

До спеціалізованої вченої ради ДФ 35.051.114  
у Львівському національному  
університеті імені Івана Франка  
79000, м. Львів, вул. Університетська, 1

### ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, професора,  
професора кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу  
Херсонського державного університету  
**Савченка Олександра Григоровича**  
на дисертаційну роботу **Сухорукової Христини Олександрівни**  
«Неадитивні міри та їх застосування в теорії рівноваги»,  
представлену на здобуття ступеня доктора філософії  
з галузі знань 11 «Математика та статистика»  
за спеціальністю 111 «Математика»

Дисертація Христини Сухорукової продовжує дослідження в одному з напрямків ідемпотентної математики, пов'язаному з теорією функторів неадитивних мір у категоріях топологічних та метричних просторів. При цьому згадаємо результати М. М. Зарічного, який розпочав систематичні дослідження функтора ідемпотентних мір у категорії компактних просторів і їхніх неперервних відображень, Т. М. Радула, О. Р. Никифорчина, Л. Є. Базилевич, Д. Реповша, М. Цепцеля, В. Л. Бридун та ін. Зокрема М. М. Зарічний встановив нормальність та відкритість функтора ідемпотентних мір. Т. М. Радул використовував цей функтор у контексті теорії ігор та математичної економіки, що зумовлене новітніми тенденціями розвитку цих наук – дослідженнями неадитивних просторів стратегій.

Поряд з функтором ідемпотентних мір вивчалися інші споріднені функтори, наприклад, функтор  $\max$ - $\min$  мір, функтор напівнеперервних зверху  $\epsilon$ -мностей та ін. У дисертації Христини Сухорукової введено широкий клас функторів неадитивних мір – функтори  $*$ -мір, де  $*$  – деяка  $t$ -норма (трикутна норма). За допомогою заміни змінних можна розглядати ідемпотентні міри та  $\max$ - $\min$  міри як спеціальні випадки  $*$ -мір. Звідси робимо висновок про актуальність теми дисертації Христини Сухорукової. Зауважимо також, що поняття трикутної норми лежить в основі означення розмитого метричного простору, що робить тематику дисертації дотичною також і до теорії розмитих метричних просторів, яка інтенсивно розвивається в останні десятиліття.

Загальний обсяг дисертації становить 105 сторінок і складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел зі 81 найменування та додатка, який містить список публікацій здобувачки за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі наведено загальні відомості про дисертацію, а саме: обґрунтовано актуальність теми, вказано мету, завдання, предмет та об'єкт досліджень, а також наведено відомості про наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

Центральним у дисертації є розділ 2, де наводиться означення і досліджуються основні властивості функтора  $*$ -мір  $M^*$ , що діє в категорії  $Comp$  компактних гаусдорфових просторів та їхніх неперервних відображень. Авторка йде за схемою:

- описує простір  $M^*(X)$ , де  $X$  – скінченний простір;
- за допомогою властивості неперервності встановлення деяких властивостей обмеження функтора  $M^*$  на;
- за допомогою аналога відображення Мілютіна перехід від нульвимірному до загального випадку.

Крім того, у цьому розділі показано опис елементів простору  $M^*(X)$  як спеціальних замкнених підмножин добутку  $X \times [0,1]$ ; при цьому значення  $*$ -міри на функції – це максимум функції на відповідній підмножині. Таке гіперпросторове зображення  $*$ -мір продовжує дослідження В. Л. Бридун та М. М. Зарічного, які стосувалися ідемпотентних мір та  $\max$ - $\min$  мір.

Гіперпросторові зображення дають можливість встановити ізоморфізми функторів  $*$ -мір для різних трикутних норм  $*$ . З ізоморфізму функторів  $M^*$  та  $I$ , і відомих результатів для функтора  $I$ , випливає нормальність функтора  $M^*$ .

Наступний розділ присвячений функторам  $*$ -мір з компактними носіями на ультраметричних просторах.

Такі дослідження виростили з результатів Гартога і де Вінка, що стосуються ультраметризації ймовірнісних мір з компактними носіями на ультраметричних просторах і мають застосування до семантики мов програмування. Згодом різні автори поширили ці результати на випадок функторів напівнеперервних зверху ємностей, ідемпотентних мір та  $\max$ - $\min$  мір.

У цьому розділі запропоновано ультраметризацію множини  $M^*(X)$  усіх  $*$ -мір з компактними носіями на просторі  $X$ . Доведено, що  $M^*$  – функтор на категорії  $Ultr$  ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень, який є локально нерозтягуючим. Цей функтор зберігає клас повних ультраметричних просторів.

Показано, що відображення носія  $M^*(X) \rightarrow exp X$  є нерозтягуючим; такі відображення задають природне перетворення функтора  $M^*$  у функтор гіперпростору  $exp$ .

Важливу роль у теорії категорій відіграє поняття монади, яке тісно пов'язане з поняттями вільних об'єктів і спряжених функторів. Монади в категорії  $Ultr$ , породжені функторами  $M^*$ , розглядаються в розділі 4. Тут, зокрема, наводиться приклад попарно неізоморфних монад, породжених функторами  $M^*$  для різних трикутних норм  $*$ .

Структура монади дає змогу означити операцію тензорного множення  $*$ -мір, яка є аналогом тензорного множення ймовірнісних мір та ідемпотентних мір.

У цьому розділі дисертації наведено також застосування  $*$ -мір до теорії рівноваги. Сучасні тенденції в теорії ігор передбачають використання неадитивних мір для моделювання стратегій гравців. У дисертації запроваджується поняття рівноваги для ігор з  $*$ -мірозначними стратегіями, доводиться неперервність функцій виплат.

Важливим результатом є апроксимаційна теорема для ігор з  $*$ -мірозначними стратегіями: кожна рівновага наближається до  $\varepsilon$ -рівноваги зі скінченними носіями при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

В цілому результати дисертації є важливим внеском у теорію функторів у топологічних та метричних категоріях та теорію неадитивних мір.

Текст дисертації в основному задовольняє вимоги до наукових текстів. Однак, трапляються орфографічні та стилістичні помилки, в основному спричинені тим, що статті авторки опубліковані англійською мовою, а фрагменти дисертації є перекладами відповідних фрагментів публікацій.

Вказані недоліки носять технічний характер і не впливають на результати дисертації.

На мою думку, дисертація здобувачки Х. О. Сухорукової на тему «Неадитивні міри та їх застосування в теорії рівноваги» подана на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика», є завершеним дослідженням. Робота містить ряд важливих та актуальних досліджень, всі доведення є зрозумілими і логічними. Як у самій дисертації, так і в публікаціях відсутні порушення правил академічної доброчесності.

Вважаю, що за новизною, актуальністю, обсягом та практичним значенням дисертація відповідає вимогам наказу МОН України №40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» (з наступними змінами) та «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022, а її авторка, Сухорукова Христина Олександрівна, заслуговує присудження їй ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика».

**Офіційний опонент:**

доктор фізико-математичних наук,  
професор, професор кафедри  
алгебри, геометрії та математичного аналізу  
Херсонського державного університету

Олександр САВЧЕНКО