Львівський національний університет імені Івана Франка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

**Сухорукова Христина Олександрівна**

УДК 515.12

**ДИСЕРТАЦІЯ**

# Неадитивні міри та їх застосування в теорії рівноваги

Спеціальність — 111 ”Математика”
Галузь знань — 11 ”Математика та статистика”

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. ________________ Х. О. Сухорукова

Науковий керівник **Зарічний Михайло Михайлович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Львів—2023

# АНОТАЦІЯ

*Сухорукова Х.О.* Неадитивні міри та їх застосування в теорії рівноваги. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – "Математика" (Галузь знань – 11 "Математика та статистика"). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2023.

Дисертація присвячена дослідженню класів неаддитивних мір, породжених трикутними нормами ($*$-мір). Такі міри означені як функціонали на просторах неперерівних функцій зі значеннями в одиничному відрізку. Простори $*$-мір наділяються слабкою* топологією і в цій топології утворюють компактні гаусдорфові простори. Показана функторіальність конструкції простору $*$-мір у категорії компактних гаусдорфових просторів та їх неперервних відображень. Для просторів $*$-мір побудовано аналог відображення Мілютіна, відомого для просторів ймовірнісних мір та ідемпотентних мір, що дозволяє зводити загальний випадок до нульвимірного.

Одна з мотивацій дослідження $*$-мір лежить у ідемпотентній математиці – частині математики, в якій одна зі звичайних арифметичних операцій на полі дійсних чисел замінюється ідемпотентною операцією (наприклад, операцією максимуму), перетворюючи множину дійсних чисел на напівкільце. Результати та методи ідемпотентної математики знаходять численні застосування в різних частинах математики, а також в інформатиці та інших дисциплінах. Огляд деяких результатів ідемпотентної математики можна знайти у праці [36].

Поняття ймовірнісної міри має свої аналоги в ідемпотентній математиці. Ідемпотентні міри (також звані мірами Маслова) введено в працях В.

Маслова, наприклад [32]. Топологічні та категорні аспекти теорії ідемпотентних мір розглядав М. Зарічний [78]. Він, зокрема, показав, що функтор ідемпотентних мір у категорії компактних гаусдорфових просторів є відкритим функтором, тобто зберігає клас відкритих сюр'єктивних відображень (аналог теореми Дітора-Ейфлера для ймовірнісних мір). Для функтора ідемпотентних мір встановлено також властивості нормальності: неперервність, збереження ваги, епі- та мономорфізмів, перетинів, прообразів та ін. Показано також, що функтори ідемпотентних мір та ймовірнісних мір не ізоморфні.

Уже саме означення $*$-міри вказує на зв'язок з теорією розмитих метричних просторів, що інтенсивно розвивається в останні роки. Особливо важливими є розмиті метричні простори в сенсі Ґеорґе і Веерамані [21]. Одна з причин цього полягає у тому, що топологія індукована такою розмитою метрикою, метризовна в класичному сенсі. Розмиті метричні простори знаходять свої застосування не лише у різних розділах математики, але також у розпізнаванні образів. Розмиті метричні простори тісно пов'язані з ймовірнісними метричними просторами. У їх означенні фігурує поняття трикутної норми ($t$-норми), яке відіграє одну з основних ролей у наших дослідженнях.

Кожній трикутній нормі $*$ ми ставимо у відповідність функтор $M^*$, що діє в категорії компактних гаусдорфових просторів і неперервних відображень. Цей функтор виявляється нормальним у розумінні Є. Щепіна [60]. (тобто є неперервним, зберігає епі- та мономорфізми, вагу, перетини, прообрази, ініціальний та фінальний об'єкти. (Модифікований) функтор ідемпотентних мір, а також функтор max-min мір є частковими випадками нашої загальної конструкції.

Функтор ймовірнісних мір, який діє в категорії компактних гаусдорфових просторів та інших топологічних категоріях, має різноманітні застосування, зокрема, в класичній теорії рівноваги, зокрема в теоремі про існування рівноваги Неша для ігор зі змішаними стратегіями. Ця теорема справедлива як для випадку, коли множини чистих стратегій є скінченними, так і для випадку, коли вони є компактними гаусдорфовими просторами.

Теорії міри часто пов'язані з відповідними теоріями опуклості. Це добре відомо для ймовірнісних мір [64]. Також у [78] помічено зв'язок між ідемпотентними мірами та так званими опуклими множинами max-plus, визначеними в [11]. Зауважимо, що модифікований функтор ідемпотентних мір, тобто функтор $\cdot$-мір (тобто мір, які відповідають трикутній нормі множення, відповідає теорії $\mathbb{B}$-опуклості розроблено в [5]. У свою чергу, опуклості використовуються в теорії рівноваги для ігор у мірнозначних стратегіях, див. [48].

*Метою дисертаційної роботи* є дослідження функторів, означених за допомогою трикутних норм $*$ в категорії компактних гаусдорфових просторів; дослідження просторів $*$-мір з компактними носіями на ультраметричних (неархімедових) просторах; дослідження структури монади, породженої функтором $*$-мір з компактними носіями на категорії ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень, і встановлення деяких фундаментальні властивості таких монад; означення ігор в $*$-значних стратегіях і доведення неперервності функцій виплат для цих ігор для застосування в теорії рівноваги.

*Об'єктом* дослідження дисертації є $*$-міри на компактних гаусдорфових просторах, породжені трикутними нормами $*$.

*Предметом дослідження* є властивості функтора $*$-мір на категорії компактних гаусдорфових просторів і неперервних відображень, а також властивості ультраметризації просторів $*$-мір з компактними носіями на категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень, структура монади, яку породжує функтор $*$-мір, а також застосування до рівноваги для ігор з $*$-значними стратегіями.

У дослідженнях проблематики дисертації застосовуються методи теорії функторів у топологічних категоріях, методи загальної топології, ідемпотентної математики, теорії категорій та теорії рівноваги.

Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури.

Наводиться огляд літератури, пов'язаної з результатами дисертації. Насамперед розглядаємо результати, пов'язані з різними неадитивними мірами, зокрема ідемпотентними мірами, max-min мірами, ємностями тощо. Окремо виділяємо випадок, коли міри розглядаються на ультраметричних (неархімедових) просторах. Оскільки центральне поняття дисертації, а саме поняття простору $*$-мір, визначає функтор у категорії компактних гаусдорфових просторів та у інших категоріях, ми наводимо також огляд літератури, пов'язаної з функторами в категоріях топологічних і метричних просторів.

Багато важливих функторів доповнюються до структури монади на відповідній категорії. Наведено також огляд літератури, що стосується монад.

Нарешті ми розглядаємо літературу, пов'язану з численними застосуваннями функторів та монад у теорії ігор, зокрема у теорії рівноваги.

У розділі "Простори $*$-мір на компактних гаусдорфових просторах" для кожної трикутної норми $*$ ми запроваджуємо поняття $*$-міри як функціонала на просторі неперервних функцій $C(X, \mathbb{I})$. Множина усіх $*$-мір на компактному гаусдорфовому просторі наділяється слабкою$^*$ топологією. Показано, що утворений простір $*$-мір є компактним гаусдорфовим. Ця конструкція визначає коваріантний функтор на категорії компактних гаусдорфових просторів і неперервних відображень. Також побудовано аналог відображення Мілютіна, вперше означеного для ймовірнісних мір, для $*$-

мір та напівнеперервних згори ємностей. Крім того, побудовано опис $*$-мір як замкнених множин добутку простору на одиничний сегмент з певними властивостями. Доведено, що множина $*$-мір зі скінченними носіями всюди щільна в просторі всіх $*$-мір.

Одним з основних результатів розділу є опис просторів $*$-мір як гіперпросторів множин з певними властивостями. Це дає змогу порівнювати між собою простори $*$-мір для різних трикутних норм $*$.

У розділі "Простори $*$-мір з компактними носіями на ультраметричних просторах" розглядається ультраметричний випадок (нагадаємо, що метрика називається ультраметрикою, якщо вона задовольняє сильну нерівність трикутника), побудована ультраметризація просторів $*$-мір з компактними носіями на ультраметричних просторах. Показано, що утворена конструкція визначає коваріантний функтор у категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень. Він є аналогом для $*$-мір функторів, означених для ймовірнісних мір, ідемпотентних мір та напівнеперервних зверху ємностей з компактними носіями. У дисертації доведено, що цей функтор є локально нерозтягуючим. Також доведено, що простір $*$-мір з компактними носіями на повному ультраметричному просторі є повним ультраметричним простором.

Одним з основних результатів цього розділу є збереження функтором *-мір класу повних ультраметричних просторів.

Розділ "Монади, породжені функторами $*$-мір" присвячений структурі монади, що визначається функторами $*$-мір на категорії **Ultr** ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень. Встановлено деякі фундаментальні властивості таких монад. Наведено приклади неізоморфних монад для різних трикутних норм $*$. Зокрема, така структура дозволяє визначити тензорний добуток $*$-мір у категорії **Ultr**. У своєю чергу, ми визначаємо ігри в $*$-значних стратегіях на ультраметричних просторах і доводимо неперервність функцій виплат для цих ігор.

Нарешті, доведено, що будь-яку рівновагу для ігор у $*$-значних стратегіях можна апроксимувати майже рівновагами, що складаються з $*$-мір зі скінченними носіями.

**Практичне значення результатів дисертації.** Дисертація носить теоретичний характер. Її результати можна застосовувати в загальній теорії функторів у топологічних категоріях, теорії ультраметричних просторів, ідемпотентній математиці, загальній теорії рівноваги.

**Ключові слова:** $*$-*міра, компактний гаусдорфовий простір, відображення Мілютіна, експонента, *-значна стратегія, неадитивна міра, трикутна норма, максимінна міра, носій міри, скінченний носій, функтор, функціонал, ідемпотентна міра, тензорний добуток, ультраметричний простір, категорія компактів, нерозтягуючі відображення, природнє перетворення, монада, рівновага.*

**Список публікацій в яких опубліковано основні результати дисертації:**

(1) Sukhorukova, Kh., Zarichnyi, M.: On spaces of $*$-measures on ultrametric spaces. Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. **90**, 76–83 (2021).

(2) Sukhorukova, Kh., Zarichnyi, M.: On $*$-measure monads on the category of Ultrametric spaces. Carpathian Mathematical Publication. **14**(2), 429–436 (2022).

(3) Sukhorukova, Kh.: Spaces of non-additive measures generated by triangular norms. Matematychni Studii, **59**(2), 215—224. (2023).

**Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

(1) Sukhorukova Kh.: Categorical properties of functionals generated by the triangular norms In: Book of Abstracts The 14th Summer School "Analysis, Topology, Algebra and Applications p. 34. Pidzakharychi, Chernivtsi Region, Ukraine, August 10 -– 20, 2019.

(2) Сухорукова Х. О.: Функтори в категорії компактів, породжені трикутними нормами. In: Тези доповідей XV Міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», ст. 9. Хакрівський національний університет імені В.Н.Каразіна, Харків, 13–14 Березня 2020.

(3) Sukhorukova Kh.: On idempotent measures and functionals generated by triangular norms In: Abtracts of Contemporary Mathematics in Kielce. Kielce, Poland, February 24 -– 27, 2021.

(4) Sukhorukova Kh.: Ultrametric spaces of $*$-measures. In: Book of Abstracts International Online Conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk, p. 147, May 25-28, 2021.

(5) Sukhorukova Kh., Zarichnyi M.: On $*$-measures on ultrametric spaces. In: Program and abstracts of 25th Christmass discussion, p. 3–4. Lviv, January 11 – 12, 2022.

(6) Zarichnyi M., Mazurenko N., Sukhorukova Kh.: On (in)homogeneous fractals generated by $*$-measures. In: Abtracts of the International online conference "Current Trends in Abstract and Applied Analysis", p. 55. Ivano-Frankivsk, Ukraine, May 12 – 15, 2022.

(7) Sukhorukova Kh.: On K-ultrametrics and $*$-measures. In: International Scientific Conference Devoted to 160 anniversary of Dvytro Grave (25.08.1863 – 19.12.1939), p. 113. Odesa, Ukraine, May 29 -– June 1, 2023.

# Abstract

*Sukhorukova Kh. O.* Non-additive measures and their application in equilibrium theory. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in speciality 111 — “Mathematics” (field of studies 11 — “Mathematics and statistics”). — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2023.

The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusions and the references. The introduction substantiates the relevance of research topic. There are listed the purpose, subject, object and methods of the research. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant’s contribution are also indicated in the introduction.

The dissertation is dedicated to the study of classes of non-additive measures generated by triangular norms ($*$-measures). Such measures are defined as functionals on spaces of continuous functions with values in the unit interval. The spaces of $*$-measures are equipped with the weak* topology and form compact Hausdorff spaces in this topology. The functoriality of the construction of $*$-measure spaces in the category of compact Hausdorff spaces and their continuous mappings is demonstrated. For $*$-measure spaces, an analogue of the Milyutin mapping is constructed, which is known for probability measures and idempotent measures, allowing the reduction of the general case to the zero-dimensional one.

One of the motivations for studying *$*$-measures lies in idempotent mathematics, a part of mathematics in which one of the usual arithmetic operations on the field of real numbers is replaced by an idempotent operation (for example, the maximum operation), transforming the set of real numbers into a semiring. The results and methods of idempotent mathematics find numerous applications in various branches of mathematics, as well as in computer science and other disciplines. An overview of some results in idempotent mathematics can

be found in [78].

The concept of probability measure has its analogues in idempotent mathematics. Idempotent measures (also called Maslov's measures) were introduced in the works of V. Maslov for example in [32]. Topological and categorical aspects of the theory of idempotent measures were considered by M. Zarichnyi [78]. In particular, he showed that the functor of idempotent measures in the category of compact Hausdorff spaces is an open functor, that is, it preserves the class of open surjective mappings (an analogue of the Dietor-Eifler theorem for probability measures). The properties of normality are also established for the functor of idempotent measures: continuity, conservation of weight, epi- and monomorphisms, intersections, prototypes, etc. It is also shown that the functors of idempotent measures and probability measures in the category of compact Hausdorff spaces are not isomorphic.

In recent years, the theory of fuzzy metric spaces has been developing intensively. The definition of the $*$-measure itself indicates a connection with the theory of fuzzy metric spaces, which has been intensively developing in recent years. Fuzzy metric spaces in the sense of George and Veeramani [21] are especially important. One of the reasons for this is that the topology induced by such a fuzzy metric is metrical in the classical sense. Fuzzy metric spaces find their applications not only in various branches of mathematics, but also in pattern recognition. Fuzzy metric spaces are closely related to probabilistic metric spaces. Their definition includes the concept of the triangular norm ($t$-norm), which plays one of the main roles in our research.

We assign to each triangular norm $*$ a functor $M^*$ operating in the category of compact Hausdorff spaces and continuous mappings. This functor turns out to be normal in the sense of E. Shchepin [60], that is, it is continuous, preserves epi- and monomorphisms, weight, intersections, prototypes, initial and final objects. The (modified) functor of idempotent measures as well as the functor of max-min measures are partial cases of our general construction.

The functor of probability measures, which operates in the category of compact Hausdorff spaces and other topological categories, has various applications, in particular, in classical equilibrium theory, in particular in the theorem on the existence of Nash equilibrium for games with mixed strategies. This theorem is valid both for the case when the sets of pure strategies are finite and for the case when they are compact Hausdorff spaces.

Measure theories are often associated with corresponding convexity theories. This is well known for probability measures [64]. The connection between idempotent measures and so-called max-plus convex sets defined in [78] is also noted in [11]. It should be noted that the modified functor of idempotent measures, i.e., the functor of $\cdot$-measures (measures corresponding to the triangular norm of multiplication), corresponds to the theory of $\mathbb{B}$-convexity developed in [5]. In turn, convexity are used in equilibrium theory for games in infinite-dimensional strategies, see [48].

*The purpose of the dissertation work* is to research functors defined by triangular norms $*$ in the category of compact Hausdorff spaces, to research $*$-measure spaces with compact supports on ultrametric (non-Archimedean) spaces, to explore the structure of the monad generated by the functor of $*$-measure spaces with compact supports in the category of ultrametric spaces and non-expanding mappings, and to establish certain fundamental properties of such monads, definition of games in $*$-valued strategies and proof of continuity of payoff functions for these games for application in equilibrium theory, approximation of equilibrium by quasi-equilibrium with finite supports.

*Object of the research* in the dissertation is $*$-measures on compact Hausdorff spaces generated by triangular norms $*$.

*The subjects of the study* includes the properties of the $*$-measure functor in the category of compact Hausdorff spaces and continuous mappings, as well as the properties of ultrametricization of $*$-measure spaces with compact supports in the category of ultrametric spaces and non-expanding mappings. It also covers the structure of the monad generated by the $*$-measure functor and its application to equilibrium in games with $*$-valued strategies.

The research in the dissertation employs methods from functor theory in topological categories, general topology, idempotent mathematics, category theory, and the game theory.

The dissertation consists of abstracts in Ukrainian and English, an introduction, four chapters, conclusions, and a list of references.

A review of the literature related to the results of the dissertation is provided. Firstly, we consider results related to various non-additive measures, including idempotent measures, max-min measures, capacities, and so on. We specifically highlight the case when the measures are considered on ultrametric (non-Archimedean) spaces. Since the central concept of the dissertation, namely the concept of $*$-measure space, defines a functor in the category of compact Hausdorff spaces and in other categories, we also provide a review of the literature related to functors in the categories of topological and metric spaces.

Many important functors are augmented with monadic structures in the corresponding category. A literature review related to monads is also presented.

Finally, we discuss the literature related to various applications of functors and monads in game theory, particularly in the theory of equilibrium.

In the section "Spaces of $*$-measure on compact Hausdorff spaces", for each triangular norm $*$, we introduce the concept of $*$-measure as a functional on the space of continuous functions $C(X, \mathbb{I})$. The set of all $*$-measures on a compact Hausdorff space is equipped with the weak* topology. It is shown that the resulting $*$-measure space is a compact Hausdorff space. This construction defines a covariant functor in the category of compact Hausdorff spaces and continuous mappings. Moreover, an analog of the Milyutin mapping, first defined for probability measures, is constructed for $*$-measures. Additionally, a description of $*$-measures as closed subsets of the product space with a unit segment and certain properties is provided. It is proved that the set of $*$-measures with finite supports is everywhere dense in the space of all $*$- measures.

One of the main results of this section is the description of $*$-measure spaces as hyperspaces of sets with certain properties. This allows for the comparison of $*$-measure spaces for different triangular norms $*$.

In the section “Spaces of $*$-measure with compact supports on ultrametric spaces”, we consider the case of ultrametric spaces (recall that a metric is called ultrametric if it satisfies the strong triangle inequality) and construct the ultrametricization of spaces of $*$-measures with compact supports on ultrametric spaces. It is shown that this construction defines a covariant functor in the category of ultrametric spaces and non-expansive mappings. It serves as an analogue for $*$-measures of functors defined for probability measures, idempotent measures, and upper semicontinuous capacities with compact supports. The dissertation proves that this functor is locally non-expansive. Additionally, it is demonstrated that the space of $*$-measures with compact supports on a complete ultrametric space is itself a complete ultrametric space.

One of the main results of this section is the preservation of the class of complete ultrametric spaces by the functor of $*$-measures.

Section, "Monads generated by functors of $*$-measure is dedicated to the structure of a monad defined by functors of $*$-measure on the category **Ultr** of ultrametric spaces and non-expanding mappings. Several fundamental properties of such monads are established. Examples of non-isomorphic monads for different triangular norms $*$ are provided. In particular, this structure allows for defining the tensor product of $*$-measures in the category **Ultr**. For this purpose, the maximal ultrametric on the product of ultrametric spaces is considered. Furthermore, we define games in $*$-valued strategies on ultrametric spaces and prove the continuity of payoff functions for these games.

Finally, it is proven that any equilibrium for games with $*$-valued strategies can be approximated by almost equilibrium consisting of $*$-measures with finite supports.

**The practical significance of the results.** The dissertation is of theoretical nature. Its results can be applied in the general theory of functors in topological categories, the theory of ultrametric spaces, idempotent mathematics, and the general theory of equilibrium.

**Key words**: *$*$-measure, compact Hausdorff space, Milyutin mapping, exponential, $*$-valued strategy, non-additive measure, triangular norm, max-min measure, support of the measure, finite support, functor, functional, idempotent measure, tensor product, ultrametric space, category of compact spaces, non-expanding map, natural transformation, monad, equilibrium*

## The list of papers on the topic of the Thesis

(1) Sukhorukova, Kh., Zarichnyi, M.: On spaces of $*$-measures on ultrametric spaces. Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. **90**, 76–83 (2021).

(2) Sukhorukova, Kh., Zarichnyi, M.: On $*$-measure monads on the category of Ultrametric spaces. Carpathian Mathematical Publication. **14**(2), 429–436 (2022).

(3) Sukhorukova, Kh.: Spaces of non-additive measures generated by triangular norms. Matematychni Studii, **59**(2), 215—224. (2023).

## The list of conference thesises on the topic of the Thesis

(1) Sukhorukova Kh.: Categorical properties of functionals generated by the triangular norms In: Book of Abstracts The 14th Summer School "Analysis, Topology, Algebra and Applications p. 34. Pidzakharychi, Chernivtsi Region, Ukraine, August 10 -– 20, 2019.

(2) Sukhorukova Kh.: Functors in the category of compacts generated by triangular norms. In: Abstracts of the XV International scientific conference of students and young scientists "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies p. 9. V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine, March 13 – 14, 2020.

(3) Sukhorukova Kh.: On idempotent measures and functionals generated by triangular norms In: Abtracts of Contemporary Mathematics in Kielce. Kielce, Poland, February 24 -– 27, 2021.

(4) Sukhorukova Kh.: Ultrametric spaces of $*$-measures. In: Book of Abstracts International Online Conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk, p. 147, May 25-28, 2021.

(5) Sukhorukova Kh., Zarichnyi M.: On $*$-measures on ultrametric spaces. In: Program and abstracts of 25th Christmass discussion, p. 3–4. Lviv,

January 11 – 12, 2022.

(6) Zarichnyi M., Mazurenko N., Sukhorukova Kh.: On (in)homogeneous fractals generated by $*$-measures. In: Abtracts of the International online conference "Current Trends in Abstract and Applied Analysis", p. 55. Ivano-Frankivsk, Ukraine, May 12 – 15, 2022.

(7) Sukhorukova Kh.: On K-ultrametrics and $*$-measures. In: International Scientific Conference Devoted to 160 anniversary of Dvytro Grave (25.08.1863 – 19.12.1939), p. 113. Odesa, Ukraine, May 29 -– June 1, 2023.

# ЗМІСТ

# ВСТУП

**Актуальність теми.** Різні класичні конструкції загальної топології та топологічної алгебри носять функторіальний характер. Функторіальною є конструкція гіперпростору (експоненти), яку запропонував Ф. Гаусдорф. Також за допомогою добутків можна означити функтори у різних топологічних категоріях, зокрема степеневий функтор. В останні десятиліття у працях різних математиків побудовано загальну теорію функторів у топологічних категоріях, виділено класи функторів з певними властивостями, які мають застосування не лише в топології (теорія ретрактів і екстензорів, неметризовна топологія, нескінченновимірна топологія), а й у теорії ігор та математичній економіці.

До таких функторів належать, зокрема, функтори, пов'язані з поняттям міри, передусім функтори мовірнісних та ідемпотентних мір. Останній належить до ідемпотентної математики, тобто частини математики, в якій одна зі звичайних арифметичних операцій в полі дійсних чисел $\mathbb{R}$ замінюється ідемпотентною операцією (наприклад, операцією максимуму) і при цьому одержується напівкільце. Результати та методи ідемпотентної математики знаходять численні застосування в різних частинах математики, а також в інформатиці та інших дисциплінах. Огляд деяких результатів ідемпотентної математики можна знайти в [36].

Поняття ймовірнісної міри має свої аналоги в ідемпотентній математиці. Ідемпотентні міри (також звані мірами Маслова) введено в [32]. Топологічні та категоріальні аспекти теорії ідемпотентних мір розглядаються в [78]. У цій статті, зокрема, показано, що функтор ідемпотентних мір є відкритим функтором. Показано також, що функтори ідемпотентних мір та ймовірнісних мір у категорії компактних гаусдорфових просторів не ізоморфні. Ще одним аналогом є функтор max-min мір, розглянутий в [7].

Зауважимо, що ідемпотентні міри і max-min міри є прикладами неаддитивних мір. Неаддитивність у теорії міри чи не вперше проявилася у теорії ємностей Шоке. Особливо важливими виявилися напівнеперервні згори ємності, які запровадив Лін Чжоу (Lin) Zhou [81], а систематично вивчали Зарічний і Никифорчин [79]. Результати статті [79] знайшли застосування до ігор з непевністю [33].

Крім категорії компактних гаусдорфових просторів, функтори мір, поряд з іншими функторами, розглядалися в категоріях ультраметричних (неархімедових) просторів. Такі дослідження розпочали Гартоґ і де Вінк, які запровадили ультраметризацію множини ймовірнісних мір з компактними носіями на ультраметричних просторах у зв'язку з застосуваннями до семантики мов програмування. Згодом розглядалися також міри і ємності з компактними носіями на ультраметричних просторах: ідемпотентні міри [26], ємності [25].

В останні роки інтенсивно розвивається теорія розмитих метричних просторів. Особливо важливими є розмиті метричні простори в сенсі Ґеорґе і Веерамані. Одна з причин цього полягає у тому, що топологія індукована такою розмитою метрикою, метризовна в класичному сенсі. Розмиті метричні простори знаходять свої застосування не лише у різних розділах математики, але також у розпізнаваннні образів. Розмиті метричні простори тісно пов'язані з ймовірнісними метричними просторами в сенсі Ґеорґе і Веерамані [21]. У їх означенні фігурує поняття трикутної норми (t-норми), яке відіграє одну з основних ролей у наших дослідженнях.

Кожній трикутній нормі $*$ ми ставимо у відповідність функтор $M^*$, що діє в категорії компактних гаусдорфових просторів і неперервних відображень. Цей функтор виявляється нормальним у розумінні Є. Щепіна [60]. (Модифікований) функтор ідемпотентних мір, а також функтор max-min мір є частковими випадками нашої загальної конструкції. Показано, що існує опис цього функтора в термінах гіперпросторів добутку компактного простору на відрізок, аналогічних до опису ідемпотентних мір і max-min мір (Бридун і Зарічний). Такий підхід дозволяє встановити ізоморфізм функторів $M^*$ для різних трикутних норм $*$.

Функтори, означені на категорії компактних гаусдорфових просторів, при виконанні деяких природних умов, мають продовження на категорію тихоновських просторів та деякі пов'язані з нею категорії.

Теорії міри часто пов'язані з відповідними теоріями опуклості. Це добре відомо для ймовірнісних мір [64]. Також у [78] помічено зв'язок між ідемпотентними мірами та так званими опуклими множинами max-plus, визначеними в [11]. Зауважимо, що модифікований функтор ідемпотентних мір, тобто функтор $\cdot$-мір (тобто мір, які відповідають трикутній нормі множення (див. нижче)), відповідає теорії $\mathbb{B}$-опуклості розроблено в [5]. У свою чергу, опуклості використовуються в теорії рівноваги для ігор у мірнозначних стратегіях, див. [48].

Сказане вище дозволяє прийти до висновку, що тематика дисертації знаходиться на перехресті сучасних досліджень в облеста теорії функторів в топологічних і метричних категоріях, пов'язана з теорією розмитих метричних просторів і теорією ігор, і тому є актуальною.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри геометрії і топології (з 2020 року кафедри алгебри, топології та основ математики) механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми "Топологічна алгебра і асимптотична топологія та їх застосування" (номер державної реєстрації 0122U001602).

**Мета і завдання дослідження.** За *мету* було поставлено дослідити функтори, означені за допомогою трикутних норм $*$ в категорії компактних гаусдорфових просторів; дослідити простори $*$-мір з компактними носіями на ультраметричних (неархімедових) просторах; дослідити структуру монади, породженої функтором $*$-мір з компактними носіями на категорії ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень, і встановити деякі фундаментальні властивості таких монад; і доведення неперервності функцій виплат для цих ігор для застосування в теорії рівноваги.

*Завдання* дослідження полягають у розв'язанні таких задач:

1) означити ігри в $*$-значних стратегіях;
2) довести неперервність функцій виплат для цих ігор для застосування в теорії рівноваги.

*Об'єктом* дослідження є $*$-міри на компактних гаусдорфових просторах, породжені трикутними нормами $*$.

*Предметом* досліджень є властивості функтора $*$-мір на категорії компактних гаусдорфових просторів і неперервних відображень, а також властивості ультраметризації просторів $*$-мір з компактними носіями на категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень, структура монади, яку породжує функтор $*$-мір, а також застосуввання до рівноваги для ігор з $*$-значними стратегіями.

**Методи дослідження.** У дослідженнях проблематики дисертації застосовуються методи теорії функторів у топологічних категоріях, методи загальної топології, ідемпотентної математики, теорії категорій та теорії рівноваги.

**Наукова новизна отриманих результатів.** Усі одержані наукові результати є новими та оригінальними дослідженнями. У роботі вперше:

1. Для кожної трикутної норми $*$ означено поняття $*$-міри на компактному гаусдорфовому просторі і показано, що конструкція просто-

рів $*$-мір визначає функтор на категорії компактних гаусдорфових просторів та їх неперервних відображень.

2. Встановлено властивості функтора $*$-мір: неперервність, всюди щільність $*$-мір зі скінченними носіями, існування аналогу відображення Мілютіна.
3. Для просторів $*$-мір на компактних гаусдорфових просторах одержано зображення у вигляді гіперпросторів зі спеціальними властивостями. Доведено, що така конструкція гіперпростору задає ізоморфізм з функтором $*$-мір у категорії компактних гаусдорфових просторів.
4. Побудовано ультраметрику на множині $*$-мір з компактними носіями на ультраметричних просторах. Показано, що така ультраметризація визначає функтор на категорії ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень. Доведено, що цей функтор є локально нерозтягуючим і зберігає клас повних ультраметричних просторів.
5. Доведено, що функтор $*$-мір з компактними носіями на категорії ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень визначає монаду на цій категорії. Описано властивості тензорного множення, що визначається цією монадою.
6. Наведено приклади неізоморфних монад породжених різними функторами $*$-мір з компактними носіями на категорії ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень (при цьому самі функтори є ізоморфними).
7. Запропоновано поняття гри на ультраметричних просторах з $*$-мірозначними стратегіями. Показано неперервність фунції виплат для такої гри. Означено поняття рівноваги для такої гри і доведено, що кожна рівновага для такої гри апроксимується майже рівновагами зі скінченними носіями.

**Практичне значення отриманих результатів.** Дисертація носить теоретичний характер. Її результати можна застосовувати в загальній теорії функторів у топологічних категоріях, теорії ультраметричних просторів, ідемпотентній математиці, загальній теорії рівноваги.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статтей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору. Співавтору належить постановка задач, обговорення результатів та загальне керівництво роботою.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах:

1) 14-й Літній школі "Аналіз, топологія, алгебра та їх застосування", Підзахаричі, Чернівецький район, 2019;
2) XV Міжнародній науковій конференції студентів та молодих вчених "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях", Харків, 2020;
3) Міжнародній конференції "Contemporary Mathematics in Kielce 2021;
4) Міжнародній онлайн-конференції «Алгебраїчні та геометричні методи в аналізі», присвяченій пам'яті Юрія Трохимчука, 2021;
5) 25-ті Різдвяні дискусії, Львів, 2022;
6) Міжнародній онлайн-конференції «Сучасні тенденції абстрактного та прикладного аналізу», Івано-Франківськ, 2022;
7) Міжнародній науковій конференції, присвяченій 160-річчю Дмитра Могили (25.08.1863 - 19.12.1939), Одеса, 2023.

**Публікації.** Основні результати роботи опубліковано у 9 працях: 3 статті у журналах, які входять до переліку науквих фахових видань України ( [63], [62], [61]); 1 стаття у науковому виданні, віднесеному до третього квартиля (Q3) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank; 6 тез у матеріалах міжнародних конференцій.

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертація складається з анотації, вступу, п'яти розділів, списку використаних джерел. Повний обсяг роботи – 105 сторінок. Список використаної літератури займає 7 сторінок і налічує 81 найменування.

**Подяка.** Авторка висловлює щиру подяку науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету імені Івана Франка Михайлу Михайловичу Зарічному за керівництво роботою.

# РОЗДІЛ 1
# ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, МОТИВАЦІЯ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

## 1.1. Історична довідка, огляд літератури та мотивація досліджень

Дослідження функторіальних конструкцій у категоріях топологічних і метричних просторів має давню історію, яка починається з означення понять топологічних добутків, гіперпросторів (експонент), симетричних степенів, просторів ймовірнісних мір та ін. З появою мови та формалізму теорії категорій важливість ролі функторів постійно зростає. Намітилися нові застосування функторів у теорії абсолютних ретрактів і екстензорів, у нескінченновимірній топології. В останні десятиліття функтори і поняття, пов'язані з ними використовуються для моделей теорії ігор і математичної економіки, зокрема для теорії рівноваги.

Далі розглядаємо літературу, пов'язану з результатами дисертації, що дає змогу конкретизувати історичну інформацію.

## 1.2. Огляд літератури

У цьому розділі наводиться огляд літератури, пов'язаної з результатами дисертації. Насамперед розглядаємо результати, пов'язані з різними неаддитивними мірами, зокрема ідемпотентними мірами, max-min мірами, ємностями тощо. Окремо виділяємо випадок, коли міри розглядаються на ультраметричних (неархімедових) просторах. Оскільки центральне поняття дисертації, а саме поняття простору $*$-мір, визначає функтор у категорії компактних гаусдорфових просторів та у інших категоріях, ми наводимо також огляд літератури, пов'язаної з функторами в категоріях топологічних і метричних просторів.

Багато важливих функторів доповнюються до структури монади на відповідній категорії. У розділі також наведено також огляд літератури, що стосується монад.

Нарешті ми розглядаємо літературу, пов'язану з численними застосуваннями функторів та монад у теорії ігор, зокрема у теорії рівноваги.

**1.2.1. Ідемпотентні міри.** У статті Т.М. Радула [49] розглянуто ідемпотентний аналог відображення барицентра з простору $P(X)$ ймовірнісних мір на опуклому компакті $X$ в $X$, а саме відображення з простору $I(X)$ в $X$, де $X$ – max-плюс опуклий компакт в евклідовому просторі (чи загальніше, в просторі $\mathbb{R}^\tau$). Показано, що відкритість ідемпотентного барицентричного відображення еквівалентна відкритості відображення max-плюс опуклої комбінації. Як наслідок, показано, що ідемпотентне барицентричне відображення відкрите у випадку, коли $X = I(Y)$ для деякого метричного компакта $Y$.

У статті [12] розглянуто ідемпотентний аналог теорії Гатчінсона-Барнслі інваріантних мір для ітерованих систем стискуючих відображень на метричних компактах. Тут дається альтернативне доведення існування інваріантної ідемпотентної міри, основане на метризації просторів ідемпотентних мір, яку запропонував Заїтов [68] та на версії метризації Базилевич-Реповша-Зарічного [4].

Ідемпотентний аналог метричних просторів з мірами (mm-просторів) розглянуто у [7], такі об'єкти називаються mim-просторами. На множині всіх mim-просторів означено метрику. Показано, що утворений метричний простір сепарабельний і неповний.

У статті [78] М. М. Зарічний довів, що слабка* топологізація множин всіх ідемпотентних мір (мір Маслова) на компактних хаусдорфових просторах визначає функтор у категорії Comp компактних гаусдорфових просторів і цей функтор є нормальним у сенсі Є. В. Щепіна [60], зокрема має багато властивостей, спільних з функторами ймовірнісних мір та гіперпростору. Нагадаємо, що функтор в категорії компактних гаусдорфових просторів нормальний, якщо він неперервний, зберігає вагу, перетини, мономорфізми та епіморфізми, прообрази, точку та порожню множину.

Крім того, встановлено, що цей функтор визначає монаду в категорії **Comp** компактних гаусдорфових просторів. Також у цій статті доведено, що монада ідемпотентних мір містить монаду гіперпростору як підмонаду. Для просторів ідемпотентних мір означено аналог відображення Мілютіна і доведено його існування. Як застосування твердження про існування відображення Мілютина для ідемпотентних мір доведено, що функтор ідемпотентних мір є відкритим, тобто зберігає клас відкритих сюр'єктивних відображень. Показано, що на відміну від випадку просторів ймовірнісних мір, відповідність, яка ставить кожній парі ідемпотентних мір множину мір на добутку із зазначеними маргіналами, не є неперервною.

Стаття [2] містить елементи теорії міри, в якій напівполе додатних дійсних чисел замінюється ідемпотентним півкільцем і це призводить до поняття ідемпотентної міри, введеного Масловим. Тоді ідемпотентні міри або інтеграли зі щільністю відповідають супремумам функцій для відношення часткового порядку, індукованого ідемпотентною структурою. Наведено умови, за яких ідемпотентна міра має щільність, і на багатьох прикладах показано, що вони часто задовольняються. Ці умови залежать від структури решітки півкільця та булевої алгебри, в якій визначена міра. Як додаток, отримується необхідна та достатня умову для сім'ї ймовірностей, щоб задовольнити принцип великого відхилення.

Стаття [35] є коротким вступом до ідемпотентної та тропічної математики. Тропічну математику можна розглядати як результат так званого деквантування Маслова традиційної математики над числовими полями, коли стала Планка $\hbar$ прямує до нуля, приймаючи уявні значення.

У статті [36] представлено так званий алгебраїчний підхід до ідемпотентної математики: основні поняття та результати "симулюються" в чисто алгебраїчних термінах. Наведено деякі основні поняття та результати теорії ідемпотентних зображень. У рамках цієї теорії відоме перетворення Лежандра розглядається як $\mathbb{R}_{\max}$-версію традиційного перетворення Фур'є (це зауваження В.П. Маслова). Обговорюються деякі несподівані теореми типу Енгеля.

У статті [51] досліджується, за яких умов простір ідемпотентих мір є абсолютним ретрактом, а ідемпотентне барицентричне відображення є м'яким. При цьому відображення $f\colon X \to Y$ називають м'яким, якщо для кожної комутативної діаграми

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "\psi"'] & Y, \end{tikzcd}$$

у якій $i$ – відображення включення замкненої підмножини $A$ паракомпакта $Z$, існує відображення $\Phi\colon Z \to X$ таке, що $\Phi|A = \phi$ і $f\Phi = \psi$.

Статті в збірці [37] показують, як ідемпотентний аналіз відіграє об'єднуючу роль у багатьох галузях математики, пов'язаних із зовнішніми явищами та структурами – роль, подібну до тієї, яку відіграє функціональний аналіз у математичній фізиці або чисельні методи в рівняннях з частинними похідними. Така уніфікація зумовлює необхідність вивчення алгебраїчних та аналітичних структур, що виникають у просторах функцій зі значеннями в ідемпотентних півкільцях.

Частина одержаних результатів стосується теорії розмитих метричних просторів. Нагадаємо, що трійка $(X, M, *)$ називається розмитим метричним простором (у сенсі [21]), якщо $X$ — множина, а $M\colon X \times X \times (0, \infty) \to [0, 1]$ — функція, що задовольняє умови:

1. $M(x, y, t) > 0$;
2. $M(x, y, t) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;
3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;
4. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leqslant M(x, z, t + s)$;
5. функція $M(x, y, \cdot)\colon (0, \infty) \to [0, 1]$ неперервна.

Автори статті [6] як аналоги ймовірнісних мір розглядають ідемпотентні міри (міри Маслова). Вони запроваджують розмиту метризацію множини ідемпотентних мір на розмитих метричних просторах. Доводять, що ця розмита метризація визначає монаду в категорії розмитих метричних просторів і нерозтягуючих відображень. При цьому розглядаються розмиті метрики в сенсі [21].

У статті [59] показано, що конструкція гіперпростору в сенсі [56] визначає функтор в категорії розмитих метричних просторів і нерозтягуючих відображень.

У статті [8] запропоновано спільний підхід до опису топології просторів $I(X)$ та $J(X)$ (max-min мір). Зокрема, там наведено зображення елементів просторів $I(X)$ та $J(X)$ як компактних підмножин у конусі над компактним простором $X$.

У статті [70] автор встановлює, що функтор ідемпотентних ймовірнісних мір, що діє у категорії компактів та їх неперервних відображень, є досконало метризованим у сенсі В.В. Федорчука [20].

У цій статті [71] будується метрика у просторі ідемпотентних ймовірнісних мір на заданому компакті, яка є ідемпотентним аналогом метрики Канторовича у просторі ймовірнісних мір.

У статті [74] означено простір $I_f(X)$, який є ідемпотентним аналогом підпростору $P_f(X)$ простору ймовірнісних мір, означеного Є.В. Щепіним. Доведено, що для компактного простору $X$ включення $I_f(X) \in ANR$ виконується тоді і тільки тоді, коли $X \in ANR$. Далі показано, що функтор $I_f(X)$ зберігає властивість компакта бути $Q$-многовидом або гільбертовим кубом, властивості відображень шарів відображень бути $ANR$-компактними $Q$-многовидами, гільбертовим кубом (скінченним гільбертовим кубом). Зауважимо, що аналогічні властивості для функтора $P_f(X)$ доведено у статті [75].

Автором статті [27] показано, що функтор ідемпотентних ймовірнісних мір з компактним носієм, який діє в категорії тихоновських просторів та їх неперервних відображень, є нормальним. Встановлено, що цей функтор є монадичним. Далі, доведено, що функтор ідемпотентних ймовірнісних мір з компактним носієм зберігає відкритість неперервних відображень тихонівських просторів.

Зарічний і Мазуренко у статті [38] визначили поняття інваріантної міри для ідемпотентних мір (мір Маслова) в ультраметричнх просторах. Вони довели, що ультраметричний простір ідемпотентних мір на повному ультраметричному просторі також є повним, і використали цей факт, щоб довести існування інваріантної ідемпотентної міри для ітерованих систем стискуючих відображень. Також розглянули випадок напівнеперервних зверху ємностей, max-min мір, а також ідемпотентних мір на метричних просторах.

У статті [39] автори вводять поняття інваріантної ідемпотентної міри для системи ітерованих функцій у повному метричному просторі. Це ідемпотентний аналог поняття інваріантної ймовірнісної міри, визначеної Гатчінсоном. Поняття інваріантної ідемпотентної міри раніше розглядалося авторами для класу ультраметричних просторів. Одним із головних результатів є теорема існування та єдиності для інваріантних ідемпотентних мір у повних метричних просторах. На відміну від відповідного результату Хатчінсона для інваріантних імовірнісних мір, доведення наведене авторами не використовує метризацію простору ідемпотентних мір.

Стаття [13] присвячена метризації простору ідемпотентних мір за допомогою вкладення простору ідемпотентних мір у простір розмитих множин. Отримана метрика індукує топологію, більш сильну, ніж канонічна топологія поточкової збіжності. Ключовим результатом є існування бієкції між ідемпотентними мірами та нечіткими множинами та сполучення між марковським оператором IFS на ідемпотентних мірах і розмитим фрактальним оператором асоційованої розмитої IFS. Це дозволило авторам довести, що оператор Маркова для ідемпотентних мір є звуженням на індуковану метрику та, з цього, отримали теорему збіжності та алгоритми, які малюють картини інваріантних мір як зображення у відтінках сірого.

Кожен max-плюс опуклий компакт $X$ у евклідовому просторі визначає барицентричне відображення $I(X) \to X$. Т.М. Радул у статті [46] довів, що ідемпотентне відображення барицентру, обмежене точками з нетривіальними розшаруваннями, є тривіальним розшаруванням із шаром гільбертів куб при умові, що воно відкрите.

У статті [29] розглянута метризація просторів $I(X)$ для метричних компактних метричних просторів $X$. Ця метризація задовольняє властивості з означення рівномірно метризовного функтора з статті [20] і це дає змогу метризувати множину $I^+(X)$ як метричну пряму границю послідовності

$$I(X) \to I^2(X) \to I^3(X) \to \dots$$

Розглядається також поповнення $I^{++}(X)$ простору $I^+(X)$ і його компактифікація $I^\omega(X)$. Одним з основних результатів статті є

У статті [19] показано, що функтор ідемпотентних мір з компактними носіями на категорії тихоновських просторів зберігає клас досконалих відображень, а також зберігає вагу та індекс повноти рівномірних просторів.

Стаття [30] присвячена деяким геометричним властивостям функтора ідемпотентних мір. Наведено детальні доведення гомеоморфності просторів $P(X)$ та $I(X)$ для кожного компактного метричного простору $X$. Також наведене детальне доведення неізоморфності функторів ідемпотентних та ймовірнісних мір – відзначимо, що вперше це встановлено в [78]. Доведено також аналог теореми Катетова: якщо для компактного гаусдорфового простору $X$ простір $I_3(X) \setminus X$ спадково нормальний, то простір $X$ метризовний.

У статті [69] запропоновано метрику на множині $I(X)$ ідемпотентних мір таку, що природне вкладення гіперпростору $\exp X$ в $I(X)$ є ізометрією відносно метрики Гаусдорфа.

Зауважимо, що дотепер залишається відкритою проблема гомеоморфності просторів ймовірнісних мір $P(X)$ та ідемпотентних мір $I(X)$ для кожного компактного гаусдорфового простору $X$.

Вище згадано про поняття нормального функтора в категорії компактних гаусдорфових просторів. Нормальними є функтори гіперсиметричного степеня, гіперпростору, симетричного степеня (степеневий функтор – як частковий випадок), ймовірнісних мір та ін. Близькими до нормальних, тобто такими, що задовольняють усі умови з означення нормального функтора, крім однієї, є функтори суперрозширення, гіперпросторів включення, континуальної експоненти та напівнеперервних згори ємностей [79].

Оскільки функтор напівнеперервних згори ємностей близький до функторів ймовірнісних та ідемпотентних мір, то розглянемо його трохи детальніше. Дійснозначні функції $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ називаємо комонотонними, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ виконується

$$(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geqslant 0.$$

Ємністю на компакті $X$ називааємо функцію $c\colon \exp X \cup \{\varnothing\} \to I$. для якої виконуються наступні три умови (нижче $F, G$ – замкнені підмножини в $X$):

- $c(\varnothing) = 0, c(X) = 1$;
- якщо $F \subset G$, то $c(F) \leqslant c(G)$ (монотонність);
- якщо $c(F) < a$. то існує така відкрита множина $U \supset F$, що для кожного $G \subset U$ виконується $c(G) < a$ (напівнеперервність зверху).

Множину ємностей на компакті $X$ позначимо через $MX$. Введемо на множині $MX$ топологію, передбазу якої складають множини вигляду

$$O_{-}(F, a) = \{c \in MX \mid c(F) < a\},$$

де $F \subseteq X$ – замкнена, $a \in \mathbb{R}$, і

$$O_{+}(U, a) = \{c \in MX \mid c(U) > a\} = \{c \in MX \mid \text{існує компакт } F \subset U, c(F) > a\},$$

де $U \subseteq X$ – відкрита, $a \in \mathbb{R}$.

Конструкція простору ємностей продовжується до функтора в категорії **Comp**. Для відображення $f : X \to Y$ в **Comp** відображення $Mf \colon MX \to MY$ визначаємо формулою $Mf(c)(F) = c(f^{-1}(F))$, де $c \in MX$, $F \subset Y$ – замкнена.

Функтор ємностей в категорії **Comp** задовольняє всі умови з означення нормального функтора, крім умови збереження прообразів.

Для функторів ймовірнісних мір, ідемпотентних мір, max-min мір та ін. можна побудувати так звані відображення Мілютіна, які дають змогу звести загальний випадок до нульвимірного випадку (нагадаємо, що простір називають нульвимірним, якщо він має базу з відкрито-замкнених множин).

У статті [**?**] розглянуто простір ймовірнісних мір Радона $\hat{P}(X)$, наділений слабкою топологією відносно множини обмежених неперервних функцій на просторі $X$ у топології рівномірної збіжності. Відображення $f \colon X \to Y$ називають відображенням Мілютіна, якщо існує відображення $g \colon Y \to \hat{P}(X)$ таке, що $\mathrm{supp}(g(y)) \subset f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Якщо при цьому кожна ймовірнісна міра $g(y)$ безатомна (тобто $g(y)(\{x\}) = 0$ для кожного $x \in f^{-1}(y)$, то $f$ називається безатомним відображенням Мілютіна.

У статті наведено характеризацію безатомних відображень Мілютіна. Крім того, доведено, що кожна відкрита сюр'єкція повних метричних просторів з досконалими шарами є безатомним відображенням Мілютіна.

Відображення $f\colon X \to Y$ називають точним відображенням Мілютіна, якщо існує відображення $g\colon Y \to \hat{P}(X)$ таке, що $\mathrm{supp}(g(y)) = f^{-1}(y)$, $y \in Y$. У статті одержано також результати про точні відображення Мілютіна повних метричних просторів з сепарабельними досконалими шарами.

Дослідженням точних і безатомних відображень Мілютіна присвячено також статті [1] та [54].

**1.2.2. Ультраметричний випадок.** Ряд публікацій стосується ідемпотентних мір та інших неадитивних мір на ультраметричних (неархімедових) просторах. Нагадаємо, що метрика $d$ на множині $X$ називається ультраметрикою, якщо вона задовольняє сильну нерівність трикутника $d(x, y) \leqslant \max\{d(x, z), d(z, y)\}$, $x, y, z \in X$.

Губаль і Зарічний [26] перенесли на ідемпотентний випадок конструкції Гартога і де Вінка [14] ультраметрики на множині ймовірнісних мір. Вони довели, що утворений ультраметричний простір ідемпотентних мір є повний, якщо повний вихідний ультраметричний простір. Пропонована конструкція визначає функтор на категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень. Цей функтор є функторіальною частиною деякої монади на вказаній категорії. Показано, що одержана монада містить монаду гіперпростору як підмонаду.

Стаття [77] містить огляд результатів щодо просторів мір на компактних і ультраметричних просторах, пов'язаних з процедурою деквантування в розумінні школи Маслова. Наведено аналог ультраметризації як ультраметризації на множині ймовірнісних мір з компактним носієм.

Ультраметризація множини всіх ймовірнісних мір з компактними носіями на ультраметричних просторах була вперше визначена Гартогом і де Вінком [14]. У статті [9] автори розглядають подібну конструкцію для так званих max–min мір на ультраметричних просторах. Зокрема, довели, що функтори max–min мір та ідемпотентних мір ізоморфні на категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень. Ці функтори утворюють монади на категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень і в [9] показано, що монади, утворені цими функторами, не ізоморфні.

У теорії розмитих метричних просторів існує аналог ультраметрики, а саме розмита ультраметрика (див., наприклад, [63]). У статті [63] показано, що функтор ймовірнісних мір з компактними носіями на категорії розмитих ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень утворює монаду на цій категорії і доведено, що функтор $G$-симетричного степеня має продовження на категорію Клейслі цієї монади (тобто категорію розмитих ультраметричних просторів і мірозначних нерозтягуючих відображень). У зв'язку з цим згадаємо, що трійка $(X, M, *)$ називається розмитим метричним простором (у сенсі [21]), якщо $X$ — довільна множина, $*$ — трикутна норма і $M\colon X \times X \times (0, \infty) \to [0, 1]$ — функція, що задовольняє умови для всіх $x, y, z \in X$ і $s, t \in (0, \infty)$:

(1) $M(x, y, t) > 0$;

(2) $M(x, y, t) = 1$ тоді і лише тоді, коли $x = y$;

(3) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;

(4) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leqslant M(x, z, t + s)$;

(5) функція $M(x, y, \cdot)\colon (0, \infty) \to [0, 1]$ неперервна.

Розмита метризація просторів ідемпотентних мір на компактних розмитих метричних просторах запропонована в [53].

Стаття [34] присвячена побудові розмитої ультраметрики на множині ідемпотентних мір з компактними носіями на розмитому ультраметричному просторі. При цьому для трикутної норми $* = \min$ розмита метрика $(M, *)$ називається розмитою ультраметрикою [40], якщо вона задовольняє таке посилення умови (4): $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leqslant M(x, z, \max\{t, s\})$. Відомо, що остання умова еквівалентна умові: $M(x, y, t) * M(y, z, t) \leqslant M(x, z, t)$. Досліджується властивість повноти одержаного простору. Показано, що множина ідемпотентних мір зі скінченними носіями всюди щільна в розглядуваному просторі.

О. Савченко запропонував розглядати поняття, яка дозволяє з однієї позиції розглядати поняття метричного та ультраметричного простору.

Нехай $K \geqslant 0$ або $\infty$ . Метрику $d$ на множині $X$ називають К-ультраметрикою, якщо вона задовольняє таку умову: для кожних $x, y, z \in X$ маємо

$$d(x, y) \leqslant \max\{d(x, z), d(z, y)\},$$

якщо $\min\{d(x, z), d(z, y)\} \in K$.

Зрозуміло, що при $K = 0$ одержуємо поняття метричного простору, а при $K = \infty$ поняття ультраметричного простору. Зауважимо також, що кожен К-ультраметричний простір є $K'$-ультраметричним простором,якщо $K' \leqslant K$.

Також у цій статті запропоновано рівномірну ультраметризацію на множині ймовірнісних мір з компактними носіями на рівномірно $K$-ультраметричному просторі, тобто на такому $K$-ультраметричному просторі, для якого виконано умову: існує $\epsilon > 0$ таке, що кожна куля $B_K(x)$ є кулею $B_{K+\epsilon}(x)$.

Т. Радул [52] означив загальне поняття еквізв'язного функтора і показав, що кожен такий функтор має властивості, схожі на властивості функторів ймовірнісних та ідемпотентних мір.

**1.2.3. Застосування в теорії ігор.** У теорії ігор добре відоме поняття змішаних стратегій, тобто стратегій зі значеннями в просторах ймовірнісних мір $P(X)$, де $X$ – простір чистих стратегій, який переважно вважається компактним гаусдорфовим простором. Одним з популярних напрямків теорії рівноваги полягає у відміні від просторів ймовірнісних мір на користь мір неадитивних. Зокрема, відзначимо публікації [15,17,22,23,33]. Зарічний і Кожан [33] розглядали ємнісnозначні стратегії. У статті [23] автори розвинули результати Кожана і Зарічного: обчислили тензорні добутки для випадку $2 \times 2$ гри з непевністю Найта, а також вивели існування рівноваги Неша.

Потреби теорії ринкової рівноваги привели до розгляду ідемпотентних версій ігор у змішаних стратегіях, тобто ігор зі стратегіями зі значеннями у просторах ідемпотентних мір. Для таких версій можна довести теорему існування рівноваги Неша, див. [47].

## 1.3. Термінологія, позначення, допоміжні поняття і результати

Як правило, у дисертації “простір” означає метричний або топологічний простір — це буде зрозуміло з контексту. “Відображення” просторів означає неперервне відображення, якщо не передбачається, що таке відображення виникає як результат певної конструкції і його неперервність потребує доведення. Замикання множини $A$ у просторі позначається $\bar{A}$.

Через $C(X, Y)$ позначаємо множину неперервних відображень топологічного простору $X$ в топологічний простір $Y$.

**1.3.1. Трикутні норми .** За означенням, t-норма (трикутна норма) — це функція $T\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, яка задовольняє такі властивості:

Комутативність: $T(a, b) = T(b, a)$

Монотонність: $T(a, b) \leqslant T(c, d)$, якщо $a \leqslant c$ і $b \leqslant d$

Асоціативність: $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$

Число 1 виступає як нейтральний елемент : $T(a, 1) = a$

Оскільки t-норма є бінарною напівгруповою алгебраїчною операцією на інтервалі $[0, 1]$, також поширене інфіксне алгебраїчне позначення, причому при цьому t-норма зазвичай позначається як $*$.

Зауважимо, що для кожної t-норми $*$ маємо $0 * x = 0$ для кожного $x \in [0, 1]$.

Визначальними умовами t-норми є умови частково впорядкованого абелевого моноїда на дійсному одиничному інтервалі [0, 1]. (Порівняйте впорядковану групу.) Моноїдальну операцію будь-якого частково впорядкованого абелевого моноїда L деякі автори називають трикутною нормою на L.

Наведемо деякі приклади:

1) Мінімальна t-норма $\top_{\min}(a, b) = \min\{a, b\}$,

(Це поточково найбільша t-норма.)

2) Продукт t-норма $\top_{\text{prod}}(a, b) = a{\cdot}b$ (звичайний добуток дійсних чисел).

3) t-норма Лукасевича $\top_{\text{Luk}}(a, b) = \max\{0, a + b - 1\}$. Назва походить від того, що t-норма є стандартною семантикою для сильного сполучення в нечіткій логіці Лукасевича. Це нільпотентна архімедова t-норма, поточково менша за t-норма добутку.

Конструкція порядкової суми утворює t-норму з сім'ї t-норм, згортаючи їх у неперетинні підінтервали інтервалу $[0, 1]$ і доповнюючи до t-норми, використовуючи мінімум на решті одиничного квадрата. Наведемо точне формальне означення:

Нехай $T_i$, де $i$ пробігає набір індексів $I$ — деяка сім'я t-норм і $(a_i, b_i)$ — сім'я попарно диз'юнктних (непорожніх) відкритих підінтервалів відрізка $[0, 1]$. Тоді функція $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$, означена формулою

$$T(x, y) = \begin{cases} a_i + (b_i - a_i) \cdot T_i\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}, \frac{y-a_i}{b_i-a_i}\right) & \text{якщо } x, y\ [a_i, b_i]^2 \\ \min(x, y) & \text{інакше} \end{cases}$$

є t-нормою.

Ця конструкція дозволяє генерувати багато нових прикладів t-норм.

**1.3.2. Функтори.** Через **Comp** позначаємо категорію, об'єктами якої є компактні гаусдорфові простори, а морфізмами – неперервні відображення таких просторів.

Через **Ultr** позначаємо категорію, об'єктами якої є ультраметричні простори, а морфізмами – нерозтягуючі відображення таких просторів.

Спочатку опишемо функтор гіперпростору (експоненти) exp. Для компактного гаусдорфового простору $X$ через $\exp X$ позначаємо множину всіх непорожніх замкнених підмножин в просторі $X$.

Для кожних $U_1, \dots, U_n \subset X$, нехай

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in \exp X \mid A \subset \cup_{i=1}^n U_i,\ A \cap U_i \neq \varnothing,\ i = 1, \dots, n\}.$$

Тоді сім'я

$$\{\langle U_1, \dots, U_n \rangle \mid U_1, \dots, U_n \text{ відкриті},\ n \in \mathbb{N}\}$$

утворює базу так званої топології Віторіса на просторі $\exp X$.

Отриманий топологічний простір, який є компактним і гаусдорфовим, називаємо гіперпростором простору $X$.

Для кожного неперервного відображення $f\colon X \to Y$ компактних гаусдорфових просторів означимо відображення $\exp f\colon \exp X \to \exp Y$ формулою:

$$\exp f(A) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}, \quad A \in \exp X.$$

Одержуємо функтор гіперпростору (експоненти).

Метричний простір $(X, d)$ називаємо ультраметричним, якщо у ньому нерівність трикутника посилена до нерівності

$$d(x, z) \leqslant \max\{d(x, y), d(y, z)\},\ x, y, z \in X,$$

яку називають сильною нерівністю трикутника. Ультраметричні простори також відомі під назвою неархімедових просторів та рівнобедрених просторів.

Наведемо формальне означення. Ультраметрикою на множині $M$ називають функцію $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ таку, що для кожних $x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) \geqslant 0$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetry);
3. $d(x, x) = 0$;
4. if $d(x, y) = 0$, then $x = y$;
5. $d(x, z) \leqslant \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ (strong triangle inequality or ultrametric inequality).

Одним з найважливіших прикладів ультраметрики є $p$-адична метрика на множині раціональних чисел $\mathbb{Q}$, означена для кожного простого числа $p$.

**1.3.3. Монади.** Деякі функтори можна наділити додатковою структурою, яку ми називаємо монадою. Використовується також інша термінологія: трійка, стандартна конструкція.

Нехай $C$ — деяка категорія. Монадою на $C$ називають ендофунктор $T\colon C \to C$ разом з двома природними перетвореннями: $\eta\colon 1_C \to T$ (тут $1_C$ означає тотожній функтор на категорії $C$) і $\mu\colon T^2 \to T$ (тут $T^2$ означає композицію $T \circ T\colon C \to C$).

при цьому мають виконуватися такі співвідношення:

$\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$ (як природні перетворення $T^3 \to T$); тут $T\mu$ і $\mu T$ утворюються за допомогою "горизонтальних композицій"),

$\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = 1_T$ (як природні перетворення $T \to T$; при цьому $1_T$ означає природне перетворення з функтора $T$ в функтор $T$). Ці умови можна інакше записати як комутативність таких діаграм:

$$\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}$$

(асоціативність множення), а також

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "1_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "1_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

(двосторонність одиниці).

Нехай $\mathbb{T}_i = (T_i, \mu_i, \eta_i)$, $i = 1, 2$ – монади на категорії $\mathcal{C}$. Природне перетворення $\alpha\colon T_1 \to T_2$ називається морфізмом монади $\mathbb{T}_1$ в монаду $\mathbb{T}_2$, якщо діаграми

$$\begin{tikzcd} 1_{\mathcal{C}} \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[dr, "\eta_2"'] & T_1 \arrow[d, "\alpha"] \\ & T_2 \end{tikzcd}$$

та

$$\begin{tikzcd} T_1^2 \arrow[r, "T_1\alpha"] \arrow[d] & T_1T_2 \arrow[r, "T_2\alpha"] & T_2^2 \arrow[d, "\alpha_2"'] \\ T_1 \arrow[rr, "\alpha"'] & & T_2 \end{tikzcd}$$

комутативні.

Якщо $\alpha = (\alpha_X$ і всі $\alpha_X$ є мономорфізмами (вкладеннями у випадку топологічних категорій), що монада $\mathbb{T}_1$ є підмонадою монади $\mathbb{T}_2$.

Наведемо деякі приклади монад у категорії **Comp**, пов'язані з тематикою дисертації.

1) Степенева монада $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$, де $T = (-)^\alpha$ – степеневий функтор, $\eta$ – діагональне природне перетворення, $\eta_X(x) = (x)_{i<\alpha}$, а природне перетворення $\mu\colon T^2 \to T$ діє за формулою:

$$\mu_X((x_{ij})_{i<\alpha})_{j<\alpha}) = (x_{ii})_{i<\alpha}.$$

2) Монада гіперпростору $\mathbb{H}$. Її функторіальною частиною є функтор гіперпростору exp. Природне перетворення $u\colon \exp^2 \to \exp$ – це природне

перетворення об'єднання,

$$u_X(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A},\ \mathcal{A} \in \exp^2 X.$$

Природне перетворення $s\colon 1 \to \exp$ задається формулою

$$s_X(x) = \{x\},\ x \in X.$$

Підмонадою монади гіперпростору є монада континуального гіперпростору $\mathbb{H}_\mathcal{C} = (exp_\mathcal{C}, s, u)$. При цьому для кожного $X$ простір $exp_\mathcal{C}(X)$ складається з усіх підконтинуумів (компактних зв'язних множин) в просторі $X$.

3) Монада ймовірнісних мір. Для кожної функції $\varphi \in C(X)$ означимо функцію $\bar{\varphi}\colon P(X) \to \mathbb{R}$ формулою $\bar{\varphi}(\mu) = \int_X \varphi d\mu$, $\mu \in P(X)$. Означимо відображення $\psi_X\colon P^2(X) \to P(X)$ формулою

$$\psi_X(\mathfrak{M})(\varphi) = \mathfrak{M}(\bar{\varphi}),\ \mathfrak{M} \in P^2(X),\ \varphi \in C(X).$$

Крім того, природне перетворення Дірака $\delta\colon 1 \to P$ задається умовою $\delta_X(x) = \delta_x$ (міра Дірака, зосереджена в точці $x \in X$).

4) Монада гіперпросторів включення. Сім'ю множин $\mathcal{A} \in \exp^2 X$ називаємо гіперпростором включення в просторі $X$, якщо

$$A \in \mathcal{A},\ B \supset A \implies B \in \mathcal{A}.$$

Множину всіх гіперпросторів включення на $X$ позначаємо через $G(X)$. Зауважимо, що кожну сім'ю $\mathcal{A} \in G(X)$ можна ототожнити з 0-1-значною неаддитивною мірою $\mu$, означеною на замкнених підмножинах простору $X$:

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{якщо } A \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Природне перетворення $\eta\colon 1 \to G$ задається умовою

$$\eta_X(x) = \{A \in \exp X \mid x \in A\},\ x \in X.$$

Природне перетворення $\mu\colon G^2 \to G$ задається умовою

$$\mu_X(\mathfrak{A}) = \bigcup\{\cap\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}.$$

Досліджувалися також підмонади монади гіперпросторів включення, наприклад монада суперрозширення. При цьому елементами суперрозширення простору $X$ є гіперпростори включення, що є максимальними відносно включення зчепленими системами.

5) Монада напівнеперервних згори ємностей. Функтор напівнеперервних згори ємностей в категорії **Comp** означили М. Зарічний та О. Никифорчин [79]. Цей функтор позначено $M$ у статті [79], що дає певний конфлікт позначень з позначеннями дисертації, однак не приводитиме до непорозумінь. Нагадаємо, що ємність – це функція з множини усіх замкнених підмножин розглядуваного простору у одиничний сегмент $[0,1]$, що задовольняє певні властивості.

Для кожного $x \in X$ нехай

$$\eta_X(x)(F) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in F, \\ 0, & \text{якщо } x \notin F. \end{cases}$$

Одержуємо природне перетворення $\eta\colon 1 \to M$.

Для того, щоби означити природне перетворення $\mu\colon M^2 \to M$, означимо для кожного $a \in [0,1]$ і кожної замкненої множини $F$ простору $X$: $F_a = \{c \in M(X) \mid c(F) \geqslant a\}$. Тоді за означенням

$$\mu_X(\mathcal{C})(F) = \sup\{a \in [0,1] \mid \mathcal{C}(F_a) \geqslant a\},\ \mathcal{C} \in M^2(X),\ F \in \exp X.$$

У статті [44] показано, що функтор напівнеперервних згори ємностей визначає єдину монаду у класі монад, які допускають автоморфізми спеціального вигляду. Це ж доведено для двох підфункторів функтора ємностей: функтора ємностей необхідності і ємностей достатньості.

6) Монада ідемпотентних мір $\mathbb{I} = (I, \delta, \zeta)$. Природне перетворення $\delta$ — це природне перетворення Дірака,

$$\delta_X(x) = \delta_x \in I(X),\ x \in X,$$

а природне перетворення множення $\zeta\colon I^2 \to I$ задається формулою

$$\zeta_X(M)(\varphi) = M(\bar{\varphi}),\ M \in I^2(X),\ \varphi \in C(X),$$

де $\bar{\varphi}\colon I(X) \to \mathbb{R}$ — функція, означена формулою $\bar{\varphi}(\mu) = \mu(\varphi)$, для кожного $\mu \in I(X)$.

Деякі результати, пов'язані з алгебраїчними аспектами опуклості, функторів ідемпотентних мір та функтора напівненерервних згори ємностей, наведено у статті [43].

У статті [59] показано, що функтор гіперпростору в категорії розмитих метричних просторів визначає монаду на цій категорії.

Приклади монад на категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень можна знайти в статтях [25, 26].

# РОЗДІЛ 2
# ПРОСТОРИ $*$-МІР НА КОМПАКТНИХ ГАУСДОРФОВИХ ПРОСТОРАХ

У цьому розділі для кожної трикутної норми $*$ ми запроваджуємо поняття $*$-міри як функціонала на просторі неперервних функцій $C(X, \mathbb{I})$. Множина усіх $*$-мір на компактному гаусдорфовому просторі наділяється слабкою* топологією. Показано, що утворений простір $*$-мір є компактним гаусдорфовим. Ця конструкція визначає коваріантний функтор на категорії компактних гаусдорфових просторів і неперервних відображень.

Одним з основних результатів розділу є опис просторів $*$-мір як гіперпросторів множин з певними властивостями. Це дає змогу порівнювати між собою простори $*$-мір для різних трикутних норм $*$.

## 2.1. Означення і допоміжні твердження

**2.1.1. Функціонали.** Нехай $X$ — компактний гаусдорфовий простір. Нагадаємо, що через $\mathbb{I}$ позначаємо одиничний відрізок $[0,1]$.

Функціонал $\mu\colon C(X,\mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ називається $*$-мірою, якщо

1. $\mu(c_X) = c$;
2. $\mu(\lambda * \varphi) = \lambda * \mu(\varphi)$;
3. $\mu(\varphi \vee \psi) = \mu(\varphi) \vee \mu(\psi)$,

для всіх $c \in \mathbb{I}$ і $\varphi, \psi \in C(X,\mathbb{I})$. (Тут і надалі через $\vee$ позначатимемо максимум.)

**Зауваження 2.1.1.** Поняття $*$-міри нагадує поняття ідемпотентної міри [78], а також max-min міри [8]. На відміну від цього означення, у випадку просторів ідемпотентних мір і max-min мір, ми працюємо з просторами $C(X,\mathbb{I})$. Це дозволяє трактувати ці відомі міри подібним чином (зверніть увагу, що коефіцієнти беруться з $[-\infty, 0]$ в теорії ідемпотентних мір, тоді як вони беруться з $[-\infty, \infty]$ в теорії max-min мір).

Нехай $x \in X$. Позначимо через $\delta_x\colon C(X,\mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ міру Дірака, тобто відображення, яке діє наступним чином:

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x),\ \varphi \in C(X,\mathbb{I}).$$

Очевидно, що міра $\delta_x$ є $*$-мірою.

Розглянемо ще один приклад. Для кожного $\varphi \in C(X,\mathbb{I})$ нехай $\omega_X(\varphi) = \sup\{\varphi(x) \mid x \in X\}$. Легко перевірити, що $\omega_X$ є $*$-мірою на $X$.

Через $M^*(X)$ позначатимемо множину всіх $*$-мір на компактному гаусдорфовому просторі $X$.

Нехай

$$\mu \in M^*(X),\ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C(X,\mathbb{I}),\ \varepsilon > 0.$$

Приймаємо

$$O\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon\rangle = \{\nu \in M^*(X) \mid |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Тоді множини вигляду $O\langle\mu;\varphi_1,\dots,\varphi_n;\varepsilon\rangle$, де $\mu\in M^*(X)$, $\varphi_1,\dots,\varphi_n\in C(X,\mathbb{I})$, $n\in C(X,\mathbb{N}$ і $\varepsilon>0$, є базою $*$-слабкої топології на $M^*(X)$.

Нехай $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in[0,1]$ такі, що $\vee_{i=1}^n\lambda_i=1$. Нехай також $\mu_1,\dots,\mu_n\in M^*(X)$. Визначтимо $\mu\colon C(X,\mathbb{I})\to\mathbb{I}$ за формулою

$$\mu(\varphi)=\vee_{i=1}^n\lambda_i*\mu_i(\varphi). \tag{2.1}$$

Тоді зрозуміло, що $\mu\in M^*(X)$. Через $M^*_\omega(X)$ позначимо множину $*$-мір на $X$ виду (4.1).

Далі ми припускаємо, що спочатку застосовується $*$, а потім $\vee$.

Нехай $X,Y$ — компактні хаусдорфові простори,

$$\mu=\vee_{i=1}^n\alpha_i*\delta_{x_i}\in M^*(X),\ \nu=\vee_{j=1}^m\beta_i*\delta_{y_j}\in M^*(Y).$$

Визначимо $\mu\otimes\nu=\vee_{i=1}^n\vee_{j=1}^m\alpha_i*\beta_j*\delta_{(x_i,y_j)}$. Легко довести, що $\mu\otimes\nu\in M^*(X\times Y)$. Аналогічно, можна визначити $\mu_i\in M^*(X_i)$, як і вище, $i=1,\dots,k$, можна визначити

$$\mu_1\otimes\dots\otimes\mu_k=\otimes_{i=1}^k\mu_i\in M^*(X_1\times\dots\times X_k).$$

Позначимо $\iota\colon M^*(X)\to\prod_{\varphi\in C(X,\mathbb{I})}\mathbb{I}_\varphi$ (тут $\mathbb{I}_\varphi$ є копією $\mathbb{I}$) відображення, визначеного таким чином:

$$\iota(\mu)=(\mu(\varphi))_{\varphi\in C(X,\mathbb{I})},\ \mu\in M^*(X).$$

**Твердження 2.1.2.** *Відображення $\iota$ є вкладенням.*

*Доведення.* Той факт, що $\iota$ є вкладенням, безпосередньо випливає з визначення $^*$-слабкої топології. $\square$

Надалі ми ототожнюємо множину $M^*(X)$ з її образом $\iota(M^*(X))$. Також ми розглядаємо кожен $x=(x_\varphi)_{\varphi\in C(X,\mathbb{I})}$ як функціонал на $C(X,\mathbb{I})$, $x(\varphi)=x_\varphi$, $\varphi\in C(X,\mathbb{I})$.

**Твердження 2.1.3.** *Множина $\iota(M^*(X))$ є закритою підмножиною в $\prod_{\varphi\in C(X,\mathbb{I})}\mathbb{I}_\varphi$.*

*Доведення.* Припустимо, що $\mu \in \left(\prod_{\varphi \in C(X,\mathbb{I})} \mathbb{I}_\varphi\right) \setminus M^*(X)$.

1) Якщо існує $c \in \mathbb{I}$ такий, що $\mu(c) \neq c$, то $O\langle \mu; c_X; |c - \mu(c)|\rangle$ є околом $\mu$, що не міститься в $M^*(X)$.

2) Якщо $\mu(\varphi \vee \psi) \neq \mu(\varphi) \vee \mu(\psi)$, то

$$O\langle \mu; \varphi, \psi, \varphi \vee \psi; \frac{|\mu(\varphi \vee \psi) - (\mu(\varphi) \vee \mu(\psi))|}{2}\rangle$$

- це окіл $\mu$, що не міститься в $M^*(X)$.

3) Припустимо, що $r = |\mu(c * \varphi) - c * \mu(\varphi)| > 0$. Оскільки $*$ - неперервна, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $|c * a - c * \mu(\varphi)| < \frac{r}{3}$, коли $|a - \mu(\varphi)| < \varepsilon$. Тоді

$$O\langle \mu; \varphi, c * \varphi; \min\left\{\varepsilon, \frac{r}{3}\right\}\rangle$$

є околом $\mu$, що не міститься в $M^*(X)$. □

**Наслідок 2.1.4.** *Для кожного компактного хаусдорфового простору $X$ простір $M^*(X)$ є компактним.*

*Доведення.* Дійсно, за Твердженнями 2.1.2 і 2.1.3 простір $M^*(X)$ можна вкласти як закриту підмножину в компактний хаусдорфовий простір $\prod_{\varphi \in C(X,\mathbb{I})} \mathbb{I}_\varphi$ і, отже, також є компактним за Хаусдорфом. □

Маючи неперервне відображення $f \colon X \to Y$ компактних гаусдорфових просторів та $\mu \in M^*(X)$, визначимо $M^*(f)(\mu) : C(X, \mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ наступним чином:

$$M^*(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f).$$

**Твердження 2.1.5.** *Нехай $f \colon X \to Y$ — неперервне відображення компактних хаусдорфових просторів. Тоді $M^*(f)(\mu) \in M^*(Y)$ для кожного $\mu \in M^*(X)$. Отримане відображення $M^*(f) \colon M^*(X) \to M^*(Y)$ є неперервним.*

*Доведення.* Нехай $\mu \in M^*(X)$ і $\varphi, \psi \in C(Y, \mathbb{I})$. Очевидно, що $M^*(f)(\mu)(c_X) = c,\ c \in \mathbb{I}$, і

$$M^*(f)(\mu)(\lambda \wedge \varphi) = \mu((\lambda \wedge \varphi) f) = \lambda \wedge \mu(\varphi f) = \lambda \wedge M^*(f)(\mu)(\varphi).$$

У нас також є

$$M^*(f)(\mu)(\varphi \vee \psi) = \mu((\varphi \vee \psi)f) = \mu(\varphi f \vee \psi f) = \mu(\varphi f) \vee \mu(\psi f)$$
$$= M^*(f)(\mu)(\varphi) \vee M^*(f)(\mu)(\psi).$$

Таким чином, $M^*(f)(\mu) \in M^*(Y)$. Отже, ми отримуємо відображення $M^*(f)\colon M^*(X) \to M^*(Y)$.

Нехай $\mu \in M^*(X)$, $\psi_1, \dots, \psi_k \in C(Y, \mathbb{I})$ і $\varepsilon > 0$. Тоді множина $O(M^*(f)(\mu); \psi_1, \dots, \psi_n; \varepsilon)$ є базою околів $M^*(f)(\mu)$. Оскільки

$$M^*(f)(\mu)(O(\mu; \psi_1 f, \dots, \psi_n f; \varepsilon)) \subset O(M^*(f)(\mu); \psi_1, \dots, \psi_n; \varepsilon),$$

ми робимо висновок, що відображення $M^*(f)$ неперервне. □

Власне, $M^*$ є функтором з категорії компактних хаусдорфових просторів і неперервних відображень в себе. Те, що $M^*$ є функтором, означає наступне:

$$M^*(gf) = M^*(g)M^*(f),\ M^*(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{M^*(X)}.$$

**Твердження 2.1.6.** *Нехай $\mu_1, \dots, \mu_n \in M^*(X)$ і нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{I}$ будуть такими, що $\vee_{i=1}^n \lambda_i = 1$.*

*Визначимо $\mu = \vee_{i=1}^n \lambda_i * \mu_i\colon C(X, \mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ таким чином:*

$$\mu(\varphi) = \vee_{i=1}^n \lambda_i * \mu_i(\varphi).$$

*Тоді $\mu \in M^*(X)$.*

*Доведення.* Ми перевіряємо умови з означення $*$-міри:

1) $\mu(c_X) = \vee_{i=1}^n \lambda_i * \mu_i(c_X) = \vee_{i=1}^n \lambda_i * c_X \leqslant 1 * c = c$;

2) $\mu(\lambda * \varphi) = \vee_{i=1}^n \lambda_i * \mu_i(\lambda * \varphi) = \vee_{i=1}^n \lambda_i * \lambda * \mu_i(\varphi) = \lambda * (\vee_{i=1}^n \lambda_i * \mu_i(\varphi)) = \lambda * \mu(\varphi)$;

3) $\mu(\varphi \vee \psi) = \vee_{i=1}^n \lambda_i * \mu_i(\varphi \vee \psi) = \vee_{i=1}^n \lambda_i * (\mu_i(\varphi) \vee \mu(\psi)) = \vee_{i=1}^n [(\lambda_i * \mu_i(\varphi)) \vee (\lambda_i * \mu_i(\psi))] = [\vee_{i=1}^n (\lambda_i * \mu_i(\varphi)] \vee [\vee_{i=1}^n (\lambda_i * \mu_i(\psi))] = \mu(\varphi) \vee \mu(\psi)$. □

**Наслідок 2.1.7.** *Якщо $x_1, \dots, x_n \in X$ і $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{I}, \vee_{i=1}^n \lambda_i = 1$, тоді $\mu = \vee_{i=1}^n \lambda_i * \delta_{x_i} \in M^*(X)$.*

Наступне твердження дає повний опис $*$-мір для випадку скінченного простору.

**Твердження 2.1.8.** *Нехай* $X = x_1, \dots, x_n$ *і* $\mu \in M^*(X)$. *Тоді існують такі* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{I}$, *що* $\vee_{i=1}^n \lambda_i = 1$ *і* $\mu = \vee_{i=1}^n \lambda_i * \delta_{x_i}$.

*Доведення.* Нехай $\mu \in M^*(X)$ і $i \in \{1, \dots, n\}$. Розглянемо функцію $\varphi_i \colon X \to \mathbb{I}$, визначену таким чином:

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Нехай $\lambda_i = \mu(\varphi_i)$. Дійсно, для будь-якого $j \in \{1, ..., n\}$,

$$\varphi(x_j) = \vee_{i=1}^n \varphi(x_i) * \varphi_i(x_j) = \varphi(x_j) * \varphi_j(x_j) = \varphi(x_j) * 1 = \varphi(x_j)$$

.

Тепер нехай $\varphi \colon X \to \mathbb{I}$ — довільна функція. Тоді

$$\varphi = \vee_{i=1}^n \varphi(x_i) * \varphi_i.$$

і, отже

$$\begin{aligned} \mu(\varphi) =& \mu(\vee_{i=1}^n \varphi(x_i) * \varphi_i) = \vee_{i=1}^n\ mu(\varphi(x_i) * \varphi_i) = \vee_{i=1}^n \varphi(x_i) * \mu(\varphi_i) \\ &= \vee_{i=1}^n\ \varphi(x_i) * \lambda_i. \end{aligned}$$

□

Ми наділяємо простір функцій $C(X, \mathbb{I})$ топологією рівномірної збіжності.

**Наслідок 2.1.9.** *Нехай* $X$ *— скінченний простір і* $\mu \in M^*(X)$. *Тоді* $\mu \colon C(X, \mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ *є неперервним відображенням.*

Нагадаємо, що топологічний простір є нульвимірним, якщо $X$ має базу топології, що складається з відкритих і закритих множин.

**Твердження 2.1.10.** *Нехай $X$ — компактний гаусдорфовий нульвимірний простір і $\mu \in M^*(X)$. Тоді $\mu\colon C(X,\mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ є неперервним відображенням.*

*Доведення.* Нехай $\varphi \in C(X,\mathbb{I})$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки t-норма $*$ - (рівномірно) неперервна, існує $r > 0$ такий, що $|a - a'| < r$ і $|b - b'| < r$ разом означають $|a * b - a' * b'| < \varepsilon$, для всіх $a, a', b, b' \in \mathbb{I}$.

Існує скінченне попарно неперетинне відкрите покриття $\mathcal{U}$ для $X$, таке, що $\mathrm{diam}(\varphi(U)) < \varepsilon$ для кожного $U \in \mathcal{U}$. Нехай $Y = X/\mathcal{U}$ — це фактор-простір, а $q\colon X \to Y$ — факторне відображення. Існують функції $\chi, \psi\colon Y \to \mathbb{I}$ такі, що $\|\chi - \psi\| < r$ і $\chi q < \varphi < \psi q$. Множина

$$V = \{\varphi' \in C(X,\mathbb{I}) \mid \chi q < \varphi' < \psi q\}$$

є околом функції $\varphi$ у просторі $C(X,\mathbb{I})$. Тоді для кожного $\varphi' \in V$,

$$M^*(q)(\mu)(\chi) = \mu(\chi q) \leqslant \mu(\varphi') \leqslant \mu(\psi q) = M^*(q)(\mu)(\psi).$$

Припустимо, що $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ і $M^*(q)(\mu) = \vee_{i=1}^n \lambda_i * \delta_{y_i}$. Тоді

$$\mu(\chi q) = \vee_{i=1}^n \lambda_i * \chi(y_i) \leqslant \mu(\varphi') \leqslant \vee_{i=1}^n \lambda_i * \psi(y_i).$$

Вибравши $r$,

$$| \vee_{i=1}^n \lambda_i * \chi(y_i) - \vee_{i=1}^n \lambda_i * \psi(y_i)| \leqslant \vee_{i=1}^n |\lambda_i * \chi(y_i) - \lambda_i * \psi(y_i)| < \varepsilon.$$

Ми робимо висновок, що виконується нерівність $|\mu(\varphi') - \mu(\varphi)| < \varepsilon$ і тому, оскільки функція $\varphi' \in V$ є довільною, відображення $\mu$ є неперервним у $\varphi$. $\square$

Нехай $\mathcal{S} = \{X_\alpha, p_{\alpha\beta}; \mathcal{A}\}$ — зворотня система над орієнтованою множиною $\mathcal{A}$. (Див., наприклад, [60] для отримання необхідної інформації про зворотні системи в категорії **Comp**.) Для будь-якого $\alpha \in \mathcal{A}$, через $p_\alpha\colon X = \varprojlim S \to X_\alpha$ позначаємо граничну проєкцію. Через $M^*(\mathcal{S})$ позначимо зворотню систему $\{M^*(X_\alpha), M^*(p_{\alpha\beta}); \mathcal{A}\}$.

Наступне твердження є модифікацією Твердження 2.12 з [8]. Його доведення включено для повноти.

Нагадаємо, що компактний гаусдорфовий простір називається нульвимірним, якщо у ньому існує база з відкрито-замкнених множин.

**Твердження 2.1.11.** *Нехай $X$ — нульвимірний компактний гаусдорфовий простір і $X = \varprojlim \mathcal{S}$, де $\mathcal{S} = \{X_\alpha, p_{\alpha\beta}; \mathcal{A}\}$, для орієнтованої множини $\mathcal{A}$. Тоді природнє відображення*

$$h = (M^*(p_\alpha))_{\alpha\in\mathcal{A}} \colon M^*(X) \to \varprojlim M^*(\mathcal{S})$$

*— гомеоморфізм.*

*Доведення.* Неперервність відображення $h$ є безпосереднім наслідком означення топології оберненої границі. Спочатку ми покажемо, що відображення $h$ є вкладенням. Припустимо протилежне і нехай $\mu, \nu \in M^*(X)$, $\mu \neq \nu$ такі, що $h(\mu) = h(\nu)$. Оскільки $\mu \neq \nu$, існує $\varphi \in C(X, \mathbb{I})$ такий, що $\mu(\varphi) \neq \nu(\varphi)$. Нехай

$$C' = \{\varphi p_\alpha \mid \varphi \in C(X_\alpha, \mathbb{I}),\, \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Зауважимо, що множина $C'$ є щільною в просторі $C(X, \mathbb{I})$. Оскільки, за Твердженням 2.1.10, відображення $\mu, \nu$ є неперервними, звідси випливає, що існує функція $\varphi' \in C'$ така, що $\mu(\varphi') \neq \nu(\varphi')$. Тоді $\varphi' = \psi p_\alpha$ для деяких $\alpha \in \mathcal{A}$ і $\psi \in C(X_\alpha, \mathbb{I})$. Отже,

$$M^*(p_\alpha)(\mu)(\psi) = \mu(\varphi') \neq \nu(\varphi') = M^*(p_\alpha)(\nu)(\psi)$$

і отримуємо протиріччя.

Тепер покажемо, що $h$ є відображенням на. Нехай $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \in \varprojlim M^*(S)$. Ми збираємося показати, що існує $\mu \in M^*(X)$ таке, що $M^*(p_\alpha)(\mu) = \mu_\alpha$, для будь-якого $\alpha \in \mathcal{A}$. Враховуючи те, що $\varphi, \psi \in C'$, можна записати $\varphi = \varphi' p_\alpha$, $\psi = \psi' p_\alpha$, для деякого $\alpha \in \mathcal{A}$, звідки

$$\mu(\varphi \vee \psi) = \mu((\varphi' p_{\alpha)}) \vee (\psi' p_\alpha)) = M^*(p_\alpha)(\mu)(\varphi' \vee \psi') = \mu_\alpha(\varphi' \vee \psi')$$

$$=\mu_\alpha(\varphi') \vee \mu_\alpha(\psi') = \mu(\varphi' p_\alpha) \vee \mu(\psi' p_\alpha)$$
$$=\mu(\varphi) \vee \mu(\psi).$$

Оскільки множина $C'$ всюди щільна в просторі $C(X, \mathbb{I})$, а операція $*$ неперервна, ми робимо висновок, що $\mu(\varphi \vee \psi) = \mu(\varphi) \vee \mu(\psi)$, для всіх $\varphi, \psi \in C(X, \mathbb{I})$. Аналогічно можна перевірити, що $\mu(\lambda * \varphi) = \lambda * \mu(\varphi)$ для всіх $\varphi \in C(X, \mathbb{I})$ і $\lambda \in \mathbb{R}$. Таким чином, $\mu \in M^*(X)$, що і треба було довести.

Оскільки відображення $h$ є неперервною біекцією компактних гаусдорфових просторів, одержуємо, що $h$ є гомеоморфізмом. □

**Твердження 2.1.12.** *Нехай $X$ — нульвимірний простір. Тоді множина $M^*_\omega(X)$ є всюди щільною в $M^*(X)$.*

*Доведення.* Нехай $\mathcal{S} = \{X_\alpha, p_{\alpha\beta}; \mathcal{A}\}$ — зворотня система, така що всі простори $X_\alpha$ скінченні, $p_{\alpha\beta}$ знаходяться на відображенні, а $X = \varprojlim \mathcal{S}$. Оскільки $M^*(X) = \varprojlim \mathcal{M}^*(\mathcal{S})$, і всі $M(p_\alpha)(M^*_\omega(X)) = M^*(X_\alpha)$ для всіх $\alpha \in \mathcal{A}$, ми робимо висновок, що множина $M^*_\omega(X)$ всюди щільна у просторі $M^*(X)$. □

Нехай $X_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}$ — сім'я нульвимірних компактних гаусдорфових просторів. Подібно до [8], використовуючи Твердження 2.1.11, можна визначити для будь-якого $\mu_\alpha \in M^*(X_\alpha)$,

$$\bigotimes_{\alpha \in A} \mu_\alpha \in M^* \left( \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \right).$$

З цією метою розглянемо множину $\mathcal{B}$ непорожніх скінченних підмножин $\mathcal{A}$, частково впорядкованих відношенням включення. Якщо $A, B \in \mathcal{B}$ і $A \subseteq B$, то через $p_{AB} : \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha\right) \to \left(\prod_{\alpha \in B} X_\alpha\right)$ позначимо відображення проєкції. Очевидно, що $M^*(p_{AB}(\bigotimes_{\alpha \in B} \mu_\alpha) = \bigotimes_{\alpha \in A} \mu_\alpha$. Тоді за Твердженням 2.1.11 існує $\mu \in M^* \left(\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha\right)$ такий, що $M^*(p_\alpha) = \mu_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Ми покладемо $\mu = \bigotimes_{\alpha \in \mathcal{A}} \mu_\alpha$.

## 2.2. Відображення $*$-Мілютіна

Поняття відображення Мілютіна канторової множини на одиничний відрізок вперше було використано в теорії просторів ймовірнісних мір. Пізніше версії цього відображення для ідемпотентних і max-min мір були розглянуті в [1], [54].

Щоб розглянути простори $*$-мір для довільних компактних гаусдорфових просторів, введемо поняття відображення Мілютіна, що дозволяє звести загальний випадок до нульвимірного, який розглянутий у попередньому підрозділі.

Спочатку, враховуючи, що $X$ – компактний гаусдорфовий простір та $Y$ – його замкнений підпростір, ми ототожнюємо простір $M^*(Y)$ з підпростором $M^*(i)(M^*(Y))$ $M^*(X)$, де $i\colon Y \to X$ означає відображення включення.

**Означення 2.2.1.** Відображення $f\colon X \to Y$ компактних метризованих просторів називається відображенням $*$-Мілютіна, якщо існує відображення $s\colon Y \to M^*(X)$ таке, що $s(y) \in M^*(f^{-1}(y)) \subset M^*(X)$, для кожного $y \in Y$.

**Теорема 2.2.2.** *Для кожного компактного хаусдорфового простору* $X$ *існує відображення* $*$*-Мілютіна* $f\colon Z \to X$*, де* $Z$ *– нульвимірний компактний гаусдорфовий простір.*

*Доведення.* Доведення полягає в модифікації аргументів з [8], який, у свою чергу, спирається на конструкцію з [1]. Подробиці надаємо для зручності читача.

Спершу, припустимо, що $X$ – метризований простір і виберемо деяку сумісну з топологією метрику на $X$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберимо скінченну сім'ю $\mathcal{A}_n$ пар замкнених підмножин простору $X$, що задовольняють властивості:

1. $\cup\{B \mid (A, B) \in \mathcal{A}_n\} = X$;
2. $\mathrm{diam}(A) \leqslant 1/n$, для кожного $(A, B) \in \mathcal{A}_n$;

3. $\mathrm{Int}(A) \supset B$, для кожного $(A, B) \in \mathcal{A}_n$.

Нехай $Z_n = \sqcup\{A \mid (A, B) \in \mathcal{A}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Визначимо відображення $f_n \colon Z_n \to X$ за умовою: $f_n|A$ – це відображення включення $\iota_A \colon A \hookrightarrow X$. Тоді нехай

$$Z = \left\{(z_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} Z_n \mid f_i(z_i) = f_j(z_j), \text{ для всіх } i, j \in \mathbb{N}\right\}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ нехай

$$Y_n = \left\{(z_m)_{m=1}^{n} \in \prod_{m=1}^{n} Z_m \mid f_i(z_i) = f_j(z_j), \text{ для всіх } i, j \leqslant n\right\}.$$

Для $n \geqslant k$ позначимо через $g_{nk} \colon Y_n \to Y_k$ природну проєкцію. Очевидно, що $Z = \varprojlim\{Y_n, g_{nk}; \mathbb{N}\}$. Легко перевірити, що $Z$ є компактним нульвимірним простором.

Для будь-якого $(A, B) \in \mathcal{A}_n$ нехай $\alpha_{(A,B)} \colon X \to [0, 1]$ буде неперервною функцією, такою що $\alpha_{(A,B)}|B = 0$ і $\alpha_{(A,B)}|(X \setminus A) = 1$. Тепер якщо $x \in X$, то означимо

$$\mu_n(x) = \bigvee_{(A,B)\in\mathcal{A}_n} \alpha_{(A,B)}(x) * \delta_{\iota_A^{-1}(x)}.$$

Зауважимо, що відображення $\mu_n(x)$ є коректно означеним. Ми збираємося показати, що відображення $\mu_n \colon X \to M^*(Y_n)$ є неперервним. Дійсно, враховуючи той факт, що $\varphi \in C(X, \mathbb{I})$, ми бачимо, що функція

$$x \mapsto \mu_n(x)(\varphi) = \bigvee_{(A,B)\in\mathcal{A}_n} \alpha_{(A,B)}(x) * \varphi(x) \colon X \to \mathbb{R}$$

є неперервною, а це в свою чергу означає неперервність відображення $\mu_n$.

Визначимо відображення $f \colon Z \to X$ за формулою $f((z_n)_{n=1}^{\infty}) = f_1(z_1)$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ нехай $h_m \colon Y_m \to X$ визначається за формулою $h_m((z_n)_{n=1}^{m}) = f_1(z_1)$.

Для будь-якого $x \in X$,

$$f^{-1}(x) = \varprojlim\{h_m^{-1}(x), g_{mk}|h_m^{-1}(x); \mathbb{N}\}.$$

Згідно з Твердженням 2.1.11, існує $\mu(x) \in M^*(f^{-1}(x))$ такий, що

$$M^*(g_m)(\mu(x)) = \otimes_{i=1}^m \mu_i(x)$$

(через $g_m\colon Z \to Y_m$ позначаємо відображення проєктування на співмножник $Y_m$).

Зауважимо, що неперервність відображення $x \mapsto \mu(x)$ є наслідком неперервності відображень $\mu_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Тепер припустимо, що $X$ є довільним компактним гаусдорфовим простором. Тоді можна припустити, що $X \subset \prod_{\alpha\in T} X_\alpha$ для деякої сім'ї $\{X_\alpha \mid \alpha \in T\}$ компактних метризованих просторів. Для кожного $\alpha \in T$ нехай $f_\alpha\colon Y_\alpha \to X_\alpha$ — відображення $*$-Мілютіна, де $Y_\alpha$ — нульвимірний компактний хаусдорфовий простір. Нехай

$$g = \prod_{\alpha\in T} X_\alpha\colon \prod_{\alpha\in T} Y_\alpha \to \prod_{\alpha\in T} X_\alpha.$$

Нехай $Z = g^{-1}(X)$ і нехай $f = g|Z\colon Z \to X$. Очевидно, що $Z$ є нульвимірним компактним гаусдорфовим простором.

Ми покажемо, що $f$ — це відображення $*$-Мілютіна.

Для кожного $\alpha \in T$ нехай $s_\alpha\colon X_\alpha \to M^*(Y_\alpha)$ буде такою, що $s_\alpha(x) \in M^*(f_\alpha^{-1}(x))$, для кожного $x \in X_\alpha$. Визначте $s((x_\alpha)_{\alpha\in T}) = \otimes_{\alpha\in T} s_\alpha(x_\alpha)$. Очевидно, що відображення $s$ є неперервним і $s(x) \in M^*(s^{-1}(x))$ для кожного $x \in X$. □

**Твердження 2.2.3.** *Нехай $X$ — компактний хаусдорфовий простір. Тоді множина $M^*_\omega(X)$ є всюди щільною в просторі $M^*(X)$.*

*Доведення.* Нехай $f\colon Z \to X$ — відображення $*$-Мілютіна, де $Z$ — нульвимірний компактний гаусдорфовий простір. Оскільки, за Твердженням 2.1.12 множина $M^*_\omega(Z)$ є всюди щільною у просторі $M^*(Z)$, то твердження справджується. □

## 2.3. Простір $\bar{M}(X)$

Нехай $X$ – компактний гаусдорфовий простір.

Позначимо через $\bar{M}(X)$ множину всіх $A \in \exp(X \times \mathbb{I})$, що задовольняють наступним умовам:

1. $A \cap (X \times \{1\}) \neq \varnothing$;
2. $X \times \{0\} \subset A$;
3. $A$ – насичена, тобто якщо $(x, t) \in A$, то $(x, s) \in A$ для кожного $s \in [0, t]$.

Доведення наступного твердження можна отримати з доведення Твердження 1.3 з [?], замінивши сегмент $[-\infty, 0]$ на сегмент $[0, 1]$.

**Твердження 2.3.1.** *Множина* $\bar{M}(X)$ *замкнена в* $\exp(X \times \mathbb{I})$.

Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Означимо відображення $\bar{M}(f)\colon \bar{M}(X) \to \bar{M}(Y)$ за формулою:

$$\bar{M}(f)(A) = \exp(f \times 1_{\mathbb{I}})(A) \cup (Y \times \{0\}).$$

Оскільки відображення об'єднання в гіперпросторі є неперервним (див., наприклад, [18]), то і відображення $\bar{M}(f)$ також є неперервним.

Насправді, $\bar{M}$ є функтором у категорії **Comp**: якщо маємо неперервні відображення $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, то

$$\begin{aligned}\bar{M}(gf)(A) =& \exp((gf) \times 1_{\mathbb{I}})(A) \cup (Z \times \{0\}) = \\ =& (\exp(g \times 1_{\mathbb{I}}) \exp(f \times 1_{\mathbb{I}}))(A) \cup (Z \times \{0\}) = \\ =& (\exp(g \times 1_{\mathbb{I}})(\exp(f \times 1_{\mathbb{I}}))(A) \cup (Y \times \{0\})) \cup (Z \times \{0\}) = \\ =& \bar{M}(g)\bar{M}f(A).\end{aligned}$$

Для кожного $A \in \bar{M}^*(X)$ означимо функціонал $h_A\colon C(X, \mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ за формулою

$$h_A(\varphi) = \sup\{t * \varphi(x) \mid (x, t) \in A\}$$

.

**Твердження 2.3.2.** *Якщо $A \in \bar{M}^*(X)$, то $h_A \in M^*(X)$.*

*Доведення.* Щоб довести це твердження, перевіримо для $h_A$ умови з означення $*$-міри.

Спочатку, якщо $c \in \mathbb{I}$, то (за умовою (2) з означення простору $\bar{M}^*(X)$), маємо для кожної функції $\varphi \in C(X, \mathbb{I})$

$$h_A(\varphi) \leqslant 1 * \varphi(x) = 1 * c_X = c_X.$$

Очевидно, що $h_A(\varphi) \geqslant c_X$.

Далі, при $\lambda \in \mathbb{I}$ і $\varphi \in C(X, \mathbb{I})$,

$$\begin{aligned} h_A(\lambda * \varphi) =& \sup\{t * (\lambda * \varphi)(x) \mid (x,t) \in A\} \\ =& \lambda * \sup\{t * \varphi(x) \mid (x,t) \in A\} = \lambda * h_A(\varphi). \end{aligned}$$

І нарешті, при $\varphi, \psi \in C(X, \mathbb{I})$,

$$\begin{aligned} h_A(\varphi \vee \psi) =& \sup\{t * ((\varphi \vee \psi)(x)) \mid (x,t) \in A\} \\ =& \sup\{t * (\varphi(x) \vee \psi(x)) \mid (x,t) \in A\} \\ =& \sup\{((t * \varphi)(x)) \vee ((t * \psi)(x)) \mid (x,t) \in A\} = \end{aligned}$$

(за монотонністю $*$)

$$\begin{aligned} =& \sup\{t * \varphi(x) \mid (x,t) \in A\} \vee \sup\{t * \psi(x) \mid (x,t) \in A\} \\ =& h_A(\varphi) \vee h_A(\psi). \end{aligned}$$

□

**Твердження 2.3.3.** *Відображення $h \colon \bar{M}^*(X) \to M^*(X)$, $A \mapsto h_A$ - неперервне.*

*Доведення.* Розглянемо послідовність $(A_i)$ у просторі $\bar{M}^*(X)$, яка збігається до множина $A$ у просторі $\bar{M}^*(A)$, і нам потрібно показати, що $\lim_{i\to\infty} h(A_i) = h(A)$.

Нехай $\varphi \in C(X, \mathbb{I})$. Ми збираємося показати, що $\lim_{i\to\infty} h(A_i)(\varphi) = h(A)(\varphi)$. При $\varepsilon > 0$ знайдемо скінченне відкрите покриття $\mathcal{U}$ простору $X$, таке, що коливання функції $\varphi$ на кожному елементі покриття $\mathcal{U}$ менше, ніж $\varepsilon/2$. Нехай $c$ таке, що $c < \inf\{\varphi(x)|x \in X\}$. Тоді розглянемо скінченне покриття $\mathcal{V}$ $[c,1]$ таке, що діаметр кожного елемента $\mathcal{V}$ менший за $\varepsilon/2$.

Розглянемо сім'ю $\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{U \times V | U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$. Існує $i_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $i \geqslant i_0$ множини $A_i$ і $A$ є $(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$-близькими.

Існує $(x,t) \in A$ таке, що $h(A)(\varphi) = t * \varphi(x)$. Тоді $(x,t) \in \cup(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, тобто існує $U \times V \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ такий, що $(x,t) \in U \times V$. Оскільки $A_i$ і $A$ $(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$-близькі, існує $(x',t')A_i \cap (U \times V)$. Отже,

$$h(A_i)(\varphi) = t' * \varphi'(x) \geqslant h(A)(\varphi) = t * \varphi(x).$$

Ми робимо висновок, що $\lim_{i\to\infty} h(A_i)(\varphi) = h(A)(\varphi)$. Оскільки функція $\varphi$ є довільною, то звідси випливає, що $\lim_{i\to\infty} h(A_i) = h(A)$, за означенням $^*$слабкої топології. Таким чином, відображення $h$ є неперервним. $\square$

**Твердження 2.3.4.** *Відображення* $h\colon \bar{M}^*(X) \to M^*(X)$ *є вкладенням.*

*Доведення.* Припустимо, що $A, B \in \bar{M}$, $A \neq B$ і $A \setminus B \neq \varnothing$. Нехай $(x,t) \in A \setminus B$ і припустимо, що $(x,t') \notin A$, для всіх $t' > t$.

Тоді існує окіл $U$ $x \in X$ і $r < t < 1$ такий, що $U \times (r,1] \cap B = \varnothing$.

Нехай $\varphi \in C(X,[0,1])$ — така функція, що:

(1) $\varphi(x) = \psi(x)$;

(2) $\varphi|(X \setminus U) < \psi(x)$.

Тоді, очевидно, $h(A)(\varphi) \geqslant \psi(x)$ і $h(B)(\varphi) < \psi(x)$. Тому $h(A) \neq h(B)$. $\square$

**Твердження 2.3.5.** *Відображення* $h\colon \bar{M}^*(X) \to M^*(X)$ *є відображенням на.*

*Доведення.* Досить показати, що весь простір $M^*_\omega(X)$ лежить в образі відображення $h$. Враховуючи те, що $\mu = \vee_{i=1}^n \alpha_i * \delta_{x_i} \in M^*_\omega(X)$, покладемо

$$C = (X \times \{0\}) \bigcup \cup_{i=1}^n (\{x_i\} \times [0,\alpha_i]).$$

Тоді $h(C) = \mu$. Тепер твердження випливає з всюди щільності $*$-мір зі скінченними носіями. $\square$

**Наслідок 2.3.6.** *Простори $\bar{M}^*(X)$ і $M^*(X)$ гомеоморфні для кожного компактного гаусдорфового простору $X$.*

Можна показати, що клас відображень $h = (h_X)$ є природним перетворенням функтора $\bar{M}$ в функтор $M$, що встановлює ізоморфізм цих функторів. Для цього потрібно довести комутативність діаграми

$$\begin{tikzcd} \bar{M}(X) \arrow[r, "h_X"] \arrow[d, "\bar{M}(f)"'] & M(X) \arrow[d, "M(f)"] \\ \bar{M}(Y) \arrow[r, "h_Y"'] & M(Y) \end{tikzcd}$$

для кожного відображення $f\colon X \to Y$.

Нехай $A \in \bar{M}(X)$, $\varphi \in C(Y, \mathbb{I})$, тоді

$$\begin{aligned} h_Y \bar{M}(f)(A)(\varphi) =& \sup\{t * \varphi(y) \mid (y,t) \in (f \times 1_{\mathbb{I}})(A)\} = \\ =& \sup\{t * \varphi f(x) \mid (x,t) \in A\} = \\ =& h_X(A)(\varphi f) = \\ =& M(f) h_X(A) \end{aligned}$$

(у другій рівності ми використали той факт, що $0 * x = x$ для кожного $s \in \mathbb{I}$ – цей факт справедливий для всіх трикутних норм $*$).

## Висновки до розділу

Поняття $*$-міри на компактному гаусдорфовому просторі є природним аналогом поняття ідемпотентної міри та max-min міри. Множина всіх $*$-мір на компактному гаусдорфовому просторі топологізується слабкою* топологією. Утворений топологічний простір є компактним гаусдорфовим. Більше того, така конструкція простору $*$-мір визначає функтор на категорії **Comp**.

Для просторів $*$-мір побудовано аналог відображення Мілютіна, відомого для просторів ймовірнісних мір, ідемпотентних мір та напівнеперервних згори ємностей. Доведено, що множина $*$-мір зі скінченними носіями всюди щільна в просторі всіх $*$-мір.

Побудоване зображення $*$-мір на просторі $X$ як замкнених множин у $X \times \mathbb{I}$ зі спеціальними властивостями.

# РОЗДІЛ 3
# ПРОСТОРИ $*$-МІР З КОМПАКТНИМИ НОСІЯМИ НА УЛЬТРАМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ

Поняття $*$-міри на компактному гаусдорфовому просторі запроваджене і досліджене першим автором. У цій статті ми розглядаємо множину всіх $*$-мір з компактними носіями на ультраметричному просторі. Наведено ультраметризацію цієї множини, яка визначає функтор на категорії ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень. Доведено, що цей функтор локально нерозтягуючий і зберігає клас повних ультраметричних просторів.

Метрика $d$ на множині $X$ називається ультраметрикою, якщо вона задовольняє сильну нерівність трикутника:

$$d(x,y) \leqslant \max\{d(x,z), d(z,y)\},\ \ x,y,z \in X.$$

Ультраметричні простори були вперше введені Хаусдорфом у 1934 році. Вони знаходять численні застосування не лише в математиці, а й в інших дисциплінах, напр. біологія, фізика [16, 67], інформатика [42], логічне програмування та штучний інтелект [45], лінгвістика [55].

У [14] ультраметрика визначається на множині ймовірнісних мір компактного носія на ультраметричному просторі. Показано, що ця конструкція визначає локально нерозтяеуючий функтор в категорії ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень, і цей функтор «робить корисний будівельний блок для визначення метричних областей для ймовірнісних програмних конструкцій».

Деякі категоріальні властивості цієї конструкції встановлені в [26]. У ньому, зокрема, доведено, що функтор ймовірнісних мір визначає монаду в категорії ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень.

Поняття $*$-міри введено попередньому розділі. Метою цього розділу є означення ультраметрики на множині $*$-мір з компактними носіями, визначених на ультраметричних просторах. Доведено, що отримана конструкція визначає функтор в категорії ультраметричних просторів і нерозтягуюсих відображень. Цей функтор є локально нерозтягуючим. Також показано, що така конструкція зберігає повноту ультраметричних просторів.

### 3.1. Означення і допоміжні твердження

Як і вище, через $\mathbb{I}$ позначимо одиничний відрізок $[0,1]$. Нагадаємо, що трикутна норма (t-норма) є неперервною функцією $(a,b) \mapsto a*b\colon \mathbb{I}\times\mathbb{I}\to\mathbb{I}$, що задовольняє умовам

1. $*$ є асоціативною;
2. $*$ є комутативною;
3. $*$ є монотонною, тобто $a \leqslant a'$ і $b \leqslant b'$ обидва означають $a*b \leqslant a'*b'$ для всіх $a, a', b, b' \in \mathbb{I}$;
4. 1 є одиницею.

Див. наприклад, [31], щоб дізнатися більше. Нижче наведено приклади t-норм: $\cdot$ (множення), min, $(a,b) \mapsto \max\{a+b-1, 0\}$ (t-норма Лукасєвича (Łukasiewicz)).

### 3.2. Результати

Нагадаймо поняття $*$-міри (докладніше див. попередній розділ). Для топологічних просторів $X, Y$ через $C(X,Y)$ позначимо множину неперервних функцій від $X$ до $Y$. Через $\vee$ позначаємо операцію максимуму, а також поточковий максимум дійсних функцій.

Зауважимо, що ми даємо тут означення не обов'язково для компактного випадку. Надалі $X$ буде тихоновським (цілком регулярним) простором.

**Означення 3.2.1.** Нехай $*$ — t-норма. Функціонал $\mu\colon C(X,\mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ називається $*$-мірою на компактному хаусдорфовому просторі $X$, якщо виконується наступне:

1. $\mu(c_X) = c$, де $c_X$ позначає сталу функцію на $X$, що приймає значення $c$;
2. $\mu(\lambda * \varphi) = \lambda * \mu(\varphi)$;
3. $\mu(\varphi \vee \psi) = \mu(\varphi) \vee \mu(\psi)$.

Множина всіх $*$-мір на $X$ позначається $M^*(X)$. У попередньому розділі доведено, що для компактних просторів $X$ множина $M^*(X)$ компактна, наділена *слабкою топологією. Ця конструкція визначає функтор у категорії **Comp** компактних хаусдорфових просторів і неперервних відображень. Цей функтор задовольняє деякі природні властивості. Зокрема, поняття носія визначено для будь-якого елемента $\mu \in M^*(X)$. За означенням, носієм $\mu$ є мінімальна (по відношенню до включення) замкнена підмножина $A$ простору $X$, що задовольняє такій умові: для кожного $\varphi, \psi \in C(X, \mathbb{I})$,

$$\varphi|A = \psi|A \ \mu(\varphi) = \mu(\psi).$$

Ми можемо описати розширення функтора $M^*$ з категорії компактних гаусдорфових просторів на категорію тихоновських просторів, яке запропонував А. Чигогідзе [10]. Нехай тепер $X$ — тихоновський простір і нехай $\beta X$ — компактне розширення Стоуна-Чеха простору $X$ (див., наприклад, [18]). Приймаємо

$$M^*_\beta(X) = \{a \in M^*(\beta X) \mid \operatorname{supp}(a) \subset X \subset \beta X\}.$$

Надалі розглядаємо випадок, коли простір $X$ — це ультраметричний простір $(X, d)$. Для кожного $r > 0$, позначимо через $\mathcal{F}_r(X)$ множину всіх функцій від $X$ до $\mathbb{I}$, які є сталими на всіх кулях радіуса $r$. З властивостей ультраметрики випливає коректність означення такої множини, оскільки дві кулі однакового радіуса в ультраметричному просторі, або не перетинаються, або ідентичні.

Ми зберігаємо позначення $M^*(X)$ для множини всіх $*$-мір деякої хаусдорфової компактифікації $bX \supset X$, носієм якої є компактна підмножина $X$. Зауважимо, що це не що інше, як згадане розширення Чигогідзе нормальних функторів.

Враховуючи $\mu, \nu \in M^*(X)$, нехай

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \inf\{r > 0 | \mu(\varphi) = \nu(\varphi) \text{ для всіх } \varphi \in \mathcal{F}_r\}.$$

**Теорема 3.2.2.** *Функція* $\tilde{d}\colon M^*(X)\times M^*(X)\to\mathbb{R}$ *є ультраметрикою на множині* $M^*(X)$.

*Доведення.* Спочатку ми покажемо, що функція $\tilde{d}$ коректно визначена. Оскільки множини $\mathrm{supp}(\mu)$, $\mathrm{supp}(\nu)$ компактні, вони обмежені. Останнє означає, що існують $r>0$ і $x_0$ такі, що

$$\mathrm{supp}(\mu)\cup\mathrm{supp}(\nu)\subset B_r(x_0).$$

Розглянемо множину $\mathcal{F}_r(X)$. Нехай $\varphi\in\mathcal{F}_r(X)$, тоді $\varphi|B_r(x_0)\equiv c$ є константою і $\mu(\varphi)=c=\nu(\varphi)$ для деякого $c\in\mathbb{I}$. Звідси випливає, що множина, якої інфімум ми шукаємо, непорожня, і тому формальне визначення має сенс.

За означенням $\tilde{d}(\mu,\nu)\geqslant 0$. Крім того, $\tilde{d}(\mu,\mu)=0$.

Тепер нехай $\tilde{d}(\mu,\nu)=0$. Ми повинні показати, що $\mu=\nu$.

Зауважимо, що для кожного $r>0$ і для кожного $\varphi\in\mathcal{F}_r$ маємо $\mu(\varphi)=\nu(\varphi)$. Нам потрібно показати, що $\mu(\varphi)=\nu(\varphi)$ для всіх $\varphi\in C(X,\mathbb{I})$.

Припустимо навпаки, тобто що існує функція $\varphi\in C(X,\mathbb{I})$ така, що $\mu(\varphi)\neq\nu(\varphi)$. Зауважимо, що кожн міра $\mu\in M^*(X)$ є неперервним відображенням відносно sup-метрики на $C(X,\mathbb{I})$ для будь-якого нульвимірного простору $X$ (див. попередній розділ).

Оскільки кожен ультраметричний простір є нульвимірним простором [61], ми бачимо, що якщо $\varphi_i\xrightarrow[i\to\infty]{}\varphi$ по відношенню до sup-метрики, потім $\mu(\varphi_i)\xrightarrow[i\to\infty]{}\mu(\varphi)$.

Побудуємо послідовність функцій $\varphi_i\in\mathcal{F}_{r_i}(X)$, що збігаються до $\varphi$. Оскільки множина $supp(\mu)\cup supp(\nu)$ є нульвимірним компактом, ми можемо вибрати для кожного $i\in\mathbb{N}$ число $r_i>0$ і функцію $\varphi_i\in\mathcal{F}_{r_i}(X)$ такі, що виконано нерівність $\|\varphi-\varphi_r\|\leqslant\varepsilon$. Отже, вибираючи $\varepsilon=\frac{1}{2^i}$, ми отримуємо шукану послідовність функцій $(\varphi_i)$. Тоді

$$\mu(\varphi)=\lim_{i\to\infty}\mu(\varphi_i)=\lim_{i\to\infty}\nu(\varphi_i)=\nu(\varphi).$$

Симетрія функції $\tilde{d}$ очевидно випливає з її означення:

$$\tilde{d}(\mu,\nu) = \tilde{d}(\nu,\mu),\ \ \mu,\nu \in M^*(X).$$

Тепер нам потрібно довести сильну нерівність трикутника для функції $\tilde{d}$. Нехай

$$\mu,\nu,\tau \in M^*(X),\ \ \tilde{d}(\mu,\nu) = a, \tilde{d}(\nu,\tau) = b.$$

Без втрати загальності можна вважати, що $a \leqslant b$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ і кожного $\varphi \in \mathcal{F}_{a+\varepsilon}(X)$, $\psi \in \mathcal{F}_{b+\varepsilon}(X)$, ми маємо $\mu(\varphi) = \nu(\varphi)$ і $\nu(\psi) = \tau(\psi)$. І тоді для кожного $\varphi \in \mathcal{F}_{b+\varepsilon}(X)$ ми маємо $\mu(\varphi) = \nu(\varphi) = \tau(\varphi)$ . Отже, $\tilde{d}(\mu,\tau) \leqslant b+\varepsilon$ і при $\varepsilon \to 0$, ми бачимо, що $\tilde{d}(\mu,\tau) \leqslant b$. □

Позначимо через **Ultr** категорію ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень. Нехай $(X,d), (Y,d)$ — ультраметричні простори. Нехай $f\colon X \to Y$ — нерозтягуюче відображення.

Визначимо $M^*(f)\colon M^*(X) \to M^*(Y)$ за формулою:

$$M^*(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f),$$

$\mu \in M^*(X), \varphi \in C(X,\mathbb{I})$.

**Твердження 3.2.3.** *Відображення $M^*(f)$ — нерозтягуюче.*

*Доведення.* Нехай $\mu,\nu \in M^*(X)$ і $\tilde{d}(\mu,\nu) < r$.

Зауважимо, що, оскільки відображення $f$ нерозтягуюче, за умови $\varphi \in \mathcal{F}_r(Y)$, можнемо отримати, що $\varphi f \in \mathcal{F}_r(X)$.

Тоді

$$M^*(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f) = \nu(\varphi f) = M^*(f)(\nu)(\varphi).$$

Отже, $\tilde{\rho}(M^*(f)(\mu), M^*(f)(\nu)) < r$ і ми бачимо, що відображення $M^*(f)$ нерозтягуюче. □

Власне, ми отримали функтор у категорії **Ultr**. Ми зберігаємо позначення $M^*$ для цього функтора.

Функтор $F$ у категорії **Ultr** називається локально нерозтягуючим, якщо

$$\tilde{\rho}(F(f), F(g)) = \rho(f, g)$$

(див. [14]).

**Твердження 3.2.4.** *Функтор $M^*$ у категорії* **Ultr** *локально нерозтягуючий .*

*Доведення.* Нехай $r > 0$ і $\rho(f, g) < r$.

Тоді для всіх $x \in X$, $\rho(f(x), g(x)) < r$ і потім $g(x) \in B_r(f(x))$.

Нехай тепер $\mu \in M^*(X)$. Нам потрібно показати, що виконується нерівність

$$\tilde{\rho}(M^*(f)(\mu), M^*(g)(\mu)) < r.$$

Нехай $\varphi \in B_r(Y)$, тобто нам потрібно перевірити рівність

$$M^*(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f) = \mu(\varphi g) = M^*(g)(\mu)(\varphi).$$

Нехай $x \in X$, тоді $\rho(f(x), g(x)) < r$, а оскільки $\varphi$ є сталою функцією на кулях радіуса $r$, то $g(x) \in B_r(f(x))$. Це означає, що $\varphi f(x) = \varphi g(x)$ і, отже, $\mu(\varphi f) = \mu(\varphi g)$.

З іншого боку, нехай $x \in X$ і $\delta_x \in M^*(X)$. Ми маємо, що

$$\tilde{\rho}(M^*(f)(\delta_x), M^*(g)(\delta_x)) = \tilde{\rho}(M^*(f)(\varphi)(x), M^*(g)(\varphi)(x)) \geqslant \rho(f(x), g(x)).$$

І це доводить той факт, що функтор $M^*$ локально нерозтягуючий. □

Нагадаємо, що відображення $f\colon X \to Y$ метричного простору $(X, d)$ в метричний простір $(Y, \rho)$ називається ліпшицевим, якщо існує $C > 0$ таке, що

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant Cd(x, y)$$

для кожних $x, y \in X$.

Легко бачити, що ультраметричні простори та їх ліпшицеві відображення утворюють категорію; ми позначаємо цю категорію $\mathbf{Ultr}_L$.

Аналогічно до твердження 3.2.3 можна показати, що $M^*$ є функтором на категорії $\mathbf{Ultr}_L$.

Нагадаємо, що гіперпростір $\exp X$ метричного простору $X$ – це множина всіх непорожніх компактних підмножин $X$, наділених метрикою Гаусдорфа

$$d_H(A, C) = \inf\{r > 0 \mid A \subset B_r(C),\ C \subset B_r(A)\},\ A, C \in \exp X.$$

Для будь-якого $\mu \in M^*(X)$ його носієм є за означенням непорожня компактна підмножина $X$, тобто елемент гіперпростору $\exp X$.

Відомо, що метрика Гаусдорфа на гіперпросторі ультраметричного простору також є ультраметрикою. Крім того, exp є функтором в категорії **Ultr**.

**Твердження 3.2.5.** *Відображення носія $s = s_X \colon M^*(X) \to \exp X$ нерозтягуюче.*

*Доведення.* Нехай $\mu, \nu \in M^*(X)$ і $\tilde{d}(\mu, \nu) < r$.

Припустимо, що $d_H(s(\mu), s(\nu)) > r$, тоді

$$M^*(f)(\mu) = M^*(f)(\nu)$$

і

$$f(s(\mu)) \neq f(s(\nu))$$

, де $f \colon X \to f(X)$ - це фактор-відображення щодо розкладання $X$ на диз'юнктні кулі радіуса $r$.

Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $f(s(\mu)) \setminus f(s(\nu)) \neq \varnothing$.

За означенням носія існують такі $\varphi, \psi \in C(f(X), \mathbb{I})$, що

$$\varphi | f(s(\mu)) = \psi | f(s(\nu)),\ M^*(f)(\mu)(\varphi) \neq M^*(f)(\nu)(\psi).$$

Це явно суперечить вибору $r$. □

Зауважимо, що клас відображень $s = (s_X)$ є природним перетворенням функтора $M^*$ до функтора гіперпростору exp. Справді, для кожного нерозтягуючого відображення $f\colon X \to Y$ ультраметричних просторів ми покажемо, що діаграма

$$\begin{tikzcd}
M^*(X) \arrow[r, "\mathrm{supp}"] \arrow[d, "M^*(f)"'] & \exp X \arrow[d, "\exp f"] \\
M^*(Y) \arrow[r, "\mathrm{supp}"'] & \exp Y
\end{tikzcd}$$

комутативна.

Нехай $\mu \in M^*(X)$ і $\varphi, \psi \in C(X, \mathbb{I})$ — такі функції, що

$$\varphi|f(\mathrm{supp}(\mu)) = \psi|f(\mathrm{supp}(\mu)).$$

Тоді

$$\varphi f|(\mathrm{supp}(\mu)) = \psi f|(\mathrm{supp}(\mu)),$$

тому $\mu(\varphi f) = \mu(\psi f)$, а отже

$$M^*(f)(\mu)(\varphi) = M^*(f)(\mu)(\psi).$$

Робимо висновок, що

$$\mathrm{supp}(M^*(f)(\mu)) \subset f(\mathrm{supp}(\mu)).$$

Обернене включення встановлюється аналогічно.

**Твердження 3.2.6.** *Нехай $(X, d)$ — ультраметричний простір. Тоді відображення $\delta\colon X \to M^*(X)$, $\delta(x) = \delta_x$ є ізометричним вкладенням.*

*Доведення.* Нам потрібно показати, що для всіх $x, y \in X$ виконується рівність $d(x, y) = \tilde{d}(\delta_x, \delta_y)$.

За означенням,

$$\tilde{d}(\delta_x, \delta_y) = \inf\{r > 0 \mid \delta_x(\varphi) = \delta_y(\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{F}_r\}$$

і $\delta_x(\varphi) = \varphi(x), \delta_y(\varphi) = \varphi(y)$.

Нехай $d(x, y) < r$, тоді $x, y \in B_r(X)$ і $\varphi(x) = \varphi(y)$ для кожного $\varphi \in \mathcal{F}_r$. Тому $\tilde{d}(\delta_x, \delta_y) \leqslant d(x, y)$.

Тепер нехай $\tilde{d}(\delta_x, \delta_y) < d(x, y)$. Тоді існує $r > 0$ таке, що $d(x, y) > r$ і $\varphi(x) = \varphi(y)$ для кожного $\varphi \in \mathcal{F}_r$.

Оскільки $d(x, y) > r$, ми бачимо, що $B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing$.

Розглядаємо тепер функції $\varphi \in \mathcal{F}_r$, такі що $\varphi | B_r(x) = 0$ і $\varphi | X \setminus B_r(x) = 1$. З того, що $\varphi \in \mathcal{F}_r$ випливає рівність $\varphi(x) = \varphi(y)$. Таким чином ми дійшли до протиріччя. □

Зауважимо, що клас відображень $\delta = (\delta_X)$ є природним перетворенням тотожного функтора у функтор $M^*$.

Для кожного ультраметричного простору $X$ позначимо через $M^*_\omega(X)$ підмножину в просторі $M^*(X)$, що складається з $*$-мір зі скінченними носіями, тобто $*$-мір вигляду $\mu = \vee_{i=1}^n \lambda_i * \delta_{x_i}$. Справедливий аналог твердження, виконаного для простору $*$-мір у категорії компактних гаусдорфових просторів.

**Твердження 3.2.7.** *Множина $M^*_\omega(X)$ є всюди щільною в просторі $M^*(X)$.*

*Доведення.* Нехай $\mu \in M^*(X)$ і нехай $r > 0$. Нехай $\{B_r(x_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ — скінченне диз'юнктне покриття множини $\mathrm{supp}(\mu)$ кулями радіуса $r$. Через $\varphi_i$ позначимо характеристичну функцію множини через $B_r(x_i)$. Тепер нехай $\varphi \in \mathcal{F}_r(X)$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $\varphi \equiv 0$ на множині $X \setminus \cup_{i=1}^n B_r(x_i)$. Тоді $\varphi = \vee_{i=1}^n \varphi(x_i) * \varphi_i$.

Нехай $\nu = \vee_{i=1}^n \mu(\varphi_i) * \delta_{x_i}$. Зауважимо, що

$$1 = \mu(1_X) = \mu\left(\vee_{i=1}^n \varphi_i\right) = \vee_{i=1}^n \mu(\varphi_i),$$

тому $\nu \in M^*(X)$.

Тепер, враховуючи $\psi \in \mathcal{F}_r(X)$, можна записати $\psi = \vee_{i=1}^n \psi(x_i) * \varphi$. Тоді

$$\nu(\psi) = \nu(\vee_{i=1}^n \psi(x_i) * \varphi) = \vee_{i=1}^n \psi(x_i) * \nu(\varphi_i) = \vee_{i=1}^n \psi(x_i) * \nu(\varphi_i) = \mu(\psi).$$

Отже, $\tilde{d}(\mu, \nu) < r$. □

Далі ми наділимо множину $C(X,\mathbb{I})$ sup-метрикою.

**Лема 3.2.8.** *Нехай $X$ — компактний ультраметричний простір. Множина $\mathcal{F}(X)=\cup_{r>0}\mathcal{F}_r(X)$ є щільною в $C(X,\mathbb{I})$.*

**Теорема 3.2.9.** *Припустимо, що $(X,d)$ є повним ультраметричним простором. Тоді простір $(M^*(X),\tilde{d})$ також повний.*

*Доведення.* Нехай $(\mu_i)$ — послідовність Коші в $M^*(X)$. З твердження 3.2.5 легко випливає, що множина $Y=\overline{\cup_{i=1}^{\infty}\mathrm{supp}(\mu_i)}$ компактна. Без втрати загальності можна вважати, що $Y=X$.

Нехай $\varphi\in\mathcal{F}(Y)$. Існує $r>0$ такий, що $\varphi\in\mathcal{F}_r(Y)$. Існує $N\in\mathbb{N}$ такий, що для будь-якого $m,n\geqslant N$ $\tilde{d}(\mu_m,\mu_n)<r$. Тому $\mu_m(\varphi)=\mu_n(\varphi)$ для будь-які $m,n\geqslant N$. Ми покладемо $\mu(\varphi)=\lim_{i\to\infty}\mu_i(\varphi)=\mu_N(\varphi)$.

Таким чином, ми визначили відображення $\mu\colon\mathcal{F}(Y)\to\mathbb{I}$. Легко перевірити, що $\mu$ задовольняє умовам з означення 4.1.1, якщо замінити $C(X,\mathbb{I})$ на $\mathcal{F}(Y)$.

Тепер ми збираємося розширити $\mu$ на множину $C(Y,\mathbb{I})$.

**Claim.** Відображення $\mu\colon\mathcal{F}(Y)\to\mathbb{I}$ є рівномірно неперервним.

Нехай $\varepsilon>0$. Оскільки відображення $*\colon\mathbb{I}\times\mathbb{I}\to\mathbb{I}$ рівномірно неперервне, існує $\delta>0$ таке, що $|a-a'|<\delta$ і $|b-b'|<\delta$ разом означає $|a*b-a'*b'|<\varepsilon$.

Нехай $\varphi',\varphi''\in\mathcal{F}(Y)$. Можна припустити, що $\varphi',\varphi''\in\mathcal{F}_r(Y)$ для деякого $r>0$. Нехай $\{B_r(x_i)\mid i=1,\dots,n\}$ — диз'юнктне покриття $Y$ кулями. Нехай $\chi_i$ позначається характеристична функція кулі $B_r(x_i)$, $=1,\dots,n$. Тоді можна написати

$$\varphi'=\vee_{i=1}^{n}\alpha_i'*\chi_i,\ \ \varphi''=\vee_{i=1}^{n}\alpha_i''*\chi_i,$$

для деяких $\alpha_i',\alpha_i''\in\mathbb{I}$.

Якщо $\|\varphi'-\varphi''\|<\delta$, то $\vee_{i=1}^{n}|\alpha_i'-\alpha_i''|<\delta$ і отримуємо

$$\begin{aligned}|\mu(\varphi')-\mu(\varphi'')|&=|\mu\left(\vee_{i=1}^{n}\alpha_i'*\chi_i\right)-\mu\left(\vee_{i=1}^{n}\alpha_i''*\chi_i\right)|\\&=|\vee_{i=1}^{n}\alpha_i'*\mu\left(\chi_i\right)-\vee_{i=1}^{n}\alpha_i''*\mu\left(\chi_i\right)|\end{aligned}$$

$$\leqslant \vee_{i=1}^{n} |\alpha_i' * \mu(\chi_i) - \alpha_i'' * \mu(\chi_i)| \leqslant \varepsilon.$$

Повернемося до доведення теореми. Відображення допускає одиничне неперервне розширення множини $C(Y, \mathbb{I})$ (ми зберігаємо позначення $\mu$ для цього розширення). Очевидно, що при цьому $\mu \in M^*(X)$ і $\mu = \lim_{i\to\infty} \mu_i$.

$\square$

Топологія, індукована метрикою $\tilde{d}$ на просторі $M^*(X)$ для ультраметричного простору $(X, d)$, взагалі кажучи, не рівна топології, індукованій слабкою* збіжністю. Це показує наступний приклад.

Розглянемо ультраметричний простір

$$X = \{x, y\},\ x \neq y,\ d(x, y) = 1.$$

Нехай $* = \min = \wedge$.

$$\mu_n = \delta_x \vee \left(\frac{1}{n} \wedge \delta_y\right) \in M^*(X),\ n \in \mathbb{N},$$

і нехай $\mu_0 = \delta_x$.

Тоді нескладно показати, що $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu_0$ в топології слабкої* збіжності.

Водночас легко бачити, що для функції

$$\varphi\colon X \to \{0, 1\} \subset \mathbb{I},\ \varphi(x) = 0,\ \varphi(y) = 1,$$

маємо:

$$\mu_n(\varphi) = 0 \vee \left(\frac{1}{n} \wedge 1\right) = \frac{1}{n} \neq 0 = \mu_0(\varphi),$$

$\varphi \in \mathcal{F}_1(X)$.

Отже $\tilde{d}(\mu_n, \mu_0) = 1$ для кожного натурального $n$ і тому $\lim_{n\to\infty} \mu_n \neq \mu_0$ в топології, індукованій метрикою $\tilde{d}$.

Цей приклад нескладно узагальнити на випадок довільного неодноточкового ультраметричного простору $X$.

### 3.3. Зауваження

Деякі результати щодо розмитої ультраметризації функторіальних конструкцій розглядаються в численних публікаціях. Нагадаємо, що розмиті ультраметричні простори були введені в [40, 57]. Сильна нерівність трикутника для розмитої метрики $M$ виглядає так:

$$M(x,y,t) \geqslant \min\{M(x,z,t), M(z,y,t)\},\ x,y,z \in X,\ t > 0.$$

У [63] розглядається розмита ультраметризація множин імовірнісних мір. Випадок ідемпотентних мір розглядається в [34]. Сформульовано загальну задачу розмитої ультраметризації множин $*$-мір компактного носія, визначених на розмитих ультраметричних просторах.

Зауважимо, що простір ймовірнісних мір з компактними носіями на повному ультраметричному просторі також є повним [14]. Аналогічний факт відомий і для ідемпотентних мір.

Ультраметричний простір $(X, d)$ називається сферично повним, якщо кожен спадний набір замкнених куль у $X$ має непорожній перетин.

Невідомо, чи є простір $*$-мір з компактними носіями на сферично повному ультраметричному просторі також сферично повним.

## 3.4. Висновки до розділу

Простір $*$-мір з компактними носіями на ультраметричному просторі допускає ультраметризацію, аналогічну до ультраметризації Гартоґа і де Вінка просторів ймовірнісних мір. Ця ультраметризація зберігає повноту ультраметричних просторів.

# РОЗДІЛ 4
# МОНАДИ, ПОРОДЖЕНІ ФУНКТОРАМИ $*$-МІР

У попередньому розділі означено функтори $*$-мір на категорії **Ultr** ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень і встановлено деякі їх фундаментальні властивості.

Цей розділ присвячений структурі монади, що визначається цими функторами. Зокрема, така структура дозволяє визначити тензорний добуток $*$-мір у категорії **Ultr**. У своєю чергу, ми визначаємо ігри в $*$-значних стратегіях на ультраметричних просторах і доводимо неперервність функцій виплат для цих ігор.

Нарешті, доведено, що будь-яку рівновагу для ігор у $*$-значних стратегіях можна апроксимувати майже рівновагами, що складаються з $*$-мір зі скінченними носіями.

## 4.1. Попередні відомості

Для зручності читання нагадаємо деякі означення. Метрика $d$ на множині $X$ називається ультраметрикою (неархімедовою метрикою), якщо $d$ задовольняє сильну нерівність трикутника $d(x,y) \leqslant \max\{d(x,z), d(z,y)\}$, $x, y, z \in X$.

Через $\mathbb{I}$ позначимо одиничний відрізок $[0,1]$. Нагадаємо, що трикутна норма (t-норма) є неперервною функцією $(a,b) \mapsto a * b \colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, що задовольняє умовам

1. $*$ є асоціативна;
2. $*$ є комутативна;
3. $*$ є монотонна, тобто $a \leqslant a'$ і $b \leqslant b'$ обидва означають $a * b \leqslant a' * b'$ для всіх $a, a', b, b' \in \mathbb{I}$;

4. 1 є одиницею.

Див. наприклад, [31], де наведено детальну інформацію про t-норми.

Нагадаємо важливі приклади t-норм: $\cdot$ (множення), min, $(a, b) \mapsto \max\{a + b - 1, 0\}$ (Łukasiewicz t- норма).

Згадаємо поняття $*$-міри (докладніше див. розділ ref). Для топологічних просторів $X, Y$ через $C(X, Y)$ позначимо множину неперервних функцій від $X$ до $Y$. Через $\vee$ позначаємо операцію максимуму чисел, а також поточковий максимум дійсних функцій.

**Означення 4.1.1.** Нехай $*$ — деяка t-норма. Функціонал $\mu\colon C(X, \mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ називається $*$-мірою на компактному хаусдорфовому просторі $X$, якщо виконується наступне:

1. $\mu(c_X) = c$, де $c_X$ позначає сталу функцію на $X$, що приймає значення $c$;
2. $\mu(\lambda * \varphi) = \lambda * \mu(\varphi)$;
3. $\mu(\varphi \vee \psi) = \mu(\varphi) \vee \mu(\psi)$.

Поняття $*$-міри можна також сформулювати для тихоновських просторів $X$. При цьому використовуємо конструкцію продовження нормального функтора з категорії компактних гаусдорфових просторів на категорію тихоновських просторів. Додатково вимагаємо, щоб у $X$ існувала компактна підмножина $A$, яка задовольняє умові: для кожного $\varphi, \psi \in C(X, \mathbb{I})$, якщо $\varphi|A = \psi|A$, тоді $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$. Мінімальна (по відношенню до включення) множина $A$, що задовольняє такій умові, називається носієм $\mu$ і позначається $\mathrm{supp}(\mu)$.

Через $M^*(X)$ позначимо множину всіх $*$-мір з компактними носіями на тихоновському просторі $X$.

Нехай $x_1, \ldots, x_n \in X$ і $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{I}$ такі, що $\vee_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Нижче наведено приклад $*$-міри: $\mu = \vee_{i=1}^n \alpha_i * \delta_{x_i}$.

Можна легко побачити, що $\mathrm{supp}(\mu) = \{x_i \mid \alpha_i > 0\}$.

Якщо $f\colon X \to Y$ є неперервним відображенням тихонівських просторів, то можна визначити відображення $M^*(X) \to M^*(Y)$ за умовою $M^*(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f)$, $\mu \in M^*(X)$, $\varphi \in C(X, \mathbb{I})$.

Для ультраметричного простору $X$ через $\mathcal{F}_r(X)$ позначимо множину функцій із $C(X, \mathbb{I})$, сталих на всіх кулях радіуса $r$ у $X$. З властивостей ультраметрики виплаває, що таке означення коректне.

Нехай $X$ — ультраметричний простір, а $M^*(X)$ — множина всіх $*$-мір з компактним носієм на $X$. Нагадаємо, що відстань $\tilde{d}(\mu, \nu)$ між $\mu, \nu \in M^*(X)$ визначається за формулою:

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \inf\{r > 0 \mid \mu(\varphi) = \nu(\varphi) \text{ для всіх } \varphi \in \mathcal{F}_r(X)\}.$$

Можна надати альтернативний опис ультраметрики $\tilde{d}$ наступним чином. Враховуючи $r > 0$, позначимо через $X_r$ фактор-простір $X$ щодо розкладання $X$, елементами якого є кулі радіуса $r$. Нехай $q_r \colon X \to X_r$ позначає коефіцієнт. Очевидно, що фактор-метрика на $X_r$ є ультраметрикою. Тоді неважко показати, що виконується рівність

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \inf\{r > 0 \mid M^*(q_r)(\mu) = M^*(q_r)(\nu)\}.$$

Через $\exp X$ позначаємо гіперпростір $X$, тобто множину всіх непорожніх компактних підмножин $X$, наділених хаусдорфовою метрикою. Власне, в ультраметричному випадку хаусдорфова метрика може бути визначена умовою

$$d_H(A_1, A_2) = \inf\{r > 0 \mid \text{ для кожного } x \in X,$$

$$B_r(x) \cap A_1 \neq \varnothing \iff B_r(x) \cap A_2 \neq \varnothing\}.$$

У [63] доведено, що відображення $\operatorname{supp} \colon M^*(X) \to \exp X$ є нерозтягуючим.

**Твердження 4.1.2.** *Нехай $\mu \in M^*(X)$. Відображення $\mu \colon C(X, \mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ рівномірно неперервне.*

*Доведення.* Власне, це частина доведення [63, теореми 2.9]. □

Маємо функцію $\varphi \in C(X, [0,1])$, визначимо $\bar{\varphi}\colon M^*(X) \longrightarrow [0,1]$ за формулою $\bar{\varphi}(\mu) = \mu(\varphi)$.

**Твердження 4.1.3.** *Відображення $\bar{\varphi}$ - неперервне.*

*Доведення.* Спочатку припустимо, що $X$ компактний. Нехай $\mu_0 \in M^*(X)$. За умови $\varepsilon > 0$ за твердженням 4.1.2 існує $\eta > 0$ таке, що для кожного $\chi, \psi \in C(X, \mathbb{I})$, $|\chi - \psi\| < \eta$ означає $|\mu_0(\chi) - \mu_0(\psi)| < \varepsilon$.

Існує $\delta > 0$ таке, що коливання $\varphi$ на кожній кулі радіуса $\delta$, що перетинає $\mathrm{supp}(\mu_0)$, не перевищує $\eta$. Існує скінченне покриття $\{B_\delta(x_1), \dots, B_\delta(x_n)\}$ $\mathrm{supp}(\mu_0)$.

Припустимо, що $\tilde{d}(\mu, \mu_0) < \delta$. Тоді явно $\mathrm{supp}(\mu) \subset \cup_{i=1}^n B_\delta(x_i)$. Існують такі $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_\delta(X)$, що $\psi_1 \leqslant \varphi \leqslant \psi_2$ і $\|\psi_1 - \psi_2\| < \eta$.

Звідси випливає, що

$$\mu_0(\psi_1) = \mu(\psi_1) \leqslant \mu_0(\varphi) \leqslant \mu_0(\psi_2) = \mu(\psi_2)$$

і

$$\mu_0(\psi_1) = \mu(\psi_1) \leqslant \mu(\varphi) \leqslant \mu_0(\psi_2) = \mu(\psi_2).$$

Вибравши таке $\eta$, $|\mu_0(\varphi) - \mu(\varphi)| < \varepsilon$ і, отже, $|\bar{\varphi}(\mu_0) - \bar{\varphi}(\mu)| < \varepsilon$.

Тепер перейдемо до загального випадку, тобто до довільного ультраметричного простору $X$. Припустимо, що послідовність $(\mu_i)_{i=1}^\infty$ збігається до $\mu_0$ у $M^*(X)$. Оскільки відображення supp нерозтягуюче, не втрачаючи загальності можна вважати, що

$$X = \mathrm{supp}(\mu_0) \cup \cup_{i=1}^\infty \mathrm{supp}(\mu_i),$$

тобто $X$ є компактним.

□

Маючи ультраметричний простір $X$, ми визначаємо відображення $\zeta_X\colon M^{*2}(X) \to M^*(X)$ за формулою

$$\zeta_X(\mathcal{M})(\varphi) = \mathcal{M}(\bar{\varphi}).$$

Ми збираємося показати, що $\mathcal{M}(\bar{\varphi}) \in M^*(X)$.

Очевидно, $\mathcal{M}((\bar{c_X}) = c$, тому що $\overline{c_X} = c_{M^*(X)}$.

Враховуючи $\varphi \in C(X, \mathbb{I})$ і $c \in \mathbb{I}$, отримуємо

$$\zeta_X(\mathcal{M})(c * \varphi) = \mathcal{M}(\overline{c * \varphi}) = \mathcal{M}(c * \bar{\varphi}) = c * \mathcal{M}(\bar{\varphi}) = c * \zeta_X(\mathcal{M})$$

(ми використовували рівність $\overline{c * \varphi} = c * \bar{\varphi}$: дійсно, для будь-якого $\mu \in M^*(X)$,

$$\overline{c * \varphi}(\mu) = \mu(c * \varphi) = c * \mu(\varphi) = c * \bar{\varphi}(\mu)).$$

Далі, для будь-якого $\varphi, \psi \in C(X, \mathbb{I})$ ми бачимо, що, очевидно, $\overline{\varphi \vee \psi} = \bar{\varphi} \vee \bar{\psi}$, отже

$$\zeta_X(\mathcal{M})(\varphi \vee \psi) = \mathcal{M}(\overline{\varphi \vee \psi}) = \mathcal{M}(\bar{\varphi}) \vee \mathcal{M}(\bar{\psi}) = \zeta_X(\mathcal{M})(\varphi) = \zeta_X(\mathcal{M})(\psi).$$

Ми покажемо, що носій $\zeta_X(\mathcal{M})$ компактний. Зауважимо, що, оскільки відображення $\mathrm{supp}(\mu)$ нерозтягуюче, множина

$$A = \bigcup \{\mathrm{supp}(\mu) \mid \mu \in \mathrm{supp}(\mathcal{M})\}$$

компактна. Маємо $\varphi, \psi \in C(X, [0,1])$ таке, що $\varphi|A = \psi|A$, ми бачимо, що $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$ для кожного $\mu \in \mathrm{supp}(\mathcal{M})$. Ми робимо висновок, що $\bar{\varphi}|\mathrm{supp}(\mathcal{M}) \equiv \bar{\psi}|\mathrm{supp}(\mathcal{M})$ і, отже,

$$\zeta_X(\mathcal{M})(\varphi) = \mathcal{M}(\bar{\varphi}) = \mathcal{M}(\bar{\psi}) = \zeta_X(\mathcal{M})(\psi).$$

Таким чином, $\zeta_X(\mathcal{M}) \in M^*(X)$.

**Лема 4.1.4.** *Якщо $\varphi \in \mathcal{F}_r(X)$, то $\bar{\varphi} \in \mathcal{F}_r(M^*(X))$.*

*Доведення.* Для $\mu, \mu' \in M^*(X)$ ми маємо, що $\tilde{d}(\mu, \mu_0) < r$ тоді і тільки тоді, коли $\mu(\varphi) = \mu'(\varphi)$ для всіх $\varphi \in \mathcal{F}_r(X)$. За означенням $\bar{\varphi}(\mu) = \bar{\varphi}(\mu')$ і випливає, що $\bar{\varphi} \in \mathcal{F}_r(M^*(X))$. $\square$

**Твердження 4.1.5.** *Відображення $\zeta_X$ нерозтягуюче.*

*Доведення.* Припустимо, що $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in M^{*2}(X)$. Нехай $\tilde{\tilde{d}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') < r$ і $\varphi \in \mathcal{F}_r(X)$ для деяких $r > 0$. За означенням,

$$\zeta_X(\mathcal{M})(\varphi) = \mathcal{M}(\bar{\varphi}) = \mathcal{M}'(\bar{\varphi}) = \zeta_X(\mathcal{M}')(\varphi)$$

і ми бачимо, що $\tilde{d}(\zeta_X(\mathcal{M}), \zeta_X(\mathcal{M}')) < r$. □

## 4.2. Монади

**Твердження 4.2.1.** *Клас відображень $\zeta = (\zeta(X))$ є природним перетворенням функтора $M^{*2}$ у функтор $M^*$.*

*Доведення.* Нехай $f\colon X \longrightarrow Y$ – нерозтягуюче відображення ультраметричних просторів. Нам потрібно показати, що діаграма

$$\begin{tikzcd} M^{*2}(X) \arrow[r, "M^{*2}(f)"] \arrow[d, "\zeta_X"'] & M^{*2}(X) \arrow[d, "\zeta_Y"] \\ M^*(X) \arrow[r, "M^*(f)"'] & M^*(Y) \end{tikzcd}$$

комутативна.

Нехай $\mathcal{M} \in M^{*2}(X)$ і $\varphi \in C(X, [0, 1])$. Насамперед зауважимо, що $\overline{\varphi f} = \bar{\varphi} M^*(f)$. Використовуючи це, ми отримуємо

$$\begin{aligned} M^*(f)(\zeta_X(\mathcal{M}))(\varphi) =& \zeta_X(\mathcal{M})(\varphi f) = \mathcal{M}(\overline{\varphi f}) \\ =& \mathcal{M}(\bar{\varphi} M^*(f)) = M^{*2}(f)(\mathcal{M})(\bar{\varphi}) \\ =& \zeta_Y M^{*2}(f)(\mathcal{M})(\varphi). \end{aligned}$$

□

Нагадаємо, що монада в категорії $\mathcal{C}$ є трійкою $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$, де $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ є ендофунктором, $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T$, $\mu\colon T^2 \to T$ є природними перетвореннями, такими, що $\mu T\eta = \mu\eta_T = 1_T$ і $\mu\mu_T = \mu T\mu$ (докладніше див., наприклад, [3]).

Враховуючи, що монади $\mathbb{T}_i = (T_i, \eta_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, в категорії $\mathcal{C}$, ми говоримо, що природне перетворення $\gamma\colon T_1 \to T_2$ є морфізмом $\mathbb{T}_1$ до $\mathbb{T}_2$, якщо $\gamma\eta_1 = \eta_2$ і $\mu_2\gamma_{T_2}T_1(\gamma) = \gamma\mu_1$.

Нехай $\mathbb{H} = (\exp, s, u)$ — гіперпросторова монада в категорії **Ultr**. Нагадаємо, що синглетон $s_X$ діє так: $s_X(x) = \{x\}$, $x \in X$. Крім того, $u_X\colon \exp^2 X \to \exp X$ є одиничним відображенням.

**Теорема 4.2.2.** *Трійка* $\mathbb{M}^*$ *є монадою на категорії* **Ultr**.

*Доведення.* Доведемо спочатку, що діаграма

$$\begin{tikzcd} M^*(X) \arrow[r, "\delta_{M^*(X)}"] \arrow[dr, equal] & M^{*2}(X) \arrow[d, "\zeta_X"'] & M^*(X) \arrow[l, "M^*(\delta_X)"'] \arrow[dl, equal] \\ & M^*(X) & \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

комутативна.

Спочатку зауважимо, що

$$\bar{\psi}\delta_X(x) = \bar{\psi}\delta_x = \delta_x(\psi) = \psi(x)$$

для будь-якого $\psi \in C(X, [0, 1])$.

Тоді нехай $\mu \in M^*(X)$

$$\zeta_X M^*(\delta_X)(\mu)(\psi) = M^*(\delta_X)(\mu)(\bar{\psi}) = \mu(\bar{\psi}\delta_X) = \mu(\psi),$$

тобто $\zeta_X M^*(\delta_X) = 1_{M^*(X)}$.

Крім того,

$$\zeta_X\delta_{M^*(X)}(\mu)(\psi) = \delta_{M^*(X)}(\mu)(\bar{\psi}) = \bar{\psi}(\mu) = \mu(\psi),$$

тобто $\zeta_X\delta_{M^*(X)} = 1_{M^*(X)}$.

Доведемо тепер, що діаграма

$$\begin{tikzcd} M^{*3}(X) \arrow[r, "M^*(\zeta_X)"] \arrow[d, "\zeta_{M^*_X}"'] & M^{*2}(X) \arrow[d, "\zeta_X"] \\ M^{*2}(X) \arrow[r, "\zeta_X"'] & M^*(X) \end{tikzcd}$$

комутативна.

Нехай $\mathfrak{M} \in M^{*3}(X)$, тоді

$$\zeta_X \zeta_{M^*_X}(\mathfrak{M})(\varphi) = \zeta_{M^*_X}(\mathfrak{M})(\bar{\varphi}) = \mathfrak{M}(\bar{\bar{\varphi}}).$$

З іншого боку,

$$\zeta_X M^*(\zeta_X)(\mathfrak{M})(\varphi) = M^*(\zeta_X)(\mathfrak{M})(\bar{\varphi}) = \mathfrak{M}(\bar{\varphi} \cdot \zeta_X).$$

Нам потрібно показати, що $\bar{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi} \cdot \zeta_X$. Дійсно,

$$\bar{\bar{\varphi}}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}(\bar{\varphi}) = \zeta_X(\mathcal{M})(\varphi) = \bar{\varphi}\zeta_X(\mathcal{M}).$$

□

Ми говоримо, що t-норма $*$ не має дільників нуля, якщо з $a * b = 0$ випливає $a \wedge b = 0$.

**Теорема 4.2.3.** *Припустимо, що t-норма $*$ не має дільників нуля. Тоді природне перетворення* supp *є морфізмом монади $\mathbb{M}^*$ до монади $\mathbb{H}$.*

*Доведення.* Очевидно, $\mathrm{supp}(\delta_x) = \{x\} = s_X(x)$, $x \in X$. Тому ми повинні показати, що діаграма

$$\begin{tikzcd} M^{*2}(X) \arrow[r, "\mathrm{supp}_{M^*(X)}"] \arrow[d, "\zeta_X"'] & \exp M^*(X) \arrow[r, "\exp(\mathrm{supp}_X)"] & \exp^2 X \arrow[d, "u_X"] \\ M^* \arrow[rr, "\mathrm{supp}"'] & & \exp X \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

комутативна.

Нехай $\mathcal{M} \in M^{*2}(X)$,

$$\mathcal{M} = \vee_{i=1}^n \alpha_i * \delta_{\mu_i},$$

де $\mu_i = \vee_{j=1}^{m_i} \beta_{ij} * \delta_{x_{ij}}$, $x_{ij} \in X$. Без втрати загальності можна вважати, що $\alpha_i > 0$, $\beta_{ij} > 0$ для всіх $i, j$. Потім

$$\mathrm{supp}_{M^*(X)}(\mathcal{M}) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}, \ \mathrm{supp}_X(\mu_i) = \{x_{i1}, \dots, x_{im_i}\},$$

де $i = 1, \dots, n$.

Тоді

$$\zeta_X(\mathcal{M}) = \vee_{i=1}^n \vee_{j=1}^{m_i} \alpha_i * \beta_{ij} * \delta_{x_{ij}}$$

і оскільки $*$ не має дільників нуля,

$$\mathrm{supp}(\zeta_X(\mathcal{M})) = \{x_{ij} \mid i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m_j\}.$$

Це показує що діаграма (4.2) є комутативною для $\mathcal{M}$, як зазначено вище. Оскільки згідно з [63, Твердження 2.7] такі міри є щільними в $M^{*2}(X)$, ми робимо висновок, що діаграма (4.2) є комутативною.

$\square$

Наступний приклад показує, що вимога відсутності дільників нуля є суттєвою. Припустимо, що $*$ є t-нормою Łukasiewicz. Нехай $X = \{a, b\}$, $a \neq b$, $\mu = \delta_a$, $\nu = \delta_a \vee \frac{1}{2} * \delta_b$ і $\mathcal{M} = \delta_\mu \vee \frac{1}{2} * \delta_\nu$. Тоді

$$\zeta_X(\mathcal{M}) = \delta_a \vee \frac{1}{2} * \delta_b \vee \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \delta_b = \delta_a$$

і

$$\mathrm{supp}(\zeta_X(\mathcal{M})) = \{a\} \neq \{a, b\} = \bigcup_{\tau \in \mathrm{supp}(\mathcal{M})} \mathrm{supp}(\tau).$$

**Твердження 4.2.4.** *Монада гіперпростору $\mathbb{H} = (exp, s, u)$ є підмонадою монади $\mathbb{M}^* = (M^*, \delta, \psi)$ на категорії* **Ultr**.

*Доведення.* Нехай $A \subset X$ – непорожня копактна підмножина. Означимо функціонал $\mu_A : C(X, \mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ формулою:

$$\mu_A(\varphi) = \sup\{\varphi(a) | a \in A\}.$$

Покажемо, що $\varphi_A$ задовольняє умови з означення $*$-міри з компактними носіями на ультраметричному промторі $X$.

Насамперед, очевидно, що $\mu_A(c_X) = c$ для кожного $c \in \mathbb{I}$.

Якщо $\varphi \in C(X, \mathbb{I})$ і $\lambda \in \mathbb{I}$, то

$$\mu_A(\lambda * \varphi) = \sup\{(\lambda * \varphi)(x) | x \in A\} = \lambda * \sup\{\varphi(x) | x \in A\}$$

(остання рівність випливає з монотонності $*$ норми).

Нарешті, якщо $\varphi, \psi \in C(X, \mathbb{I})$, то

$$\mu_A(\varphi \vee \psi) = \sup\{\varphi(x) \vee \psi(x) | x \in A\} =$$

$$= \sup\{\varphi(x) | x \in A\} \vee \sup\{\psi(x) | x \in A\} = \mu_A(\varphi) \vee \mu_A(\psi).$$

Зауважимо також, що якщо $\varphi, \psi \in C(X, \mathbb{I})$, то $\mu_A(\varphi) = \mu_A(\psi)$. Таким чином, $supp(\mu_A) \subset A$, а тому $\mu_A$ має компактний носій і тому є елементом множини $M^*(X)$. □

Покажемо, що відображенея $\alpha_X : expX \to M^*(x)$, означене формулою $\alpha_X(A) = \mu_A$, є морфізмом категорії **Ultr**, тобто є нерозтягуючим відображенням.

Нехай $A, C \in expX$ і $d_H(A, C) < r$ для деякого $r > 0$. Тоді для кожного $x \in X$ маємо еквіваленцію

$$A \cap B_r(x) \neq \varnothing \iff C \cap B_r \neq \varnothing.$$

Нехай $\varphi \in \mathcal{F}_r$, тоді існує $x \in X$ таке, що $\mu_A(\varphi) = \varphi(x)$. Але тоді $C \cap B_r \neq \varnothing$ і, оскільки функція $\varphi$ стала на кулі $B_r(x)$, одержимо, що

$$\mu_C(\varphi) = \sup\{\varphi(y) | y \in C\} \geqslant \varphi(x) = \mu_A(\varphi).$$

Аналогічно доводимо, що $\mu_C(\varphi) \leqslant \mu_A(\varphi)$, тобто $\mu_C(\varphi) = \mu_A(\varphi)$. Звідси безпосередньо випливає, що $\hat{d}(\mu_A, \mu_C) < r$, тобто, що відображення $\alpha_X$ нерозтягуюче.

Тепер перевіримо комутативність діаграм (1) і (2) з означення морфізму монад.

У нашому випадку ці діаграми виглядають так:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s_X"] \arrow[dr, "\delta_X"'] & expX \arrow[d, "\alpha_X"] \\ & M^*(X) \end{tikzcd}$$

та

$$\begin{tikzcd} exp^2(X) \arrow[r, "\alpha_{expX}"] \arrow[d, "u_X"'] & M^*(expX) \arrow[r, "M^*(\alpha_X)"] & M^{*2}(X) \arrow[d, "\zeta_X"] \\ expX \arrow[rr, "\alpha_X"'] & & M^*(X) \end{tikzcd}$$

Комутативність першої з діаграм очевидна: якщо $x \in X$, то

$$\alpha_X s_X(x)(\varphi) = \sup\{\varphi(x) | x \in \{x\}\}$$

$$= \varphi(x) = \eta_X(x)(\varphi),$$

$\varphi \in C[X, \mathbb{I}]$, тобто $\alpha_X s_X = \eta_X$.

Нехай тепер $\mathcal{A} \in exp^2 X$, $\varphi \in C[X, \mathbb{I}]$. Тоді

$$\alpha_X u_X(\mathcal{A})(\varphi) = \sup\{\varphi(x) | x \in \cup\mathcal{A}\} =$$

$$= \sup\{\sup\{\varphi(x) | x \in A | A \in \mathcal{A}\}\}$$

.

З іншого боку,

$$\zeta_X M^*(\alpha_X)\alpha_{expX}(\mathcal{A})(\varphi) = M^*(\alpha_X)\alpha_{expX}(\mathcal{A})(\bar{\varphi}) =$$

$$= \alpha_{expX}(\mathcal{A})(\bar{\varphi}\alpha_X) = \sup\{\bar{\varphi}\alpha_X(\mathcal{A}) | A \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \sup\{\alpha_X(A)(\varphi) | A \in \mathcal{A}\} = \alpha_X u_X(\mathcal{A})(\varphi)$$

.

**Зауваження.** З твердження 4.1.3 випливає, що трійку $(M^*, \eta, \zeta)$ можна також розглядати як монаду на категорії $\mathbf{Ultr}_L$ ультраметричних просторів та їх ліпшицевих відображень.

## 4.3. Тензорні добутки

Нехай $X, Y$ — ультраметричні простори, $\mu \in M^*(X)$, $\nu \in M^*(Y)$. Згадаємо визначення тензорного добутку (див., наприклад, [65] для загального випадку).

Далі ми розглянемо максимальну ультраметрику на добутку ультраметричних просторів. Маємо $x \in X$, визначимо відображення $i_x\colon Y \to X \times Y$ за формулою $i_x(y) = (x, y)$, $y \in Y$. Очевидно, що $i_x$ є ізометричним вкладенням.

Маючи $\nu \in M^*(Y)$, визначимо відображення $j_\nu\colon X \to M^*(X \times Y)$ за формулою: $j_\nu(x) = M^*(i_x)(\nu)$, $x \in X$.

**Лема 4.3.1.** *Відображення $j_\nu$ є ізометричним вкладенням.*

*Доведення.* Припустимо, що $x, y \in X$ і $d(x, y) < r$. Зверніть увагу, що для будь-якого $s \geqslant r$

$$i_x^{-1}(B_s^{X\times Y}(a, b)) = i_x^{-1}(B_s^{X\times Y}(a, b)) = B_s^Y(b).$$

Отже, для будь-якого $\varphi \in \mathcal{F}_s(X \times Y)$ ми маємо $\varphi i_x = \varphi i_y$. Таким чином, для будь-якого $\varphi \in \mathcal{F}_s(X \times Y)$,

$$j_\nu(x)(\varphi) = \nu(\varphi i_x) = \nu(\varphi i_y) = j_\nu(y)(\varphi)$$

і, отже, $\tilde{d}(j_\nu(x), j_\nu(y)) < r$. Ми робимо висновок, що $j_\nu$ є нерозтягуючим відображенням.

Тепер припустимо, що $d(x, y) \geqslant r$. Тоді ясно,

$$d_H(\mathrm{supp}(j_\nu(x)), \mathrm{supp}(j_\nu(y)) \geqslant r$$

і, отже, згідно з [63, Твердження 2.5] , $\tilde{d}(j_\nu(x), j_\nu(y)) \geqslant r$. $\square$

Нарешті, означимо тензорний добуток $*$-мір $\mu$ і $\nu$ такою формулою:

$$\mu \otimes \nu = \zeta_{X\times Y} M^*(j_\nu)(\mu) \in M^*(X \times Y).$$

Встановимо деякі властивості операції тензорного добутку $*$-мір.

**Твердження 4.3.2.** *Відображення*

$$\otimes\colon M^*(X)\times M^*(Y)\to M^*(X\times Y)$$

*нерозтягуюче.*

*Доведення.* Нехай $\mu,\mu'\in M^*(X)$, $\nu,\nu'\in M^*(Y)$. Спочатку зауважимо, що очевидно $\tilde d(j_\nu,j_{\nu'})\leqslant \tilde d(\nu,\nu')$, а оскільки функтор $M^*$ локально нерозтягуючий, то $\tilde d(M^*(j_\nu),M^*(j_{\nu'}))\leqslant \tilde d(\nu,\nu')$.

Нарешті,

$$\begin{aligned}\tilde d(\mu\otimes\nu,\mu'\otimes\nu') =&\tilde d(\zeta_{X\times Y}M^*(j_\nu)(\mu),\zeta_{X\times Y}M^*(j_{\nu'})(\mu'))\\ \leqslant&\tilde d(M^*(j_\nu)(\mu),M^*(j_{\nu'})(\mu'))\\ \leqslant&\max\{\tilde d(M^*(j_\nu)(\mu),M^*(j_\nu)(\mu')),\tilde d(M^*(j_\nu)(\mu'),M^*(j_{\nu'})(\mu'))\}\\ \leqslant&\max\{\tilde d(\mu,\mu'),\tilde d(\nu,\nu')\}=\tilde d((\mu,\nu),(\mu',\nu')),\end{aligned}$$

що й означає нерозтягуваність відображення тензорного добутку $\otimes$. □

Опис тензорного добутку двох $*$-мір зі скінченними носіями дається таким твердженням.

**Твердження 4.3.3.** *Нехай*

$$\mu=\vee_{i=1}^n\alpha_i*\delta_{x_i}\in M^*(X),\ \ \nu=\vee_{j=1}^m\beta_j*\delta_{y_j}\in M^*(Y).$$

*Тоді*

$$\mu\otimes\nu=\vee_{i=1}^n\vee_{j=1}^m\alpha_i*\beta_j*\delta_{(x_i,y_j)}\in M^*(X\times Y).$$

*Доведення.* Зауважимо, що

$$M^*(j_\nu)(\mu)=\vee_{i=1}^n\alpha_i*\delta(j_\nu(x_i))=\vee_{i=1}^n\alpha_i*\delta(\vee_{j=1}^m\beta_j*\delta(x_i,y_j))$$

і тому

$$\mu\otimes\nu=\zeta_{X\times Y}(\vee_{i=1}^n\alpha_i*\delta(\vee_{j=1}^m\beta_j*\delta(x_i,y_j)))$$

звідки випливає твердження. □

Наступний приклад показує певну відмінність поведінки тензорних добутків $*$-мір і тензорних добутків ймовірнісних та інших мір. Причина ефекту зменшення носіїв полягає у існування дільників нуля для напівгрупи (трикутної норми) $*$.

Нехай $*$ – t-норма Лукасєвича. Приймемо $X = \{a, b\}$, де $a \neq b$. Нехай

$$\mu = \nu = \frac{1}{2} * \delta_a \vee 1 * \delta_b \in M^*(X).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mu \otimes \nu = & \left(\frac{1}{2} * \frac{1}{2}\right) * \delta_{(a,a)} \vee \left(\frac{1}{2} * 1\right) * \delta_{(a,b)} \vee \\ & \vee \left(1 * \frac{1}{2}\right) * \delta_{(b,a)} \vee (1 * 1) * \delta_{(b,b)} = \\ = & \delta_{(a,b)} \vee \delta_{(b,a)} \vee \delta_{(b,b)} \end{aligned}$$

і отже

$$\mathrm{supp}(\mu \otimes \nu) \neq \mathrm{supp}(\mu) \times \mathrm{supp}(\nu),$$

як це маємо у випадку ймовірнісних мір, ідемпотентних мір, а також max-min мір.

### 4.4. Застосування

Ми розглянемо гру двох осіб зі стратегіями в ультраметричних просторах $X_i$, $i = 1, 2$. Така гра задається своїми функціями виплат, які позначаються $u_i \colon X_1 \times X_2 \to [0, 1]$, $i = 1, 2$. При цьому $*$-мірозначна стратегія гравця $i$ є елементом означеного вище ультраметричного простору $M^*(X_i)$, $i = 1, 2$.

Таким чином, $*$-мірозначні стратегії можна вважати неадитивним аналогом змішаних стратегій (стратегій зі значеннями у множині ймовірнісних мір). Зважаючи на багатство прикладів трикутних норм $*$ та можливість їх комбінування за допомогою операції порядкової суми, можна сподіватися на різноманітні економічні інтерпретації нашого підходу.

Означимо функції виплат для ігор в $*$-мірозначних стратегіях

$$U_i \colon M^*(X_1) \times M^*(X_2) \to [0,1]$$

таким чином:

$$U_i(\mu_1, \mu_2) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(u_i),\ i = 1, 2.$$

**Твердження 4.4.1.** *Відображення $U_i$, $i = 1, 2$, неперервне.*

*Доведення.* Оскільки $(\mu_1 \otimes \mu_2)(u_i) = \bar{u}_i(\mu_1 \otimes \mu_2)$, $i = 1, 2$, то це комбінація тверджень 4.3.2 та 4.1.3. □

Ми говоримо, що пара $*$-значних стратегій $(\mu_1^0, \mu_2^0) \in M^*(X_1) \times M^*(X_2)$ є рівновагою в $*$-значних стратегіях, якщо $U_2(\mu_1^0, \mu_2) \leqslant U_2(\mu_1^0, \mu_2^0)$ для кожного $\mu_2 \in M^*(X_2)$ і $U_1(\mu_1, \mu_2^0) \leqslant U_2(\mu_1^0, \mu_2^0)$ для кожного $\mu_1 \in M^*(X_1)$.

Можна також означити поняття $\varepsilon$-рівноваги для ігор у $*$-значних стратегіях. Для кожного $\varepsilon > 0$, ми говоримо, що $(\mu_1^0, \mu_2^0) \in M^*(X_1) \times M^*(X_2)$ є $\varepsilon$-рівновагою в $*$-мірнозначній стратегії, якщо

$$U_2(\mu_1^0, \mu_2) \leqslant U_2(\mu_1^0, \mu_2^0) + \varepsilon$$

для кожного $\mu_2 \in M^*(X_2)$, і

$$U_1(\mu_1, \mu_2^0) \leqslant U_2(\mu_1^0, \mu_2^0) + \varepsilon$$

для кожного $\mu_1 \in M^*(X_1)$.

**Твердження 4.4.2.** *Для кожної рівноваги*

$$(\mu_1^0, \mu_2^0) \in M^*(X_1) \times M^*(X_2)$$

*і кожного $\varepsilon > 0$ існує $\varepsilon$-рівновага в просторі $M^*_\omega(X)$.*

*Доведення.* Це випливає з твердження 4.4.1 і того факту, що множина $*$-мір зі скінченними носіями є щільною в просторі $M^*(X)$. □

Зауважимо, що теорема наближення для ігор у змішаних стратегіях розглядається в [24].

Питання про існування рівноваги для ігор у $*$-значних стратегіях залишається відкритим. Гіпотеза полягає у тому, що така рівновага існує. Основна проблема полягає у відсутності опуклої структури в просторах виду $M^*(X)$ в ультраметричному випадку (див. [50] для випадку компактних метричних просторів).

## Висновки до розділу

Функтор $*$-мір з компактними носіями на категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень є функторіальною частиною монади на цій категорії. Структура монади дозволяє означити тензорний добуток $*$-мір з компактними носіями на категорії ультраметричних просторів. Доведено, що операція тензорного множення нерозтягуюча.

# ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано такі результати:

1. Для кожної трикутної норми $*$ запроваджено поняття $*$-міри на компактному гаусдорфовому просторі. Воно є природним аналогом поняття ідемпотентної міри та max-min міри. Множина всіх $*$-мір на компактному гаусдорфовому просторі топологізується слабкою* топологією. Утворений топологічний простір є компактним гаусдорфовим. Більше того, така конструкція простору $*$-мір визначає функтор на категорії **Comp**.
2. Для просторів $*$-мір побудовано аналог відображення Мілютіна, відомого для просторів ймовірнісних мір, ідемпотентних мір та напівнеперервних згори ємностей. Доведено, що множина $*$-мір зі скінченними носіями всюди щільна в просторі всіх $*$-мір.
3. Побудоване зображення $*$-мір на просторі $X$ як замкнених множин у $X \times \mathbb{I}$ зі спеціальними властивостями. За допомогою такого зображення можна показати ізоморфність функтора $*$-мір для різних трикутних норм $*$.
4. Простір $*$-мір з компактними носіями на ультраметричному просторі допускає ультраметризацію, аналогічну до ультраметризації Гартоґа і де Вінка просторів ймовірнісних мір. Показано, що функтор $*$-мір є локально нерозтягуючим функтором у категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень. Одним з основних результатів дисертації є той факт, що побудована ультраметризація також зберігає повноту ультраметричних просторів.
5. Функтор $*$-мір з компактними носіями на категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих вівдображень є функторіальною

частиною монади на цій категорії. Структура монади дозволяє означити тензорний добуток $*$-мір з компактними носіями на категорії ультраметричних просторів. Доведено, що операція тензорного множення нерозтягуюча.

6. Розглянуто ігри, у яких стратегії набувають значення у просторах $*$-мір. Показано неперервність функцій виплат для таких ігор, означено поняття рівноваги і доведено, що кожна рівновага має наближення майже рівновагами зі скінченними носіями.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Ageev S., Tymchatyn E., On exact atomless Milutin maps, Topology Appl., **153** (2-3), 227–238, (2005).
2. Akian M., Densities of idempotent measures and large deviations, Trans. Amer. Math. Soc., **351**, 4515–4543, (1999).
3. Barr M., Wells Ch., Toposes, Triples and Theories, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 278, (1985), Republished in: Reprints in Theory and Applications of Categories, **12**, 1–287, (2005).
4. Bazylevych L., Repovs D., Zarichnyi M., Spaces of idempotent measures of compact metric spaces, Topology Appl., **157**, 136–144, (2010).
5. Briec W., Horvath C. $\mathbb{B}$-convexity, Optimization, **53**(2), 103–127, (2004).
6. Brydun V., Savchenko A., Zarichnyi M., Fuzzy metrization of the spaces of idempotent measures. European Journal of Mathematics, **6**, 98–109, (2020).
7. Brydun V., Savchenko A., Zarichnyi M., On mim-spaces, Proc. Intern. Geom. Center, **8**(2), 26–33, (2015).
8. Brydun V., Zarichnyi M., Spaces of max-min measures on compact Hausdorff spaces, Fuzzy Sets and Systems, **396** , 138–151,(2020).
9. Cencelj M., Repovš D., Zarichnyi M., Max-Min Measures on Ultrametric Spaces, Topology Appl., **160**(5), 673–681, (2013).
10. Chigogidze A. Ch., Extension of normal functors, Vestnik Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., **6**, 23–26, (1984).
11. Cohen G., Gaubert S., Quadrat J., Singer I., Max-plus convex sets and functions, In: Litvinov, G.L., Maslov, V.P. (eds.): Idempotent Mathematics and Mathematical Physics. Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, 105–129, (2005)
12. Da Cunha R. D., Oliveira E.R., Strobin F., Existence of invariant

idempotent measures by contractivity of idempotent Markov operators, Journal of Fixed Point Theory and Applications, **25**(8), (2023).

13. Da Cunha R. D., Oliveira E. R., StrobinF., Fuzzy-set approach to invariant idempotent measures, Fuzzy Sets Syst., **457**(3), 46–65, (2023).
14. Den Hartog J. I., De Vink E. P., Building metric structures with the Meas functor, Duke Math. J. **34**, 255–271; errata 813–814, (1967).
15. Dow J., Werlang S., Nash equilibrium under Knightian uncertainty: breaking down backward induction, J. Econ.Theory, **64**, 205–224, (1994).
16. Dragovich B., Khrennikov A. Yu., Kozyrev S. V., Volovich I.V., On p-adic mathematical physics, p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. **1**(1), 1–17, (2009).
17. Eichberger J., Kelsey D., Non-additive beliefs and strategic equilibria, Games Econ Behav, **30**, 183–215, (2000).
18. Engelking R., General Topology. Monografie matematyczne, PWN, **60**, (1977).
19. Eshkobilova, D. T., Kholturaev, Kh. F., The functor of idempotent probability measures and completeness index of uniform spaces, Uzbek Math. J., **1**, 65–79, (2021).
20. Fedorchuk V. V., Triples of infinite iterations of metrizable functors. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math., 54(2),396–417 (1990); translation in Math. USSR-Izv. **36**(2), 411–433, (1991).
21. George A., Veeramani P. On some results in fuzzy metric spaces. Fuzzy Sets and Systems, **64**, 395–399, (1994).
22. Gilboa I., Expected utility with purely subjective non-additive probabilities, J. of Mathematical Economics, **16**, 65–88, (1987).
23. Glycopantis D., Muir A., Nash equilibria with Knightian uncertainty; the case of capacities, Econ. Theory, **37**, 147–159, (2008).
24. Glycopantis D., Muir A., Nash equilibria in $\infty$-dimensional spaces: An approximation theorem, Economic Theory **13**(3), 743–751, (1999).

25. Hubal O., Capacity functor on the category of ultrametric spaces. - Mat. Stud. **32**, 132-139, (2009).
26. Hubal O., Zarichnyi M., Idempotent probability measures on ultrametric spaces, J. Math. Anal. Appl., **343**, 1052–1060, (2008).
27. Ishmetov A. Ya. On functor of idempotent probability measures with compact support, Uzbek mathematical journal, **1**, 72–80, (2010).
28. Ishmetov A. Ya. On max-plus-convex subfunctors of the functor of idempotent probability measures, Sciences of Europe, **33**(3), 47–54, (2019).
29. Kholturaev Kh. F., On infinite iterations of the functor of idempotent probability measures, (2019). arXiv:1906.06800
30. Kholturaev Kh. F., Geometrical properties of the space of idempotent probability measures, Appl. Gen. Topol. **22**(2), 399–415, (2021).
31. Klement, Peter; Mesiar, Radko; Pap, Endre, Triangular Norms. Dordrecht: Kluwer. ISBN 0-7923-6416-3, (2000).
32. Kolokoltsov V., Maslov V., Idempotent Analysis and Applications, Kluwer Acad. Publ., (1997).
33. Kozhan R., Zarichnyi M., Nash equilibria for games in capacities, Economic Theory, **35**(2), 321–331, (2008).
34. Li C., Yang Zh., Fuzzy ultrametrics based on idempotent probability measures, J. Fuzzy Math., **22**(2), 463–476, (2014).
35. Litvinov G. L., Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: A brief introduction, J. Math. Sci. **140**, 426, (2007).
36. Litvinov G. L., Maslov V. P., ShpizG. B., Idempotent (asymptotic) analysis and the representation theory, Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics, V. A. Malyshev and A. M. Vershik (eds.), Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 267278, (2002).
37. Maslov V.P., Samborskii S.N., Idempotent Analysis, Adv. Soviet Math., Amer. Math. Soc., Providence, **13** (1992).

38. Mazurenko N., Zarichnyi M., Idempotent ultrametric fractals. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math., **79**, 111–118, (2014).
39. Mazurenko N., Zarichnyi M., Invariant idempotent measures, Carpathian Math. Publ., **10**(1), 172–178, (2018).
40. Mihet D., Fuzzy $\psi$-contractive mappings in non-Archimedean fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems. **159**(6), 739–744, (2008).
41. Muir A., Glycopantis D. , Continuity of the payoff functions, Economic Theory **16**(1), 239–244, (2000).
42. Murtagh F., On ultrametricity, data coding, and computation, Journal of Classication, **21**(2), 167–184, (2004).
43. Nykyforchyn O., Repovš D. *Idempotent Convexity and Algebras for the Capacity Monad and its Submonads*, Appl. Categor. Struct. **19**, 709–727, (2011).
44. Nykyforchyn O.R., Uniqueness of monads for the capacity functor and its subfunctors, Mat. Stud. **33**, 11–13, (2010).
45. Priess-Crampe S., Ribenboim P., Ultrametric spaces and logic programming, J. Log. Program., **42**(2), 59–70, (2000).
46. Radul T. M., Fibration of idempotent measures, Ukr. math. j., **72**(11), (2020).
47. Radul T. Equilibria for games in idempotent measures, ESAIM Proceedings and Surveys, **57**, 64-69, (2017).
48. Radul T., Equilibrium under uncertainty with fuzzy payoff. Topol. Methods Nonlinear Anal., **59**(2B), 1029–1045, (2022).
49. Radul T., On the openness of the idempotent barycenter map, Topology and its Applications, **265**, 106809, (2019).
50. Radul T., On t-normed integrals with respect to possibility capacities on compacta, arXiv:2111.06612
51. Radul T. , Idempotent measures: absolute retracts and soft maps, Topological Methods in Nonlinear Analysis (submitted).

52. Radul T. Absolute retracts and equiconnected monads. Topology Appl., **202**, 1–6, (2016).
53. Repovš D., Savchenko A., Zarichnyi M., Fuzzy Prokhorov metric on the set of probability measures, Fuzzy Sets and Systems, **175**(1), 96–104, (2011).
54. Repovš D., Semenov P. V., Ščepin E. V., On exact Milyutin mappings, Topology and its Applications, **81**(3), 197–205, (1997).
55. Roberts M. D., Ultrametric distance in syntax, Prague Bull. Math. Linguist., **103**, 111–130, (2015).
56. Rodríguez-López J., Romaguera S., The Hausdorff fuzzy metric on compact sets, Fuzzy Sets and Systems, **147**(2), 273–283, (2004).
57. Romaguera S., Sapena A., Tirado P., The Banach fixed point theorem in fuzzy quasi-metric spaces with application to the domain of words, Topology and its Applications, **154**(10), 2196–2203, (2007).
58. Savchenko A., Zarichnyi M., Probability measure monad on the category of fuzzy ultrametric spaces, Azerbaijan Journal of Mathematics, **1**(1), 114–121, (2011).
59. Savchenko A., Fuzzy hyperspase monad, Mat. Stud., **33**(2), 192—198, (2010).
60. Shchepin E.V., Functors and uncountable powers of compacta, Uspekhi mat. nauk., **36**(3), 1–71, (1981).
61. Sukhorukova Kh., Spaces of non-additive measures generated by triangular norms. Matematychni Studii, **59**(2), 215—224. (2023).
62. Sukhorukova, Kh., Zarichnyi, M.On $*$-measure monads on the category of Ultrametric spaces, Carpathian Mathematical Publication. **14**(2), 429–436 (2022).
63. Sukhorukova Kh., Zarichnyi M. , On spaces of $*$-measures on ultrametric spaces, Visn. Lviv. univ. Ser. Mekh.-mat., **90**, 76–83, (2021).
64. Świrszcz T., Monadic functors and convexity, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **22**, 39–42, (1974).

65. Teleiko, A.; Zarichnyi, M. Categorical topology of compact Hausdorff spaces. Mathematical Studies Monograph Series. VNTL Publishers, Lviv, **5**, 256, (1999).
66. Tojiev I. I., On a metric of the space of idempotent probability measures, Uzbek mathematical journal, **4**, 165–172, (2010).
67. Vlad M. O., Fractal time, ultrametric topology and fast relation, Phys. Lett., **189**(4), 299–303, (1994).
68. Zaitov A. A., On a metric of the space of idempotent probability measures. Appl. Gen. Topol. **21**(1), 35–51, (2020).
69. Zaitov A. A., Tozhiev I. I., Functional representations of closed subsets of a compactum, Uzbek. Mat. Zh., **1**, 53–63, (2010).
70. Zaitov A. A., Kholturayev Kh. F. On perfect metrizability of the functor of idempotent probability measures, (2012). //arxiv: 1205. 0864v1 [math. GN]
71. Zaitov A. A., Tojiev I. I. On metric of the space of idempotent probability measures, (2012). //arxiv:1006. 3902 v 2 [math. GN]
72. Zaitov A. A., Ishmetov A. Ya. On monad generating by the functor $I_\beta$, Vestnik of National University of Uzbekistan, **2**, 61-64, (2013).
73. Zaitov A. A., Kholturaev Kh. F. On interrelation of the functors of probability measures and of idempotent probability measures. Uzbek Mathematical Journal, **4**, 36-45, (2014).
74. Zaitov A. A., Ishmetov A. Ya. Geometrical properties of the space of idempotent probability measures, (2018). //arxiv:1808. 10749v2 [math. GN]
75. Zaitov A. A., Kholturaev Kh. F. Geometrical properties of the space of idempotent probability measures, (2018). //arXiv:1811. 08325v1 [math. GN]
76. Zaitov A. A., Kholturaev Kh. F., On interrelation of the functors $P$ of probability measures and $I$ of idempotent probability measures, Uzbek

Mathematical Journal, **4**, 36–45, (2014).

77. Zarichnyi M., Spaces of measures related to dequantization, J. Phys. Studies, **11**(1), 34–40, (2007).
78. Zarichnyi M., Spaces and mappings of idempotent measures, Izv. Math., **74**(3), 481499, (2010).
79. Zarichnyi M. M., Nykyforchyn O. R., Capacity functor in the category of compacta, Sb. Math., **199**(2), 159–184, (2008).
80. Zarichnyi M. M., Functors and spaces in idempotent mathematics, Bukovinian Math. Journal., **9**(1), 171–179, (2021).
81. Zhou L., Integral representation of continuous comonotonicallya dditive functionals, Trans. Amer. Math. Soc., **350**(5), 1811–1822, (1998).

# СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

**Список публікацій, в яких опубліковано основні результати дисертації:**


(1) Sukhorukova, Kh., Zarichnyi, M.: On spaces of $*$-measures on ultrametric spaces. Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. **90**, 76–83 (2021).

(2) Sukhorukova, Kh., Zarichnyi, M.: On $*$-measure monads on the category of Ultrametric spaces. Carpathian Mathematical Publication. **14**(2), 429–436 (2022).

(3) Sukhorukova, Kh.: Spaces of non-additive measures generated by triangular norms. Matematychni Studii, **59**(2), 215—224. (2023).


**Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**


(1) Sukhorukova Kh.: Categorical properties of functionals generated by the triangular norms In: Book of Abstracts The 14th Summer School "Analysis, Topology, Algebra and Applications p. 34. Pidzakharychi, Chernivtsi Region, Ukraine, August 10 – 20, 2019.

(2) Сухорукова Х. О.: Функтори в категорії компактів, породжені трикутними нормами. In: Тези доповідей XV Міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», ст. 9. Хакрівський національний університет імені В.Н.Каразіна, Харків, 13–14 Березня 2020.

(3) Sukhorukova Kh.: On idempotent measures and functionals generated by triangular norms In: Abtracts of Contemporary Mathematics in Ki-

elce. Kielce, Poland, February 24 – 27, 2021.

(4) Sukhorukova Kh.: Ultrametric spaces of $*$-measures. In: Book of Abstracts International Online Conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk, p. 147, May 25 – 28, 2021.

(5) Zarichnyi M., Mazurenko N., Sukhorukova Kh.: On (in)homogeneous fractals generated by $*$-measures. In: Abtracts of the International online conference "Current Trends in Abstract and Applied Analysis", p. 55. Ivano-Frankivsk, Ukraine, May 12 – 15, 2022.

(6) Sukhorukova Kh.: On K-ultrametrics and $*$-measures. In: International Scientific Conference Devoted to 160 anniversary of Dvytro Grave (25.08.1863 – 19.12.1939), p. 113. Odesa, Ukraine, May 29 – June 1, 2023.