АНОТАЦІЯ

Сухорукова Х.О. Неадитивні міри та їх застосування в теорії рівноваги. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – "Математика" (Галузь знань – 11 "Математика та статистика"). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2023.

Дисертація присвячена дослідженню класів неаддитивних мір, породжених трикутними нормами ($*$-мір). Такі міри означені як функціонали на просторах неперервних функцій зі значеннями в одиничному відрізку. Простори $*$-мір наділяються слабкою* топологією і в цій топології утворюють компактні гаусдорфові простори. Показана функторіальність конструкції простору $*$-мір у категорії компактних гаусдорфових просторів та їх неперервних відображень. Для просторів $*$-мір побудовано аналог відображення Мілютіна, відомого для просторів ймовірнісних мір та ідемпотентних мір, що дозволяє зводити загальний випадок до нульвимірного.

Одна з мотивацій дослідження $*$-мір лежить у ідемпотентній математиці – частині математики, в якій одна зі звичайних арифметичних операцій на полі дійсних чисел замінюється ідемпотентною операцією (наприклад, операцією максимуму), перетворюючи множину дійсних чисел на напівкільце. Результати та методи ідемпотентної математики знаходять численні застосування в різних частинах математики, а також в інформатиці та інших дисциплінах. Огляд деяких результатів ідемпотентної математики можна знайти у праці [36].

Поняття ймовірнісної міри має свої аналоги в ідемпотентній математиці. Ідемпотентні міри (також звані мірами Маслова) введено в працях В.

Маслова, наприклад [32]. Топологічні та категорні аспекти теорії ідемпотентних мір розглядав М. Зарічний [78]. Він, зокрема, показав, що функтор ідемпотентних мір у категорії компактних гаусдорфових просторів є відкритим функтором, тобто зберігає клас відкритих сюр'єктивних відображень (аналог теореми Дітора-Ейфлера для ймовірнісних мір). Для функтора ідемпотентних мір встановлено також властивості нормальності: неперервність, збереження ваги, епі- та мономорфізмів, перетинів, прообразів та ін. Показано також, що функтори ідемпотентних мір та ймовірнісних мір не ізоморфні.

Уже саме означення $*$-міри вказує на зв'язок з теорією розмитих метричних просторів, що інтенсивно розвивається в останні роки. Особливо важливими є розмиті метричні простори в сенсі Ґеорґе і Веерамані [21]. Одна з причин цього полягає у тому, що топологія індукована такою розмитою метрикою, метризовна в класичному сенсі. Розмиті метричні простори знаходять свої застосування не лише у різних розділах математики, але також у розпізнаванні образів. Розмиті метричні простори тісно пов'язані з ймовірнісними метричними просторами. У їх означенні фігурує поняття трикутної норми (t-норми), яке відіграє одну з основних ролей у наших дослідженнях.

Кожній трикутній нормі $*$ ми ставимо у відповідність функтор M^*, що діє в категорії компактних гаусдорфових просторів і неперервних відображень. Цей функтор виявляється нормальним у розумінні Є. Щепіна [60]. (тобто є неперервним, зберігає епі- та мономорфізми, вагу, перетини, прообрази, ініціальний та фінальний об'єкти. (Модифікований) функтор ідемпотентних мір, а також функтор max-min мір є частковими випадками нашої загальної конструкції.

Функтор ймовірнісних мір, який діє в категорії компактних гаусдорфових просторів та інших топологічних категоріях, має різноманітні застосування, зокрема, в класичній теорії рівноваги, зокрема в теоремі про існування рівноваги Неша для ігор зі змішаними стратегіями. Ця теорема справедлива як для випадку, коли множини чистих стратегій є скінченними, так і для випадку, коли вони є компактними гаусдорфовими просторами.

Теорії міри часто пов'язані з відповідними теоріями опуклості. Це добре відомо для ймовірнісних мір [64]. Також у [78] помічено зв'язок між ідемпотентними мірами та так званими опуклими множинами max-plus, визначеними в [11]. Зауважимо, що модифікований функтор ідемпотентних мір, тобто функтор $\cdot$-мір (тобто мір, які відповідають трикутній нормі множення, відповідає теорії $\mathbb{B}$-опуклості розроблено в [5]. У свою чергу, опуклості використовуються в теорії рівноваги для ігор у мірнозначних стратегіях, див. [48].

Метою дисертаційної роботи є дослідження функторів, означених за допомогою трикутних норм $*$ в категорії компактних гаусдорфових просторів; дослідження просторів $*$-мір з компактними носіями на ультраметричних (неархімедових) просторах; дослідження структури монади, породженої функтором $*$-мір з компактними носіями на категорії ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень, і встановлення деяких фундаментальні властивості таких монад; означення ігор в $*$-значних стратегіях і доведення неперервності функцій виплат для цих ігор для застосування в теорії рівноваги.

Об'єктом дослідження дисертації є $*$-міри на компактних гаусдорфових просторах, породжені трикутними нормами $*$.

Предметом дослідження є властивості функтора $*$-мір на категорії компактних гаусдорфових просторів і неперервних відображень, а також властивості ультраметризації просторів $*$-мір з компактними носіями на категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень, структура монади, яку породжує функтор $*$-мір, а також застосуввання до рівноваги для ігор з $*$-значними стратегіями.

У дослідженнях проблематики дисертації застосовуються методи теорії функторів у топологічних категоріях, методи загальної топології, ідемпотентної математики, теорії категорій та теорії рівноваги.

Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури.

Наводиться огляд літератури, пов'язаної з результатами дисертації. Насамперед розглядаємо результати, пов'язані з різними неадитивними мірами, зокрема ідемпотентними мірами, max-min мірами, ємностями тощо. Окремо виділяємо випадок, коли міри розглядаються на ультраметричних (неархімедових) просторах. Оскільки центральне поняття дисертації, а саме поняття простору $*$-мір, визначає функтор у категорії компактних гаусдорфових просторів та у інших категоріях, ми наводимо також огляд літератури, пов'язаної з функторами в категоріях топологічних і метричних просторів.

Багато важливих функторів доповнюються до структури монади на відповідній категорії. Наведено також огляд літератури, що стосується монад.

Нарешті ми розглядаємо літературу, пов'язану з численними застосуваннями функторів та монад у теорії ігор, зокрема у теорії рівноваги.

У розділі "Простори $*$-мір на компактних гаусдорфових просторах" для кожної трикутної норми $*$ ми запроваджуємо поняття $*$-міри як функціонала на просторі неперервних функцій $C(X, \mathbb{I})$. Множина усіх $*$-мір на компактному гаусдорфовому просторі наділяється слабкою* топологією. Показано, що утворений простір $*$-мір є компактним гаусдорфовим. Ця конструкція визначає коваріантний функтор на категорії компактних гаусдорфових просторів і неперервних відображень. Також побудовано аналог відображення Мілютіна, вперше означеного для ймовірнісних мір, для $*$-

мір та напівнеперервних згори ємностей. Крім того, побудовано опис $*$-мір як замкнених множин добутку простору на одиничний сегмент з певними властивостями. Доведено, що множина $*$-мір зі скінченними носіями всюди щільна в просторі всіх $*$-мір.

Одним з основних результатів розділу є опис просторів $*$-мір як гіперпросторів множин з певними властивостями. Це дає змогу порівнювати між собою простори $*$-мір для різних трикутних норм $*$.

У розділі "Простори $*$-мір з компактними носіями на ультраметричних просторах" розглядається ультраметричний випадок (нагадаємо, що метрика називається ультраметрикою, якщо вона задовольняє сильну нерівність трикутника), побудована ультраметризація просторів $*$-мір з компактними носіями на ультраметричних просторах. Показано, що утворена конструкція визначає коваріантний функтор у категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень. Він є аналогом для $*$-мір функторів, означених для ймовірнісних мір, ідемпотентних мір та напівнеперервних зверху ємностей з компактними носіями. У дисертації доведено, що цей функтор є локально нерозтягуючим. Також доведено, що простір $*$-мір з компактними носіями на повному ультраметричному просторі є повним ультраметричним простором.

Одним з основних результатів цього розділу є збереження функтором *-мір класу повних ультраметричних просторів.

Розділ "Монади, породжені функторами $*$-мір" присвячений структурі монади, що визначається функторами $*$-мір на категорії **Ultr** ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень. Встановлено деякі фундаментальні властивості таких монад. Наведено приклади неізоморфних монад для різних трикутних норм $*$. Зокрема, така структура дозволяє визначити тензорний добуток $*$-мір у категорії **Ultr**. У своєю чергу, ми визначаємо ігри в $*$-значних стратегіях на ультраметричних просторах і доводимо неперервність функцій виплат для цих ігор.

Нарешті, доведено, що будь-яку рівновагу для ігор у $*$-значних стратегіях можна апроксимувати майже рівновагами, що складаються з $*$-мір зі скінченними носіями.

Практичне значення результатів дисертації. Дисертація носить теоретичний характер. Її результати можна застосовувати в загальній теорії функторів у топологічних категоріях, теорії ультраметричних просторів, ідемпотентній математиці, загальній теорії рівноваги.

Ключові слова: $*$-*міра, компактний гаусдорфовий простір, відображення Мілютіна, експонента, *-значна стратегія, неадитивна міра, трикутна норма, максимінна міра, носій міри, скінченний носій, функтор, функціонал, ідемпотентна міра, тензорний добуток, ультраметричний простір, категорія компактів, нерозтягуючі відображення, природнє перетворення, монада, рівновага.*

Список публікацій в яких опубліковано основні результати дисертації:

(1) Sukhorukova, Kh., Zarichnyi, M.: On spaces of $*$-measures on ultrametric spaces. Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. **90**, 76–83 (2021).

(2) Sukhorukova, Kh., Zarichnyi, M.: On $*$-measure monads on the category of Ultrametric spaces. Carpathian Mathematical Publication. **14**(2), 429–436 (2022).

(3) Sukhorukova, Kh.: Spaces of non-additive measures generated by triangular norms. Matematychni Studii, **59**(2), 215—224. (2023).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

(1) Sukhorukova Kh.: Categorical properties of functionals generated by the triangular norms In: Book of Abstracts The 14th Summer School "Analysis, Topology, Algebra and Applications p. 34. Pidzakharychi, Chernivtsi Region, Ukraine, August 10 -– 20, 2019.

(2) Сухорукова Х. О.: Функтори в категорії компактів, породжені трикутними нормами. In: Тези доповідей XV Міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», ст. 9. Хакрівський національний університет імені В.Н.Каразіна, Харків, 13–14 Березня 2020.

(3) Sukhorukova Kh.: On idempotent measures and functionals generated by triangular norms In: Abtracts of Contemporary Mathematics in Kielce. Kielce, Poland, February 24 -– 27, 2021.

(4) Sukhorukova Kh.: Ultrametric spaces of $*$-measures. In: Book of Abstracts International Online Conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk, p. 147, May 25-28, 2021.

(5) Sukhorukova Kh., Zarichnyi M.: On $*$-measures on ultrametric spaces. In: Program and abstracts of 25th Christmass discussion, p. 3–4. Lviv, January 11 – 12, 2022.

(6) Zarichnyi M., Mazurenko N., Sukhorukova Kh.: On (in)homogeneous fractals generated by $*$-measures. In: Abtracts of the International online conference "Current Trends in Abstract and Applied Analysis", p. 55. Ivano-Frankivsk, Ukraine, May 12 – 15, 2022.

(7) Sukhorukova Kh.: On K-ultrametrics and $*$-measures. In: International Scientific Conference Devoted to 160 anniversary of Dvytro Grave (25.08.1863 – 19.12.1939), p. 113. Odesa, Ukraine, May 29 -– June 1, 2023.

Abstract

Sukhorukova Kh. O. Non-additive measures and their application in equilibrium theory. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in speciality 111 — “Mathematics” (field of studies 11 — “Mathematics and statistics”). — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2023.

The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusions and the references. The introduction substantiates the relevance of research topic. There are listed the purpose, subject, object and methods of the research. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant’s contribution are also indicated in the introduction.

The dissertation is dedicated to the study of classes of non-additive measures generated by triangular norms ($*$-measures). Such measures are defined as functionals on spaces of continuous functions with values in the unit interval. The spaces of $*$-measures are equipped with the weak* topology and form compact Hausdorff spaces in this topology. The functoriality of the construction of $*$-measure spaces in the category of compact Hausdorff spaces and their continuous mappings is demonstrated. For $*$-measure spaces, an analogue of the Milyutin mapping is constructed, which is known for probability measures and idempotent measures, allowing the reduction of the general case to the zero-dimensional one.

One of the motivations for studying $^{*}*$-measures lies in idempotent mathematics, a part of mathematics in which one of the usual arithmetic operations on the field of real numbers is replaced by an idempotent operation (for example, the maximum operation), transforming the set of real numbers into a semiring. The results and methods of idempotent mathematics find numerous applications in various branches of mathematics, as well as in computer science and other disciplines. An overview of some results in idempotent mathematics can

be found in [78].

The concept of probability measure has its analogues in idempotent mathematics. Idempotent measures (also called Maslov's measures) were introduced in the works of V. Maslov for example in [32]. Topological and categorical aspects of the theory of idempotent measures were considered by M. Zarichnyi [78]. In particular, he showed that the functor of idempotent measures in the category of compact Hausdorff spaces is an open functor, that is, it preserves the class of open surjective mappings (an analogue of the Dietor-Eifler theorem for probability measures). The properties of normality are also established for the functor of idempotent measures: continuity, conservation of weight, epi- and monomorphisms, intersections, prototypes, etc. It is also shown that the functors of idempotent measures and probability measures in the category of compact Hausdorff spaces are not isomorphic.

In recent years, the theory of fuzzy metric spaces has been developing intensively. The definition of the $*$-measure itself indicates a connection with the theory of fuzzy metric spaces, which has been intensively developing in recent years. Fuzzy metric spaces in the sense of George and Veeramani [21] are especially important. One of the reasons for this is that the topology induced by such a fuzzy metric is metrical in the classical sense. Fuzzy metric spaces find their applications not only in various branches of mathematics, but also in pattern recognition. Fuzzy metric spaces are closely related to probabilistic metric spaces. Their definition includes the concept of the triangular norm (t-norm), which plays one of the main roles in our research.

We assign to each triangular norm $*$ a functor M^* operating in the category of compact Hausdorff spaces and continuous mappings. This functor turns out to be normal in the sense of E. Shchepin [60], that is, it is continuous, preserves epi- and monomorphisms, weight, intersections, prototypes, initial and final objects. The (modified) functor of idempotent measures as well as the functor of max-min measures are partial cases of our general construction.

The functor of probability measures, which operates in the category of compact Hausdorff spaces and other topological categories, has various applications, in particular, in classical equilibrium theory, in particular in the theorem on the existence of Nash equilibrium for games with mixed strategies. This theorem is valid both for the case when the sets of pure strategies are finite and for the case when they are compact Hausdorff spaces.

Measure theories are often associated with corresponding convexity theories. This is well known for probability measures [64]. The connection between idempotent measures and so-called max-plus convex sets defined in [78] is also noted in [11]. It should be noted that the modified functor of idempotent measures, i.e., the functor of $\cdot$-measures (measures corresponding to the triangular norm of multiplication), corresponds to the theory of $\mathbb{B}$-convexity developed in [5]. In turn, convexity are used in equilibrium theory for games in infinite-dimensional strategies, see [48].

The purpose of the dissertation work is to research functors defined by triangular norms $*$ in the category of compact Hausdorff spaces, to research $*$-measure spaces with compact supports on ultrametric (non-Archimedean) spaces, to explore the structure of the monad generated by the functor of $*$-measure spaces with compact supports in the category of ultrametric spaces and non-expanding mappings, and to establish certain fundamental properties of such monads, definition of games in $*$-valued strategies and proof of continuity of payoff functions for these games for application in equilibrium theory, approximation of equilibrium by quasi-equilibrium with finite supports.

Object of the research in the dissertation is $*$-measures on compact Hausdorff spaces generated by triangular norms $*$.

The subjects of the study includes the properties of the $*$-measure functor in the category of compact Hausdorff spaces and continuous mappings, as well as the properties of ultrametricization of $*$-measure spaces with compact supports in the category of ultrametric spaces and non-expanding mappings. It also covers the structure of the monad generated by the $*$-measure functor and its application to equilibrium in games with $*$-valued strategies.

The research in the dissertation employs methods from functor theory in topological categories, general topology, idempotent mathematics, category theory, and the game theory.

The dissertation consists of abstracts in Ukrainian and English, an introduction, four chapters, conclusions, and a list of references.

A review of the literature related to the results of the dissertation is provided. Firstly, we consider results related to various non-additive measures, including idempotent measures, max-min measures, capacities, and so on. We specifically highlight the case when the measures are considered on ultrametric (non-Archimedean) spaces. Since the central concept of the dissertation, namely the concept of $*$-measure space, defines a functor in the category of compact Hausdorff spaces and in other categories, we also provide a review of the literature related to functors in the categories of topological and metric spaces.

Many important functors are augmented with monadic structures in the corresponding category. A literature review related to monads is also presented.

Finally, we discuss the literature related to various applications of functors and monads in game theory, particularly in the theory of equilibrium.

In the section "Spaces of $*$-measure on compact Hausdorff spaces", for each triangular norm $*$, we introduce the concept of $*$-measure as a functional on the space of continuous functions $C(X, \mathbb{I})$. The set of all $*$-measures on a compact Hausdorff space is equipped with the weak* topology. It is shown that the resulting $*$-measure space is a compact Hausdorff space. This construction defines a covariant functor in the category of compact Hausdorff spaces and continuous mappings. Moreover, an analog of the Milyutin mapping, first defined for probability measures, is constructed for $*$-measures. Additionally, a description of $*$-measures as closed subsets of the product space with a unit segment and certain properties is provided. It is proved that the set of $*$-measures with finite supports is everywhere dense in the space of all $*$- measures.

One of the main results of this section is the description of $*$-measure spaces as hyperspaces of sets with certain properties. This allows for the comparison of $*$-measure spaces for different triangular norms $*$.

In the section "Spaces of $*$-measure with compact supports on ultrametric spaces", we consider the case of ultrametric spaces (recall that a metric is called ultrametric if it satisfies the strong triangle inequality) and construct the ultrametricization of spaces of $*$-measures with compact supports on ultrametric spaces. It is shown that this construction defines a covariant functor in the category of ultrametric spaces and non-expansive mappings. It serves as an analogue for $*$-measures of functors defined for probability measures, idempotent measures, and upper semicontinuous capacities with compact supports. The dissertation proves that this functor is locally non-expansive. Additionally, it is demonstrated that the space of $*$-measures with compact supports on a complete ultrametric space is itself a complete ultrametric space.

One of the main results of this section is the preservation of the class of complete ultrametric spaces by the functor of $*$-measures.

Section, "Monads generated by functors of $*$-measure is dedicated to the structure of a monad defined by functors of $*$-measure on the category **Ultr** of ultrametric spaces and non-expanding mappings. Several fundamental properties of such monads are established. Examples of non-isomorphic monads for different triangular norms $*$ are provided. In particular, this structure allows for defining the tensor product of $*$-measures in the category **Ultr**. For this purpose, the maximal ultrametric on the product of ultrametric spaces is considered. Furthermore, we define games in $*$-valued strategies on ultrametric spaces and prove the continuity of payoff functions for these games.

Finally, it is proven that any equilibrium for games with $*$-valued strategies can be approximated by almost equilibrium consisting of $*$-measures with finite supports.

The practical significance of the results. The dissertation is of theoretical nature. Its results can be applied in the general theory of functors in topological categories, the theory of ultrametric spaces, idempotent mathematics, and the general theory of equilibrium.

Key words: $*$-*measure, compact Hausdorff space, Milyutin mapping, exponential,* $*$-*valued strategy, non-additive measure, triangular norm, max-min measure, support of the measure, finite support, functor, functional, idempotent measure, tensor product, ultrametric space, category of compact spaces, non-expanding map, natural transformation, monad, equilibrium*

The list of papers on the topic of the Thesis

(1) Sukhorukova, Kh., Zarichnyi, M.: On spaces of $*$-measures on ultrametric spaces. Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. **90**, 76–83 (2021).

(2) Sukhorukova, Kh., Zarichnyi, M.: On $*$-measure monads on the category of Ultrametric spaces. Carpathian Mathematical Publication. **14**(2), 429–436 (2022).

(3) Sukhorukova, Kh.: Spaces of non-additive measures generated by triangular norms. Matematychni Studii, **59**(2), 215—224. (2023).

The list of conference thesises on the topic of the Thesis

(1) Sukhorukova Kh.: Categorical properties of functionals generated by the triangular norms In: Book of Abstracts The 14th Summer School "Analysis, Topology, Algebra and Applications p. 34. Pidzakharychi, Chernivtsi Region, Ukraine, August 10 -– 20, 2019.

(2) Sukhorukova Kh.: Functors in the category of compacts generated by triangular norms. In: Abstracts of the XV International scientific conference of students and young scientists "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies p. 9. V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine, March 13 – 14, 2020.

(3) Sukhorukova Kh.: On idempotent measures and functionals generated by triangular norms In: Abtracts of Contemporary Mathematics in Kielce. Kielce, Poland, February 24 -– 27, 2021.

(4) Sukhorukova Kh.: Ultrametric spaces of $*$-measures. In: Book of Abstracts International Online Conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk, p. 147, May 25-28, 2021.

(5) Sukhorukova Kh., Zarichnyi M.: On $*$-measures on ultrametric spaces. In: Program and abstracts of 25th Christmass discussion, p. 3–4. Lviv,

January 11 – 12, 2022.

(6) Zarichnyi M., Mazurenko N., Sukhorukova Kh.: On (in)homogeneous fractals generated by $*$-measures. In: Abtracts of the International online conference "Current Trends in Abstract and Applied Analysis", p. 55. Ivano-Frankivsk, Ukraine, May 12 – 15, 2022.

(7) Sukhorukova Kh.: On K-ultrametrics and $*$-measures. In: International Scientific Conference Devoted to 160 anniversary of Dvytro Grave (25.08.1863 – 19.12.1939), p. 113. Odesa, Ukraine, May 29 -– June 1, 2023.