

До спеціалізованої вченої ради ДФ 35.051.106
у Львівському національному
університеті імені Івана Франка
79000, м. Львів, вул. Університетська, 1

ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, професора, професора
кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

Карлової Олени Олексіївни

на дисертаційну роботу **Лисецької Олександри Юріївни**

«Компактні та близькі до них напівґратки, напівгрупи та їхні розширення»,
представлену на здобуття ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 «Математика та статистика»
за спеціальністю 111 «Математика»

Топологічна алгебра належить до тих сфер математики, які мають дуже стрімкий розвиток. Серед великої кількості задач, які виникають в цій галузі, можна виділити задачу про дослідження взаємовпливу топологічної структури на алгебричну. До вже відомих результатів, які стосуються цієї тематики можна віднести такі: інверсія в інверсній компактній напівгрупі неперервна, а в зліченно компактній – секвенціально неперервна; гаусдорфові компактна топологічна напівгрупа зі скороченнями та напівтопологічна локально компактна група є топологічними групами.

Компактний простір – це один із важливих об'єктів дослідження топологічної алгебри. В математиці компактні простори мають велике розмаїття еквівалентних означень: на мові повноти, замкненості, збіжних послідовностей, обмеженості та ін. Це призвело до виникнення різних типів топологічних просторів, які в певному сенсі, є дуже близькими до компактних: слабо компактні, зліченно компактні, псевдокомпактні, зліченно пракомпактні, H -замкнені, Y -компактні і т. д. Між усіма переліченими близькими до компактних топологічними просторами можна простежити чітку ієрархію. Досліджуючи взаємозв'язки між близькими до компактних просторами, природним чином виникають такі запитання. Перше: як алгебрична частина тополого-алгебричної структури впливає на близькі до компактних властивості? Друге з питань: які алгебричні розширення тополого-алгебричних структур зберігають компактність та за яких умов ці компактні розширення єдині? Отже, тематика досліджень, безумовно, є актуальною.

Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 194 найменувань та додатку з описом публікацій та участі у конференціях. Загальний обсяг роботи – 154 сторінки. Зміст

дисертаційної роботи, її логічне викладення відповідає поставленим завданням дослідження. Рукопис дисертації характеризується завершеністю щодо вирішення поставленої мети.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, наведено мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, зазначено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідницькою темою, особистий внесок здобувача, апробацію та публікації основних результатів дисертації.

У першому розділі авторкою проведено огляд літератури за темою дисертації, наведено історичну довідку, мотивацію досліджень, а також сформульовано означення та допоміжні твердження з алгебри та загальної топології.

Другий розділ присвячений дослідженню слабо компактної T_1 -напівтопологічної напівґратки $(\exp_n \lambda, \cap)$ для довільного натурального числа $n \geq 1$ та будь-якого нескінченного кардинала λ . Основними результатами цього розділу є такі:

- доведено, що кожна зліченно компактна трансляційно-неперервна T_1 -топологія, кожна слабо компактна напівґрупова T_1 -топологія та кожна напіврегулярна слабо компактна трансляційно-неперервна T_1 -топологія на $\exp_n \lambda$ є гаусдорфовою напівґруповою компактною, а також описано цю єдину компактну топологію (теореми 2.1.7, 2.1.8, приклад 2.1.4);
- побудовано ненапіврегулярну гаусдорфову слабо компактну, некомпактну трансляційно-неперервну топологію на $\exp_2 \lambda$ (приклад 2.1.9);
- доведено, що для трансляційно-неперервної T_1 -топології τ на $\exp_n \lambda$ такі умови еквівалентні: (i) τ – секвенціально пракомпактна; (ii) τ – цілком зліченно пракомпактна; (iii) τ – зліченно пракомпактна; (iv) τ – слабо компактна, (v) τ – $\mathfrak{D}(\omega)$ -компактна. (теорема 2.3.5).

У третьому розділі дисертаційної роботи досліджується структура напівґрупового розширення $\mathcal{J}_\lambda^n(S)$ моноїда S симетричною інверсною напівґруповою обмеженого скінченного рангу \mathcal{J}_λ^n . Побудовано власне саме розширення $\mathcal{J}_\lambda^n(S)$ моноїда S та досліджено його алгебричні властивості за модулем моноїда S (твердження 3.2.1, 3.2.2). У підрозділі 3.3 вперше введено поняття напівґрупи із сильно щільним рядом ідеалів, знайдено умови за яких напівґрупа $\mathcal{J}_\lambda^n(S)$ має (сильно) щільний ряд ідеалів за модулем напівґрупи S (теорема 3.3.11). У підрозділі 3.4 досліджується топологізація напівґрупи $\mathcal{J}_\lambda^n(S)$, зокрема доведено, що для кожного компактного гаусдорфового напівтопологічного моноїда S існує єдине його компактне топологічне розширення $\mathcal{J}_\lambda^n(S)$ у класі гаусдорфових напівтопологічних напівґруп (теорема 3.4.14) і описана його топологія.

Четвертий розділ присвячений дослідженню алгебричних та топологічних властивостей напівгрупи Гутіка-Михаленича $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$, у випадку, коли сім'я \mathcal{F}_1 складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин ординала ω . Зокрема, у підрозділі 4.2 досліджено алгебричні властивості цього біциклічного розширення: доведено, що напівгрупа $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ ізоморфна піднапівгрупі ω -розширення Брандта напівґратки (ω, \min) (теорема 4.2.4). Підрозділ 4.3 присвячений топологізації розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$, зокрема, дослідженню трансляційно-неперервних слабо компактних T_1 -топологій на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$. Доведено, що кожна $\mathfrak{D}(\omega)$ -компактна трансляційно-неперервна T_1 -топологія на $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_1}$ є компактною та секвенціально компактною, і, більше того, збігається з одноточковою компактифікацією Александрова зліченного дискретного простору (теорема 4.3.6).

Усі отримані у дисертаційній роботі результати є новими, а їх доведення не викликають сумніву.

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися на міжнародних конференціях, а також семінарах з топологічної алгебри та теорії напівгруп. Основні результати опубліковано в трьох статтях (одна – одноосібна), які входять до переліку фахових видань, затверджених МОН України, одній статті – у виданні, включеному до міжнародної наукометричної бази Scopus (квартиль Q3 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank), а також в одній статті не віднесеній до переліку фахових видань України.

Дисертаційне дослідження виконано Лисецькою О. Ю. самостійно. Основні теоретичні положення та розробки, що характеризують наукову новизну дослідження, теоретичне значення його результатів, отримані здобувачкою особисто. Випадків порушення академічної доброчесності, зокрема плагиату, у дисертаційній роботі Лисецької О. Ю. не виявлено.

Дисертація оформлена відповідно до вимог Міністерства освіти і науки України, які висуваються до такого роду наукових робіт.

Робота структурована та добре оформлена стилістично. Проте в ній містяться деякі недоліки та описки технічного характеру:

- 1) розділі 1.2 «Означення та допоміжні твердження», як на мій погляд, перенасичений відомими означеннями та фактами із загальної топології;
- 2) у формулюванні лемі 2.2.1 пропущена умова дискретності на щільний підпростір гаусдорфового d -слабо компактного простору;
- 3) наявні декілька неправильних переносів англійських слів;
- 4) варто було б дати в роботі ще два часткові випадки означення Y -компактного простору, а саме ті, що використовуються в роботі, тобто, $\mathfrak{D}(\omega)$ -компактного та \mathbb{R} -компактного.

Дисертаційна робота Лисецької О. Ю. “Компактні та близькі до них напівґратки, напівґрупи та їхні розширення” є завершеним, цілісним та самостійним дослідженням, яке має теоретичний характер. Усі результати дисертації отримані здобувачкою самостійно. Вони мають складні оригінальні доведення, причому при доведенні використані не лише методи загальної топології та теорії напівґруп, а й методи комбінаторики. Отримані результати та методи можуть бути використані та застосовані в топологічній алгебрі та теорії напівґруп.

Вважаю, що за новизною, актуальністю, обсягом та практичним значенням дисертація відповідає вимогам наказу МОН України №40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» (з наступними змінами) та «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022, а її авторка, Лисецька Олександра Юріївна, заслуговує присудження їй ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика».

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук,
професор, професор кафедри
математичного аналізу
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

Олена КАРЛОВА