АНОТАЦІЯ

Попадюк О.Б. Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – "Математика" (Галузь знань – 11 "Математика та статистика"). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2023.

Алгебрична теорія напівгруп – це одна із областей математики, які мають доволі широке коло застосуваннь: теорія формальних мов, алгебрична теорія автоматів, теорія кодів, шифрування, економетрика та ін. До цього спонукав технічний прогрес і особливо поширення застосування алгебричних методів у шифруванні та кодуванні. Харківський математик Антон Сушкевич на початку XX століття опублікував перші фундаментальні результати у теорії напівгруп. Викладені результати Сушкевича, принципи його досліджень, його методологія були новітніми. Разом з технічним прогресом це спонукало Д. Ріса, Ш. Шварца, М.-П. Шютценбергера та інших до нових фундаментальних результатів не лише в алгебричній теорії напівгруп, але і в її застосуваннях.

У 1960-і роки вже сформовані такі напрямки досліджень у теорії напівгруп: класифікація напівгруп і побудова універсальних об'єктів; напівгрупи перетворень і відношень; напівгрупи ендоморфізмів алгебричних систем; застосування напівгруп в теорії автоматів, формальних мов і кодів; частково впорядковані напівгрупи; топологічні та напівтопологічні напівгрупи; топологічні та напівтопологічні напівґратки та ґратки, та інші.

Центральне місце в теорії напівгруп зайняла біциклічна напівгрупа, введена Є. Ляпіним в 1946 р. Використовуючи її, Олаф Андерсен вказав умови

за яких проста напівгрупа з ідемпотентом є цілком простою, Н. Рейлі та Р. Уорн описали структуру біпростих регулярних ω-напівгруп використовуючи конструкцію Брука занурення напівгрупи в простий моноїд, і це спонукало описанню різних класів біпростих інверсних і регулярних напівгруп.

Ідеологія В. Вагнера, коріння якої лежить в диференціальній геометрії, зображення інверсних напівгруп як напівгруп часткових перетворень доповнила вище згадані результати простими конструктивними доведеннями з використанням симетричного інверсного моноїда. Багато конструкцій занурення напівгруп у напівгрупи з "хорошими" властивостями використовують ідею симетричного інверсного моноїда, зокрема, також є конструктивне доведення теореми Оре про те, що кожна реверсивна справа напівгрупа зі скороченнями ізоморфно занурюється в групу, запропоноване Д. Рісом у [150]. Також багато напівгруп (часткових) перетворень мають прості регулярні зображення як напівгрупи визначені на множинах.

Поєднання цих ідей теорії напівгруп породило біциклічні розширення Гутіка–Михаленича $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ над ω-замкненою сім'єю $\mathscr{F}$ підмножин множини невід'ємних цілих чисел ω [11], які поєднали в залежності від структури сім'ї $\mathscr{F}$ різні "протилежні" за властивостями напівгрупи, зокрема біциклічну напівгрупу та напівгрупу матричних одиниць. Тому природно виникає задача описання біциклічного розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ з точністю до ізоморфізму в залежності від структури сім'ї $\mathscr{F}$.

Описання структури автоморфізмів та ендоморфізмів напівгруп перетворень є класичною проблемою теорії напівгруп. Напівгрупи ендоморфізмів описані повністю лише для деяких напівгруп перетворень, зокрема для скінченної напівгрупи повних перетворень, скінченної симетричної інверсної напівгрупи, симетричної напівгрупи відображень на скінченній множині, скінченних напівгруп Брауера.

Розглядаючи біциклічне розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ як напівгрупу часткових бієктивних перетворень множини ω, природно було б описати напівгрупу ендоморфізмів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, оскільки навіть описання структури її конгруенцій не дає повного розуміння її структури. Перша задача є цікавою за модулем "спеціальних" часткових перетворень, що є елементами симетричного інверсного моноїда над множиною ω. Враховуючи вище сказане, природно виникає задача: дослідити структуру напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, описати її "хороші" зображення, конгруенції та топологізації у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_n$ породжується скінченним інтервалом $[k, k+n]$ в ω, для деяких невід'ємних цілих чисел k і n, зокрема коли

$$\mathscr{F}_n = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}, \ldots, \{0,1,\ldots,n\}\}.$$

Відомо, що на біциклічній напівгрупі всі гаусдорфові трансляційно-неперервні топології є дискретними. З огляду на вище згаданий факт, природно виникає задача про топологізацію напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ в залежності від сім'ї $\mathscr{F}$, зокрема дослідження існування компактних і близьких до них напівгрупових і трансляційно-неперервних топологій на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Метою дисертаційної роботи є встановлення алгебричних властивостей біциклічного розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ та інверсної напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leqslant)$ рангу $\leqslant n$, описання їхніх напівгруп ендоморфізмів, а також дослідження існування компактних і близьких до них напівгрупових і трансляційно-неперервних топологій на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

Об'єктом дослідження є біциклічне напівгрупове розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, інверсна напівгрупа $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leqslant)$ рангу $\leqslant n$, а також їхні напівгрупи ендоморфізмів.

Предмет дисертаційного дослідження – алгебричні властивості біциклічного розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ та інверсної напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ та їхніх напівгруп ендоморфізмів, компактні та близькі до них напівгрупові і трансляційно-неперервні топології на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

У процесі дослідження дисертаційної проблематики застосовуються методи алгебричної теорії напівгруп і топологічної алгебри.

Дисертація складається з анотацій українською й англійськими мовами, вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури та додатка.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, зазначено мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідницькою темою, особистий внесок здобувача, апробацію та публікації основних результатів дисертації.

У розділі 1 наведено огляд літератури за темою дисертації, історичну довідку, мотивацію досліджень, а також сформульовано означення та допоміжні твердження з алгебри та загальної топології.

Розділ 2 складається з двох підрозділів присвячених дослідженню біциклічного напівгрупового розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Описано відношення Ґріна, зокрема, доведено, що відношення Ґріна $\mathscr{D}$ і $\mathscr{J}$ збігаються на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ (твердження 2.1.1), напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leqslant)$ рангу $\leqslant n+1$ (теорема 2.1.5), і на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ існують лише конгруенції Ріса (теорема 2.1.11).

Разом з тим у розділі 2 досліджується топологізація напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Зокрема, доведено (теорема 2.2.1), що для довільної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ кожний ненульовий елемент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ є ізольованою точкою в топологічному просторі $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$. Також доведено (теорема 2.2.4), що для довільної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ такі умови еквівалентні:

(1) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ – компактна напівтопологічна напівгрупа;

(2) простір $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ топологічно ізоморфний одноточковій компактифікації Алєксандрова нескінченного зліченного дискретного просто-

ру;

(3) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ – компактна напівтопологічна напівгрупа з неперервною інверсією;

(4) простір $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ – $\mathfrak{D}(\omega)$-компактний.

Описано наріст алгебричної структури при топологічному замиканні напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ (а отже, і напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$) в T_1-напівтопологічній напівгрупі S, яка містить її як власну піднапівгрупу (твердження 2.2.6).

Розділ 3 складається з трьох підрозділів присвячених дослідженню структури ендоморфізмів біциклічного напівгрупового розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_n$ породжена множиною $\{0, 1, \ldots, n\}$ та інверсної напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leqslant)$ рангу $\leqslant n$.

У підрозділі 3.1 описано ін'єктивні ендоморфізми інверсної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Зокрема, доведено (наслідок 3.1.10), що напівгрупа ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ ізоморфна адитивній напівгрупі невід'ємних цілих чисел $(\omega, +)$. У підрозділі 3.2 досліджується структура напівгрупи $\mathfrak{End}(\mathscr{B}_\lambda)$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\lambda$ та доведено (теорема 3.2.2), що напівгрупа $\mathfrak{End}(\mathscr{B}_\lambda)$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\lambda$ є диз'юнктним об'єднанням напівгрупи $\mathfrak{End}^{\mathrm{inj}}(\mathscr{B}_\lambda)$ ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$ і напівгрупи $\mathfrak{End}^{\mathrm{ann}}(\mathscr{B}_\lambda)$ всіх анулюючих ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$.

Підрозділ 3.3 присвячений дослідженню напівгрупи $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ за модулем її ідеала $\mathfrak{End}^1(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$, який складається з таких елементів $\mathfrak{a}$, що образ $(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a}$ ізоморфний напівгрупі $\omega\times\omega$-матричних одиниць. Зокрема, доведено, що напівгрупа $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є диз'юнктним об'єднанням множини $\mathfrak{End}^*(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ та ідеалу $\mathfrak{End}^1(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ (теорема 3.3.2).

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дослідження.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у теорії напівгруп, топологічній алгебрі та комп'ютерній алгебрі.

Ключові слова: *біциклічне розширення, інверсна напівгрупа, ендоморфізм, автоморфізм, напівгрупа* $\lambda \times \lambda$*-матричних одиниць, конгруенція, конгуенція Ріса, напівтопологічна напівгрупа, компактна топологія.*

Abstract

Popadiuk O.B. Bicyclic extensions of semigroups and their endomorphisms. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in speciality 111 — "Mathematics"(field of studies 11 — "Mathematics and statistics"). — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2023.

The algebraic theory of semigroups is one of the areas of mathematics that have a fairly wide range of applications: the theory of formal languages, the algebraic theory of automata, the theory of codes, encryption, econometrics, etc. This was prompted by technical progress and especially the spread of application of algebraic methods in cryptology and coding theory. At the beginning of the 20th century, the Kharkiv mathematician Anton Suschkewitsch published the first fundamental results in the theory of semigroups. Although the results presented by Suschkewitsch, the principles of his research, his methodology were modern. Along with technical progress, this prompted D. Rees, Š. Schwarz, M.-P. Schützenberger and others to new fundamental results not only in the algebraic theory of semigroups, but also in its applications.

In the 1960s, the following directions of research in the theory of semigroups were already formed: classification of semigroups and construction of universal objects; semigroups of transformations and relations; semigroups of endomorphisms of algebraic systems; application of semigroups in the theory of automata, formal languages and codes; partially ordered semigroups; topological and semitopological semigroups; topological and semitopological semilattices and lattices, etc.

The central role in the theory of semigroups belongs to the bicyclic semigroup introduced by E. Lyapin in 1946. Using it, Olaf Andersen found conditions under which a simple semigroup with an idempotent is completely simple, N. R. Reilly and R. J. Warne described the structure of bisimple regular ω-semigroups using Bruck's construction of embedding of a semigroup into a

simple monoid, and this led to the description of various classes of bisimple inverse and regular semigroups.

V. Wagner's ideology, the roots of which lies in the differential geometry, of the representation of inverse semigroups as semigroups of partial transformations supplemented the above mentioned results with simple constructive proofs using the symmetric inverse monoid. Many constructions of isomorphic embeddings of semigroups into semigroups with "nice" properties use the idea of the symmetric inverse monoid, in particular, so there is also the constructive proof of the Ore theorem which states that every reversible cancelletive semigroup is isomorphic embedded into a group, presented by D. Ries in [150]. Also, many semigroups of (partial) transformations have simple regular representations as semigroups defined on sets.

The combination of these ideas of the theory of semigroups gave rise to the Gutik–Mykhalenych bicyclic extensions $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ over an ω-closed family $\mathscr{F}$ of subsets of the set of non-negative integers ω [11], which combined, depending on the structure of the family $\mathscr{F}$, various "opposite" semigroup properties, in particular the bicyclic semigroup and a semigroup of matrix units. Therefore, the problem of describing of the bicyclic extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ up to isomorphism depending on the structure of the family $\mathscr{F}$ naturally arises. Considering the bicyclic extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ as a semigroup of partial bijective transformations of the set ω, it would be natural to describe the semigroup of endomorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, because even describing the structure of its congruences does not provide a complete understanding of its structure. The first problem is interesting modulo "special" partial transformations, which are elements of the symmetric inverse monoid over the set ω. Considering the above, the task naturally arises: to study the structure of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, to describe its homomorphic images, congruences, and topologizations in the case when the family $\mathscr{F}_n$ is generated by the finite interval $[k, k+n]$ in ω, for some non-negative integers k and n, in particular when

$$\mathscr{F}_n = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}, \ldots, \{0,1,\ldots,n\}\}.$$

It is well-known that on the bicyclic semigroup any Hausdorff shift-continuous topology is discrete. In view of the above-mentioned fact, the problem of topologization of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ naturally arises depending on the family $\mathscr{F}$, in particular the study of the existence of compact-like and shift-continuous topologies on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Describing the structure of automorphisms and endomorphisms of semigroups of transformations is the classic problem of semigroup theory. Semigroups of endomorphisms are fully described only for some classes of semigroups of transformations, in particular for the finite semigroup of complete transformations, the finite symmetric inverse semigroup, the symmetric semigroup of mappings on a finite set, and the finite Brauer semigroups. Therefore, the problem of describing of the semigroup of endomorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ arises naturally.

The purpose of the work is to establish the algebraic properties of the bicyclic extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ and the inverse semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ of partial convex order isomorphisms of the linearly ordered set $(\omega, \leqslant)$ of the rank $\leqslant n$, to describe their semigroups of endomorphisms, as well as to study of the existence topologizations the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ by compact-like and shift-continuous topologies.

The objects of the study are the bicyclic semigroup extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, the inverse semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ of partial convex order isomorphisms of the linearly ordered set $(\omega, \leqslant)$ of the rank $\leqslant n$, as well as their semigroups of endomorphisms.

The subjects of the dissertation study are algebraic properties of the bicyclic extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ and the inverse semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ and their endomorphism semigroups, compact-like and shift-continuous topologies on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

In the thesis methods of algebraic theory of semigroups and topological algebra are used.

The thesis consists of an abstract in Ukrainian and in English, an introduction, three chapters, conclusions, references and an appendix.

The introduction explains the relevance of the research topic, the purpose, objects, subjects and methods of the research. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

Chapter 1 provides an overview of the bibliography on the topic of the thesis, a historical overview, research motivation, and also formulates definitions and supporting statements from algebra and general topology.

Chapter 2 consists of two sections devoted to the study of the bicyclic semigroup extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. The Green relations are described, in particular, it is proved that the Green relations $\mathscr{D}$ and $\mathscr{J}$ coincide on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ (Proposition 2.1.1), the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ is isomorphic to the semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ of partial convex order isomorphisms of the linearly ordered set $(\omega, \leqslant)$ of the rank $\leqslant n+1$ (Theorem 2.1.5), and $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ admits only Rees congruences (Theorem 2.1.11).

Also, Chapter 2 investigates topologizations of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. In particular, it is proved (Theorem 2.2.1) that for any shift-continuous T_1-topology τ on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ every non-zero element of $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ is an isolated point of the topological space $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$. We show that $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ admits the unique shift-continuous compact T_1-topology τ_{Ac}, such that the space $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ is homeomorphic to one-point Alexandroff compactification of the infinite countable discrete space. Also it is proved (Theorem 2.2.4) that for any shift-continuous T_1-topology τ on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ the following conditions are equivalent:

(1) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ is a compact semitopological semigroup;

(2) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ is topologically isomorphic to $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$;

(3) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ is a compact semitopological semigroup with continuous inversion;

(4) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ is an $\mathfrak{D}(\omega)$-compact space.

The remainder of the semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ in the T_1-semitopological semigroup S is described (Proposition 2.2.6).

Chapter 3 consists of three sections devoted to the study of the structure of endomorphisms of the bicyclic semigroup extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ in the case where the family $\mathscr{F}_n$ is generated by the set $\{0, 1, \ldots, n\}$ and the inverse semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ of partial convex order isomorphisms of the linearly ordered set $(\omega, \leqslant)$ of the rank $\leqslant n$.

Section 3.1 describes injective endomorphisms of the inverse semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. In particular, it is proved that the semigroup of injective endomorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ is isomorphic to the additive semigroup of non-negative integers $(\omega, +)$ (Corollary 3.1.10). Section 3.2 investigates the structure of the semigroup $\mathfrak{End}(\mathscr{B}_{\lambda})$ of all endomorphisms of the semigroup $\lambda \times \lambda$-matrix units $\mathscr{B}_{\lambda}$ and it is proved (Theorem 3.2.2) that the semigroup $\mathfrak{End}(\mathscr{B}_{\lambda})$ of all endomorphisms of the semigroup $\lambda \times \lambda$-matrix units $\mathscr{B}_{\lambda}$ is a disjoin union of the semigroup $\mathfrak{End}^{\mathrm{inj}}(\mathscr{B}_{\lambda})$ of injective endomorphisms of the semigroup $\mathscr{B}_{\lambda}$ and the semigroup $\mathfrak{End}^{\mathrm{ann}}(\mathscr{B}_{\lambda})$ of all annihilating endomorphisms of the semigroup $\mathscr{B}_{\lambda}$.

Section 3.3 is devoted to the study of the semigroup $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ of all endomorphisms of the semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ modulo its ideal $\mathfrak{End}^{1}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$, which consists of elements $\mathfrak{a}$ such that the image $(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a}$ is isomorphic to the semigroup of $\omega \times \omega$-matrix units. In particular, it is proved that the semigroup $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ of all endomorphisms of the semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ is a disjoint union of the set $\mathfrak{End}^{*}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ and the ideal $\mathfrak{End}^{1}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ (Theorem 3.3.2).

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the thesis and information on the approbation of the research results.

The practical significance of the results. The results of the thesis have theoretical significance and can be used for the development of the semigroup theory, the topological algebra and the computer algebra.

Key words: *bicyclic extension, inverse semigroup, endomorphism, automorphism, semigroup of* $\lambda \times \lambda$*-matrix units, Rees congruence, semitopological semigroup, compact topology.*

Список публікацій, в яких опубліковано основні результати дисертації:

(1) Gutik, O., Popadiuk, O.: On the semigroup of injective endomorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of initial finite intervals of ω. Мат. методи фіз.-мех. поля. **65**(1-2), 42–57 (2022).

(2) Popadiuk, O.: On endomorphisms of the inverse semigroup of convex order isomorphisms of the set ω of a bounded rank which are generated by Rees congrueces. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **93**, 34–41 (2022).

(3) Gutik, O., Popadiuk, O.: On the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of finite bounded intervals of ω. Carpathian Math. Publ. **15**(2), 331–355 (2023).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

(1) Popadiuk, O., Gutik, O.: On the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of finite bounded intervals of ω. In: Abstracts of the International Algebraic Conference "At the End of the Year" 2022, p. 41. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 27–28 December 2022.

(2) Popadiuk, O.: On endomorphisms of the inverse semigroup of convex order isomorphisms of a bounded rank which are generated by Rees congruences. In: Abtracts of the 14th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 106. Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, Sumy, Ukraine, 3–7 July 2023.