До спеціалізованої вченої ради ДФ 35.051.106
у Львівському національному
університеті імені Івана Франка
79000, м. Львів, вул. Університетська, 1

ВІДГУК

офіційного опонента, члена-кореспондента НАН України,
доктора фізико-математичних наук, професора,
завідувача відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України
Максименка Сергія Івановича
на дисертаційну роботу
Лисецької Олександри Юріївни
«Компактні та близькі до них напівґратки, напівгрупи та їхні розширення»,
представлену на здобуття ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 «Математика та статистика»
за спеціальністю 111 «Математика»

Дисертаційна робота Лисецької Олександри Юріївни «Компактні та близькі до них напівґратки, напівгрупи та їхні розширення» присвячена вивченню алгебраїчно-топологічних властивостей компактних напівграток та напівгруп. Цей напрямок досліджень належить до топологічної алгебри, яка (говорячи досить грубо) займається вивченням топологій на алгебраїчних об'єктах, і яка виникла завдяки наступним спостереженям. Нехай на множині G одночасно визначено деяку топологію τ і (припустимо, для простоти, одну бінарну) алгебраїчну операцію, назвемо її множенням, яка є неперервною в цій топології, тобто відповідне відображення множення $* : G \times G \to G$ є неперервним. З такої узгодженості між τ та $*$ дуже часто випливають більш сильні властивості як τ так і $*$. Наприклад,

– кожна топологічна група G задовольняє аксіому віддільності T_3, хоча вона не обов'язково є T_1-простором;
– компонента зв'язності одиниці та компонента лінійної зв'язності одиниці топологічної групи є її нормальними підгрупами;
– фундаментальна група $\pi_1 G$ топологічної напівгрупи є комутативною;
– якщо τ породжена метрикою, яка «добре» узгоджена з $*$, наприклад G – нормований лінійний простір і $(+, *)$ – операції додавання векторів, то його метричне поповнення також має структуру нормованого лінійного простору, і т.п.

В певному сенсі однією з «вершин» таких узгоджених структур є групи Лі – диференційовні многовиди з заданими на них структурами групи, в яких операції множення та взяття оберненого є диференційовними. Останні відіграють вкрай важливу роль не лише у всій математиці, а й у природничих науках, зокрема у фізиці.

В представленій дисертаційній роботі вивчаються алгебраїчні умови на таку узгоджену пару $(\tau, *)$ на G

– які б гарантували компактність τ, або близькі до компактності властивості,
– і також давали можливість розширити G до компактної алгебраїчної структури $(\tau', *')$ на деякій більшій множині $G' \supset G$.

Ця діяльність є продовженням робіт О. Гутіка та його учнів, зокрема, К. Павлик, А. Рейтера, С. Бардили. Варто також відмітити роботи І. Протасова та математиків львівської школи Б. Бокала, І. Гурана, Т. Банаха, О. Равського.

Опишу зміст дисертації.

1. Перший розділ містить дуже гарний історичний опис теорії напівгруп, а також підрозділ, в якому перераховуються всі позначення, означення та допоміжні результати, що використовуються впродовж всього тексту.

2. В другому розділі дуже детально вивчаються слабко компактні топології на напівгратці $\exp_n(\lambda)$ – множині всіх не більш ніж n-елементних підмножин множини нескінченної потужності λ, в якій операція напівгратки – це звичайний перетин множин. Нехай скрізь нижче в цьому пункті τ – це T_1-топологія на $\exp_n(\lambda)$, в якій операція напівгратки є нарізно неперервною, тобто для кожної множини $A \in \exp_n(\lambda)$, відповідність $B \mapsto A \cap B$ є неперервним відображенням $\exp_n(\lambda) \to \exp_n(\lambda)$.

Твердження 2.1.1 описує властивості таких топологій. Зокрема, τ є функціонально гаусдорфовим та розрідженим спадково незв'язним простором.

В прикладі 2.1.4 визначається деяка топологія τ_c^n на $\exp_n(\lambda)$, в якій він стає компактним а операція перетину вже є неперервною. Більш того, згідо теореми 2.1.7 це єдина така T_1-топологія на $\exp_n(\lambda)$. Теорема 2.1.7 також дає ще декілька інших характеризацій топології τ_c^n.

Це дає змогу більш детально вивчити властивості τ. Зокрема, в теоремі 2.1.18 показано, що якщо τ є слабко компактною, то вона насправді буде компактною, а операція напівгратки – неперервною як відображення $\exp_n(\lambda) \times \exp_n(\lambda) \to \exp_n(\lambda)$. Крім того теорема 2.1.15 стверджує, що якщо τ – T_1-топологія, а операція напівгратки – неперервна, то $\exp_n(\lambda)$ вже буде регулярним простором, а при $\lambda = \omega$ – навіть досконало нормальним.

Підрозділ 2.2 присвячено доведенню теореми 2.2.10, яка дає характеризацію слабко компактних топологій τ. Зокрема, слабка компакніть $(\exp_n(\lambda), \tau)$ еквівалентна його замкненості при довільних вкладеннях в гаусдорфові простори.

Остання теорема підрозділу 2.2.11 стверджує, що кожен квазірегулярний d-слабко компактний простір є слабко компактним.

Підрозділ 2.3 присвячено доведенню теореми 2.3.5, яка стверджує, що для τ властивості: секвенціальної пракомпактності, цілком зліченої пракомпактності, слабкої компактності та $\mathfrak{D}(\omega)$-компактності є еквівалентними.

3. В розділі 3 вивчаються розширення $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ напівгрупи S напівгрупою ін'єктивних відображень підмножин не більш ніж n-елементних підмножин з λ в λ. В підрозділах 3.1-3.3 досліджуються властивості таких розширень. Зокрема, теорема 3.3.8 стверджує, що послідовність

$$\{0\} \subset \mathscr{I}_\lambda^1(S) \subset \mathscr{I}_\lambda^2(S) \subset \cdots \subset \mathscr{I}_\lambda^n(S)$$

є сильно щільним рядом ідеалів напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$.

Далі в теоремах 3.3.9 та 3.3.11 показано як по сильно щільному ряду ідеалів в напівгрупі S побудувати сильно щільний ряд ідеалів в $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$ для випадків коли λ є нескінченним та скінченним кардиналом відповідно.

В підрозділі 3.4 вивчаються компактні топології на $\mathscr{I}_\lambda^n(S)$. Зокрема, теорема 3.4.14 стверджує, що якщо (S, τ) – компактний гаусдорфів напівтопологічний моноїд, то його розширення $(\mathscr{I}_\lambda^n(S), \tau_{\mathscr{I}}^c)$ буде компактною гаусдорфовою напівтопологічною напівгрупою.

4. Останній розділ 4 присвячено вивченню напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$, яку можна розглядати як розширення біциклічного моноїда $\mathcal{C}(p, q)$ побудоване за деякою сім'єю $\mathcal{F}$ підмножин в ω. Зокрема, для випадку коли $\mathcal{F}$ – складається з усіх не більш ніж одноелементних підмножин ω, теорема

4.2.4 ототожнює $\mathbf{B}_{\omega}^{\mathcal{F}}$ з деякою піднапівгрупою B розширення Брандта напівгратки натуральних чисел з операцією min. В прикладі 4.3.2 будується певна топологія τ_{Ac} на B і останній результат дисертації – теорема 4.3.6 – дає 8 різних характеризацій цієї топології.

5. Є декілька зауважень до тексту дисертації.

5.1. стор. 32, рядки 1-2 зверху, на мій погляд не зовсім зрозуміле означення:

- *Якщо S – напівгрупа, то множину усіх її ідемпотентів позначатимемо через $E(S)$. Напівгрупу ідемпотентів називатимемо* ***в'язкою****.*

В другому реченні мається на увазі, *що в'язкою називається напівгрупа, в якій всі елементи є ідемпотентами*. Але з першого речення, у читача може виникнути враження, що $E(S)$ – це завжди напівгрупа, хоча це не завжди так.

5.2. Стор 48, твердження 2.1.1 (i), рядок 13 зверху. Здається, що формально замість $x \cdot V(x) \subseteq U(x)$ правильніше присати $V(x) \cdot x \subseteq U(x)$, тому що вище доведено, що саме $ex = 0$, а не $xe = 0$. Хоча, з іншого боку, доведення рівності $xe = 0$ аналогічне, а тому доведення твердження є правильним.

Теж саме стосується включення $x \cdot V(x) \subseteq U(x)$ на стор. 49, рядок 10 зверху.

5.3. В роботі використовується поняття $\mathfrak{D}(\omega)$-компактного простору, але означення цього поняття дещо «заховане» в тексті. А саме, на стор. 42, останні два рядки містять означення Y-компактного простору. Зокрема, воно включає в себе поняття $\mathfrak{D}(\omega)$-компактного простору. Оскільки в дисертації обговорюється дуже багато різновидностей компактності, то варто було б явно сформулювати що таке $\mathfrak{D}(\omega)$-компактні простори.

Вказані недоліки носять технічний характер, легко виправляються і не впливають ні на результати дисертації ні на дуже позитивне враження від неї.

Результати дисертації є новими, цікавими і є важливим кроком в теорії компактних просторів та напівгруп. Робота гарно написана і добре вичитана. Всі формулювання дуже чіткі.

Вважаю, що за новизною, актуальністю, обсягом та практичним значенням дисертація відповідає вимогам наказу МОН України №40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» (з наступними змінами) та «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022, а її авторка, Лисецька Олександра Юріївна, заслуговує присудження їй ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика».

Офіційний опонент
член кореспондент НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, професор,
завідувач відділу алгебри і топології
Інституту математики НАН України Сергій МАКСИМЕНКО