$\begin{aligned}
\beta_S\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S) &= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_k \\ t_1 & \cdots & t_k \\ d_1 & \cdots & d_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \mathscr{I}_\lambda^n(S) = \\
&= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_i & c_{i+1} & \cdots & c_k \\ t_1 & \cdots & t_i & t_{i+1} & \cdots & t_k \\ d_1 & \cdots & d_i & d_{i+1} & \cdots & d_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \mathscr{I}_\lambda^n(S) = \\
&= \begin{pmatrix} a_{(1)\sigma} & \cdots & a_{(i)\sigma} & c_{i+1} & \cdots & c_k \\ t_1 & \cdots & t_i & t_{i+1} & \cdots & t_k \\ a_1 & \cdots & a_i & d_{i+1} & \cdots & d_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \mathscr{I}_\lambda^n(S) = \\
&= \begin{pmatrix} a_{(1)\sigma} & \cdots & a_{(i)\sigma} \\ t_1 & \cdots & t_i \\ a_1 & \cdots & a_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \mathscr{I}_\lambda^n(S) = \\
&= \begin{pmatrix} a_{(1)\sigma} & \cdots & a_{(i)\sigma} \\ t_1 s_1 & \cdots & t_i s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \mathscr{I}_\lambda^n(S) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ t_{(1)\sigma^{-1}} s_{(1)\sigma^{-1}} & \cdots & t_{(i)\sigma^{-1}} s_{(i)\sigma^{-1}} \\ b_{(1)\sigma^{-1}} & \cdots & b_{(i)\sigma^{-1}} \end{pmatrix} \cdot \mathscr{I}_\lambda^n(S) = \\
&= \{0\} \cup \bigcup \Big\{ [t_{(1)\sigma^{-1}} s_{(1)\sigma^{-1}} S, \ldots, t_{(i)\sigma^{-1}} s_{(i)\sigma^{-1}} S]_{(p_1,\ldots,p_i)}^{(a_1,\ldots,a_i)} \colon p_1, \ldots, p_i \in \lambda \Big\} \cup \\
&\cup \bigcup \Big\{ [t_{(l_1)\sigma^{-1}} s_{(l_1)\sigma^{-1}} S, \ldots, t_{(l_{i-1})\sigma^{-1}} s_{(l_{i-1})\sigma^{-1}} S]_{(p_1,\ldots,p_{i-1})}^{(l_1,\ldots,l_{i-1})} \colon \\
&\quad l_1, \ldots, l_{i-1} \text{ — різні елементи} \{1,\ldots,i\} \text{ і } p_1, \ldots, p_{i-1} \in \lambda \Big\} \cup \cdots \cup \\
&\cup \bigcup \Big\{ [t_{(l)\sigma^{-1}} s_{(l)\sigma^{-1}} S]_{(p)}^{(l)} \colon l \in \{1,\ldots,i\} \text{ і } p \in \lambda \Big\}
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S) &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ s_1 & \cdots & s_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix} \cdot \mathscr{I}_\lambda^n(S) = \\
&= \{0\} \cup \bigcup \Big\{ [s_1 S, \ldots, s_i S]_{(p_1,\ldots,p_i)}^{(a_1,\ldots,a_i)} \colon p_1, \ldots, p_i \in \lambda \cup \\
&\bigcup \Big\{ [s_{l_1} S, \ldots, s_{l_{i-1}} S]_{(p_1,\ldots,p_{i-1})}^{(l_1,\ldots,l_{i-1})} \colon l_1, \ldots, l_{i-1} \text{ — різні елементи з } \{1,\ldots,i\} \\
&\quad \text{і } p_1, \ldots, p_{i-1} \in \lambda \Big\} \cup \cdots \cup \bigcup \Big\{ [s_l S]_{(p)}^{(l)} \colon l \in \{1,\ldots,i\} \text{ і } p \in \lambda \Big\}.
\end{aligned}$$

Отже, із включення $\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S) \subseteq \beta_S\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ і з означення напівгрупових операцій на напівгрупах $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ та S випливає, що $s_l S \subseteq t_{(l)\sigma^{-1}} s_{(l)\sigma^{-1}} S$ для всіх $l \in \{1,\ldots,i\}$. Позаяк напівгрупа всіх перестановок скінченної множини є скінченною, то існує таке натуральне число j, що $\sigma^j \colon \{1,\ldots,i\} \to \{1,\ldots,i\}$ — тотожне відображення, а тому $\sigma^{j-1} = \sigma$. Отже, для всіх $l \in \{1,\ldots,i\}$ маємо, що:

$$s_l S \subseteq t_{(l)\sigma^{-1}} s_{(l)\sigma^{-1}} S \subseteq$$

$$\begin{aligned}
&\subseteq\ t_{(l)\sigma^{-1}}t_{(l)\sigma^{-2}}s_{(l)\sigma^{-2}}S \subseteq \\
&\subseteq \cdots \subseteq \\
&\subseteq t_{(l)\sigma^{-1}}t_{(l)\sigma^{-2}}\cdots t_{(l)\sigma^{-j+1}}s_{(l)\sigma^{-j+1}}S = \\
&= t_{(l)\sigma^{-1}}t_{(l)\sigma^{-2}}\cdots t_l s_l S.
\end{aligned}$$

Тоді з того, що напівгрупа S є стійкою справа випливає рівність

$$s_l S = t_{(l)\sigma^{-1}}t_{(l)\sigma^{-2}}\cdots t_l s_l S,$$

а тому отримуємо, що $s_l S = t_{(l)\sigma^{-1}}s_{(l)\sigma^{-1}}S$ для всіх $l \in \{1,\ldots,i\}$. Тоді із включення $\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S) \subseteq \beta_S\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ та вищенаведених формул випливає рівність $\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S) = \beta_S\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S)$, звідки випливає, що напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ є стійкою справа.

($\Rightarrow$) Припустимо, що напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ є стійкою справа і $sS \subseteq tsS$ для $s,t \in S$. Зафіксуємо довільний елемент $a \in \lambda$ і покладемо $\alpha_S = \left(\begin{smallmatrix} a \\ s \\ a \end{smallmatrix}\right)$ і $\beta_S = \left(\begin{smallmatrix} a \\ t \\ a \end{smallmatrix}\right)$. Отже, за означенням напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ отримуємо, що

$$\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ s \\ a \end{smallmatrix}\right)\mathscr{I}_\lambda^n(S) = \{0\} \cup \bigcup\left\{[sS]_{(p)}^{(a)} \colon p \in \lambda\right\}$$

і

$$\beta_S\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ t \\ a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a \\ s \\ a \end{smallmatrix}\right)\mathscr{I}_\lambda^n(S) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ ts \\ a \end{smallmatrix}\right)\mathscr{I}_\lambda^n(S) = \{0\} \cup \bigcup\left\{[tsS]_{(p)}^{(a)} \colon p \in \lambda\right\},$$

а тому з включення $sS \subseteq tsS$ випливає, що $\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S) \subseteq \beta_S\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Тепер із того, що напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ є стійкою справа, випливає рівність $\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S) = \beta_S\alpha_S\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Звідси отримуємо, що $[sS]_{(p)}^{(a)} = [tsS]_{(p)}^{(a)}$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ для всіх $p \in \lambda$, а тому $sS = tsS$.

Доведення твердження (ii) є дуальним до доведення твердження (i).

(iii) випливає з тверджень (i) та (ii). $\square$

3.3. Напівгрупи зі щільними рядами ідеалів

Зафіксуємо довільне натуральне число m та довільне натуральне число $p \in \{0, \ldots, m\}$. Нехай A — непорожня множина та B — непорожня власна підмножина в A. Через $[B \subset A]_p^m$ позначимо всі елементи $(x_1, \ldots, x_m)$ із A^m, що задовольняють таку властивість: *щонайбільше p координат $(x_1, \ldots, x_m)$ належать до $A \setminus B$.* Очевидно, що $[B \subset A]_m^m = A^m$ для довільного натурального числа m, довільної непорожньої множини A та довільної непорожньої власної підмножини B в A.

З цього означення випливають такі дві леми.

Лема 3.3.1. *Нехай m — довільне натуральне число та $p \in \{1, \ldots, m\}$. Нехай A — непорожня множина та B — непорожня власна підмножина в A. Тоді множина $[B \subset A]_p^m \setminus [B \subset A]_{p-1}^m$ складається з усіх таких елементів $(x_1, \ldots, x_m)$ з A^m, що рівно p координат $(x_1, \ldots, x_m)$ належать до $A \setminus B$.*

Лема 3.3.2. *Нехай m — довільне натуральне число та $p \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Нехай S — напівгрупа, A та B — такі ідеали в S, що $B \subset A$. Тоді множина $[B \subset A]_p^m$ є ідеалом напівгрупи S^m.*

Твердження 3.3.3. *Нехай λ — довільний кардинал і n — довільне натуральне число. Тоді*

$$I_0 = \{0\} \subseteq I_1 = \mathscr{I}_\lambda^1 \subseteq I_2 = \mathscr{I}_\lambda^2 \subseteq \cdots \subseteq I_n = \mathscr{I}_\lambda^n,$$

є сильно щільним рядом ідеалів у напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$.

Доведення. З означення напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ випливає, що

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n$$

є рядом ідеалів у $\mathscr{I}_\lambda^n$.

Зафіксуємо довільне натуральне число $i = 1, \ldots, n$. Для довільної не-

скінченної підмножини B в $\mathscr{I}_\lambda^i \setminus \mathscr{I}_\lambda^{i-1}$ хоча б одна з таких сімей множин

$$\mathfrak{d}(B) = \{\operatorname{dom}\gamma \colon \gamma \in B\} \qquad \text{чи} \qquad \mathfrak{r}(B) = \{\operatorname{ran}\gamma \colon \gamma \in B\}$$

є нескінченною. Тоді з означення напівгрупової операції в $\mathscr{I}_\lambda^n$ випливає, що $\alpha B \nsubseteq \mathscr{I}_\lambda^i \setminus \mathscr{I}_\lambda^{i-1}$ у випадку, коли нескінченною є множина $\mathfrak{d}(B)$, а $B\beta \nsubseteq \mathscr{I}_\lambda^i \setminus \mathscr{I}_\lambda^{i-1}$ у тому випадку, коли нескінченною є множина $\mathfrak{r}(B)$, для $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda^i \setminus \mathscr{I}_\lambda^{i-1}$. □

Надалі для кожної непорожньої множини A, довільного натурального числа n і довільного $i \in \{1, \ldots, n\}$ через

$$\pi_i \colon A^n \to A, (a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_i$$

будемо позначати проекцію на i-ту координату добутку A^n.

Твердження 3.3.4. *Нехай n — натуральне число $\geqslant 2$ та*

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_m = S$$

— сильно щільний ряд ідеалів напівгрупи S. Тоді ряд

$$\begin{aligned}
&I_0^n \subseteq [I_0 \subset I_1]_1^n \subseteq [I_0 \subset I_1]_2^n \subseteq \cdots \subseteq [I_0 \subset I_1]_{n-1}^n \subseteq [I_0 \subset I_1]_n^n = I_1^n \subseteq \\
&\subseteq [I_1 \subset I_2]_1^n \subseteq [I_1 \subset I_2]_2^n \subseteq \cdots \subseteq [I_1 \subset I_2]_{n-1}^n \subseteq [I_1 \subset I_2]_n^n = I_2^n \subseteq \\
&\subseteq \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \subseteq \\
&\subseteq [I_{m-1} \subset I_m]_1^n \subseteq [I_{m-1} \subset I_m]_2^n \subseteq \cdots \subseteq [I_{m-1} \subset I_m]_{n-1}^n \subseteq \\
&\subseteq [I_{m-1} \subset I_m]_n^n = I_m^n = S^n
\end{aligned} \tag{3.2}$$

є сильно щільним рядом ідеалів у S^n.

Доведення. Очевидно, що I_0^n є скінченним ідеалом у S^n. Також за лемою 3.3.2 всі підмножини в ряді (3.2) є ідеалами в S^n.

Зафіксуємо довільні $k \in \{1, \ldots, m\}$ і $p \in \{1, \ldots, n\}$. Множини

$$[I_{k-1} \subset I_k]_p^n \setminus [I_{k-1} \subset I_k]_{p-1}^n \qquad \text{і} \qquad [I_{k-1} \subset I_k]_1^n \setminus I_{k-1}^n$$

є сильно ω-нестійкими в S^n. Справді, зафіксуємо довільну нескінченну підмножину

$$B \subseteq [I_{k-1} \subset I_k]_p^n \setminus [I_{k-1} \subset I_k]_{p-1}^n$$

і довільні

$$a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in [I_{k-1} \subset I_k]_p^n \setminus [I_{k-1} \subset I_k]_{p-1}^n.$$

Тоді існують такі координати $i \in \{1, \ldots, n\}$, що множина $\pi_i(B) \subseteq I_k \setminus I_{k-1}$ є нескінченною. Якщо $a_i \notin I_k \setminus I_{k-1}$ або $b_i \notin I_k \setminus I_{k-1}$, то

$$(a_i \cdot \pi_i(B) \cup \pi_i(B) \cdot b_i) \cap I_k \setminus I_{k-1} = \varnothing,$$

а тому

$$aB \cup Bb \nsubseteq [I_{k-1} \subset I_k]_p^n \setminus [I_{k-1} \subset I_k]_{p-1}^n.$$

Якщо $a_i, b_i \in I_k \setminus I_{k-1}$, то

$$(a_i \cdot \pi_i(B) \cup \pi_i(B) \cdot b_i) \nsubseteq I_k \setminus I_{k-1},$$

бо множина $I_k \setminus I_{k-1}$ є сильно ω-нестійкою в S, а тому

$$aB \cup Bb \nsubseteq [I_{k-1} \subset I_k]_p^n \setminus [I_{k-1} \subset I_k]_{p-1}^n.$$

Доведення того факту, що множина $[I_{k-1} \subset I_k]_1^n \setminus I_{k-1}^n$ є сильно ω-нестійкою в S^n аналогічне. $\square$

Надалі зафіксуємо довільне натуральне число n. Для довільної напівгрупи S та довільного натурального числа $k \leqslant n$ оскільки $\mathscr{I}_\lambda^k(S)$ є піднапівгрупою в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$, то через $\iota\colon \mathscr{I}_\lambda^k(S) \to \mathscr{I}_\lambda^n(S)$ позначатимемо це природне ізоморфне вкладення. З аналогічних міркувань випливає, що не зменшуючи загальності для кожної піднапівгрупи T в S і довільного натурального числа $k \leqslant n$, оскільки $\mathscr{I}_\lambda^k(T)$ є піднапівгрупою $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$, то через $\iota\colon \mathscr{I}_\lambda^k(T) \to \mathscr{I}_\lambda^n(S)$ позначимо це природне ізоморфне вкладення.

Зауваження 3.3.5. Ми довели, що кожен елемент щільного ряду ідеалів (3.2) є m-симетричним в S^n, більше того, множини

$$[I_{k-1} \subset I_k]_p^n \setminus [I_{k-1} \subset I_k]_{p-1}^n \qquad \text{та} \qquad [I_{k-1} \subset I_k]_1^n \setminus I_{k-1}^n$$

також є m-симетричними в S^n для всіх $k \in \{1, \ldots, m\}$ та $p \in \{1, \ldots, n\}$.

Нам потрібна така конструкція.

Конструкція 3.3.6. Нехай λ — ненульовий кардинал, $n \leqslant \lambda$ — довільне натуральне число, k — довільне натуральне число $\leqslant n$ і S — напівгрупа. Для довільних впорядкованих наборів k різних елементів $(a_1, \ldots, a_k)$ та $(b_1, \ldots, b_k)$ з λ^k визначимо відображення $\mathfrak{f}_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)} \colon S^k \to S_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}$ за формулою

$$(s_1, \ldots, s_k)\mathfrak{f}_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \\ s_1 & \cdots & s_k \\ b_1 & \cdots & b_k \end{pmatrix}.$$

Для довільної непорожньої підмножини $A \subseteq S^k$ і будь-якого натурального числа $k \leqslant n$ визначимо такі підмножини:

$$[A]_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}^{(*)_k} = \bigcup \Big\{ (A)\mathfrak{f}_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)} \colon (a_1, \ldots, a_k) \text{ і } (b_1, \ldots, b_k) \text{ — впорядковані набори } k \text{ різних елементів з } \lambda^k \Big\}$$

і

$$\overline{[A]}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}^{(*)_k} = \begin{cases} [A]_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}^{(*)_k} \cup \mathscr{I}_\lambda^{k-1}(S), & \text{якщо } k \geqslant 1; \\ [A]_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}^{(*)_1} \cup \{0\}, & \text{якщо } k = 1, \end{cases}$$

напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

Лема 3.3.7 випливає з означення k-симетричної множини.

Лема 3.3.7. *Нехай λ — кардинал $\geqslant 1$, k — довільне натуральне число $\leqslant \lambda$, S — напівгрупа й $(a_1, \ldots, a_k)$ та $(b_1, \ldots, b_k)$ — довільні впорядковані набори k різних елементів з λ^k. Якщо непорожня множина A є k-симетричною в S^k, то*

$$(A)\mathfrak{f}_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)} = (A)\mathfrak{f}_{(b_{(1)\sigma},\ldots,b_{(k)\sigma})}^{(a_{(1)\sigma},\ldots,a_{(k)\sigma})}$$

для довільної перестановки $\sigma\colon \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,k\}$.

Теорема 3.3.8. *Нехай* λ *— нескінченний кардинал і* n *— довільне натуральне число. Якщо* S *— скінченна напівгрупа, то*

$$I_0 = \{0\} \subseteq I_1 = \mathscr{I}_\lambda^1(S) \subseteq I_2 = \mathscr{I}_\lambda^2(S) \subseteq \cdots \subseteq I_n = \mathscr{I}_\lambda^n(S)$$

є сильно щільним рядом ідеалів для напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

Доведення. Очевидно, що для всіх $i = 0, 1, \ldots, n$ множина I_i є ідеалом у напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ і, більше того, множина I_0 — скінченна.

Зафіксуємо довільне число $i = 1, \ldots, n$ та довільну непорожню підмножину $B \subseteq I_i \setminus I_{i-1}$. Оскільки напівгрупа S є скінченною, то кожна нескінченна підмножина X в $I_i \setminus I_{i-1}$ перетинає нескінченну кількість множин вигляду $S_{(b_1,\ldots,b_i)}^{(a_1,\ldots,a_i)}$. Тоді з означення напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає, що нескінченною є принаймні одна з таких сімей множин:

$$\mathfrak{d}(B) = \{\mathbf{d}\,\gamma\colon \gamma \in B\} \qquad \text{чи} \qquad \mathfrak{r}(B) = \{\mathbf{r}\,\gamma\colon \gamma \in B\}\,.$$

Тоді з означення напівгрупової операції в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає, що $\alpha B \nsubseteq I_i \setminus I_{i-1}$ у випадку, коли множина $\mathfrak{d}(B)$ — нескінченна, і $B\beta \nsubseteq I_i \setminus I_{i-1}$ у випадку, коли множина $\mathfrak{r}(B)$ — нескінченна, для всіх $\alpha, \beta \in I_i \setminus I_{i-1}$. $\square$

Теорема 3.3.9. *Нехай* λ *— нескінченний кардинал,* n *— натуральне число та* $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_m = S$ *— сильно щільний ряд ідеалів у напівгрупі* S. *Тоді*

$$\begin{aligned}
&J_0 = \{0\} \subseteq J_{1,0} = \overline{[I_0]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \\
&\subseteq J_{1,1} = \overline{[I_1]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{1,2} = \overline{[I_2]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \cdots \subseteq J_{1,m-1} = \overline{[I_{m-1}]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{1,m} = \\
&= \overline{[I_m]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} = \mathscr{I}_\lambda^1(S) \subseteq \\
&\subseteq J_{2,0} = \overline{[I_0^2]}^{(*)_2}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \\
&\subseteq J_{2,1} = \overline{[[I_0 \subset I_1]_1^2]}^{(*)_2}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{2,2} = \overline{[I_1^2]}^{(*)_2}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \\
&\subseteq J_{2,3} = \overline{[[I_1 \subset I_2]_1^2]}^{(*)_2}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{2,4} = \overline{[I_2^2]}^{(*)_2}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\subseteq \quad \cdots \quad \cdots \quad \subseteq \\
&\subseteq J_{2,2m-1} = \overline{[[I_{m-1} \subset I_m]_1^2]}^{(*)_2}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{2,2m} = \overline{[[I_m]_2^2]}^{(*)_2}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} = \mathscr{I}_\lambda^2(S) \subseteq \\
&\subseteq \quad \cdots \quad \cdots \quad \subseteq \quad \cdots \quad \cdots \quad \subseteq \\
&\subseteq J_{n,0} = \overline{[I_0^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \\
&\subseteq J_{n,1} = \overline{[[I_0 \subset I_1]_1^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{n,2} = \overline{[[I_0 \subset I_1]_2^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \\
&\subseteq J_{n,3} = \overline{[[I_0 \subset I_1]_3^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{n,4} = \overline{[[I_0 \subset I_1]_4^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \\
&\subseteq \cdots \subseteq \\
&\subseteq J_{n,n-1} = \overline{\left[[I_0 \subset I_1]_{n-1}^n\right]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{n,n} = \overline{[I_1^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \\
&\subseteq J_{n,n+1} = \overline{[[I_1 \subset I_2]_1^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{n,n+2} = \overline{[[I_1 \subset I_2]_2^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \\
&\subseteq J_{n,n+3} = \overline{[[I_1 \subset I_2]_3^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{n,n+4} = \overline{[[I_1 \subset I_2]_4^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \\
&\subseteq \cdots \subseteq \\
&\subseteq J_{n,2n-1} = \overline{\left[[I_1 \subset I_2]_{n-1}^n\right]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{n,2n} = \overline{[I_2^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \\
&\subseteq \quad \cdots \quad \cdots \quad \subseteq \\
&\subseteq J_{n,(m-1)n+1} = \overline{[[I_{m-1} \subset I_m]_1^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{n,(m-1)n+2} = \overline{[[I_{m-1} \subset I_m]_2^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \\
&\subseteq J_{n,(m-1)n+3} = \overline{[[I_{m-1} \subset I_m]_3^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{n,(m-1)n+4} = \overline{[[I_{m-1} \subset I_m]_4^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \\
&\subseteq \cdots \subseteq \\
&\subseteq J_{n,mn-1} = \overline{\left[[I_{m-1} \subset I_m]_{n-1}^n\right]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{n,mn} = \overline{[I_m^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} = \mathscr{I}_\lambda^n(S) \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

є сильно щільним рядом ідеалів у напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

Доведення. З означення напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ та леми 3.3.2 випливає, що всі підмножини в ряді (3.3) є ідеалами напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

Позаяк I_0 є скінченним ідеалом в S, то з рівностей:

$$
\begin{aligned}
J_{1,0} \setminus J_0 &= \overline{[I_0]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \setminus \{0\} = [I_0]^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}, \\
J_{2,0} \setminus J_{1,m} &= \overline{[I_0^2]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \setminus \mathscr{I}_\lambda^1(S) = [I_0^2]^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}, \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}
$$

$$J_{n,0} \setminus J_{n-1,m(n-1)} = \overline{[I_0^n]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}(S) = [I_0^n]^{(*)_n}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}$$

та з означення напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає, що

$$J_{1,0} \setminus J_0, \quad J_{2,0} \setminus J_{1,m}, \quad \ldots, \quad J_{n,0} \setminus J_{n-1,m(n-1)}$$

є сильно ω-нестійкими підмножинами в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

Доведемо, що множина $J_{k,p} \setminus J_{k,p-1}$ є сильно ω-нестійкою в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ для всіх $k = 1, \ldots, n$ і $p = 1, \ldots, km$.

Зафіксуємо довільну підмножину B в $J_{k,p} \setminus J_{k,p-1}$ і довільні елементи $\alpha, \beta \in J_{k,p} \setminus J_{k,p-1}$. Якщо $\mathbf{d}(B) \neq \mathbf{r}(\alpha)$, то з напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає, що $\alpha B \nsubseteq J_{k,p} \setminus J_{k,p-1}$. Аналогічно, якщо $\mathbf{d}(\beta) \neq \mathbf{r}(B)$, то $B\beta \nsubseteq J_{k,p} \setminus J_{k,p-1}$.

Далі припустимо, що $\mathbf{d}(B) = \mathbf{r}(\alpha)$, $\mathbf{d}(\beta) = \mathbf{r}(B)$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \\ s_1 & \cdots & s_k \\ b_1 & \cdots & b_k \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad \beta = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_k \\ t_1 & \cdots & t_k \\ d_1 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

для деяких $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k \in S$ і деяких впорядкованих наборів k різних елементів $(a_1, \ldots, a_k)$, $(b_1, \ldots, b_k)$, $(c_1, \ldots, c_k)$, $(d_1, \ldots, d_k)$ з λ^k. Тоді множина B складається з елементів вигляду:

$$\gamma = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_k \\ x_1 & \cdots & x_k \\ c_{(1)\sigma} & \cdots & c_{(k)\sigma} \end{pmatrix},$$

де $x_1, \ldots, x_k \in S$ та $\sigma\colon \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ — перестановки.

Спочатку розглянемо випадок, коли $J_{k,p} = J_{k,jk} = \overline{\left[I_j^k\right]}^{(*)_k}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}$ для деяких $j = 1, \ldots, m$. Тоді

$$J_{k,p-1} = J_{k,jk-1} = \overline{\left[[I_{j-1} \subset I_j]_{k-1}^k\right]}^{(*)_k}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}$$

і $B \subseteq \left[I_j^k\right]^{(*)_k}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}$. Оскільки множина B є нескінченною, то існує елемент $b_{i_0} \in \{b_1, \ldots, b_k\}$, для якого існує нескінченна кількість таких $\gamma \in B$, що $\mathbf{d}(\gamma) \ni b_{i_0}$. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що $b_{i_0} = b_1$. Покладемо

$$B_0 = \{\gamma \in B\colon b_1 \in \mathbf{d}(\gamma)\}.$$

Тоді множина B_0 є нескінченною, а тому нескінченною є і множина

$$B_0^S = \Big\{ x_1 \in S\colon \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_k \\ x_1 & \cdots & x_k \\ c_{(1)\sigma} & \cdots & c_{(k)\sigma} \end{pmatrix} \in B_0,\ \sigma \text{ — перестановка множини } \{1,\ldots,k\} \Big\}.$$

Звідси випливає існування такої перестановки σ_0 множини $\{1,\ldots,k\}$, що нескінченна кількість елементів вигляду $\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_k \\ x_1 & \cdots & x_k \\ c_{(1)\sigma_0} & \cdots & c_{(k)\sigma_0} \end{pmatrix}$ належить до B_0. Оскільки $s_1, t_{(1)\sigma_0} \in I_j \setminus I_{j-1}$ і множина $I_j \setminus I_{j-1}$ є сильно ω-нестійкою, то

$$a_1 \cdot B_0^S \cup B_0^S \cdot t_{(1)\sigma_0} \nsubseteq I_j \setminus I_{j-1},$$

а тому множина $\big[I_j^k\big]^{(*)_k}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}$ також є сильно ω-нестійкою.

Далі розглянемо випадок

$$J_{k,p} = J_{n,(j-1)k+q} = \overline{\big[[I_{j-1} \subset I_j]_q^k\big]}^{(*)_k}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}$$

для деяких $j = 1,\ldots,m$. Тоді

$$J_{k,p-1} = J_{n,(j-1)k+q-1} = \overline{\big[[I_{j-1} \subset I_j]_{q-1}^k\big]}^{(*)_k}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}$$

і $B \subseteq \big[[I_{j-1} \subset I_j]_q^k\big]^{(*)_k}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}$. Оскільки множина B є нескінченною, то не зменшуючи загальності можемо вважати, що B містить нескінченну підмножину B_0, що складається з елементів вигляду

$$\gamma = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_q & b_{q+1} & \cdots & b_k \\ x_1 & \cdots & x_q & x_{q+1} & \cdots & s_k \\ c_1 & \cdots & c_q & c_{q+1} & \cdots & c_k \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

де

$$x_1,\ldots,x_q \in I_j \setminus I_{j-1} \text{ і } x_{q+1},\ldots,x_k \in I_{j-1} \setminus I_{j-2}$$

для деяких впорядкованих наборів k різних елементів $(b_1,\ldots,b_k)$ і $(c_1,\ldots,c_k)$ з λ^k. Зафіксуємо довільні два елементи множини B:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \\ s_1 & \cdots & s_k \\ b_1 & \cdots & b_k \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad \beta = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_k \\ t_1 & \cdots & t_k \\ d_1 & \cdots & d_k \end{pmatrix}.$$

Якщо $s_u \notin I_j \setminus I_{j-1}$ для деякого елемента $u \in \{1,\ldots,q\}$ чи $s_v \notin I_{j-1} \setminus I_{j-2}$ для деякого $v \in \{q+1,\ldots,k\}$, то $\alpha B_0 \nsubseteq \big[[I_{j-1} \subset I_j]_q^k\big]^{(*)_k}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}$. Аналогічно,

якщо $t_u \notin I_j \setminus I_{j-1}$ для деякого елемента $u \in \{1, \ldots, q\}$ або $t_v \notin I_{j-1} \setminus I_{j-2}$ для деякого $v \in \{q+1, \ldots, k\}$, то $B_0\beta \nsubseteq \left[[I_{j-1} \subset I_j]_q^k\right]_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}^{(*)_k}$. Отже, надалі ми будемо вважати, що:

- $s_u \in I_j \setminus I_{j-1}$ для всіх $u \in \{1, \ldots, q\}$,
- $s_v \in I_{j-1} \setminus I_{j-2}$ для всіх $v \in \{q+1, \ldots, k\}$,
- $t_u \in I_j \setminus I_{j-1}$ для всіх $u \in \{1, \ldots, q\}$,
- $t_v \in I_{j-1} \setminus I_{j-2}$ для всіх $v \in \{q+1, \ldots, k\}$.

Оскільки множина B_0 нескінченна, то існує число $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$, для якого існує нескінченна кількість таких $\gamma \in B_0$, що $\mathbf{d}(\gamma) \ni b_{i_0}$. Покладемо $B_1 = \{\gamma \in B_0 \colon b_{i_0} \in \mathbf{d}(\gamma)\}$. Оскільки множина B_1 є нескінченною, то виконуються умови:

(1) якщо $i_0 \in \{1, \ldots, q\}$, то $s_{i_0}A \cup At_{i_0} \nsubseteq I_j \setminus I_{j-1}$, де

$$A = \left\{ x_{i_0} \colon \gamma = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_{i_0} & \cdots & b_q & \cdots & b_k \\ x_1 & \cdots & x_{i_0} & \cdots & x_q & \cdots & s_k \\ c_1 & \cdots & c_{i_0} & \cdots & c_q & \cdots & c_k \end{pmatrix} \in B_1 \right\},$$

оскільки множина $I_j \setminus I_{j-1}$ є сильно ω-нестійкою в S;

(2) якщо $i_0 \in \{q+1, \ldots, k\}$, то $s_{i_0}A \cup At_{i_0} \nsubseteq I_{j-1} \setminus I_{j-2}$, де

$$A = \left\{ x_{i_0} \colon \gamma = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_q & \cdots & b_{i_0} & \cdots & b_k \\ x_1 & \cdots & x_q & \cdots & x_{i_0} & \cdots & s_k \\ c_1 & \cdots & c_q & \cdots & c_{i_0} & \cdots & c_k \end{pmatrix} \in B_1 \right\},$$

оскільки множина $I_{j-1} \setminus I_{j-2}$ є сильно ω-нестійкою в S.

З обох вищенаведених аргументів випливає, що

$$\alpha B_1 \cup B_1\gamma \nsubseteq \left[[I_{j-1} \subset I_j]_q^k\right]_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}^{(*)_k},$$

а тому $\alpha B \cup B_1\gamma \nsubseteq \left[[I_{j-1} \subset I_j]_q^k\right]_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}^{(*)_k}$, тобто множина $\left[[I_{j-1} \subset I_j]_q^k\right]_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)}^{(*)_k}$ є сильно ω-нестійкою в напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. □

З теореми 3.3.9 випливає:

Наслідок 3.3.10. *Нехай λ — нескінченний кардинал, n — натуральне число й $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_m = S$ — сильно щільний ряд ідеалів для напівгрупи S. Тоді ряд ідеалів (3.3) є щільним для напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.*

Доведення наступної теореми є аналогічним, як і теореми 3.3.9.

Теорема 3.3.11. *Нехай λ — скінченний кардинал, n — натуральне число $\leqslant \lambda$ й $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_m = S$ — сильно щільний ряд ідеалів для напівгрупи S. Тоді*

$$
\begin{gathered}
J_0 = \{0\} \cup \overline{[I_0]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq \\
\subseteq J_{1,1} = \overline{[I_1]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{1,2} = \overline{[I_2]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq \cdots \subseteq J_{1,m-1} = \overline{[I_{m-1}]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{1,m} = \\
= \overline{[I_m]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} = \mathscr{I}^1_\lambda(S) \subseteq \\
\subseteq J_{2,1} = \overline{[[I_1 \subset I_2]^2_1]}^{(*)_2}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{2,2} = \overline{[[I_1 \subset I_2]^2_2]}^{(*)_2}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq \\
\subseteq \quad \cdots \quad \cdots \quad \subseteq \\
\subseteq J_{2,2m-1} = \overline{[[I_{m-1} \subset I_m]^2_1]}^{(*)_2}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{2,2m} = \overline{[[I_m]^2_2]}^{(*)_2}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \mathscr{I}^2_\lambda(S) \subseteq \\
\subseteq \quad \cdots \quad \cdots \quad \subseteq \quad \cdots \quad \cdots \quad \subseteq \\
\subseteq J_{n,1} = \overline{[[I_0 \subset I_1]^n_1]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{n,2} = \overline{[[I_0 \subset I_1]^n_2]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq \\
\subseteq J_{n,3} = \overline{[[I_0 \subset I_1]^n_3]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{n,4} = \overline{[[I_0 \subset I_1]^n_4]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq \\
\subseteq \cdots \subseteq \\
\subseteq J_{n,n-1} = \overline{\left[[I_0 \subset I_1]^n_{n-1}\right]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{n,n} = \overline{[I^n_1]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq \\
\subseteq J_{n,n+1} = \overline{[[I_1 \subset I_2]^n_1]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{n,n+2} = \overline{[[I_1 \subset I_2]^n_2]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq \\
\subseteq J_{n,n+3} = \overline{[[I_1 \subset I_2]^n_3]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{n,n+4} = \overline{[[I_1 \subset I_2]^n_4]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq \\
\subseteq \cdots \subseteq \\
\subseteq J_{n,2n-1} = \overline{\left[[I_1 \subset I_2]^n_{n-1}\right]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{n,2n} = \overline{[I^n_2]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq \\
\subseteq \quad \cdots \quad \cdots \quad \subseteq \\
\subseteq J_{n,(m-1)n+1} = \overline{[[I_{m-1} \subset I_m]^n_1]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{n,(m-1)n+2} = \overline{[[I_{m-1} \subset I_m]^n_2]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq \\
\subseteq J_{n,(m-1)n+3} = \overline{[[I_{m-1} \subset I_m]^n_3]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{n,(m-1)n+4} = \overline{[[I_{m-1} \subset I_m]^n_4]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq \\
\subseteq \cdots \subseteq \\
\subseteq J_{n,mn-1} = \overline{\left[[I_{m-1} \subset I_m]^n_{n-1}\right]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} \subseteq J_{n,mn} = \overline{[I^n_m]}^{(*)_n}_{\mathscr{I}^n_\lambda(S)} = \mathscr{I}^n_\lambda(S) \qquad (3.5)
\end{gathered}
$$

є сильно щільним рядом ідеалів для напівгрупи $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$.

З теореми 3.3.11 випливає:

Наслідок 3.3.12. *Нехай λ — скінченний кардинал, n — натуральне число $\leqslant \lambda$ і $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_m = S$ — сильно щільний ряд ідеалів напівгрупи S. Тоді ряд ідеалів (3.3) є щільним для напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.*

За твердженням 1.2.24 кожна інверсна напівгрупа S із щільними рядами ідеалів є алгебрично повною у класі гаусдорфових напівтопологічних інверсних напівгруп із неперервною інверсією. Тоді з твердження 3.2.5 і теорем 3.3.9, 3.3.11 випливає теорема 3.3.13.

Теорема 3.3.13. *Нехай S — інверсна напівгрупа, що містить сильно щільний ряд ідеалів. Тоді для довільного ненульового кардинала λ і довільного натурального числа $n \leqslant \lambda$ напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ є алгебрично повною у класі гаусдорфових напівтопологічних інверсних напівгруп з неперервною інверсією.*

Зауважимо, що у випадку, коли $n = 1$ конструкція $\mathscr{I}_\lambda^1(S)$ зберігає властивість бути напівгрупою зі щільними рядами ідеалів, а з цього випливає така теорема:

Теорема 3.3.14. *Нехай λ — довільний ненульовий кардинал, n — натуральне число $n \leqslant \lambda$ та $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_m = S$ — щільний ряд ідеалів для напівгрупи S. Тоді*

$$\begin{aligned} J_0 = \{0\} \subseteq J_1 = \overline{[I_0]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_2 = \overline{[I_1]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_3 = \\ = \overline{[I_2]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \cdots \subseteq J_m = \overline{[I_{m-1}]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_{m+1} = \mathscr{I}_\lambda^1(S) \end{aligned} \tag{3.6}$$

є щільним рядом ідеалів для напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^1(S)$ у випадку, коли кардинал λ є нескінченним, а

$$\begin{aligned} J_0 = \{0\} \cup \overline{[I_0]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_1 = \overline{[I_1]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_2 = \\ = \overline{[I_2]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq \cdots \subseteq J_{m-1} = \overline{[I_{m-1}]}^{(*)_1}_{\mathscr{I}_\lambda^n(S)} \subseteq J_m = \mathscr{I}_\lambda^1(S) \end{aligned} \tag{3.7}$$

є щільним рядом ідеалів для напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^1(S)$ у випадку, коли кардинал λ — скінченний.

Доведення. Розглянемо випадок, коли кардинал λ є нескінченним. У іншому випадку доведення є аналогічним.

З означення напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^1(S)$ випливає, що множина J_k є ідеалом в $\mathscr{I}_\lambda^1(S)$ для всіх натуральних чисел $k \in \{0, 1, \ldots, m+1\}$.

Зафіксуємо довільне число $k \in \{1, \ldots, m+1\}$. Тоді для кожної нескінченної підмножини B в $J_k \setminus J_{k-1}$ і довільного елемента $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a \\ s \\ b \end{smallmatrix}\right) \in J_k \setminus J_{k-1}$ розглянемо можливі випадки:

(1) Якщо $B \cap S_{(i)}^{(i)}$ — нескінченна множина для деякого $i \in \lambda$, то

$$B \cap S_{(i)}^{(i)} \subseteq [I_{k-1} \setminus I_{k_2}]_{(i)}^{(i)},$$

а отже, з напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^1(S)$ випливає, що

$$\alpha B \cup B\alpha \nsubseteq J_k \setminus J_{k-1}$$

у випадку, коли $a = b = i$, оскільки множина $I_{k-1} \setminus I_{k_2}$ є ω-нестійкою в S. Інакше, $0 \in \alpha B \cup B\alpha \nsubseteq J_k \setminus J_{k-1}$.

(2) Якщо $B \cap S_{(i)}^{(i)}$ — скінченна множина для деякого $i \in \lambda$, то з означення напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^1(S)$ випливає, що $0 \in \alpha B \cup B\alpha \nsubseteq J_k \setminus J_{k-1}$.

В обидвох випадках маємо, що множина $J_k \setminus J_{k-1}$ є ω-нестійкою в $\mathscr{I}_\lambda^1(S)$, що і завершує доведення теореми. $\square$

3.4. Компактні топології на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$

Для довільного елемента $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{smallmatrix}\right)$ напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ і довільного $s \in S$ позначимо $\alpha[s] = \left(\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ s & \dots & s \\ j_1 & \dots & j_k \end{smallmatrix}\right)$. Очевидно, що $\alpha[s]$ є елементом напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Надалі в такому випадку будемо говорити, що $\alpha[s]$ — *s-розширення* α або α — *$\mathscr{I}_\lambda^n$-звуження* $\alpha[s]$.

Твердження 3.4.1. *Нехай S — моноїд, λ — довільний ненульовий кардинал, n — будь-яке натуральне число $\leqslant \lambda$, $0 < k \leqslant n$ і $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ — гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа. Тоді для впорядкованих наборів з k різних елементів $(a_1, \dots, a_k)$ і $(b_1, \dots, b_k)$ із λ^k і довільного елемента $\alpha_S \in S_{(b_1,\dots,b_k)}^{(a_1,\dots,a_k)}$ існує відкритий окіл $U(\alpha_S)$ елемента α_S такий, що*

- *$U(\alpha_S) \cap \mathscr{I}_\lambda^{k-1}(S) = \varnothing$ і $U(\alpha_S) \cap \mathscr{I}_\lambda^k(S) \subseteq S_{(b_1,\dots,b_k)}^{(a_1,\dots,a_k)}$ у випадку, коли $k \geqslant 2$,*
- *$0 \notin U(\alpha_S)$ і $U(\alpha_S) \cap \mathscr{I}_\lambda^1(S) \subseteq S_{(b_1)}^{(a_1)}$ у випадку, коли $k = 1$.*

Отож, $\mathscr{I}_\lambda^k(S)$ є замкненою піднапівгрупою в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

Доведення. Зафіксуємо довільне число $k \leqslant n$ і довільний елемент $\alpha_S = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & \dots & a_k \\ s_1 & \dots & s_k \\ b_1 & \dots & b_k \end{smallmatrix}\right) \in S_{b_1,\dots,b_k}^{a_1,\dots,a_k}$. Очевидно, що $\varepsilon_1[1_S] \cdot \alpha_S \cdot \varepsilon_2[1_S] = \alpha_S$, де

$$\varepsilon_1[1_S] = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & \dots & a_k \\ 1_S & \dots & 1_S \\ a_1 & \dots & a_k \end{smallmatrix}\right), \qquad \varepsilon_2[1_S] = \left(\begin{smallmatrix} b_1 & \dots & b_k \\ 1_S & \dots & 1_S \\ b_1 & \dots & b_k \end{smallmatrix}\right)$$

і 1_S — це одиничний елемент напівгрупи S.

За допомогою нескладних обчислень можна отримати, що

$$S_{(b_1,\dots,b_k)}^{(a_1,\dots,a_k)} = \varepsilon_1[1_S] \cdot \mathscr{I}_\lambda^n(S) \cdot \varepsilon_2[1_S] \setminus \bigcup \Big\{ \overline{\varepsilon}_1[1_S] \cdot \mathscr{I}_\lambda^n(S) \cdot \overline{\varepsilon}_2[1_S] \colon \\ \overline{\varepsilon}_1 < \varepsilon_1 \text{ і } \overline{\varepsilon}_2 < \varepsilon_2 \text{ в } E(\mathscr{I}_\lambda^n) \Big\}.$$

Відомо, оскільки множини eT і Te є ретрактами топологічного простору T, то за твердженням 1.2.6 вони є замкненими підмножинами в довільній гаусдорфовій напівтопологічній напівгрупі T, для будь-якого її ідемпотента e. Оскільки для кожного ідемпотента $\varepsilon \in \mathscr{I}_\lambda^n$ множина

$$\downarrow\varepsilon = \{\iota \in E(\mathscr{I}_\lambda^n) \colon \iota \leqslant \varepsilon\}$$

скінченна, то множина

$$A_{\alpha_S} = \bigcup \{\overline{\varepsilon}_1[1_S] \cdot \mathscr{I}_\lambda^n(S) \cdot \overline{\varepsilon}_2[1_S] \colon \overline{\varepsilon}_1 < \varepsilon_1 \text{ і } \overline{\varepsilon}_2 < \varepsilon_2\}$$

є замкненою в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Зафіксуємо такий довільний відкритий окіл $W(\alpha_S)$ елемента α_S, що $W(\alpha_S) \cap A_{\alpha_S} = \varnothing$. З того, що операція на напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ є нарізно неперервною випливає існування такого відкритого околу $U(\alpha_S)$ елемента α_S, що

$$\varepsilon_1[1_S] \cdot U(\alpha_S) \cdot \varepsilon_2[1_S] \subseteq W(\alpha_S).$$

Окіл $U(\alpha_S)$ і є шуканим околом. Справді, якщо існує $\beta_S \in \mathscr{I}_\lambda^k(S) \setminus S_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}$, то $\varepsilon_1[1_S] \cdot \beta_S \cdot \varepsilon_2[1_S] \in A_{\alpha_S}$. □

Зауваження 3.4.2. Ми довели, що у твердженні 3.4.1 можемо вважати, що окіл $U(\alpha_S)$ задовольняє таку властивість:

$$\varepsilon_1[1_S] \cdot U(\alpha_S) \cdot \varepsilon_2[1_S] \subseteq S_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}.$$

Твердження 3.4.3. *Нехай S — моноїд, λ — довільний ненульовий кардинал, n — довільне натуральне число $\leqslant \lambda$, $0 < k \leqslant n$ і $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ — гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільних впорядкованих наборів з k різних елементів $(a_1, \ldots, a_k)$, $(b_1, \ldots, b_k)$, $(c_1, \ldots, c_k)$ і $(d_1, \ldots, d_k)$ з λ^k підпростори $S_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}$ і $S_{(d_1,\ldots,d_k)}^{(c_1,\ldots,c_k)}$ є гомеоморфними, і більше того, $S_{(a_1,\ldots,a_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}$ і $S_{(c_1,\ldots,c_k)}^{(c_1,\ldots,c_k)}$ є топологічно ізоморфними піднапівгрупами в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.*

Доведення. Оскільки $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ є напівтопологічною напівгрупою, то звуження таких відображень

$${}_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}\mathfrak{h}_{(d_1,\ldots,d_k)}^{(c_1,\ldots,c_k)} \colon \mathscr{I}_\lambda^n(S) \to \mathscr{I}_\lambda^n(S),\ \alpha \mapsto \begin{pmatrix} c_1 & \ldots & c_k \\ 1_S & \ldots & 1_S \\ a_1 & \ldots & a_k \end{pmatrix} \cdot \alpha \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_k \\ 1_S & \ldots & 1_S \\ d_1 & \ldots & d_k \end{pmatrix}$$

і

$${}_{(d_1,\ldots,d_k)}^{(c_1,\ldots,c_k)}\mathfrak{h}_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)} \colon \mathscr{I}_\lambda^n(S) \to \mathscr{I}_\lambda^n(S),\ \alpha \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_k \\ 1_S & \ldots & 1_S \\ c_1 & \ldots & c_k \end{pmatrix} \cdot \alpha \cdot \begin{pmatrix} d_1 & \ldots & d_k \\ 1_S & \ldots & 1_S \\ b_1 & \ldots & b_k \end{pmatrix}$$

на підпростори $S_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}$ і $S_{(d_1,\ldots,d_k)}^{(c_1,\ldots,c_k)}$, відповідно, є взаємно оберненими відображеннями, а тому $S_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}$ і $S_{(d_1,\ldots,d_k)}^{(c_1,\ldots,c_k)}$ є гомеоморфними підпросторами

в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Очевидним також є той факт, що у випадку піднапівгруп $S_{(a_1,\ldots,a_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}$ і $S_{(c_1,\ldots,c_k)}^{(c_1,\ldots,c_k)}$ так визначені звуження відображень є топологічними ізоморфізмами. $\square$

Для довільних впорядкованих наборів k різних елементів $(a_1,\ldots,a_k)$ і $(b_1,\ldots,b_k)$ і λ^k означимо відображення

$$\mathfrak{f}_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}\colon \mathscr{I}_\lambda^n(S)\to\mathscr{I}_\lambda^n(S),\ \alpha\mapsto\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_k\\ 1_S & \ldots & 1_S\\ a_1 & \ldots & a_k\end{pmatrix}\cdot\alpha\cdot\begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_k\\ 1_S & \ldots & 1_S\\ b_1 & \ldots & b_k\end{pmatrix}.$$

З твердження 3.4.1 випливає.

Наслідок 3.4.4. *Нехай S — моноїд, λ — довільний ненульовий кардинал, n — будь-яке натуральне число $\leqslant\lambda$, $0<k\leqslant n$ і $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ — гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа. Тоді множина*

$$\Uparrow S_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}=\left(S_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}\right)\left(\mathfrak{f}_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}\right)^{-1}$$

є відкритою в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ для довільних впорядкованих наборів k різних елементів $(a_1,\ldots,a_k)$ та $(b_1,\ldots,b_k)$ з λ^k.

Добре відомо, що кожен гаусдорфів компактний простір є H-замкненим, а кожен регулярний H-замкнений простір є компактним (див. твердження 1.2.15).

Лема 3.4.5. *Нехай S — моноїд, λ — довільний ненульовий кардинал, n — будь-яке натуральне число $\leqslant\lambda$, $0<k\leqslant n$ і $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ — гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа. Якщо $S_{(b)}^{(a)}$ є замкненою підмножиною в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ для всіх $a,b\in\lambda$, то $S_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)}$ — замкнений підпростір у $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ для довільних впорядкованих наборів k різних елементів $(a_1,\ldots,a_k)$ і $(b_1,\ldots,b_k)$ з λ^k.*

Доведення. Для довільних $a,b\in\lambda$ відображення

$$\mathfrak{f}_{(b)}^{(a)}\colon \mathscr{I}_\lambda^n(S)\to\mathscr{I}_\lambda^n(S),\ \alpha\mapsto\begin{pmatrix} a\\ 1_S\\ a\end{pmatrix}\cdot\alpha\cdot\begin{pmatrix} b\\ 1_S\\ b\end{pmatrix}$$

є неперервним, бо $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ є напівтопологічною напівгрупою. З цього та з

твердження 3.4.1 випливає, що

$$S^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)} = \left(S^{(a_1)}_{(b_1)}\right)\left(\mathfrak{f}^{(a_1)}_{(b_1)}\right)^{-1} \cap \cdots \cap \left(S^{(a_k)}_{(b_k)}\right)\left(\mathfrak{f}^{(a_k)}_{(b_k)}\right)^{-1} \cap \mathscr{I}^k_\lambda(S)$$

є замкненим підпростором в $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$. □

Позаяк за теоремою 1.2.11 неперервний образ компактного (H-замкненого) простору є компактним (H-замкненим), то з твердження 3.4.3 та леми 3.4.5 випливає.

Наслідок 3.4.6. *Нехай S — моноїд, λ — довільний ненульовий кардинал, n — будь-яке натуральне число $\leqslant \lambda$, $0 < k \leqslant n$ і $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ — гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа. Якщо множина $S^{(a)}_{(b)}$ є H-замкненою (компактною) в $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ для деяких $a, b \in \lambda$, то $S^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)}$ є замкненим підпростором в $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ для довільних наборів k різних елементів $(a_1,\ldots,a_k)$ і $(b_1,\ldots,b_k)$ з λ^k.*

Означення 3.4.7. Нехай $\mathfrak{S}$ — клас напівтопологічних напівгруп. Нехай $\lambda \geqslant 1$ — кардинал, n — натуральне число $\leqslant \lambda$ і $(S,\tau) \in \mathfrak{S}$. І нехай $\tau_{\mathscr{I}}$ є такою топологією на $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$, що

a) $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau_{\mathscr{I}}) \in \mathfrak{S}$;

b) топологічний підпростір $\left(S^{(a)}_{(a)}, \tau_B|_{S_{\alpha,\alpha}}\right)$ є природно гомеоморфним до (S,τ) для деякого $a \in \lambda$, тобто, відображення $\mathfrak{H}\colon S \to \mathscr{I}^n_\lambda(S)$, $s \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a \\ s \\ a \end{smallmatrix}\right)$ є топологічним вкладенням.

Тоді $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau_{\mathscr{I}})$ називається *топологічним $\mathscr{I}^n_\lambda$-розширенням напівтопологічної напівгрупи (S,τ) в класі $\mathfrak{S}$.*

Лема 3.4.8. *Нехай (S,τ) — напівтопологічний моноїд, λ — довільний ненульовий кардинал, n — будь-яке натуральне число $\leqslant \lambda$, $0 < k \leqslant n$ і $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau_{\mathscr{I}})$ — топологічне $\mathscr{I}^n_\lambda$-розширення (S,τ) у класі напівтопологічних напівгруп. Нехай $U_1(s_1),\ldots,U_k(s_k)$ — відкриті околи точок $s_1,\ldots,s_k$ у (S,τ), відповідно. Тоді множини*

$$\Uparrow[U_1(s_1)]^{(a_1)}_{(b_1)} = \left([U_1(s_1)]^{(a_1)}_{(b_1)}\right)\left(\mathfrak{f}^{(a_1)}_{(b_1)}\right)^{-1}, \ldots, \Uparrow[U_k(s_k)]^{(a_k)}_{(b_k)} = \left([U_k(s_k)]^{(a_k)}_{(b_k)}\right)\left(\mathfrak{f}^{(a_k)}_{(b_k)}\right)^{-1}$$

та

$$\Uparrow[U_1(s_1),\ldots,U_k(s_k)]^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)} = \Uparrow[U_1(s_1)]^{(a_1)}_{(b_1)} \cap \ldots \cap \Uparrow[U_k(s_k)]^{(a_k)}_{(b_k)}$$

є відкритими околами точок

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ s_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_k \\ s_k \\ b_k \end{pmatrix} \qquad \text{та} \qquad \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k \\ s_1 & \dots & s_k \\ b_1 & \dots & b_k \end{pmatrix}$$

в $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}})$, *відповідно, для довільних впорядкованих наборів* k *різних елементів* $(a_1, \dots, a_k)$ *і* $(b_1, \dots, b_k)$ *з* λ^k.

Доведення. Оскільки $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}})$ — топологічне $\mathscr{I}_\lambda^n$-розширення напівгрупи (S, τ) у класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп, то існують такі відкриті околи $W_1, \dots, W_k$ точок $\begin{pmatrix} a_1 \\ s_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_k \\ s_k \\ b_k \end{pmatrix}$ в $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}})$, відповідно, що

$$W_1 \cap S_{(b_1)}^{(a_1)} = [U_1(s_1)]_{(b_1)}^{(a_1)}, \qquad \dots, \qquad W_k \cap S_{(b_k)}^{(a_k)} = [U_k(s_k)]_{(b_k)}^{(a_k)}.$$

Тоді остаточне доведення леми випливає із того факту, що напівгрупова операція в $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}})$ є нарізно неперервною. □

Теорема 3.4.9. *Нехай* (S, τ) *— гаусдорфовий компактний напівтопологічний моноїд,* λ *— довільний ненульовий кардинал,* n *— будь-яке натуральне число* $\leqslant \lambda$, $0 < k \leqslant n$ *і* $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}})$ *— компактне топологічне* $\mathscr{I}_\lambda^n$*-розширення* (S, τ) *у класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп. Тоді підпростір* $S_{(b_1,\dots,b_k)}^{(a_1,\dots,a_k)}$ *в* $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}})$ *є компактним, і більше того, існує гомеоморфізм між* $S_{(b_1,\dots,b_k)}^{(a_1,\dots,a_k)}$ *та* S^k *із топологією добутку, який задається відображенням*

$$\mathfrak{H}\colon S_{(b_1,\dots,b_k)}^{(a_1,\dots,a_k)} \to S^k, \ \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k \\ s_1 & \dots & s_k \\ b_1 & \dots & b_k \end{pmatrix} \mapsto (s_1, \dots, s_k),$$

для довільних впорядкованих наборів k *різних елементів* $(a_1, \dots, a_k)$ *та* $(b_1, \dots, b_k)$ *із* λ^k.

Доведення. Оскільки моноїд (S, τ) є компактним, то із наслідку 3.4.6 випливає, що $S_{(b_1,\dots,b_k)}^{(a_1,\dots,a_k)}$ є замкненою підмножиною в просторі $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}})$. Тоді з компактності простору $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}})$ випливає компактність множини $S_{(b_1,\dots,b_k)}^{(a_1,\dots,a_k)}$.

Очевидно, що так визначене відображення $\mathfrak{H}\colon S^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)} \to S^k$ є бієкцією. Також за лемою 3.4.8 відображення $\mathfrak{H}$ є неперервним, а тому є гомеоморфізмом, бо S^k і $S^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)}$ — компакти. $\square$

Наслідок 3.4.10 випливає із теорем 3.4.1 і 3.4.9.

Наслідок 3.4.10. *Нехай (S,τ) — гаусдорфовий компактний напівтопологічний моноїд, λ — довільний ненульовий кардинал, n — будь-яке натуральне число $\leqslant \lambda$, $0 < k \leqslant n$ і $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau_{\mathscr{I}})$ — компактне топологічне $\mathscr{I}^n_\lambda$-розширення (S,τ) у класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп. Тоді $S^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)}$ є відкрито-замкненою підмножиною в $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau_{\mathscr{I}})$ для довільних впорядкованих наборів k різних елементів $(a_1,\ldots,a_k)$ та $(b_1,\ldots,b_k)$ із λ^k, а простір $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau_{\mathscr{I}})$ є топологічною сумою таких множин з ізольованим нулем.*

Зауваження 3.4.11. За теоремою 1.2.22 нескінченна напівгрупа матричних одиниць, а тому і нескінченна напівгрупа $\mathscr{I}^n_\lambda$, не вкладаються ізоморфно в компактну гаусдорфову топологічну напівгрупу. Наслідок 3.4.10 описує компактне топологічне $\mathscr{I}^n_\lambda$-розширення компактних напівгруп (S,τ) у класі гаусдорфових топологічних напівгруп.

Приклад 3.4.12. Нехай (S,τ_S) — компактний гаусдорфів напівтопологічний моноїд. На напівгрупі $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ визначимо топологію $\tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}}$ так: покладемо

$$\mathscr{P}^{\mathbf{c}}_k(0) = \Big\{\mathscr{I}^n_\lambda(S) \setminus \Uparrow S^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)} \colon (a_1,\ldots,a_k) \\ \text{і } (b_1,\ldots,b_k) \text{ — впорядковані набори } k \text{ різних елементів з } \lambda^k\Big\},$$

для довільного $k = 1,\ldots,n$, а також

$$\mathscr{P}^{\mathbf{c}}\begin{pmatrix} a \\ s \\ b \end{pmatrix} = \left\{\Uparrow [U(s)]^{(a)}_{(b)} : U(s) \text{ — відкритий окіл } s \text{ в } (S,\tau_S)\right\}, \\ \text{для деякого } \begin{pmatrix} a \\ s \\ b \end{pmatrix} \in \mathscr{I}^n_\lambda(S) \setminus \{0\}.$$

Топологія $\tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}}$ на $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ породжується сім'єю

$$\mathscr{P}^{\mathbf{c}} = \{\mathscr{P}^{\mathbf{c}}_k(0) \colon k = 1,\ldots,n\} \cup \left\{\mathscr{P}^{\mathbf{c}}\begin{pmatrix} a \\ s \\ b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a \\ s \\ b \end{pmatrix} \in \mathscr{I}^n_\lambda(S) \setminus \{0\}\right\},$$

яка є її передбазою.

Зауваження 3.4.13. З леми 3.4.8 та з означення топології $\tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}}$ на $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ випливає, що виконуються нижче перелічені умови.

(1) Для довільного натурального числа $k = 1, \ldots, n$ та всіх наборів $(a_1, \ldots, a_k)$ та $(b_1, \ldots, b_k)$ із k різних елементів множини λ^k множина $\Uparrow S^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)}$ є замкненою в $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}})$.

(2) Для кожного елемента $\alpha_S = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & \ldots & a_k \\ s_1 & \ldots & s_k \\ b_1 & \ldots & b_k \end{smallmatrix}\right)$ із $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ і довільних відкритих околів $U_1(s_1), \ldots, U_k(s_k)$ точок $s_1, \ldots, s_k$ в (S, τ) множина

$$\Uparrow [U_1(s_1), \ldots, U_k(s_k)]^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)} \setminus \left(\Uparrow S^{(a^1_1,\ldots,a^1_{l_1})}_{(b^1_1,\ldots,b^1_{l_1})} \cup \cdots \cup \Uparrow S^{(a^p_1,\ldots,a^p_{l_p})}_{(b^p_1,\ldots,b^p_{l_p})} \right)$$

така, що $\alpha_S \notin \Uparrow S^{(a^1_1,\ldots,a^1_{l_1})}_{(b^1_1,\ldots,b^1_{l_1})} \cup \cdots \cup \Uparrow S^{(a^p_1,\ldots,a^p_{l_p})}_{(b^p_1,\ldots,b^p_{l_p})}$, є відкритим околом точки α_S в $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}})$. Вважаємо, що $\{a_1, \ldots, a_k\} \subsetneqq \left\{a^j_1, \ldots, a^j_{l_j}\right\}$ та $\{b_1, \ldots, b_k\} \subsetneqq \left\{b^j_1, \ldots, b^j_{l_j}\right\}$ для всіх $j = 1, \ldots, p$.

Теорема 3.4.14. *Якщо (S, τ_S) — компактний гаусдорфів напівтопологічний моноїд, то $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}})$ є компактною гаусдорфовою напівтопологічною напівгрупою.*

Доведення. Очевидно, що топологія $\tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}}$ є гаусдорфовою.

За теоремою Александера про передбазу (теорема 1.2.10) достатньо довести, що кожне відкрите покриття простору $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$, яке складається з елементів передбази $\mathscr{P}^{\mathbf{c}}$, має скінченне підпокриття.

Доведемо методом математичної індукції, що простір $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}})$ є компактним. У випадку, коли $n = 1$, з наслідку 1.2.23 випливає, що простір $\left(\mathscr{I}^1_\lambda(S), \tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}}\right)$ є компактним. Далі доведемо, що виконується крок індукції: якщо топологічний простір $\left(\mathscr{I}^{k-1}_\lambda(S), \tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}}\right)$ є компактним, то простір $\left(\mathscr{I}^k_\lambda(S), \tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}}\right)$ також є компактним для $k = 2, \ldots, n$. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що $k = n$.

Нехай $\mathscr{U}$ — довільне відкрите покриття простору $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}})$, що складається із елементів передбази $\mathscr{P}^{\mathbf{c}}$. З припущення індукції випливає, що

існує скінченна підсім'я $\mathscr{U}_{n-1}$ в $\mathscr{U}$, яка є підпокриттям простору $\mathscr{I}_\lambda^{n-1}(S)$. Зафіксуємо довільний елемент $V_0 = \mathscr{I}_\lambda^n(S) \setminus \Uparrow S_{(b_1,\ldots,b_p)}^{(a_1,\ldots,a_p)} \in \mathscr{U}_{n-1}$, що містить нуль 0 напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Тоді $p \in \{1,\ldots,n\}$.

Ми довели, що довільна відкрита множина U_0 сім'ї $\{\mathscr{P}_k^{\mathbf{c}}(0)\colon k=1,\ldots,n\}$ містить множину $S_{(b_1,\ldots,b_p)}^{(a_1,\ldots,a_p)}$ тоді і тільки тоді, коли $U_0 \cap S_{(b_1,\ldots,b_p)}^{(a_1,\ldots,a_p)} \neq \varnothing$. З цього випливає, що виконується лише одна із таких умов:

(1) не існує елемента в $\mathscr{U}_{n-1}$ із сім'ї $\{\mathscr{P}_k^{\mathbf{c}}(0)\colon k=1,\ldots,n\}$, що містить множину $S_{(b_1,\ldots,b_p)}^{(a_1,\ldots,a_p)}$;

(2) існує множина $W_0 \in \mathscr{U}_{n-1} \cap \{\mathscr{P}_k^{\mathbf{c}}(0)\colon k=1,\ldots,n\}$ така, що $S_{(b_1,\ldots,b_p)}^{(a_1,\ldots,a_p)} \subseteq W_0$.

Припустимо, що виконується умова (1). Спочатку розглянемо випадок: $p < n$. За теоремою 3.4.9 простір $S_{(b_1,\ldots,b_p)}^{(a_1,\ldots,a_p)}$ є компактним, а тому існує скінченна кількість елементів $\Uparrow [U(s_1)]_{(d_1)}^{(c_1)}, \ldots, \Uparrow [U(s_m)]_{(d_m)}^{(c_m)}$ з перетину $\mathscr{U}_{n-1} \cap \mathscr{P}^{\mathbf{c}} \setminus \{\mathscr{P}_k^{\mathbf{c}}(0)\colon k=1,\ldots,n\}$ таких, що

$$S_{(b_1,\ldots,b_p)}^{(a_1,\ldots,a_p)} \subseteq \Uparrow [U(s_1)]_{(d_1)}^{(c_1)} \cup \cdots \cup \Uparrow [U(s_m)]_{(d_m)}^{(c_m)}.$$

Очевидно, що сім'я

$$\left\{U_0, \Uparrow [U(s_1)]_{(d_1)}^{(c_1)}, \ldots, \Uparrow [U(s_m)]_{(d_m)}^{(c_m)}\right\}$$

є скінченним покриттям простору $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$.

Далі розглянемо випадок $p = n$. Ототожнимо множину $S_{(b_1,\ldots,b_n)}^{(a_1,\ldots,a_n)}$ та добуток S^n за допомогою відображення

$$\mathfrak{H}\colon S_{(b_1,\ldots,b_n)}^{(a_1,\ldots,a_n)} \to S^n, \ \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ s_1 & \ldots & s_n \\ b_1 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \mapsto (s_1,\ldots,s_n). \tag{3.8}$$

З означення напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ випливає, що

$$\Uparrow [U(s)]_{(d)}^{(c)} \cap S_{(b_1,\ldots,b_n)}^{(a_1,\ldots,a_n)} \neq \varnothing$$

тоді і тільки тоді, коли $c = a_i$ і $d = b_i$ для деякого $i = 1,\ldots,n$. Тоді з

означення відображення $\mathfrak{H}$ (див. (3.8)) випливає, що

$$\left(\Uparrow[U(s)]_{(b_i)}^{(a_i)} \cap S_{(b_1,\ldots,b_n)}^{(a_1,\ldots,a_n)}\right)\mathfrak{H} = S \times \cdots \times \underbrace{U(s)}_{i-\text{й}} \times \cdots \times S \subseteq S^n \tag{3.9}$$

для всіх $i = 1, \ldots, n$.

Тоді передбаза $\mathscr{P}^{\mathbf{c}}$ в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ і відображення (3.8) визначають топологію добутку на S^n, а тому простір S^n є компактним.

Припустимо, що простір $S_{(b_1,\ldots,b_n)}^{(a_1,\ldots,a_n)}$ некомпактний. Тоді для простору $S_{(b_1,\ldots,b_n)}^{(a_1,\ldots,a_n)}$ існує покриття $\mathscr{W}$, яке складається із відкритих множин вигляду $\Uparrow[U(s)]_{(d)}^{(c)}$, і покриття $\mathscr{W}$ не містить скінченного підпокриття. Тоді і покриття $\mathscr{W}_{S^n}$ простору S^n, визначене за формулою (3.9), не містить скінченне підпокриття із сім'ї $\mathscr{W}$. А це суперечить компактності простору S^n.

Отже, у випадку (1) покриття $\mathscr{U}$ простору $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ містить скінченне підпокриття.

Припустимо, що виконується умова (2). Тоді $W_0 = \mathscr{I}_\lambda^n(S) \setminus \Uparrow S_{(d_1,\ldots,d_q)}^{(c_1,\ldots,c_q)}$ з $q \leqslant n$. Якщо $\Uparrow S_{(d_1,\ldots,d_q)}^{(c_1,\ldots,c_q)} \cap \Uparrow S_{(b_1,\ldots,b_p)}^{(a_1,\ldots,a_p)} = \varnothing$, то $\{V_0, W_0\}$ є покриттям простору $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. В іншому випадку існує таке найменше натуральне число p_1, що $\max\{p+1, q\} \leqslant p_1 \leqslant n$ і такі два впорядковані p_1-набори різних елементів $(e_1, \ldots, e_{p_1})$ і $(f_1, \ldots, f_{p_1})$ з добутку λ^{p_1}, що

$$\Uparrow S_{(d_1,\ldots,d_q)}^{(c_1,\ldots,c_q)} \cap \Uparrow S_{(b_1,\ldots,b_p)}^{(a_1,\ldots,a_p)} = \Uparrow S_{(f_1,\ldots,f_{p_1})}^{(e_1,\ldots,e_{p_1})}.$$

Тоді для відкритої множини

$$U_1 = U_0 \cup W_0 = \mathscr{I}_\lambda^n(S) \setminus \Uparrow S_{(f_1,\ldots,f_{p_1})}^{(e_1,\ldots,e_{p_1})}$$

виконується або умова (1), або умова (2).

Оскільки $p + 1 \leqslant p_1 \leqslant n$, то повторюючи скінченну кількість разів наведені вище міркування отримуємо, що простір $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$ є компактним.

Доведемо, що $\tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}}$ — трансляційно-неперервна топологія на $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$. Розглянемо всі можливі випадки.

(i) $0 \cdot 0 = 0$. Тоді для кожного відкритого околу U_0 нуля в $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$ маємо, що

$$U_0 \cdot 0 = 0 \cdot U_0 = \{0\} \subseteq U_0.$$

(ii) $\alpha \cdot 0 = 0$. Тоді для довільних відкритих околів U_0 та U_α, відповідно, нуля і α в $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$ маємо, що

$$U_\alpha \cdot 0 = \{0\} \subseteq U_0.$$

Нехай

$$W_0 = \mathscr{I}_\lambda^n(S) \setminus \left(\Uparrow S_{(b_1^1,\ldots,b_{p_1}^1)}^{(a_1^1,\ldots,a_{p_1}^1)} \cup \cdots \cup \Uparrow S_{(b_1^k,\ldots,b_{p_k}^k)}^{(a_1^k,\ldots,a_{p_k}^k)} \right)$$

довільний базовий окіл нуля 0 в просторі $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що $p_1, \ldots, p_k \leqslant |\mathbf{d}(\alpha)|$. Покладемо

$$\mathbf{B} = \left\{ S_{(b)}^{(a)} \colon a \in \mathbf{d}(\alpha) \quad \text{і} \quad b \in \left\{ b_1^1, \ldots, b_{p_1}^1, \ldots, b_1^k, \ldots, b_{p_k}^k \right\} \right\}.$$

Тоді сім'я $\mathbf{B}$ скінченна й $\alpha \cdot U_0 \subseteq W_0$ для $U_0 = \mathscr{I}_\lambda^n(S) \setminus \bigcup_{S_{(b)}^{(a)} \in \mathbf{B}} \Uparrow S_{(b)}^{(a)}$.

(iii) $0 \cdot \alpha = 0$. Тоді для довільних відкритих околів U_0 і U_α нуля та α в просторі $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$, відповідно, отримуємо, що

$$0 \cdot U_\alpha = \{0\} \subseteq U_0.$$

Нехай

$$W_0 = \mathscr{I}_\lambda^n(S) \setminus \left(\Uparrow S_{(b_1^1,\ldots,b_{p_1}^1)}^{(a_1^1,\ldots,a_{p_1}^1)} \cup \cdots \cup \Uparrow S_{(b_1^k,\ldots,b_{p_k}^k)}^{(a_1^k,\ldots,a_{p_k}^k)} \right)$$

довільний базовий окіл точки 0 в $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що $p_1, \ldots, p_k \leqslant |\mathbf{d}(\alpha)|$. Покладемо

$$\mathbf{B} = \left\{ S_{(b)}^{(a)} \colon b \in \mathbf{r}(\alpha) \quad \text{і} \quad a \in \left\{ a_1^1, \ldots, a_{p_1}^1, \ldots, a_1^k, \ldots, a_{p_k}^k \right\} \right\}.$$

Тоді сім'я $\mathbf{B}$ скінченна та $U_0 \cdot \alpha \subseteq W_0$ для $U_0 = \mathscr{I}_\lambda^n(S) \setminus \bigcup_{S_{(b)}^{(a)} \in \mathbf{B}} \Uparrow S_{(b)}^{(a)}$.

(iv) $\alpha \cdot \beta = 0$. Зафіксуємо довільний відкритий окіл W_0 нуля 0 в просторі $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що

$$W_0 = \mathscr{I}_\lambda^n(S) \setminus \left(\Uparrow S_{(b_1)}^{(a_1)} \cup \cdots \cup \Uparrow S_{(b_k)}^{(a_k)} \right).$$

Позаяк $\alpha \cdot \beta = 0$, то $\mathbf{r}(\alpha) \cap \mathbf{d}(\beta) = \varnothing$. Покладемо

$$\mathbf{B}_\alpha = \left\{ S^{(a)}_{(b)} \colon a \in \{a_1, \ldots, a_k\}, b \in \mathbf{d}(\beta), \text{ і } \alpha \notin \Uparrow S^{(a)}_{(b)} \right\}$$

і

$$\mathbf{B}_\beta = \left\{ S^{(a)}_{(b)} \colon b \in \{b_1, \ldots, b_k\}, a \in \mathbf{r}(\alpha), \text{ і } \beta \notin \Uparrow S^{(a)}_{(b)} \right\}.$$

Нехай $S^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)}$ та $S^{(c_1,\ldots,c_p)}_{(d_1,\ldots,d_p)}$, $1 \leqslant k, p \leqslant n$ такі, що $\alpha \in S^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)}$ і $\beta \in S^{(c_1,\ldots,c_p)}_{(d_1,\ldots,d_p)}$. Тоді сім'ї $\mathbf{B}_\alpha$ та $\mathbf{B}_\beta$ скінченні, а тому за зауваженням 3.4.13(2) множини

$$V_\alpha = S^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)} \setminus \bigcup_{S^{(a)}_{(b)} \in \mathbf{B}_\alpha} \Uparrow S^{(a)}_{(b)} \quad \text{і} \quad V_\beta = S^{(c_1,\ldots,c_p)}_{(d_1,\ldots,d_p)} \setminus \bigcup_{S^{(a)}_{(b)} \in \mathbf{B}_\beta} \Uparrow S^{(a)}_{(b)}$$

є такими відкритими околами точок α і β в $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}})$, відповідно, що

$$V_\alpha \cdot \beta \subseteq W_0 \qquad \text{і} \qquad \alpha \cdot V_\beta \subseteq W_0.$$

(v) $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq 0$ і $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{d}(\beta)$. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_k \\ s_1 & \ldots & s_k \\ b_1 & \ldots & b_k \end{pmatrix}$ і $\beta = \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_k \\ t_1 & \ldots & t_k \\ c_1 & \ldots & c_k \end{pmatrix}$, а тому отримуємо, що $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_k \\ s_1 t_1 & \ldots & s_k t_k \\ c_1 & \ldots & c_k \end{pmatrix}$.

Тоді для довільного відкритого околу

$$U_\gamma = \Uparrow [U_1(s_1 t_1), \ldots, U_k(s_k t_k)]^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(c_1,\ldots,c_k)} \setminus \left(\Uparrow S^{(a^1_1,\ldots,a^1_{l_1})}_{(b^1_1,\ldots,b^1_{l_1})} \cup \cdots \cup \Uparrow S^{(a^p_1,\ldots,a^p_{l_p})}_{(b^p_1,\ldots,b^p_{l_p})} \right)$$

точки γ в просторі $(\mathscr{I}^n_\lambda(S), \tau^{\mathbf{c}}_{\mathscr{I}})$ маємо, що

$$\Uparrow [V_1(s_1), \ldots, V_k(s_k)]^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(b_1,\ldots,b_k)} \cdot \beta \subseteq \Uparrow [U_1(s_1 t_1), \ldots, U_k(s_k t_k)]^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(c_1,\ldots,c_k)} \cap S^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(c_1,\ldots,c_k)} \subseteq U_\gamma$$

і

$$\alpha \cdot \Uparrow [V_1(t_1), \ldots, V_k(t_k)]^{(b_1,\ldots,b_k)}_{(c_1,\ldots,c_k)} \subseteq \Uparrow [U_1(s_1 t_1), \ldots, U_k(s_k t_k)]^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(c_1,\ldots,c_k)} \cap S^{(a_1,\ldots,a_k)}_{(c_1,\ldots,c_k)} \subseteq U_\gamma,$$

де $V_1(s_1), \ldots, V_k(s_k), V_1(t_1), \ldots, V_k(t_k)$ — такі відкриті околи точок $s_1, \ldots, s_k$, $t_1, \ldots, t_k \in (S, \tau_S)$, відповідно, що

$$V_1(s_1) \cdot t_1 \subseteq U_1(s_1 t_1), \ldots, V_k(s_k) \cdot t_k \subseteq U_k(s_k t_k)$$

і

$$s_1 \cdot V_1(t_1) \subseteq U_1(s_1t_1), \ldots, s_k \cdot V_k(t_k) \subseteq U_k(s_kt_k).$$

(vi) $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq 0$ і $\mathbf{r}(\alpha) \subsetneqq \mathbf{d}(\beta)$. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & \ldots & a_k \\ s_1 & \ldots & s_k \\ b_1 & \ldots & b_k \end{smallmatrix}\right)$ та $\beta = \left(\begin{smallmatrix} b_1 & \ldots & b_k & b_{k+1} & \ldots & b_{k+j} \\ t_1 & \ldots & t_k & t_{k+1} & \ldots & t_{k+j} \\ c_1 & \ldots & c_k & c_{k+1} & \ldots & c_{k+j} \end{smallmatrix}\right)$, де $1 \leqslant j \leqslant n-k$, а тому $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & \ldots & a_k \\ s_1t_1 & \ldots & s_kt_k \\ c_1 & \ldots & c_k \end{smallmatrix}\right)$. Тоді для довільного відкритого околу

$$U_\gamma = \Uparrow [U_1(s_1t_1), \ldots, U_k(s_kt_k)]_{(c_1,\ldots,c_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)} \setminus \left(\Uparrow S_{(b_1^1,\ldots,b_{l_1}^1)}^{(a_1^1,\ldots,a_{l_1}^1)} \cup \cdots \cup \Uparrow S_{(b_1^p,\ldots,b_{l_p}^p)}^{(a_1^p,\ldots,a_{l_p}^p)} \right)$$

точки γ в просторі $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$ маємо, що

$$\alpha \cdot \Uparrow [V_1(t_1), \ldots, V_k(t_k)]_{(c_1,\ldots,c_k)}^{(b_1,\ldots,b_k)} \subseteq \Uparrow [U_1(s_1t_1), \ldots, U_k(s_kt_k)]_{(c_1,\ldots,c_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)} \cap S_{(c_1,\ldots,c_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)} \subseteq U_\gamma,$$

де $V_1(t_1), \ldots, V_k(t_k)$ — відкриті околи точок $t_1, \ldots, t_k$ в (S, τ_S), відповідно, такі що

$$s_1 \cdot V_1(t_1) \subseteq U_1(s_1t_1), \ldots, s_k \cdot V_k(t_k) \subseteq U_k(s_kt_k).$$

Зафіксуємо довільний відкритий окіл U_γ точки γ в просторі $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$. З леми 3.4.8 випливає, що не зменшуючи загальності можемо вважати, що

$$U_\gamma = \Uparrow [U_1(s_1t_1), \ldots, U_k(s_kt_k)]_{(c_1,\ldots,c_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)} \setminus \left(\Uparrow S_{(c_1,\ldots,c_k,y_1)}^{(a_1,\ldots,a_k,x_1)} \cup \cdots \cup \Uparrow S_{(c_1,\ldots,c_k,y_p)}^{(a_1,\ldots,a_k,x_p)} \right)$$

для деяких $x_1, \ldots, x_p \in \lambda \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ і $y_1, \ldots, y_p \in \lambda \setminus \{c_1, \ldots, c_k\}$. Покладемо

$$\mathbf{B}_\alpha = \left\{ S_{(b_1,\ldots,b_k,b)}^{(a_1,\ldots,a_k,a)} \colon a \in \{x_1, \ldots, x_p\} \quad \text{і} \quad b \in \{b_{k+1}, \ldots, b_{k+j}\} \right\}.$$

Очевидно, що сім'я $\mathbf{B}_\alpha$ скінченна. Тоді $V_\alpha \cdot \beta \subseteq U_\gamma$ для

$$V_\alpha = \Uparrow [V_1(s_1), \ldots, V_k(s_k)]_{(b_1,\ldots,b_k)}^{(a_1,\ldots,a_k)} \setminus \bigcup_{S_{(b_1,\ldots,b_k,b)}^{(a_1,\ldots,a_k,a)} \in \mathbf{B}_\alpha} \Uparrow S_{(b_1,\ldots,b_k,b)}^{(a_1,\ldots,a_k,a)},$$

де $V_1(s_1), \ldots, V_k(s_k)$ — такі відкриті околи точок $s_1, \ldots, s_k$ в просторі (S, τ_S), відповідно, що

$$V_1(s_1) \cdot t_1 \subseteq U_1(s_1t_1), \ldots, V_k(s_k) \cdot t_k \subseteq U_k(s_kt_k).$$

(vii) $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq 0$ і $\mathbf{d}(\beta) \subsetneqq \mathbf{r}(\alpha)$. У цьому випадку доведення того, що напівгрупова операція є нарізно неперервною, є аналогічним до випадку (vi).

$(viii)$ $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq 0$, $\mathbf{d}(\gamma) \subsetneqq \mathbf{d}(\alpha)$ і $\mathbf{r}(\gamma) \subsetneqq \mathbf{r}(\beta)$. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що
$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k & a_{k+11} & \dots & a_{k+m} \\ s_1 & \dots & s_k & s_{k+11} & \dots & s_{k+m} \\ b_1 & \dots & b_k & b_{k+11} & \dots & b_{k+m} \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_k & b_{k+1} & \dots & b_{k+j} \\ t_1 & \dots & t_k & t_{k+1} & \dots & t_{k+j} \\ c_1 & \dots & c_k & c_{k+1} & \dots & c_{k+j} \end{pmatrix}$ і $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k \\ s_1t_1 & \dots & s_kt_k \\ c_1 & \dots & c_k \end{pmatrix}$, де $1 \leqslant j, m \leqslant n-k$. Покладемо $\varepsilon = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_k \\ 1_S & \dots & 1_S \\ b_1 & \dots & b_k \end{pmatrix}$, де 1_S — це одиничний елемент напівгрупи S. Очевидно, що $\gamma = \alpha \cdot \varepsilon \cdot \beta$. Отже, в цьому випадку те, що напівгрупова операція є нарізно неперервною в точці $\alpha \cdot \beta$ з $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$, випливає з (vi) та (vii).

З попередніх тверджень цієї частини доведення випливає, що $\tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}} \subseteq \tau_{\mathscr{I}}$ для довільної компактної трансляційно-неперервної гаусдорфової топології $\tau_{\mathscr{I}}$ на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$, а тому $\tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}}$ — це єдина компактна трансляційно-неперервна гаусдорфова топологія на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. □

Наслідок 3.4.15. *Якщо (S, τ_S) — компактний гаусдорфів напівтопологічний інверсний моноїд з неперервною інверсією, то $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$ є компактною гаусдорфовою напівтопологічною інверсною напівгрупою з неперервною інверсією.*

Доведення. Оскільки

$$W_0^{-1} = \mathscr{I}_\lambda^n(S) \setminus \left(\Uparrow S_{(a_1^1,\dots,a_{p_1}^1)}^{(b_1^1,\dots,b_{p_1}^1)} \cup \dots \cup \Uparrow S_{(a_1^k,\dots,a_{p_k}^k)}^{(b_1^k,\dots,b_{p_k}^k)} \right)$$

для довільного базового околу

$$W_0 = \mathscr{I}_\lambda^n(S) \setminus \left(\Uparrow S_{(b_1^1,\dots,b_{p_1}^1)}^{(a_1^1,\dots,a_{p_1}^1)} \cup \dots \cup \Uparrow S_{(b_1^k,\dots,b_{p_k}^k)}^{(a_1^k,\dots,a_{p_k}^k)} \right)$$

нуля 0, то інверсія є неперервною в нулі напівгрупи $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$.

Також для довільного елемента $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k \\ s_1 & \dots & s_k \\ b_1 & \dots & b_k \end{pmatrix}$ напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ і будь-якого його відкритого околу

$$V_\alpha = \Uparrow [V_1(s_1), \dots, V_k(s_k)]_{(b_1,\dots,b_k)}^{(a_1,\dots,a_k)} \setminus \left(\Uparrow S_{(b_1^1,\dots,b_{l_1}^1)}^{(a_1^1,\dots,a_{l_1}^1)} \cup \dots \cup \Uparrow S_{(b_1^p,\dots,b_{l_p}^p)}^{(a_1^p,\dots,a_{l_p}^p)} \right)$$

маємо, що $(V_\alpha)^{-1} \subseteq U_{\alpha^{-1}}$ для околу

$$U_{\alpha^{-1}} = \Uparrow \left[U_1(s_1^{-1}), \ldots, V_k(s_k^{-1})\right]_{(a_1,\ldots,a_k)}^{(b_1,\ldots,b_k)} \setminus \left(\Uparrow S_{(a_1^1,\ldots,a_{l_1}^1)}^{(b_1^1,\ldots,b_{l_1}^1)} \cup \cdots \cup \Uparrow S_{(a_1^p,\ldots,a_{l_p}^l)}^{(b_1^p,\ldots,b_{l_p}^p)}\right)$$

точки α^{-1} в просторі $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$ з

$$(V_1(s_1))^{-1} \subseteq U_1(s_1^{-1}), \ldots, (V_k(s_k))^{-1} \subseteq U_k(s_k^{-1}).$$

Це і завершує доведенння. $\square$

3.5. Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджується напівгрупове розширення $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ моноїда S симетричною інверсною напівгрупою обмеженого скінченного рангу $\mathscr{I}_\lambda^n$. Підрозділ 3.1 присвячений побудові конструкції цього розширення, а підрозділ 3.2 — вивченню алгебричних властивостей розширення $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ моноїда S. Описано ідемпотенти та регулярні елементи напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$, відношення Ґріна на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ для моноїда S (твердження 3.2.1, 3.2.2, 3.2.7).

У підрозділі 3.3 введено поняття напівгрупи із сильно щільним рядом ідеалів, знайдено умови за яких напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ має (сильно) щільний ряд ідеалів за модулем напівгрупи S (теорема 3.3.11).

Підрозділ 3.4 присвячений топологізації напівгрупового розширення $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Доведено, що для кожного компактного гаусдорфового напівтопологічного моноїда (S, τ_S) існує єдине його компактне топологічне розширення $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^{\mathbf{c}})$ у класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп (теорема 3.4.14) та описана його топологія.

РОЗДІЛ 4
СЛАБКО КОМПАКТНІ ТОПОЛОГІЇ НА НАПІВГРУПІ $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$

Основні результати, які описані в цьому розділі, містяться в статті [150]. Оскільки результати цього розділу не стосуються попередніх розділів, то для зручності введемо означення напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ в наступному підрозділі.

4.1. Означення та основні властивості напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$

Наступна напівгрупа була введена О. Гутіком та М. Михаленичем в [8]. Нехай $\mathscr{P}(\omega)$ — сім'я підмножин у ω. Для довільного елемента $F \in \mathscr{P}(\omega)$ та довільних $n, m \in \omega$ покладемо $n - m + F = \{n - m + k \colon k \in F\}$, якщо $F \neq \varnothing$ і $n - m + \varnothing = \varnothing$. Підсім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ називається *ω-замкненою*, якщо $F_1 \cap (-n + F_2) \in \mathscr{F}$ для всіх $n \in \omega$ та $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$.

У [8] доведено, що біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p, q)$ ізоморфний напівгрупі, заданій на множині $\boldsymbol{B}_{\omega} = \omega \times \omega$ з напівгруповою операцією

$$(i_1, j_1)\cdot(i_2, j_2)=\begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2), & \text{якщо } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2), & \text{якщо } j_1 \geqslant i_2. \end{cases}$$

Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я сім'ї $\mathscr{P}(\omega)$. На множині $\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}$ визначимо напівгрупову операцію "$\cdot$" так:

$$(i_1, j_1, F_1)\cdot(i_2, j_2, F_2)=\begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & \text{якщо } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)), & \text{якщо } j_1 \geqslant i_2. \end{cases}$$

В [8] доведено: якщо сім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ є ω-замкненою, то $(\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot)$ є напівгрупою. Більше того, якщо ω-замкнена сім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ містить порожню множину $\varnothing$, то множина $\boldsymbol{I} = \{(i, j, \varnothing) \colon i, j \in \omega\}$ є ідеалом напівгрупи $(\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot)$. Для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ в [8] означена така

напівгрупа

$$\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} = \begin{cases} (\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot)/\boldsymbol{I}, & \text{якщо } \varnothing \in \mathscr{F}; \\ (\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot), & \text{якщо } \varnothing \notin \mathscr{F}. \end{cases}$$

У [8] доведено, що $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є комбінаторною інверсною напівгрупою, описано відношення Ґріна, природний частковий порядок на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ та множину ідемпотентів. Також у [8] наведені критерії простоти, 0-простоти, біпростоти, 0-біпростоти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і вказано умови для сім'ї $\mathscr{F}$, коли $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, або зліченній напівгрупі матричних одиниць.

У цьому розділі природній частковий порядок на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ позначатмемо $\preccurlyeq$.

У праці [8] доведено таке твердження.

Твердження 4.1.1 ([8, твердження 2]). *Нехай (i_1, j_1, F_1) і (i_2, j_2, F_2) — ненульові елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Тоді $(i_1, j_1, F_1) \preccurlyeq (i_1, j_1, F_1)$ тоді і лише тоді, коли $F_1 \subseteq -k + F_2$ й $i_1 - i_2 = j_1 - j_2 = k$ для деякого $k \in \omega$.*

Твердження 4.1.2 ([8, твердження 4]). *Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega \times \omega$-матричних одиниць $\boldsymbol{B}_{\omega}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathscr{F} = \{F, \varnothing\}$, де F — одноточкова підмножина в ω.*

Визначимо сім'ю множин $\mathscr{F}_1$ так:

$$\mathscr{F}_1 = \{A \subseteq \omega \colon\ |A| \leqslant 1\}.$$

Очевидно, що $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, а тому $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ є інверсною напівгрупою з нулем. Надалі через $(i, j, \{k\})$ позначатимемо ненульовий елемент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ для деяких $i, j, k \in \omega$, а через $\mathbf{0}$ — нуль напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$.

4.2. Алгебричні властивості напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$

З твердження 4.1.1 випливає твердження 4.2.1, яке описує природний частковий порядок на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$.

Твердження 4.2.1. *Нехай* $(i_1, j_1, \{k_1\})$ *та* $(i_2, j_2, \{k_2\})$ *— ненульові елементи напівгрупи* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. *Тоді* $(i_1, j_1, \{k_1\}) \preccurlyeq (i_2, j_2, \{k_2\})$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$k_2 - k_1 = i_1 - i_2 = j_1 - j_2 = p$$

для деякого числа $p \in \omega$.

З твердження 4.2.1 випливає наслідок 4.2.2, у якому описується структура максимальних ланцюгів стосовно природного часткового порядку на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$.

Наслідок 4.2.2. *Нехай* i, j *— довільні елементи* ω. *Тоді такі скінченні ряди*

$$\begin{array}{l}
\mathbf{0} \preccurlyeq (i, j, \{0\}); \\
\mathbf{0} \preccurlyeq (i+1, j+1, \{0\}) \preccurlyeq (i, j, \{1\}); \\
\mathbf{0} \preccurlyeq (i+2, j+2, \{0\}) \preccurlyeq (i+1, j+1, \{1\}) \preccurlyeq (i, j, \{2\}); \\
\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\mathbf{0} \preccurlyeq (i+k, j+k, \{0\}) \preccurlyeq (i+k-1, j+k-1, \{1\}) \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq (i, j, \{k\}); \\
\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{array}$$

описують максимальні ланцюги стосовно природного часткового порядку на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$.

Через $\omega_{\min}$ позначатимемо множину ω із заданою на ній бінарною операцією

$$xy = \min\{x, y\}, \qquad \text{для} \quad x, y \in \omega.$$

Очевидно, що $\omega_{\min}$ є напівґраткою.

Визначимо відображення $\mathfrak{f}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \mathscr{B}_{\omega}(\omega_{\min})$ так:

$$(i,j,\{k\})\mathfrak{f} = (i+k,k,j+k) \qquad \text{і} \qquad (\mathbf{0})\mathfrak{f} = \mathscr{O}, \tag{4.1}$$

для $i,j,k \in \omega$.

Твердження 4.2.3. *Відображення* $\mathfrak{f}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \mathscr{B}_{\omega}(\omega_{\min})$ *є ізоморфним вкладенням напівгрупи* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ *у* ω*-розширення Брандта* $\mathscr{B}_{\omega}(\omega_{\min})$ *напівґратки* $\omega_{\min}$.

Доведення. Очевидно, що відображення $\mathfrak{f}$ визначене формулою (4.1) є бієктивним.

Зфіксуємо довільні елементи $(i_1,j_1,\{k_1\}),(i_2,j_2,\{k_2\}) \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. Тоді маємо, що

$$((i_1,j_1,\{k_1\})\cdot(i_2,j_2,\{k_2\}))\mathfrak{f} =$$

$$= \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+\{k_1\})\cap\{k_2\})\mathfrak{f}, & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1+k_1=i_2+k_2;\\ (\mathbf{0})\mathfrak{f}, & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1+k_1\neq i_2+k_2;\\ (i_1,j_2,\{k_1\}\cap\{k_2\})\mathfrak{f}, & \text{якщо } j_1=i_2 \text{ і } k_1=k_2;\\ (\mathbf{0})\mathfrak{f}, & \text{якщо } j_1=i_2 \text{ і } k_1\neq k_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,\{k_1\}\cap(i_2-j_1+\{k_2\}))\mathfrak{f}, & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } j_1+k_1=i_2+k_2;\\ (\mathbf{0})\mathfrak{f}, & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } j_1+k_1\neq i_2+k_2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,\{k_2\})\mathfrak{f}, & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1+k_1=i_2+k_2;\\ (i_1,j_2,\{k_1\})\mathfrak{f}, & \text{якщо } j_1=i_2 \text{ і } k_1=k_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,\{k_1\})\mathfrak{f}, & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } j_1+k_1=i_2+k_2;\\ (\mathbf{0})\mathfrak{f}, & \text{якщо } j_1+k_1\neq i_2+k_2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (i_1-j_1+i_2+k_2,k_2,j_2+k_2), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1+k_1=i_2+k_2;\\ (i_1+k_1,k_1,j_2+k_1), & \text{якщо } j_1=i_2 \text{ і } k_1=k_2;\\ (i_1+k_1,k_1,j_1-i_2+j_2+k_1), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } j_1+k_1=i_2+k_2;\\ \mathscr{O}, & \text{якщо } j_1+k_1\neq i_2+k_2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (i_1+k_1, k_2, j_2+k_2), & \text{якщо } j_1 < i_2 \text{ і } j_1+k_1 = i_2+k_2; \\ (i_1+k_1, k_1, j_2+k_2), & \text{якщо } j_1 = i_2 \text{ і } k_1 = k_2; \\ (i_1+k_1, k_1, j_2+k_2), & \text{якщо } j_1 > i_2 \text{ і } j_1+k_1 = i_2+k_2; \\ \mathscr{O}, & \text{якщо } j_1+k_1 \neq i_2+k_2, \end{cases}$$

і

$$((i_1, j_1, \{k_1\})\mathfrak{f} \cdot (i_2, j_2, \{k_2\}))\mathfrak{f} = (i_1+k_1, k_1, j_1+k_1) \cdot (i_2+k_2, k_2, j_2+k_2) =$$

$$= \begin{cases} (i_1+k_1, \min\{k_1, k_2\}, j_2+k_2), & \text{якщо } j_1+k_1 = i_2+k_2; \\ \mathscr{O}, & \text{якщо } j_1+k_1 \neq i_2+k_2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (i_1+k_1, k_2, j_2+k_2), & \text{якщо } k_2 < k_1 \text{ і } j_1+k_1 = i_2+k_2; \\ (i_1+k_1, k_1, j_2+k_2), & \text{якщо } k_2 = k_1 \text{ і } k_1 = k_2; \\ (i_1+k_1, k_1, j_2+k_2), & \text{якщо } k_2 > k_1 \text{ і } j_1+k_1 = i_2+k_2; \\ \mathscr{O}, & \text{якщо } j_1+k_1 \neq i_2+k_2, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (i_1+k_1, k_2, j_2+k_2), & \text{якщо } j_1 < i_2 \text{ і } j_1+k_1 = i_2+k_2; \\ (i_1+k_1, k_1, j_2+k_2), & \text{якщо } j_1 = i_2 \text{ і } k_1 = k_2; \\ (i_1+k_1, k_1, j_2+k_2), & \text{якщо } j_1 > i_2 \text{ і } j_1+k_1 = i_2+k_2; \\ \mathscr{O}, & \text{якщо } j_1+k_1 \neq i_2+k_2. \end{cases}$$

Оскільки $\mathbf{0}$ і $\mathscr{O}$ — нулі напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ і $\mathscr{B}_{\omega}(\omega_{\min})$, відповідно, то з вищенаведених рівностей випливає, що відображення $\mathfrak{f}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \mathscr{B}_{\omega}(\omega_{\min})$ є гомоморфізмом. Це і завершує доведення твердження. $\square$

Означимо напівгрупу $\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min})$ так:

$$\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min}) = \{\mathscr{O}\} \cup \{(i,k,j) \in \mathscr{B}_{\omega}(\omega_{\min}) \setminus \{\mathscr{O}\} : i, j \geqslant k\}.$$

Легко бачити, що $\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min})$ є інверсною піднапівгрупою в $\mathscr{B}_{\omega}(\omega_{\min})$.

З твердження 4.2.3 випливає.

Теорема 4.2.4. *Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min})$, а відображенням $\mathfrak{f}$ є ізоморфізмом цих напівгруп.*

4.3. Топологізація напівгрупи $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$ та слабко компактні трансляційно-неперервні топології на $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$

Для довільних $i, j \in \omega$ позначимо

$$\omega_{\min}^{(i,j)_{\Gamma}} = \left\{(i,k,j) \colon (i,k,j) \in \mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})\right\}.$$

Твердження 4.3.1. *Нехай τ — трансляційно-неперервна T_1-топологія на напівгрупі $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$. Тоді кожен ненульовий елемент напівгрупи $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$ є ізольованою точкою в $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$.*

Доведення. Зафіксуємо довільні числа $i, j \in \omega$. Оскільки

$$(i,0,i) \cdot (i,0,j) \cdot (j,0,j) = (i,0,j),$$

то для кожного відкритого околу $W_{(i,0,j)} \not\ni \mathscr{O}$ точки $(i,0,j)$ існує такий її відкритий окіл $V_{(i,0,j)}$ в топологічному просторі $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$, що

$$(i,0,i) \cdot V_{(i,0,j)} \cdot (j,0,j) \subseteq W_{(i,0,j)}.$$

З означення напівгрупової операції на $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$ випливає, що $V_{(i,0,j)} \subseteq \omega_{\min}^{(i,j)_{\Gamma}}$. Тоді множина $\omega_{\min}^{(i,j)_{\Gamma}}$ є відкритою підмножиною в $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$, як повний прообраз околу $V_{(i,0,j)}$ стосовно відображення

$$\mathfrak{h} \colon \mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}) \to \mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}),\ x \mapsto (i,0,i) \cdot x \cdot (j,0,j).$$

За наслідком 4.2.2 множина $\omega_{\min}^{(i,j)_{\Gamma}}$ є скінченною, з чого випливає твердження. □

Далі доведемо, що на напівгрупа $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$ існує компактна трансляційно-неперервна гаусдорфова топологія.

Приклад 4.3.2. Топологію τ_{Ac} на напівгрупі $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$ означимо так:

а) усі ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$ є ізольованими точками в $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$;

b) сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{Ac}}(\mathscr{O}) = \Big\{U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)} = \mathscr{B}^{\Rsh}_{\omega}(\omega_{\min}) \setminus \Big(\omega_{\min}^{(i_1,j_1)_{\Rsh}} \cup \cdots \cup \omega_{\min}^{(i_n,j_n)_{\Rsh}}\Big) : \\ n, i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n \in \omega\Big\}$$

є базою топології τ_{Ac} в точці $\mathscr{O} \in \mathscr{B}^{\Rsh}_{\omega}(\omega_{\min})$.

За наслідком 4.2.2 множина $\omega_{\min}^{(i,j)_{\Rsh}}$ скінченна для всіх $i, j \in \omega$, з чого випливає що $\big(\mathscr{B}^{\Rsh}_{\omega}(\omega_{\min}), \tau_{\mathrm{Ac}}\big)$ — одноточкова компактифікація Алєксандрова дискретного простору $\mathscr{B}^{\Rsh}_{\omega}(\omega_{\min}) \setminus \{\mathscr{O}\}$.

Твердження 4.3.3. $\big(\mathscr{B}^{\Rsh}_{\omega}(\omega_{\min}), \tau_{\mathrm{Ac}}\big)$ *— гаусдорфова компактна напівтопологічна напівгрупа з неперервною інверсією.*

Доведення. Очевидно, що топологія τ_{Ac} є гаусдорфовою та компактною. Зафіксуємо довільний окіл $U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)} \in \mathscr{B}_{\mathrm{Ac}}(\mathscr{O})$ та довільні елементи $(i,k,j), (l,m,p) \in \mathscr{B}^{\Rsh}_{\omega}(\omega_{\min}) \setminus \{\mathscr{O}\}$. Покладемо

$$\boldsymbol{K} = \{i, i_1, \ldots, i_n, j, j_1, \ldots, j_n\} \qquad \text{і} \qquad U_{\boldsymbol{K}} = \mathscr{B}^{\Rsh}_{\omega}(\omega_{\min}) \setminus \bigcup_{x,y \in \boldsymbol{K}} \omega_{\min}^{(x,y)_{\Rsh}}.$$

Тоді маємо, що $U_{\mathbf{K}} \in \mathscr{B}_{\mathrm{Ac}}(\mathscr{O})$ і виконуються такі умови

$$U_{\boldsymbol{K}} \cdot \{(i,k,j)\} \subseteq U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)},$$
$$\{(i,k,j)\} \cdot U_{\boldsymbol{K}} \subseteq U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)},$$
$$\{\mathscr{O}\} \cdot \{(i,k,j)\} = \{(i,k,j)\} \cdot \{\mathscr{O}\} = \{\mathscr{O}\} \subseteq U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)},$$
$$\{\mathscr{O}\} \cdot U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)} = U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)} \cdot \{\mathscr{O}\} = \{\mathscr{O}\} \subseteq U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)},$$
$$\{(i,k,j)\} \cdot \{(l,m,p)\} = \{\mathscr{O}\} \subseteq U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)}, \quad \text{якщо} \quad j \neq l,$$
$$\{(i,k,j)\} \cdot \{(l,m,p)\} = \{(i, \min\{k,m\}, p)\}, \quad \text{якщо} \quad j = l,$$
$$\big(U_{(j_1,i_1),\ldots,(j_n,i_n)}\big)^{-1} \subseteq U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)}.$$

Отже, $\big(\mathscr{B}^{\Rsh}_{\omega}(\omega_{\min}), \tau_{\mathrm{Ac}}\big)$ є напівтопологічною інверсною напівгрупою з неперервною інверсією. □

Лема 4.3.4. *На напівгрупі* $\mathscr{B}^{\Rsh}_{\omega}(\omega_{\min})$ *кожна трансляційно-неперервна* T_1*-топологія* τ *є регулярною.*

Доведення. За твердженням 4.3.1 кожен ненульовий елемент напівгрупи $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$ є ізольованою точкою в просторі $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$. З цього випливає, що кожен відкритий окіл $V(\mathscr{O})$ нуля $\mathscr{O}$ є замкненою підмножиною в $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$, а тому простір $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$ є регулярним. □

Множину, яку можна подати у вигляді зліченного об'єднання замкнених множин, називатимемо F_{σ}-множиною. Оскільки кожна відкрита підмножина довільного зліченного T_1-простору X є F_{σ}-множиною, то з теореми 1.2.5 та леми 4.3.4 випливає.

Наслідок 4.3.5. *Нехай τ — трансляційно неперервно T_1-топологія на напівгрупі $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$. Тоді $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$ є досконало нормальним, розрідженим, спадково незв'язним простором.*

Теорема 4.3.6. *Нехай τ — трансляційно-неперервна T_1-топологія на напівгрупі $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$. Тоді такі умови еквівалентні:*

- (i) $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$ — *компактна напівгрупа;*
- (ii) $\tau = \tau_{\mathrm{Ac}}$;
- (iii) $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$ — *H-замкнена напівгрупа;*
- (iv) $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$ — *слабко компактна напівгрупа;*
- (v) $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$ — *інфра H-замкнена напівгрупа;*
- (vi) $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$ — *d-слабко компактна напівгрупа;*
- (vii) $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$ — *псевдокомпактна напівгрупа;*
- $(viii)$ $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$ — *$\mathbb{R}$-компактна напівгрупа;*
- (ix) $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$ — *$\mathfrak{D}(\omega)$-компактна напівгрупа.*

Доведення. Імплікації $(ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (viii) \Rightarrow (ix)$ та $(i) \Rightarrow (vii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (vi)$ є тривіальними (див. рис. 1.1). З леми 4.3.4 випливають імплікації $(vi) \Rightarrow (iv)$ і $(iii) \Rightarrow (i)$.

$(ix) \Rightarrow (i)$ Припустимо протилежне, що існує така трансляційно-неперервна T_1-топологія τ на напівгрупі $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$, що $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$ є $\mathfrak{D}(\omega)$-компактним, але не є компактним простором. Тоді існує відкрите

покриття $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ простору $\left(\mathscr{B}_\omega^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$, що не містить скінченне підпокриття. Нехай $U_{\alpha_0} \in \mathscr{U}$ такий елемент покриття, що $\mathscr{O} \in U_{\alpha_0}$. Оскільки простір $\left(\mathscr{B}_\omega^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right)$ не є компактним, то множина $\mathscr{B}_\omega^{\Gamma}(\omega_{\min}) \setminus U_{\alpha_0}$ є нескінченною. Прономеруємо множину $\mathscr{B}_\omega^{\Gamma}(\omega_{\min}) \setminus U_{\alpha_0}$, тобто приймемо

$$\{x_i \colon i \in \omega\} = \mathscr{B}_\omega^{\Gamma}(\omega_{\min}) \setminus U_{\alpha_0}.$$

Ототожнимо точки простору $\mathfrak{D}(\omega)$ з елементами множини ω і визначимо відображення $\mathfrak{f}\colon \left(\mathscr{B}_\omega^{\Gamma}(\omega_{\min}), \tau\right) \to \mathfrak{D}(\omega)$ так:

$$(x)\mathfrak{f} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in U_{\alpha_0}; \\ i, & \text{якщо } x = x_i. \end{cases}$$

Із твердженння 4.3.1 випливає, що так визначене відображення $\mathfrak{f}$ є неперервним. Очевидно, що образ $(\mathscr{B}_\omega^{\Gamma}(\omega_{\min}))\mathfrak{f}$ не є компактною підмножиною в просторі $\mathfrak{D}(\omega)$, протиріччя. $\square$

Зауваження 4.3.7. За твердженням 4.1.2 напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$ містить ізоморфну копію напівгрупи $\omega \times \omega$-матричних одиниць. Тоді з теореми 1.2.22 випливає, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$ не вкладається ізоморфно в зліченно компактну гаусдорфову топологічну напівгрупу.

4.4. Висновки до розділу 4

У цьому розділі доліджується біциклічне напівгрупове розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_1$ складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин ординала ω.

Підрозділи 4.1 і 4.2 присвячені означенню напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ та вивченню її алгебричних властивостей. Зокрема, доведено, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$ — піднапівгрупі ω-розширення Брандта напівґратки $(\omega, \min)$ (теорема 4.2.4).

У підрозділі 4.3 досліджуються трансляційно-неперервні слабко компактні T_1-топології на напівгрупі $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$. Зокрема, доведено, що кожна $\mathfrak{D}(\omega)$-компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія τ на $\mathscr{B}_{\omega}^{\Gamma}(\omega_{\min})$ є компактною та секвенціально компактною, і, більше того, збігається з одноточковою компактифікацією Алєксандрова зліченного дискретного простору (теорема 4.3.6).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано такі результати:

1. Описано зліченно компактні трансляційно-неперервні T_1-топології на напівґратці $\exp_n \lambda$ та доведено, що вони є напівґратковими компактними для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ та кожного нескінченного кардинала λ.
2. Побудовано некомпактну зліченно пракомпактну H-замкнену квазірегулярну ненапіврегулярну трансляційно-неперервну топологію τ^2_{fc} на $\exp_2 \lambda$ та доведено, що напіврегулярна слабко компактна напівтопологічна напівґратка $\exp_n \lambda$ є компактною топологічною напівґраткою.
3. Доведено, що для довільної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на $\exp_n \lambda$ такі умови еквівалентні: (i) τ — секвенціально пракомпактна; (ii) τ — цілком зліченно пракомпактна; (iii) τ — слабко компактна; (iv) τ — $\mathfrak{D}(\omega)$-компактна.
4. Описано будову напівгрупового розширення $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ моноїда S за модулем напівгрупи S та доведено, що для кожного компактного гаусдорфового напівтопологічного моноїда існує єдине його компактне топологічне розширення $\mathscr{I}^n_\lambda(S)$ у класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп і описано його топологію.
5. Описано алгебричну структуру біциклічного напівгрупового розширення $\boldsymbol{B}^{\mathscr{F}_1}_\omega$ у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_1$ складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин у ω. Доведено, що кожна $\mathfrak{D}(\omega)$-компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія τ на $\mathscr{B}^{\Gamma}_\omega(\omega_{\min})$ є компактною та секвенціально ком-

пактною, і збігається з одноточковою компактифікацією Алєксандрова зліченного дискретного простору.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Архангельский, А.: О пространствах с точечно-счетной базой. Топологические пространства и их отображения, Рига (1985).
2. Вагнер, В.: Обобщенные группы. ДАН СССР **84**, 1119–1122 (1952).
3. Гуран, І., Гутік, О., Равський, О., Чучман, І.: Симетричні топологічні групи та півгрупи. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **74**, 61–73 (2011).
4. Гутик, О.: Вложение топологических полугрупп. Математичні студії **3**, 10–14 (1994).
5. Гутик, О.: О структуре связки компактной инверсной полугруппы с открытыми сдвигами. Математичні студії **6**, 33–38 (1996).
6. Гутік, О.: Довільна топологічна напівгрупа топологічно ізоморфно вкладається в просту лінійно зв'язну топологічну напівгрупу. Алгебра і топологія, збірник тематичних праць. Львів, ЛДУ, 65–73 (1996).
7. Гутік, О.: Про напівгрупу Гауі. Математичні методи та фізико-механічні поля **42**(4), 127–132 (1999).
8. Гутік, О., Михаленич, М.: Про одне узагальнення біциклічного моноїда. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **90**, 5–19 (2020).
9. Гутік, О., Павлик, К.: H-замкнені топологічні напівгрупи та λ-розширення Брандта. Математичні методи та фізико-механічні поля **44**(3), 20–28 (2001).
10. Гутік, О., Павлик, К., Рейтер, А.: Про топологічні напівгрупи Брандта. Математичні методи та фізико-механічні поля **54**(2), 7–16 (2011).
11. Гутік, О., Рейтер, А.: Про напівтопологічні симетричні інверсні напівгрупи обмеженого скінченного рангу. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **72**, 94–106 (2010).

12. Мальцев, А. И.: О включении ассоциативных систем в группы. Матем. сб. **31**, 136–151 (1939).
13. Марков, А. А.: О свободных топологических группах. Изв. АН СССР. Сер. матем. **9**(1), 3–64 (1945).
14. Ольшанский, А. Ю.: Замечание о счетной нетопологизируемой группе. Вестник Московского университета. Серия **1**(3): Математика. Механика 103–103 (1980).
15. Понтрягин, Л. С.: Непрерывные группы. ГОНТИ, М.–Л. (1938).
16. Сушкевич, А. К.: Теория обобщенных групп. ГНТИ, Харьков–Киев (1937).
17. Тайманов, А. Д.: Пример полугруппы, допускающей только дискретную топологию. Алгебра и логика **12**(1), 114–116 (1973).
18. Юрьева, А. А.: Счетно компактная секвенциальная топологическая полугруппа с двусторонними сокращениями является топологической группой. Мат. Студії **2**, 23–24 (1993).
19. Abel, N. H.: Untersuchung der Funktionen zweier unabhängig veränderlicher Großen x und y, wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f(x, f(x, y))$ eine symmetrishe Funktion von z, x und y ist. J. Reine Angew. Math. **1**, 11–15 (1826).
20. Arkhangel'skii, A.: Topological Function Spaces. Kluwer, Dordrecht (1992).
21. Arkhangel'skii, A., Tkachenko, M.: Topological groups and related structures. Atlantis Studies in Mathematics 1. Hackensack, NJ: World Scientific. Paris: Atlantis Press. **XIV**, 781 (2008).
22. Artico, G., Marconi, U., Pelant, J., Rotter, L., Tkachenko M.: Selections and suborderability. Fund. Math. **175**, 1–33 (2002).
23. Bagley, R. W., Connell, E. H., McKnight, J. D., Jr.: On properties characterizing pseudo-compact spaces. Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 500–506 (1958).

24. Banakh, T.: On cardinal invariants and metrizability of topological inverse Clifford semigroups. Topology Appl. **128**(1), 13–48 (2003).
25. Banakh, T., Bardyla, S.: Characterizing chain-compact and chain-finite topological semilattices. Semigroup Forum **98**(2), 234–250 (2019).
26. Banakh, T., Bardyla, S.: Completeness and absolute H-closedness of topological semilattices. Topology Appl. **260**, 189–202 (2019).
27. Banakh, T., Bardyla, S.: On images of complete topologized subsemilattices in sequential semitopological semilattices. Semigroup Forum. **100**, 662–670 (2020).
28. Banakh, T., Bardyla, S.: Complete topologized posets and semilattices. Topology Proc. **57**, 177–196 (2021).
29. Banakh, T., Bardyla, S., Ravsky, A.: The closedness of complete subsemilattices in functionally Hausdorff semitopological semilattices. Topology Appl. **267**, 106874 (2019).
30. Banakh, T., Bokalo, B.: On cardinal invariants and metrizability of topological inverse semigroups. Topology Appl. **128**(1), 3–12 (2003).
31. Banakh, T., Cencelj, M., Hryniv, O., Repovš, D.: Characterizing compact Clifford semigroups that embed into convolution and functor-semigroups. Semigroup Forum. **83**(1), 123–133 (2011).
32. Banakh, T., Dimitrova, S.: Openly factorizable spaces and compact extensions of topological semigroups. Comment. Math. Univ. Carolin. **51**(1), 113-131 (2010).
33. Banakh, T., Dimitrova, S., Gutik, O.: The Rees-Suschkewitsch Theorem for simple topological semigroups. Мат. Студії. **31**(2), 211–218 (2009).
34. Banakh, T., Dimitrova, S., Gutik, O.: Openly factorizable spaces and compact extensions of topological semigroups. Topology Appl. **157**(18), 2803–2814 (2010).
35. Banakh, T., Guran, I.: Perfectly supportable semigroups are σ-discrete in each Hausdorff shift-invariant topology. Topological Algebra and App. **1**,

1–8 (2013).

36. Banakh, T., Guran, I. Gutik, O.: Free topological inverse semigroups. Мат. Студії. **15**(1), 23–43 (2001).
37. Banakh, T., Guran, I. Ravsky, A.: Manifolds admitting a continuous cancellative binary operation are orientable. Journal of Lie Theory **16**, 1177–1185 (2016).
38. Banakh, T., Gutik, O.: On the continuity of the inversion in countably compact inverse topological semigroups. Semigroup Forum **68**, 411–418 (2004).
39. Banakh, T., Gutik, O. Rajagopalan, M.: On algebraic structures on scattered compacta. Topology Appl. **153**(5-6), 710–723 (2005).
40. Banakh, T., Hryniv, O.: Free topological inverse semigroups as infinite-dimensional manifolds. Algebraical Structures and their Applications, Kyiv: Inst. Mat. NANU, 132–139 (2002).
41. Banakh, T., Hryniv, O.: Embedding topological semigroups into the hyperspaces over topological groups. cta Universitatis Carolinae. Math. et Phys. **48** (2), 3–18 (2007).
42. Banakh, T., Pastukhova, I.: Topological and ditopological unosemigroups. Mat. Stud. **39**(2), 119–133 (2013).
43. Banakh, T., Pastukhova, I.: On topological Clifford semigroups embeddable into products of cones over topological groups. Semigroup Forum **89**(2), 367–382 (2014).
44. Banakh, T., Pastukhova, I.: Automatic continuity of homomorphisms between topological semigroups. Semigroup Forum **90**, 280–295 (2015).
45. Banakh, T., Sakai, K.: Free topological semilattices homeomorphic to R^∞ or Q^∞. Topology Appl. **106**, 135–147 (2000).
46. Bardyla, S.: Classifying locally compact semitopological polycyclic monoid. Mathematical Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. **13**, 13–28 (2016).

47. Bardyla, S.: On locally compact shift-continuous topologies on the alpha-bicyclic monoid. Topol. Alg. Appl. **6**(1), 34–42 (2018).
48. Bardyla, S.: An alternative look at the structure of graph inverse semigroups. Мат. Студії. **51**(1), 3–11 (2019).
49. Bardyla, S.: Embedding of graph inverse semigroups into CLP-compact topological semigroups. Topology Appl. **272**, 107058 (2020).
50. Bardyla, S., Gutik, O.: On $\mathscr{H}$-complete topological semilattices. Мат. Студії. **38**(2), 118–123 (2012).
51. Bardyla, S., Gutik, O.: On a complete topological inverse polycyclic monoid. Carpathian Math. Publ. **8**(2), 183–194 (2016).
52. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological polycyclic monoid. Algebra Discr. Math. **21**(2), 163–183 (2016).
53. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. Topology Appl. **217**, 51–58 (2017).
54. Berezovski, T., Gutik, O., Pavlyk, K.: Brandt extensions and primitive topological inverse semigroups. Int. J. Math. Math. Sci. **2010**, 671401 (2010). doi:10.1155/2010/671401
55. Bardyla, S., Ravsky, A.: Closed subsets of compact-like topological spaces. Applied General Topology **21**(2), 202–214 (2020).
56. Berglund, J., Hoffman, K.: Compact semitopological semigroups and weakly almost periodic functions. Lecture Notes in Mathematics, vol. 42, 160pp. Springer-Verlag, Berlin-New York (1967).
57. Berglund, J., Junghenn, H., Milnes, P.: Compact right topological semigroups and generalizations of almost periodicity. Lecture Notes in Mathematics, vol. 663, 243 pp. Springer, Berlin (1978).
58. Berglund, J., Junghenn, H., Milnes, P.: Analysis on semigroups. Wiley, New York (1989).
59. Bobrowski, A., Kimmel, M.: An operator semigroup in mathematical genetics. Springer (2006).

60. Bokalo, B., Guran, I.: Sequentially compact Hausdorff cancelative semigroup is a topological group. Мат. Студії. **6**, 39–40 (1996).
61. Carruth, J., Hildebrant, J., Koch, R.: The Theory of Topological Semigroups. Marcel Dekker Inc., New York and Basel: Vol. I, 224 pp. (1983); Vol. II, 196 pp. (1986).
62. Chuchman, I., Gutik, O.: On H-closed topological semigroups and semilattices. Algebra Discr. Math. **1**, 13–23 (2007).
63. Chuchman, I., Gutik, O.: Topological monoids of almost monotone, injective co-finite partial selfmaps of positive integers. Карпатські математичні публікації **2** (1), 119–132 (2010).
64. Chuchman, I., Gutik, O.: On monoids of injective partial selfmaps almost everywhere the identity. Demonstratio Mathematica. **44** (4), 699–722 (2011).
65. Clifford, A., Preston, G.: The Algebraic Theory of Semigroups. Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I. Vol. I, 244 pp. (1963); Vol. II, 350 pp. (1967).
66. Dales, H. G., Lau, A. T.-M., STrauss, D.: Banach algebras on semigroups and on their compactifications.Mem. Am. Math. Soc. **966**, p. 165 (2010).
67. Dickson, L. E.: On semi-group and the infinite groups, general isomorphism between infinite groups. Trans. Amer. Math. Soc. **6**, 205–208 (1905).
68. Dorantes-Aldama, A., Shakhmatov, D.: Selective sequential pseudocompactness. Topology Appl. **222**, 53–69 (2017).
69. Dow, A., Porter, J., Stephenson, R., Woods, R.: Spaces whose pseudocompact subspaces are closed subsets. Appl. Gen. Topol. **5**, 243–264 (2004).
70. Dunkl, C., Ramirez, D.: Representations of commutative semitopological semigroups. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 435, 181 pp. Springer Verlag, Berlin-New York (1975).

71. Eberhart, C., Selden, J.: On the closure of the bicyclic semigroup. Trans. Amer. Math. Soc. **144**, 115–126 (1969).
72. Ellis, R.: Locally compact transformation groups. Duke Math. J. **24**, 119–125 (1957).
73. Ellis, R.: A note on continuity of the inverse. Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 372–373 (1957).
74. Engelking, R.: General Topology. PWN, Warszawa (1977).
75. Faucett, W.: Compact semigroups irreducibly connected between two idempotents. Proc Amer. Math. Soc. **6**, 741–747 (1955).
76. Faucett, W.: Topological semigroups and continua with cut points. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 748–756 (1955).
77. Figel, I., Gutik, O.: On the closure of the extended bicyclic semigroup. Карпатські математичні публікації **3**(2), 748–756 (2011).
78. Filali, M., Protasov, I.: Ultrafilters and Topologies on Groups. ВНТЛ-Класика, Львів (2008).
79. Gierz, G., Hofmann K., Keimel, K., Lawson J., Mislove, M., Scott, D.: A compendium of continuous lattices. Springer-Verlag, Berlin-New York (1980).
80. Gierz, G., Hofmann, K., Keimel, K., Lawson, J., Mislove, M., Scott, D.: Continuous Lattices and Domains. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2003).
81. Grant, D.: Sequentially compact cancellative topological semigroups: some progress on the Wallace Proplem. Papers on General Topology and Applications.Seventh Summer Conference at the University of Wisconsin (ed. Andima, S.et. al.). Annals of the New York Academy of Science **704**, 150–154 (1993).
82. Green, J.: On the structure of semigroups. Ann. Math. **54**(2), 163–172 (1951).

83. Gutik, O.: Compact topological inverse semigroups. Semigroup Forum **60**(2), 243–252 (2000).
84. Gutik, O.: On closures in semitopological inverse semigroups with continuous inversion. Algebra Discr. Math. **18**(1), 59–85 (2014).
85. Gutik, O.: On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **80**, 33-41 (2015).
86. Gutik, O.: Topological properties of Taimanov semigroups. Mathematical Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. **13**, 29–34 (2016).
87. Gutik, O.: On the group of automorphisms of the Brandt λ^0-extension of a monoid with zero. In: Proceedings of the 16th ITAT Conference Information Technologies – Applications and Theory (ITAT 2016), 15–19 September 2016. Tatranske Matliare, Slovakia, Bratislava, 237–240.CEUR-WS (2016).
88. Gutik, O., Lawson, J., Repovš, D.: Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups. Semigroup Forum. **78**(2), 326–336 (2009).
89. Gutik, O., Maksymyk, K.: On semitopological interassociates of the bicyclic monoid. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **82**, 98–108 (2016).
90. Gutik, O., Maksymyk, K.: On semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups. J. Math. Sci. **238** (1), 32–45 (2019).
91. Gutik, O., Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$. European Journal of Mathematics. **6**(1), 14–36 (2020).
92. Gutik, O., Pagon, D., Repovš, D.: The continuity of the inversion and the structure of maximal subgroups in countably compact topological semigroups. Acta Mathematica Hungarica **124**(3), 201–214 (2009).
93. Gutik, O., Pavlyk, K.: Topological Brandt λ-extensions of absolutely H-closed topological inverse semigroups. Вісник Львівського університету.

Серія мех.-мат. **61**, 98–105 (2003).

94. Gutik, O., Pavlyk, K.: On topological semigroups of matrix units. Semigroup Forum. **71**(3), 389–400 (2005).
95. Gutik, O., Pavlyk, K.: Topological semigroups of matrix units. Algebra Discrete Math. **3**, 1–17 (2005).
96. Gutik, O., Pavlyk, K.: On Brandt λ^0-extensions of semigroups with zero. Мат. Мет. Фіз.-Мех. Поля **49**(3), 26–40 (2006).
97. Gutik, O., Pavlyk, K.: Bruck-Reilly extension of a semitopological semigroups. Prykl. Probl. Mech. i Math. **7**, 66–72 (2009).
98. Gutik, O., Pavlyk, K.: Pseudocompact primitive topological inverse semigroups. Journal of Mathematical Sciences. **203**(1), 1–15 (2014).
99. Gutik, O., Pavlyk, K.: On pseudocompact topological Brandt λ^0-extensions of semitopological monoids. Topol. Algebra Appl. **1**, 60–79 (2013).
100. Gutik, O., Pavlyk, K., Reiter, A.: Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt λ^0-extensions. Мат. Студії. **32**(2), 115–131 (2009).
101. Gutik, O., Pozdnyakova, I.: On monoids of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{lex} \mathbb{Z}$ with cofinite domains and images. Algebra and Discrete Mathematics. **17** (2), 256-–279 (2014).
102. Gutik, O., Radjagopalan, M., Sundaresan, K.: Compact semilattices with open principal filters. Journal of the Australian Math. Soc. **72**(3), 349–362 (2002).
103. Gutik, O., Ravsky, O.: On feebly compact inverse primitive (semi)topological semigroups. Мат. Студії. **44**(1), 3–26 (2015).
104. Gutik, O., Ravsky, O.: Pseudocompactness, products and topological Brandt λ^0-extensions of semitopological monoids. J. Math. Sci. **223**(1), 18–38 (2017).

105. Gutik, O., Ravsky, O.: On old and new classes of feebly compact spaces. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **85**, 48–59 (2018).

106. Gutik,O., Reiter, A.: Symmetric inverse topological semigroups of finite rank $\leqslant n$. J. Math. Sci. **171**(4), 425–432 (2010).

107. Gutik, O., Repovš, D.: On 0-simple countably compact topological inverse semigroups. Semigroup Forum. **75**(2), 464–469 (2007).

108. Gutik, O., Repovš, D.: On linearly ordered H-closed topological semilattices. Semigroup Forum. **77**(3), 474–481 (2008).

109. Gutik, O., Repovš, D.: On Brandt λ^0-extensions of monoids with zero. Semigroup Forum. **80**(1), 8–32 (2010).

110. Gutik, O., Repovš, D.: Topological monoids of monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ with cofinite domain and image. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **48** (3), 342–353 (2011).

111. Gutik, O., Repovš, D.: On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images. Georgian Mathematical Journal. **19** (3), 511–532 (2012).

112. Gutik, O., Sobol, O.: On feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. Мат. Студії. **46**(1), 29–43 (2016).

113. Gutik, O., Sobol, O.: On feebly compact shift-continuous topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **82**, 128–136 (2016).

114. Gutik, O., Sobol, O.: Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **87**, 5–36 (2019).

115. Gutik, O. V., Sobol, O. Yu.: On feebly compact semitopological semilattice $\exp_n \lambda$. J. Math. Sci. **254**(1), 13–20 (2021).

116. Gutik, O., Sobol, O.: Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank. In: Abstracts of the X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu.

A. Drozd, p. 48. I. I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, 20–27 August 2015.

117. Gutik, O., Sobol, O.: Feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. In: Abstracts of the International Conference "Complex Analysis and Related Topics", 31–32. University of Lviv, Lviv, 30 May – 4 June 2016.
118. Gutik, O., Sobol, O.: Feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. In: Abtracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, p. 48. University of Lviv, Lviv, 27 September – 1 October 2016.
119. Gutik, O., Sobol, O.: On feebly compact semitopological semilattice $\exp_n \lambda$. In: Abstracts of the Modern problems of Mechanics and Mathematics: collection of scientific papers in 3 vols. Edited by A. M. Samoilenko, R. M. Kushnir [Electronic resource], Vol. 3, 262–263. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, Lviv, 22–25 May 2018.
120. Gutik, O., Sobol, O.: Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank. In: Abtracts of the International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis", p. 26. Odessa, Ukraine, 28 May – 3 June 2019.
121. Hajek, D., Todd, A.: Compact spaces and infra H-closed spaces. Proc. Amer. Math. Soc. **48**(2), 479–482 (1975).
122. Hilgert, J., Neeb, K.: Lie semigroups and their applications. Lecture Notes in Mathematics, **1552**, 315 pp. Springer-Verlag, Berlin (1993).
123. Hille, E.: Funktional analysis and semigroups. American Mathematical Society: Collocuium publications, **31** (XI), p. 528 (1948).
124. Hille, E., Phillips, R. S.: Functional Analysis snd Semi-groups. American Mathematical Society: Collocuium publications, **31** (1962).
125. Hindman, N., Strauss, D.: Algebra in the Stone-Čech Compactification. De Gruyter, Berlin (1998).

126. Hofmann, K.: The duality of compact semigroups and $C^{\star}$-algebras. Lecture Notes in Mathematics, **129**, 142 pp. Springer–Verlag, Berlin–New York (1970).

127. Hofmann, K. H.: Topological semigroups: history, theory, applications. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **78**, 9–59 (1976).

128. Hofmann, K. H.: Zur geschichte des halbgruppenbegriffs. Historia Mathematika **19**, 40–59 (1992).

129. Hofmann, K. H.: From a topological theory of semigroups to a geometric one. Semigroup Forum **50**, 123–134 (1995).

130. Hofmann, K. H.: A history of topological and analitycal semigroups: a personal view. Semigroup Forum **61**, 1–25 (2000).

131. Hofmann, K., Keimel, K.: A general character theory for partially ordered sets and lattices. Memoirs of the American Mathematical Society **122**, 121 pp. American Mathematical Society, Providence, R.I. (1972).

132. Hofmann, K., Lawson, J., Pym, J.: The analytical and topological theory of semigroups. De Gruyter, Berlin (1990).

133. Hofmann, K., Mislove, M., Stralka, A.: The Pontryagin duality of compact 0-dimensional semilattices and its applications. Lecture Notes in Mathematics, **396**, 122 pp. Springer-Verlag, Berlin-New York (1974).

134. Hofmann, K., Mostert, P.: Elements of compact semigroups. C. E. Merrill Books, Columbus, Ohio (1966).

135. Hofmann, K. H., Rupert, W. A. F.: Lie groups and subsemigroups with surjective exponential function. Mem. Am. Math. Soc. **618**, p. 174 (1997).

136. Hognas, G., Mukherjea, A.: Probability measures on semigroups. Convolution products, random walks, and random matrices. Plenum Press, New York (1995).

137. Hollings, Ch.: The early development of the algebraic theory of semigroups. Arch. Hist. Exact. Sci. **63**, 497–536 (2009). New York (1995).

138. Hryniv, O.: Universal objects in some classes of Clifford topological inverse semigroups. Semigroup Forum **75**, 682–688 (2007). New York (1995).
139. Iseki, K.: On compact abelian semigroups. Michigan Math. J. **2**, 59–60 (1953–1954).
140. Kalmbach, G.: Measures and Hilbert lattices. World Scientific Publishing Company, Singapore (1986).
141. Katětov, M.: Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume. Čas. Mat. Fys. **69**(2), 36–49 (1940).
142. Klein, F.: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Math. Ann., **43**, 63–100 (1893).
143. Koch, R.: Remarks on primitive idempotents in compact semigroups with zero. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 828–833 (1954).
144. Koch, R., Wallace, A.: Stability in semigroups. Duke Math. J. **24**, 193–195 (1957).
145. Komjáth, P., Totik, V.: Problems and theorems in classical set theory. Probl Books in Math. Springer (2006).
146. Lawson, J.: Intrinsic lattices and lattice topologies. S. Fajtlowicz and K. Kaiser (eds.), Proceedings of the University of Houston Lattice Theory Conference. Houston, Texas, 22–24 March 1973. University of Houston, 206–260 (1973).
147. Lawson, J. D.: The earliest semigroup paper?. Semigroup Forum **52**, 55–60 (1996).
148. Lawson, J. D.: An interviev with Karl H. Hofmann on the occasion of his seventieth birthday. Semigroup Forum **65**, 317–328 (2002).
149. Lawson, M. V.: Inverse Semigroups: The Theory of Partial Symmetries. World Scientific, NJ-Singapure-London, p. 411 (1998)
150. Lysetska, O.: On feebly compact topologies on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **90**, 48–56 (2020).

151. Lysetska, O.: On feebly compact topologies on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. In: Abtracts of the 13th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 49. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 6–9 July 2021.

152. Magil, K. D. jun.: Recent results and open problems in semigroups ofcontinupus self-maps. Russ. Math. Surv. **35**(3), 91–97 (1980).

153. Magil, K. D. jun.: Some open problems and directions for further research in semigroups of continuous selfmaps. Universal algebra and applications. Semester 1978. Banach Cent. Publ **9**, 439–454 (1982).

154. Magil, K. D. jun.: Recent results and open problems on the countably index and the density index jf $S(X)/K$. General topology and applications. Proc. Northeast Conf. Middletown, CT(USA). Lect. Notes Pure Appl. Math. **123**, 193–202 (1990).

155. Matveev, M.: A survey of star covering properties. Topology Atlas preprint, 15 April 1998.

156. Mesyan, Z., Mitchell, J. D., Morayne, M., Ṕeresse, Y. H.: Topological graph inverse semigroups. Topology and its App. **208**, 106126 (2016).

157. Mostert, P.: The structure of topological semigroups—revisited. Bulletin of The American Mathematical Society **72**, 601–618 (1966).

158. Mukherjea, A., Tserpes, N.: Measures on topological semigroups: convolution products and random walks. Lecture Notes in Mathematics, **547**, 197 pp. Springer-Verlag, Berlin-New York (1967).

159. Numakura, K.: On bicompact semigroups with zero. Bull. Yamagata Univ. (Natural Sc). **4**, 405–412 (1951).

160. Numakura, K.: On bicompact semigroups. Math. J. Okayama Univ. **1**, 99–108 (1952).

161. Numakura, K.: Theorems on compact totally disconnected semigroups and lattices. Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 623–626 (1957).

162. Numakura, K.: Prime ideals and idempotents in compact semigroups. Duke Math. J. **24**, 671–680 (1957).

163. O'Carroll, L.: Counterexamples in stable semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. **146**, 377–386 (1969).

164. Paalman-de-Miranda, A.: Topological semigroups. Mathem. Centre Tracts. **11**, Amsterdam (1964).

165. Pavlyk, K.: Absolutely H-closed topological semigroups and Brandt λ-extensions. Applied Problems of Mechanics and Mathematics, **2**, 61–68 (2004).

166. Petrich, M.: Inverse Semigroups. John Wiley & Sons, New York (1984).

167. Protasov, I.: Combinatorics of numbers. ВНТЛ-Класика, Львів (1997).

168. Rees, D.: On semi-groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. **36**, 387–400 (1940).

169. Reznichenko, E. A.: Extension of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact grups. Topology Appl. **59**(3), 233–244 (1994).

170. Robbie, D., Svetlichny S.: An answer to A. D. Wallace's question about countably compact concellative semigroups. Proc. Am. Math. Soc. **124**(1), 325–330 (1996).

171. Ruppert, W.: Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory. Lect. Notes Math, vol. 1079. Springer, Berlin (1984).

172. Schwarz, Š.: Poznamka k teorii bikompaktnyh pologrup. Mat.-fiz.časop. **5**, 88–89 (1955).

173. Schwarz, Š.: On Hausdorff bicompact semigroups. Czech. Math. J. **5**, 1–23 (1955).

174. Schwarz, Š.: Characters of bicompact semigroups. Czech. Math. J. **5**, 24–28 (1955).

175. Schwarz, Š.: Topological semigroups with one-sided units. Czech. Math. J. **5**, 153–163 (1955).

176. Shakhmatov, D., Yañez, V.: Selectively pseudocompact groups without non-trivial convergent sequences. Axioms **7**(4), Artical no 86, p. 23 (2018).
177. Sion, M.: A theory of semigroup valued measures. Lecture Notes in Mathematics, vol 355, 140 pp. Springer-Verlag, Berlin-New York (1973).
178. Stepp, J.: A note on maximal locally compact semigroups. Proc. Amer. Math. Soc. **20**, 251—253 (1969).
179. Sushkevych, A. K.: Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit. Math. Ann. **99**, 30–50 (1928).
180. Sushkevych, A. K.: Über die Matrizendarstellung der verallgemeinerte Gruppen. Зап. матем. т-ва, Харків, **6**, 27–38 (1933).
181. Tamura, T.: On compact one-idempotent semigroups. Kodai Math. Sem. Repts. **1**, 17–21 (1954).
182. Tomita, A. H.: The Wallace problem: a counterexample from $MA_{countable}$ and p-compactness. Can. Math. Bull. **39**(4), 486–498 (1996).
183. Urysohn, P.: Zum Metrisationsproblem. Math. Ann. **94**, 309–315 (1925).
184. Vaughan, J.: Countably compact and sequentially compact spaces. Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.), Amsterdam, North-Holland, 569–602 (1984).
185. Wallace, A.: A note on mobs, Anais. Acad. Brasil. Ci. **24**, 329–334 (1952).
186. Wallace, A.: A note on mobs, II. Anais. Acad. Brasil. Ci. **25**, 335–336 (1953).
187. Wallace, A.: Cohomology, dimension and mobs. Summa Brasil. Math. **3**, 43–54 (1953).
188. Wallace, A.: Indecomposable semigroups. Math. J. Okayama Univ. **3**, 1–3 (1953).
189. Wallace, A.: Inverses in Euclidean mobs. Math. J. Okayama Univ. **3**, 23–28 (1953).
190. Wallace, A.: One-dimensional homogeneous clans are group. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. **58**, 578–580 (1955).

191. Wallace, A.: The position of C-sets in semigroups. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 639–642 (1955).

192. Wallace, A.: The structure of topological semigroups. Bull. Amer. Math. Soc. **61**, 95–112 (1955).

193. Weil, A.: L'integration dans les groupes topologiques et ses applications. Actualites Scientiques **869**, Paris: Hermann (1938).

194. Zelenyuk, Y. Ye.: Ultrafilters and topologies on groups. De Gruyter, Berlin (2011).

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Список публікацій, в яких опубліковано основні результати дисертації:

1. Gutik, O., Sobol, O.: On feebly compact shift-continuous topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **82**, 128–136 (2016).
2. Gutik, O., Sobol, O.: Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **87**, 5–36 (2019).
3. Lysetska, O.: On feebly compact topologies on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **90**, 48–56 (2020).
4. Gutik, O. V., Sobol, O. Yu.: On feebly compact semitopological semilattice $\exp_n \lambda$. J. Math. Sci. **254**, 13–20 (2021).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Gutik, O., Sobol, O.: On feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. Мат. Студії. **46**(1), 29–43 (2016).
2. Gutik, O., Sobol, O.: Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank. In: Abstracts of the X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd, p. 48. I. I. Mechnikov Odessa National University, Odesa, 20–27 August 2015.
3. Gutik, O., Sobol, O.: Feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. In: Abstracts of the International Conference “Complex Analysis and Related Topics”, p. 31–32. University of Lviv, Lviv, 30 May – 4 June

2016.

4. Gutik, O., Sobol, O.: Feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n \lambda$. In: Abtracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, p. 48. University of Lviv, Lviv, 27 September – 1 October 2016.
5. Gutik, O., Sobol, O.: On feebly compact semitopological semilattice $\exp_n \lambda$. In: Abstracts of the Modern problems of Mechanics and Mathematics: collection of scientific papers in 3 vols. Edited by A. M. Samoilenko, R. M. Kushnir [Electronic resource], Vol. 3, p. 262–263. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, Lviv, 22–25 May 2018.
6. Gutik, O. V., Sobol, O. Yu.: Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank. In: Abtracts of the International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis", p. 26. Odesa, Ukraine, 28 May – 3 June 2019.
7. Lysetska, O.: On feebly compact topologies on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. In: Abtracts of the 13th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 49. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 6–9 July 2021.

Відомості про апробацію матеріалів дисертації:

1. X Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні присвячена 70-ти річчю Ю. А. Дрозда, м. Одеса, 20–27 серпня 2015 року, форма участі — очна, усна доповідь.
2. Міжнародна конференція "Complex Analysis and Related Topics", м. Львів, 30 травня – 4 червня 2016 року, форма участі — очна, усна доповідь.
3. Міжнародна конференція присвячена 120-річчю Казимира Куратовського, м. Львів, 27 Вересня – 1 Жовтня 2016, форма участі —

очна, усна доповідь.

4. Всеукраїнський конкурс студентських наукових робіт із галузі “Математичні науки”, м. Вінниця, 3 квітня 2017 року, форма участі — очна, усна доповідь.
5. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики”, м. Львів, 22–25 травня 2018 року, форма участі — очна, усна доповідь.
6. Міжнародна наукова конференція “Алгебричні та геометричні методи в аналізі”, м. Одеса, 28 травня – 3 червня 2019, форма участі — очна, усна доповідь.
7. Метематичний семінар відділу Математики та інформатики Вроцлавського університету, м. Вроцлав, Польща, 26 листопада 2018 року, форма участі — очна, усна доповідь.
8. Міжнародна наукова конференція “The 13th International Algebraic Conference in Ukraine”, м. Київ, 6–9 липня 2021 року, форма участі — дистанційна, усна доповідь.
9. Семінар “Теорія полігонів і спектральні простори” у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Львів, 2016, 2017, 2018, 2019, 2021, форми участі — очна/дистанційна, усні доповіді.
10. Семінар “Топологічна алгебра” у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Львів, 2021, форми участі — очна/дистанційна, усні доповіді.