

РЕЦЕНЗІЯ

на дисертацію

Лисецької Олександри Юріївни

«Компактні та близькі до них напівґратки, напівґрупи та їхні розширення»,
подану на здобуття ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Актуальність тематики дослідження

Топологічна алгебра вивчає взаємовплив алгебраїчних і топологічних структур. Отримано ряд важливих результатів у цій тематиці, до таких можна віднести, наприклад, теорему Нумакури що стверджує, що кожна компактна топологічна напівґрупа зі скороченнями є топологічною групою.

Дисертаційна робота О. Лисецької опирається на ряд теорем, які були доведені О. Гутіком та його учнями: К.Павлик, А.Рейтером та М. Михаленичем. Зокрема, топологічні властивості нескінченної (напів)топологічної напівґрупи матричних одиниць досліджувались в статтях Гутіка, Павлик та Рейтера. Доведено, що для нескінченної напівтопологічної напівґрупи матричних одиниць B_λ існує єдина гаусдорфова трансляційно-неперервна компактна топологія і кожна псевдокомпактна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на B_λ є компактною. Також Гутік і Павлик довели, що кожен ненульовий елемент гаусдорфової напівтопологічної напівґрупи матричних одиниць B_λ є ізольованою точкою в топологічному просторі B_λ . До переліку результатів, які стосуються напівґрупи матричних одиниць можна також віднести такі: нескінченна напівґрупа матричних одиниць B_λ не вкладається в компактну гаусдорфову топологічну напівґрупу, кожна гаусдорфова топологічна інверсна напівґрупа S , яка містить B_λ як піднапівґрупу, містить B_λ як замкнену піднапівґрупу. Згодом ці результати були поширені Гутіком, Лоусоном та Реповшем на так звані інверсні напівґрупи зі щільними рядами ідеалів і, як наслідок, на симетричну інверсну напівґрупу обмеженого рангу \mathcal{I}_λ^n , дослідження розширення якої є важливою частиною дисертаційної роботи Олександри Лисецької.

Гутік і Рейтер довели, що для довільного натурального числа n симетрична інверсна напівґрупа обмеженого скінченного рангу \mathcal{I}_λ^n є алгебрично h -повною в класі гаусдорфових топологічних інверсних напівґруп, а згодом цей результат був поширений на клас гаусдорфових напівтопологічних інверсних напівґруп, зокрема показано, що для довільного нескінченного кардинала λ симетрична інверсна напівґрупа \mathcal{I}_λ^n допускає єдину гаусдорфову трансляційно-неперервну топологію. Ці ж науковці довели, що кожна зліченно компактна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі матричних одиниць є компактною.

Під час досліджень топологічних властивостей симетричної інверсної напівгрупи О. Гутік, К. Павлик й А. Рейтер довели, що топологічна напівгрупа \mathcal{J}_λ^n з компактною в'язкою є абсолютно Н-замкненою і кожна зліченно компактна топологічна напівгрупа не містить \mathcal{J}_λ^n як піднапівгрупу для довільного нескінченного кардинала λ . Цими ж математиками були сформульовані достатні умови для того, щоб топологічна симетрична інверсна напівгрупа \mathcal{J}_λ^1 не була Н-замкненою. Ще одним результатом, який отримав О. Гутік є теорема про те, що нескінченна напівтопологічна напівгрупа B_λ є Н-замкненою в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп тоді і тільки тоді, коли простір B_λ є компактным.

Гутік з Михаленичем ввели алгебричне розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ біциклічного моноїда для довільної ω -замкненої сім'ї \mathcal{F} , яке узагальнює біциклічний моноїд, зліченну напівгрупу матричних одиниць та деякі інші комбінаторні інверсні напівгрупи. Доведено, що $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ є комбінаторною інверсною напівгрупою, а також описано відношення Гріна, частковий природний порядок на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ та множину ідемпотентів. Також Гутік та Михаленич довели критерії простоти, 0-простоти, біпростоти та 0-біпростоти напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$, а також коли $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ містить одиницю, ізоморфна біциклічному моноїду або зліченній напівгрупі матричних одиниць.

У своїй дисертаційній роботі Лисецька О. Ю. досліджує гаусдорфові трансляційно-неперервні слабо компактні топології на напівгрупі $\exp_n \lambda$; алгебричні та топологічні властивості розширень напівгруп симетричними інверсними напівгрупами обмеженого скінченного рангу $\mathcal{J}_\lambda^n(S)$; слабо компактні топології на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ у випадку, коли сім'я \mathcal{F}_1 складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин ординала ω . Вибір теми дослідження цілком виправданий, має важливе теоретичне значення у теорії напівгруп. На мою думку, актуальність роботи не викликає сумніву.

Структура, зміст та основні результати дисертаційної роботи

Дисертація має загальний обсяг 154 сторінки і складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатка, який містить список публікацій здобувачки за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі наведено загальні відомості про дисертацію, а саме: обґрунтовано актуальність теми, вказано мету, завдання, предмет та об'єкт досліджень, а також наведено відомості про наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

У першому розділі здобувачка проводить огляд літератури за темою дисертації, зокрема, наведено історичну довідку, мотивацію досліджень, а також сформульовано означення та допоміжні твердження з алгебри та загальної топології.

Другий розділ дисертації повністю присвячений вивченню алгебричних та топологічних властивостей напівґратки $\text{exp}_n \lambda$. Зокрема, описано всі напівґраткові топології на $\text{exp}_n \lambda$, у випадку, коли $\text{exp}_n \lambda \in T_1$ -напівтопологічною напівґраткою доведено, що зліченна пракомпактність еквівалентна d -слабко компактності, а секвенціальна пракомпактність – $\mathcal{D}(\omega)$ -компактності на $\text{exp}_n \lambda$.

Результати третього розділу стосуються $\mathcal{J}_\lambda^n(S)$ – напівгрупового розширення моноїда S симетричною інверсною напівгрупою \mathcal{J}_λ^n . Авторка наводить конструкцію даного розширення, опис алгебричної структури (ідемпотентів, регулярних елементів, відношення Гріна), а також вводить поняття сильно щільного ідеального ряду на $\mathcal{J}_\lambda^n(S)$. В підрозділі 3.3 проведено дослідження сильно щільних ідеальних рядів на напівгруповому розширенні $\mathcal{J}_\lambda^n(S)$ за модулем моноїда S . Підрозділ 3.4 присвячений топологізації цього розширення, зокрема доведено, що кожного компактного гаусдорфового напівтопологічного моноїда S існує єдине його компактне топологічне розширення $\mathcal{J}_\lambda^n(S)$ у класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню близьких до компактних топологій на біциклічному розширенні $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ у випадку, коли сім'я \mathcal{F}_1 складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин ординала ω . Авторка наводить конструкцію даної напівгрупи, описує її алгебричні властивості та топологізацію. Основним результатом цього розділу є опис всіх компактних топологій на $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$.

Ступінь обґрунтованості результатів, їхня наукова новизна

У дисертаційній роботі Лисецької О. Ю. «Компактні та близькі до них напівґратки, напівгрупи та їхні розширення» авторкою отримано такі результати:

- Описано всі компактні напівґраткові топології на $\text{exp}_n \lambda$.
- Побудовано некомпактну зліченно компактну H -замкнену квазірегулярну не напіврегулярну трансляційно-неперервну T_1 -топологію на $\text{exp}_2 \lambda$ та доведено, що напіврегулярна слабо компактна напівтопологічна напівґратка $\text{exp}_2 \lambda \in \mathcal{D}(\omega)$ -компактною.
- Доведено, що довільна секвенціально пракомпактна T_1 -напівтопологічна напівґратка $\text{exp}_n \lambda \in \mathcal{D}(\omega)$ -компактною.
- Описано будову напівгрупового розширення $\mathcal{J}_\lambda^n(S)$ за модулем напівгрупи S та доведено, що для кожного компактного гаусдорфового напівтопологічного моноїда існує його єдине компактне топологічне розширення $\mathcal{J}_\lambda^n(S)$ у класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп.
- Описано алгебричну структуру напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$, а також всі компактні топології на цьому біциклічному розширенні.

Усі отримані результати нові та мають строгі доведення.

Зв'язок дисертаційної роботи з державними чи галузевими науковими програмами

Дисертаційна робота Лисецької О. Ю. «Компактні та близькі до них напівгратки, напівгрупи та їхні розширення» виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри геометрії і топології (з 2020 року кафедри алгебри, топології та основ математики) механіко-математичного факультету та кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми «Топологія та її застосування у фрактальній геометрії та математичній економіці» (номер державної реєстрації 0116U001537) та теми «Методи розв'язування детермінованих та стохастичних задач локалізацією функціональних невизначеностей» (номер державної реєстрації 0121U110450).

Практичне значення наукових результатів

Отримані у рамках виконання дисертаційної роботи результати носять суто теоретичний характер і можуть бути використані у подальших дослідженнях у топологічній алгебрі та теорії напівгруп.

Особистий внесок здобувача

Результати досліджень, які наведені у дисертаційній роботі, належать авторці і є її науковим доробком. У спільних з науковим керівником публікаціях О. В. Гутіку належать постановка задач, вибір методів досліджень, а також обговорення отриманих результатів.

Повнота викладу матеріалів у роботах, які опубліковані здобувачкою

Основні наукові результати, отримані під час виконання дисертаційного дослідження Лисецької О. Ю. опубліковано в:

- 4 наукових статтях, з яких 3 у журналах, що віднесені до переліку фахових видань України та 1 публікація у науковому виданні віднесеному до третього квартиля (Q3) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank;
- 1 статті в журналі, який не входить у перелік фахових видань України;
- 6 збірниках матеріалів доповідей на міжнародних і вітчизняних наукових конференціях.

Це дає право стверджувати, що представлена дисертаційна робота є самостійним, завершеним науковим дослідженням, результати якого мають важливе значення для розвитку теорії топологічних напівгруп та топологічної алгебри.

Відомості про дотримання академічної доброчесності

Ознайомившись із науковими публікаціями та дисертацією «Компактні та близькі до них напівґратки, напівгрупи та їхні розширення» здобувачки О. Ю. Лисецької, відзначаю відсутність порушень академічної доброчесності.

Зауваження до дисертації

Хоча дисертаційне дослідження загалом виконане на достатньо високому рівні, можна вказати наступні зауваження:

1. У першому розділі на сторінці 24 авторка стверджує, що «Серед істориків математики побутує думка, що сучасна алгебра бере свій початок саме з Ерлангенської програми Фелікса Кляйна», хоча у своїй доповіді, яка згодом стала відома, як Ерлангенська програма, «Порівняльний огляд новітніх геометричних досліджень» Ф. Кляйн запропонував загальний алгебраїчний підхід до різних геометричних теорій. Можна говорити про вплив цієї програми на розвиток та алгебризацію геометрії, і, як наслідок, розвиток алгебри, а не про початок сучасної алгебри.
2. На сторінці 26 у переліченні «львівських, китайських та мексиканських топологів» краще вжити прикметники одної категорії: «українських, китайських та мексиканських топологів».
3. На сторінці 44 рис. 1.1 зображено цікаву діаграму, що ілюструє взаємозв'язки між просторами близькими до компактних, вартувало б зазначити чи ця діаграма складена авторкою на основі відомих результатів, чи якісь взаємозв'язки встановлено самостійно.
4. У 1, 20 та 58 пунктах списку літератури не вказані сторінки.

Згадані зауваження та нечисленні одруківки в тексті, не є суттєвими і не впливають загальне позитивне враження від дисертаційної роботи.

Висновок щодо відповідності дисертації нормам

На мою думку, дисертація здобувачки О. Ю. Лисецької на тему «Компактні та близькі до них напівґратки, напівгрупи та їхні розширення» подана на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика», є завершеним дослідженням, яке присвячене дослідженню взаємовпливу алгебричної та топологічної структур на напівгрупах і напівґратках. Робота містить ряд важливих та актуальних досліджень, всі доведення є зрозумілими і логічними. Як у самій дисертації, так і в публікаціях відсутні порушення правил академічної доброчесності.

Вважаю, що за новизною, актуальністю, обсягом та практичним значенням дисертація «Компактні та близькі до них напівґратки, напівгрупи та їхні розширення» відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу

вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022 року, та наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» (з наступними змінами), а її авторка, Лисецька Олександра Юріївна, заслуговує присудження їй ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Рецензент:

Кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри алгебри, топології
та основ математики Львівського
національного університету
імені Івана Франка

Олена ГРИНІВ