Львівський національний університет імені Івана Франка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Попадюк Ольга Богданівна

УДК 512.53

ДИСЕРТАЦІЯ

Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми

Спеціальність — 111 ”Математика”
Галузь знань — 11 ”Математика та статистика”

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. ________________ О. Б. Попадюк

Науковий керівник: **Гутік Олег Володимирович**,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
старший науковий співробітник

Львів — 2023

АНОТАЦІЯ

Попадюк О.Б. Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – "Математика" (Галузь знань – 11 "Математика та статистика"). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2023.

Алгебрична теорія напівгруп – це одна із областей математики, які мають доволі широке коло застосуваннь: теорія формальних мов, алгебрична теорія автоматів, теорія кодів, шифрування, економетрика та ін. До цього спонукав технічний прогрес і особливо поширення застосування алгебричних методів у шифруванні та кодуванні. Харківський математик Антон Сушкевич на початку XX століття опублікував перші фундаментальні результати у теорії напівгруп. Викладені результати Сушкевича, принципи його досліджень, його методологія були новітніми. Разом з технічним прогресом це спонукало Д. Ріса, Ш. Шварца, М.-П. Шютценбергера та інших до нових фундаментальних результатів не лише в алгебричній теорії напівгруп, але і в її застосуваннях.

У 1960-і роки вже сформовані такі напрямки досліджень у теорії напівгруп: класифікація напівгруп і побудова універсальних об'єктів; напівгрупи перетворень і відношень; напівгрупи ендоморфізмів алгебричних систем; застосування напівгруп в теорії автоматів, формальних мов і кодів; частково впорядковані напівгрупи; топологічні та напівтопологічні напівгрупи; топологічні та напівтопологічні напівґратки та ґратки, та інші.

Центральне місце в теорії напівгруп зайняла біциклічна напівгрупа, введена Є. Ляпіним в 1946 р. Використовуючи її, Олаф Андерсен вказав умови

за яких проста напівгрупа з ідемпотентом є цілком простою, Н. Рейлі та Р. Уорн описали структуру біпростих регулярних ω-напівгруп використовуючи конструкцію Брука занурення напівгрупи в простий моноїд, і це спонукало описанню різних класів біпростих інверсних і регулярних напівгруп.

Ідеологія В. Вагнера, коріння якої лежить в диференціальній геометрії, зображення інверсних напівгруп як напівгруп часткових перетворень доповнила вище згадані результати простими конструктивними доведеннями з використанням симетричного інверсного моноїда. Багато конструкцій занурення напівгруп у напівгрупи з "хорошими" властивостями використовують ідею симетричного інверсного моноїда, зокрема, також є конструктивне доведення теореми Оре про те, що кожна реверсивна справа напівгрупа зі скороченнями ізоморфно занурюється в групу, запропоноване Д. Рісом у [150]. Також багато напівгруп (часткових) перетворень мають прості регулярні зображення як напівгрупи визначені на множинах.

Поєднання цих ідей теорії напівгруп породило біциклічні розширення Гутіка–Михаленича $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ над ω-замкненою сім'єю $\mathscr{F}$ підмножин множини невід'ємних цілих чисел ω [11], які поєднали в залежності від структури сім'ї $\mathscr{F}$ різні "протилежні" за властивостями напівгрупи, зокрема біциклічну напівгрупу та напівгрупу матричних одиниць. Тому природно виникає задача описання біциклічного розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ з точністю до ізоморфізму в залежності від структури сім'ї $\mathscr{F}$.

Описання структури автоморфізмів та ендоморфізмів напівгруп перетворень є класичною проблемою теорії напівгруп. Напівгрупи ендоморфізмів описані повністю лише для деяких напівгруп перетворень, зокрема для скінченної напівгрупи повних перетворень, скінченної симетричної інверсної напівгрупи, симетричної напівгрупи відображень на скінченній множині, скінченних напівгруп Брауера.

Розглядаючи біциклічне розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ як напівгрупу часткових бієктивних перетворень множини ω, природно було б описати напівгрупу ендоморфізмів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, оскільки навіть описання структури її конгруенцій не дає повного розуміння її структури. Перша задача є цікавою за модулем "спеціальних" часткових перетворень, що є елементами симетричного інверсного моноїда над множиною ω. Враховуючи вище сказане, природно виникає задача: дослідити структуру напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, описати її "хороші" зображення, конгруенції та топологізації у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_n$ породжується скінченним інтервалом $[k, k+n]$ в ω, для деяких невід'ємних цілих чисел k і n, зокрема коли

$$\mathscr{F}_n = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}, \ldots, \{0,1,\ldots,n\}\}.$$

Відомо, що на біциклічній напівгрупі всі гаусдорфові трансляційно-неперервні топології є дискретними. З огляду на вище згаданий факт, природно виникає задача про топологізацію напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ в залежності від сім'ї $\mathscr{F}$, зокрема дослідження існування компактних і близьких до них напівгрупових і трансляційно-неперервних топологій на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Метою дисертаційної роботи є встановлення алгебричних властивостей біциклічного розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ та інверсної напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leqslant)$ рангу $\leqslant n$, описання їхніх напівгруп ендоморфізмів, а також дослідження існування компактних і близьких до них напівгрупових і трансляційно-неперервних топологій на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

Об'єктом дослідження є біциклічне напівгрупове розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, інверсна напівгрупа $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leqslant)$ рангу $\leqslant n$, а також їхні напівгрупи ендоморфізмів.

Предмет дисертаційного дослідження – алгебричні властивості біциклічного розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ та інверсної напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ та їхніх напівгруп ендоморфізмів, компактні та близькі до них напівгрупові і трансляційно-неперервні топології на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

У процесі дослідження дисертаційної проблематики застосовуються методи алгебричної теорії напівгруп і топологічної алгебри.

Дисертація складається з анотацій українською й англійськими мовами, вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури та додатка.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, зазначено мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідницькою темою, особистий внесок здобувача, апробацію та публікації основних результатів дисертації.

У розділі 1 наведено огляд літератури за темою дисертації, історичну довідку, мотивацію досліджень, а також сформульовано означення та допоміжні твердження з алгебри та загальної топології.

Розділ 2 складається з двох підрозділів присвячених дослідженню біциклічного напівгрупового розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Описано відношення Ґріна, зокрема, доведено, що відношення Ґріна $\mathscr{D}$ і $\mathscr{J}$ збігаються на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ (твердження 2.1.1), напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leqslant)$ рангу $\leqslant n+1$ (теорема 2.1.5), і на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ існують лише конгруенції Ріса (теорема 2.1.11).

Разом з тим у розділі 2 досліджується топологізація напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Зокрема, доведено (теорема 2.2.1), що для довільної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ кожний ненульовий елемент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ є ізольованою точкою в топологічному просторі $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$. Також доведено (теорема 2.2.4), що для довільної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ такі умови еквівалентні:

(1) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ – компактна напівтопологічна напівгрупа;

(2) простір $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ топологічно ізоморфний одноточковій компактифікації Алєксандрова нескінченного зліченного дискретного просто-

ру;

(3) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n},\tau)$ – компактна напівтопологічна напівгрупа з неперервною інверсією;

(4) простір $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n},\tau)$ – $\mathfrak{D}(\omega)$-компактний.

Описано наріст алгебричної структури при топологічному замиканні напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ (а отже, і напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$) в T_1-напівтопологічній напівгрупі S, яка містить її як власну піднапівгрупу (твердження 2.2.6).

Розділ 3 складається з трьох підрозділів присвячених дослідженню структури ендоморфізмів біциклічного напівгрупового розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_n$ породжена множиною $\{0,1,\ldots,n\}$ та інверсної напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(\omega,\leqslant)$ рангу $\leqslant n$.

У підрозділі 3.1 описано ін'єктивні ендоморфізми інверсної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Зокрема, доведено (наслідок 3.1.10), що напівгрупа ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ ізоморфна адитивній напівгрупі невід'ємних цілих чисел $(\omega,+)$. У підрозділі 3.2 досліджується структура напівгрупи $\mathfrak{End}(\mathscr{B}_\lambda)$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\lambda$ та доведено (теорема 3.2.2), що напівгрупа $\mathfrak{End}(\mathscr{B}_\lambda)$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\lambda$ є диз'юнктним об'єднанням напівгрупи $\mathfrak{End}^{\mathrm{inj}}(\mathscr{B}_\lambda)$ ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$ і напівгрупи $\mathfrak{End}^{\mathrm{ann}}(\mathscr{B}_\lambda)$ всіх анулюючих ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$.

Підрозділ 3.3 присвячений дослідженню напівгрупи $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ за модулем її ідеала $\mathfrak{End}^{1}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$, який складається з таких елементів $\mathfrak{a}$, що образ $(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a}$ ізоморфний напівгрупі $\omega\times\omega$-матричних одиниць. Зокрема, доведено, що напівгрупа $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є диз'юнктним об'єднанням множини $\mathfrak{End}^{*}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ та ідеалу $\mathfrak{End}^{1}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ (теорема 3.3.2).

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дослідження.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у теорії напівгруп, топологічній алгебрі та комп'ютерній алгебрі.

Ключові слова: *біциклічне розширення, інверсна напівгрупа, ендоморфізм, автоморфізм, напівгрупа* $\lambda \times \lambda$*-матричних одиниць, конгруенція, конгуенція Ріса, напівтопологічна напівгрупа, компактна топологія.*

Abstract

Popadiuk O.B. Bicyclic extensions of semigroups and their endomorphisms. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in speciality 111 — “Mathematics”(field of studies 11 — “Mathematics and statistics”). — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2023.

The algebraic theory of semigroups is one of the areas of mathematics that have a fairly wide range of applications: the theory of formal languages, the algebraic theory of automata, the theory of codes, encryption, econometrics, etc. This was prompted by technical progress and especially the spread of application of algebraic methods in cryptology and coding theory. At the beginning of the 20th century, the Kharkiv mathematician Anton Suschkewitsch published the first fundamental results in the theory of semigroups. Although the results presented by Suschkewitsch, the principles of his research, his methodology were modern. Along with technical progress, this prompted D. Rees, Š. Schwarz, M.-P. Schützenberger and others to new fundamental results not only in the algebraic theory of semigroups, but also in its applications.

In the 1960s, the following directions of research in the theory of semigroups were already formed: classification of semigroups and construction of universal objects; semigroups of transformations and relations; semigroups of endomorphisms of algebraic systems; application of semigroups in the theory of automata, formal languages and codes; partially ordered semigroups; topological and semitopological semigroups; topological and semitopological semilattices and lattices, etc.

The central role in the theory of semigroups belongs to the bicyclic semigroup introduced by E. Lyapin in 1946. Using it, Olaf Andersen found conditions under which a simple semigroup with an idempotent is completely simple, N. R. Reilly and R. J. Warne described the structure of bisimple regular ω-semigroups using Bruck’s construction of embedding of a semigroup into a

simple monoid, and this led to the description of various classes of bisimple inverse and regular semigroups.

V. Wagner's ideology, the roots of which lies in the differential geometry, of the representation of inverse semigroups as semigroups of partial transformations supplemented the above mentioned results with simple constructive proofs using the symmetric inverse monoid. Many constructions of isomorphic embeddings of semigroups into semigroups with "nice" properties use the idea of the symmetric inverse monoid, in particular, so there is also the constructive proof of the Ore theorem which states that every reversible cancelletive semigroup is isomorphic embedded into a group, presented by D. Ries in [150]. Also, many semigroups of (partial) transformations have simple regular representations as semigroups defined on sets.

The combination of these ideas of the theory of semigroups gave rise to the Gutik–Mykhalenych bicyclic extensions $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ over an ω-closed family $\mathscr{F}$ of subsets of the set of non-negative integers ω [11], which combined, depending on the structure of the family $\mathscr{F}$, various "opposite" semigroup properties, in particular the bicyclic semigroup and a semigroup of matrix units. Therefore, the problem of describing of the bicyclic extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ up to isomorphism depending on the structure of the family $\mathscr{F}$ naturally arises. Considering the bicyclic extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ as a semigroup of partial bijective transformations of the set ω, it would be natural to describe the semigroup of endomorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, because even describing the structure of its congruences does not provide a complete understanding of its structure. The first problem is interesting modulo "special" partial transformations, which are elements of the symmetric inverse monoid over the set ω. Considering the above, the task naturally arises: to study the structure of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, to describe its homomorphic images, congruences, and topologizations in the case when the family $\mathscr{F}_n$ is generated by the finite interval $[k, k+n]$ in ω, for some non-negative integers k and n, in particular when

$$\mathscr{F}_n = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}, \ldots, \{0,1,\ldots,n\}\}.$$

It is well-known that on the bicyclic semigroup any Hausdorff shift-continuous topology is discrete. In view of the above-mentioned fact, the problem of topologization of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ naturally arises depending on the family $\mathscr{F}$, in particular the study of the existence of compact-like and shift-continuous topologies on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Describing the structure of automorphisms and endomorphisms of semigroups of transformations is the classic problem of semigroup theory. Semigroups of endomorphisms are fully described only for some classes of semigroups of transformations, in particular for the finite semigroup of complete transformations, the finite symmetric inverse semigroup, the symmetric semigroup of mappings on a finite set, and the finite Brauer semigroups. Therefore, the problem of describing of the semigroup of endomorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ arises naturally.

The purpose of the work is to establish the algebraic properties of the bicyclic extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ and the inverse semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ of partial convex order isomorphisms of the linearly ordered set $(\omega, \leqslant)$ of the rank $\leqslant n$, to describe their semigroups of endomorphisms, as well as to study of the existence topologizations the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ by compact-like and shift-continuous topologies.

The objects of the study are the bicyclic semigroup extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, the inverse semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ of partial convex order isomorphisms of the linearly ordered set $(\omega, \leqslant)$ of the rank $\leqslant n$, as well as their semigroups of endomorphisms.

The subjects of the dissertation study are algebraic properties of the bicyclic extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ and the inverse semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ and their endomorphism semigroups, compact-like and shift-continuous topologies on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

In the thesis methods of algebraic theory of semigroups and topological algebra are used.

The thesis consists of an abstract in Ukrainian and in English, an introduction, three chapters, conclusions, references and an appendix.

The introduction explains the relevance of the research topic, the purpose, objects, subjects and methods of the research. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

Chapter 1 provides an overview of the bibliography on the topic of the thesis, a historical overview, research motivation, and also formulates definitions and supporting statements from algebra and general topology.

Chapter 2 consists of two sections devoted to the study of the bicyclic semigroup extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. The Green relations are described, in particular, it is proved that the Green relations $\mathscr{D}$ and $\mathscr{J}$ coincide on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ (Proposition 2.1.1), the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ is isomorphic to the semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ of partial convex order isomorphisms of the linearly ordered set $(\omega, \leqslant)$ of the rank $\leqslant n+1$ (Theorem 2.1.5), and $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ admits only Rees congruences (Theorem 2.1.11).

Also, Chapter 2 investigates topologizations of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. In particular, it is proved (Theorem 2.2.1) that for any shift-continuous T_1-topology τ on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ every non-zero element of $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ is an isolated point of the topological space $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$. We show that $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ admits the unique shift-continuous compact T_1-topology τ_{Ac}, such that the space $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ is homeomorphic to one-point Alexandroff compactification of the infinite countable discrete space. Also it is proved (Theorem 2.2.4) that for any shift-continuous T_1-topology τ on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ the following conditions are equivalent:

(1) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ is a compact semitopological semigroup;

(2) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ is topologically isomorphic to $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$;

(3) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ is a compact semitopological semigroup with continuous inversion;

(4) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ is an $\mathfrak{D}(\omega)$-compact space.

The remainder of the semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ in the T_1-semitopological semigroup S is described (Proposition 2.2.6).

Chapter 3 consists of three sections devoted to the study of the structure of endomorphisms of the bicyclic semigroup extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ in the case where the family $\mathscr{F}_n$ is generated by the set $\{0, 1, \ldots, n\}$ and the inverse semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ of partial convex order isomorphisms of the linearly ordered set $(\omega, \leqslant)$ of the rank $\leqslant n$.

Section 3.1 describes injective endomorphisms of the inverse semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. In particular, it is proved that the semigroup of injective endomorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ is isomorphic to the additive semigroup of non-negative integers $(\omega, +)$ (Corollary 3.1.10). Section 3.2 investigates the structure of the semigroup $\mathfrak{End}(\mathscr{B}_{\lambda})$ of all endomorphisms of the semigroup $\lambda \times \lambda$-matrix units $\mathscr{B}_{\lambda}$ and it is proved (Theorem 3.2.2) that the semigroup $\mathfrak{End}(\mathscr{B}_{\lambda})$ of all endomorphisms of the semigroup $\lambda \times \lambda$-matrix units $\mathscr{B}_{\lambda}$ is a disjoin union of the semigroup $\mathfrak{End}^{\mathrm{inj}}(\mathscr{B}_{\lambda})$ of injective endomorphisms of the semigroup $\mathscr{B}_{\lambda}$ and the semigroup $\mathfrak{End}^{\mathrm{ann}}(\mathscr{B}_{\lambda})$ of all annihilating endomorphisms of the semigroup $\mathscr{B}_{\lambda}$.

Section 3.3 is devoted to the study of the semigroup $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ of all endomorphisms of the semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ modulo its ideal $\mathfrak{End}^{1}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$, which consists of elements $\mathfrak{a}$ such that the image $(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a}$ is isomorphic to the semigroup of $\omega \times \omega$-matrix units. In particular, it is proved that the semigroup $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ of all endomorphisms of the semigroup $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ is a disjoint union of the set $\mathfrak{End}^{*}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ and the ideal $\mathfrak{End}^{1}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ (Theorem 3.3.2).

The appendix contains a list of the applicant's publications on the topic of the thesis and information on the approbation of the research results.

The practical significance of the results. The results of the thesis have theoretical significance and can be used for the development of the semigroup

theory, the topological algebra and the computer algebra.

Key words: *bicyclic extension, inverse semigroup, endomorphism, automorphism, semigroup of* $\lambda \times \lambda$*-matrix units, Rees congruence, semitopological semigroup, compact topology.*

Список публікацій, в яких опубліковано основні результати дисертації:

(1) Gutik, O., Popadiuk, O.: On the semigroup of injective endomorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of initial finite intervals of ω. Мат. методи фіз.-мех. поля. **65**(1-2), 42–57 (2022).

(2) Popadiuk, O.: On endomorphisms of the inverse semigroup of convex order isomorphisms of the set ω of a bounded rank which are generated by Rees congrueces. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **93**, 34–41 (2022).

(3) Gutik, O., Popadiuk, O.: On the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of finite bounded intervals of ω. Carpathian Math. Publ. **15**(2), 331–355 (2023).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

(1) Popadiuk, O., Gutik, O.: On the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of finite bounded intervals of ω. In: Abstracts of the International Algebraic Conference "At the End of the Year" 2022, p. 41. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 27–28 December 2022.

(2) Popadiuk, O.: On endomorphisms of the inverse semigroup of convex order isomorphisms of a bounded rank which are generated by Rees congruences. In: Abtracts of the 14th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 106. Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, Sumy, Ukraine, 3–7 July 2023.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Витоки сучасної алгебри сягають праць Софуса Лі [130], Е. Галуа [81], а то й ще Нілса Генріха Абеля [43]. Фелікс Кляйн, розглядаючи псевдогрупи Лі, бачив у них апарат і методологію досліджень геометричних об'єктів [120].

Хоча й сам термін "напівгрупа" (semigroup, demigroup, halbgruppe) виникає як допоміжний при визначенні групи, напівгрупи перетворень виникають не лише в А. Сушкевича, Р. Бера і Ф. Лєві, але й у функціональному аналізі. Однак ідеологія напівгрупи перетворень закладена вже в дисертації Антона Казимировича Сушкевича "Теория действия как общая теория групп" (1922 р.) [27]. Довоєнний період досліджень в алгебричній теорії напівгруп безпосередньо стосується праць А. Сушкевича: структура мінімального ідеалу скінченної напівгрупи, напівгрупи перетворень, проблема занурення напівгруп у групи. Хоча викладені результати Сушкевичем написані "важкою", а й іноді дуже незрозумілою, мовою, принципи його досліджень, його методологія була новітньою, і це разом з технічним прогресом спонукало до нових фундаментальних результатів Д. Ріса, Ш. Шварца, М.-П. Шютценбергера та ін. не лише в алгебричній теорії напівгруп, але і в її застосуваннях: теорія формальних мов, алгебрична теорія автоматів, теорія кодів, шифрування та ін.

Центральне місце в теорії напівгруп зайняла біциклічна напівгрупа, введена Є. Ляпіним в 1946 р. Використовуючи її Олаф Андерсен вказав умови за яких проста напівгрупа з ідемпотентом є цілком простою, Н. Рейлі та Р. Уорн описали структуру біпростих регулярних ω-напівгруп використовуючи конструкцію Брука занурення напівгрупи в простий моноїд, і це спонукало описанню різних класів біпростих інверсних і регулярних напівгруп.

Віктор Вагнер (див. [3]), учень В. Ф. Кагана, будучи одним з провідних спеціалістів в диференціальній геометрії, в кінці 1940-х років побачив, що карти атласів диференційовних многовидів породжують алгебричні асоціативні системи, властивості яких близькі до груп. У подальших працях такі алгебричні системи Вагнер називав “узагальненими групами”. Він, неодноразово підтверджуючи ідеологію “алгебризації геометрії” Ф. Кляйна, шукав поєднання алгебри та геометрії в дослідженнях геометричних многовидів (див. [7]).

Ідеологія В. Вагнера інверсних напівгруп як напівгруп часткових перетворень доповнила вище згадані результати простими конструктивними доведеннями з використанням симетричного інверсного моноїда. Так, зокрема, багато конструктивних доведень базується на основі конструкції симетричної інверсної напівгрупи. Яскравим та простим (відносно попередніх доведень) є запропоноване Д. Рісом доведення теореми Оре про ізоморфне занурення реверсивних справа напівгруп зі скороченнями в групи.

Однак не зважаючи на це, багато конструкцій напівгруп часткових бієктивних (ін’єктивних) перетворень мають такі “досконалі” аналітичні регулярні зображення, що з ними набагато легше працює алгебрична інтуїція ніж з напівгрупами часткових перетворень.

Поєднання цих ідей теорії напівгруп породило біциклічні розширення Гутіка-Михаленича $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ над ω-замкненою сім’єю $\mathscr{F}$ підмножин множини невід’ємних цілих чисел ω [11], які поєднали в залежності від структури сім’ї $\mathscr{F}$ різні “протилежні” за властивостями напівгрупи, зокрема, біциклічну напівгрупу та напівгрупу матричних одиниць. Тому виникає природна задача описання біциклічного розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ з точністю до ізоморфізму в залежності від структури сім’ї $\mathscr{F}$. Розглядаючи біциклічне розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ як напівгрупу часткових бієктивних перетворень множини ω, природно було б описати напівгрупу ендоморфізмів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, оскільки навіть описання структури її конгруенцій не дає повного розуміння її структури. Перша задача є цікавою за модулем “спеціальних” часткових перетворень, що є елементами симетричного інверсного моноїда над множиною ω.

Знаючи, що на біциклічній напівгрупі всі гаусдорфові трансляційно-неперервні топології є дискретними, то природно виникає задача про топологізацію напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ в залежності від сім'ї $\mathscr{F}$, зокрема дослідження існування компактних та близьких до них напівгрупових і трансляційно-неперервних топологій на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Усі ці перелічені задачі є класичними в алгебричній теорії напівгруп і топологічній алгебрі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри алгебри і логіки (з 2020 року кафедри алгебри, топології та основ математики) механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми “Топологічна алгебра і асимптотична топологія та їх застосування” (номер державної реєстрації 0122U001602).

Мета і завдання дослідження. За *мету* було поставлено дослідити алгебричні властивості біциклічного розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ та інверсної напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leqslant)$ рангу $\leqslant n$, описати їхні напівгрупи ендоморфізмів, а також дослідити існування компактних та близьких до них напівгрупових і трансляційно-неперервних топологій на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

Завдання дослідження полягають у розв'язанні таких задач:

1) описати відношення Ґріна, конгруенції для напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ та $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$;

2) описати топологізацію біциклічного розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$;

3) описати структуру напівгрупи ендоморфізмів для напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ та $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$.

Об'єктом дослідження є біциклічне напівгрупове розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ та інверсна напівгрупа $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leqslant)$ рангу $\leqslant n$, а також їхні напівгрупи ендоморфізмів.

Предметом дослідження є алгебричні властивості біциклічного розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ та інверсної напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, і їхніх напівгруп ендоморфізмів, компактні та близькі до них напівгрупові та трансляційно-неперервні топології на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

Методи дослідження. У процесі дослідження дисертаційної проблематики застосовуються методи алгебричної теорії напівгруп та топологічної алгебри.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі результати отримані в дисертаційній роботі є новими. Основні наукові результати, що виносяться на захист:

1. Охарактеризовано структуру біциклічного розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, зокрема описано відношення Ґріна на цій напівгрупі;
2. Доведено, що напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ та $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ ізоморфні;
3. Доведено, що на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, а отже, і на напівгрупі $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ існують лише конгруенції Ріса;
4. Описано близькі до компактних трансляційно-неперервні T_1-топології на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$;
5. Отримано структурне описання напівгрупи ендоморфізмів напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ та $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ і напівгрупи $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_{\lambda}$.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у теорії напівгруп, топологічній алгебрі та комп'ютерній алгебрі.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані авторкою самостійно. В опублікованих спільно з науковим керівником працях, О. В. Гутіку належать постановка задач, вибір методів дослідження та обговорення одержаних результатів. У спільній статті [96] Попадюк О. Б. належать усі результати, окрім теорем 6 - 9, наслідку 2, прикладу 2 і твердження 7, які належать співавторові О. В. Гутіку.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах:

(1) Міжнародній алгебраїчній конференції "At the End of the Year" 2022, м. Київ, 2022;
(2) Міжнародній науковій конференції "The 14th International Algebraic Conference in Ukraine", м. Суми, 2023;
(3) Науковому семінарі імені проф. М. Комарницького "Теорія полігонів і спектарльні простори" у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2022, 2023.
(4) Науковому семінарі "Топологічна алгебра" у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2022.
(5) Науковому семінарі кафедри алгебри, топології на основ математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2023.

Публікації. Основні результати роботи опубліковано у 5 працях: 2 статті у журналах, які входять до переліку наукових фахових видань України ([95], [141]); 1 стаття у науковому виданні, віднесеному до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank ([96]); 2 тези у матеріалах міжнародних конференцій ([143], [142]).

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури та одного додатка. Повний обсяг роботи – 119 сторінок. Список використаної літератури займає 16 сторінок і налічує 181 найменування.

Подяка. Авторка висловлює подяку науковому керівнику кандидату фізико-математичних наук, доценту, старшому науковому співробітнику, доценту кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету імені Івана Франка Олегу Володимировичу Гутіку за постановку задач і допомогу в роботі над дисертацією та присвячує її світлій пам'яті свого першого наукового керівника доктора фізико-математичних наук, професора Богдана Володимировича Забавського (19.08.1957 – 01.08.2020).

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, МОТИВАЦІЯ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Історична довідка, огляд літератури та мотивація досліджень

Досліджуючи історичні аспекти розвитку теорії напівгруп багато істориків математики [117, 121] тривалий час стверджували, що її зачатки можна знайти в працях де Сеґ'є [153], Діксона [65] і Фробеніуса та Шура [80]. Однак на думку багатьох напівгруповиків, ідеї та принципи теорії напівгруп закладені ще в першій половині XIX-го столітті. Так зокрема, Марк Лоусон (див. [129]) вважає, що ідеологія та основні принципи розвитку теорії напівгруп викладені ще в Ерлангенській програмі Фелікса Кляйна [120]. А видатні спеціалісти з топологічної алгебри Карл Гофманн [112–115] і Джіммі Лоусон [126–128] переконані в тому, що перші ідеї теорії топологічних напівгруп, а отже, й алгебричної теорії напівгруп, можна знайти в праці Нільса Г. Абеля [43], яка опублікована в журналі Крелє в 1826 році.

Першими фундаментальними дослідженнями в теорії напівгруп є праці харківського математика Антона Сушкевича [27–40, 162–176], і найбільш фундаментальним його результатом є описання структури мінімального ідеала скінченної напівгрупи (див. [24, 25, 116]).

Антон Сушкевич був першим, хто довів, що будь-яка напівгрупа може бути ізоморфно вкладена в повний моноїд перетворень, і вивчення різних напівгруп перетворень було темою, яка продовжувалася протягом усього його наукового життя (див., наприклад, [37, 38]). Сушкевич також займався різними систематичними узагальненнями конструкцій своєї статті 1928 року [164]. В одній із таких статей [175] він закінчив конкретним описом узагальненого ядра (мінімального ідеалу) скінченної напівгрупи в термінах матриць. Крім того, ці узагальнені конструкції забезпечили абстрактні моделі для різних систем перетворень, які вивчав Сушкевич [37, 38]. Отже, три широкі нитки дослідження Сушкевичем напівгруп – напівгрупи перетворень, матричні зображення та ядра – доповнювали один одного.

Докторська дисертація Сушкевича "Теория действия как общая теория групп" [27] присвячена групам, квазігрупам і напівгрупам, була захищена у Воронежському університеті в 1922 році під час повстання українських "куркулів", і результати отримані в ній неодноразово передоводилися іншими авторами [82]. Основні результати досліджень Сушкевича в міжвоєнний період викладено в його монографії "Теория обобщенных групп" [33], яка вийшла друком в 1937 році. Будучи першою монографією з теорії напівгруп, вона ще багато років завдяки закритості радянського суспільства, не була відома навіть європейським алгебраїстам, хоча багато праць Антона Сушкевича було опубліковано за межами Радянського Союзу. Незалежно від Сушкевича структуру цілком 0-простих і цілком простих напівгруп, а отже, і мінімальні ідеали скінченних напівгруп, більш простішим методом описав Девід Ріс у 1940 році в праці [149].

Одиничні спроби дослідження структури напівгруп в 1930 роках відзначені також в працях Бера, Лєві, Кліфорда та Мальцева. Особливо хочеться відзначити дослідження Мальцева та Сушкевича цього періоду стосовно задачі ізоморфного занурення напівгруп у групи [22, 23, 29]. Однак, у цей довоєнний період теорія напівгруп знаходить своє широке застосування у функціональному аналіз, що підсумовується у відомій монографії Гілла [111].

Ґрунтовне застосування алгебраїчних методів у шифруванні та кодуванні в першій половині минулого століття сприяло не лише інтенсифікації досліджень у теорії напівгруп, а й спонукало створенню нових напрямків застосування методів алгебри й особливо теорії напівгруп: теоретична інформатика, алгебрична теорія кодування, алгебрична теорія шифрування, теорія формальних мов, алгебрична теорія автоматів та ін. Хотілося б відзначити фундаментальні результати післявоєнного періоду в теорії напівгруп та її застосовання шкіл Дюбрея та Шютценберґера (Франція), А. Кліффорда та МакКалістера (США), Ляпіна, Мальцева, Вагнера, Глускіна і Сушкевича (СРСР), Престона (Австралія), Манна (Велика Британія), Шварца (Чехословачина) та ін. За двадцять років післявоєнного періоду було опубліковано понад 500 наукових статей і близько 10-и наукових монографій з теорії напівгруп та її застосуванню. Особливо хотілося б відзначити монографії Кліффорда та Престона [62,63], і Ляпіна [21], які неодноразово перекладені на інші мови та відіграли важливу роль в розвитку не лише теорії напівгруп, але і її застосуваннях. Масштабність росту досліджень з теорії напівгруп і математичних напрямків пов'язаних з нею переросла в якість, і наслідком цього стало заснування в 1970 році першого вузько спеціалізованого журналу з алгебри ***Semigroup Forum***.

У 1960-і роки вже сформовані такі напрямки досліджень у теорії напівгруп:

- класифікація напівгруп і побудова універсальних об'єктів;
- напівгрупи перетворень і відношень;
- напівгрупи ендоморфізмів алгебричних систем;
- напівгрупи неперервних перетворень топологічних просторів;
- напівгрупи ізотонних перетворень квазівпорядкованих множин;
- напівгрупи операторів у функціональному аналізі та диференціальному численні;
- застосування напівгруп в теорії автоматів, формальних мов і кодів;
- частково впорядковані напівгрупи;
- топологічні та напівтопологічні напівгрупи;
- топологічні та напівтопологічні напівґратки та ґратки,

та інші.

За останні 50 років заснована Віктором Вагнером та Ґордоном Престоном теорія інверсних напівгруп відокремилася в особливий напрямок досліджень теорії напівгруп. У працях Вагнера [3–6] інверсні напівгрупи виникають як напівгрупи часткових бієктивних перетворень (які тепер називають частковими бієкціями) наділених деякими властивостями певних математичних структур. У Вагнера це джерело – локальні гомеоморфізми (дифеоморфізми) областей, які входять до складу карт топологічного (диференційованого) многовиду. Інший підхід до поняття інверсної напівгрупи у 1954 році запропонував Ґордон Престон: узагальнити поняття "єдиного оберненого елемента" через бінарну операцію [144–146]. В основі поняття інверсного (узагальнено оберненого) елемента напівгрупи лежало поняття регулярного елемента для кілець, яке введене фон Нойманом у 1936 році [139]: елемент x називається *інверсним* до елемента y у напівгрупі S, якщо $xyx = y$ і $yxy = y$. Ці два підходи об'єднала класична теорема Вагнера-Престона про інверсні напівгрупи як регулярні напівгрупи в яких усі ідемпотенти комутують (див. [62, теорема 1.17]), а також теорема про ізоморфне зображення інверсної напівгрупи піднапівгрупою симетричного інверсного моноїда над нею (див. [62, теорема 1.20]).

Розуміючи важливість ідеї А. Сушкевича напівгруп перетворень В. Вагнер у своєму огляді [7] за 1961 рік викладає диференціально-геометричні ідеї, які призводять до необхідності розвитку різних розділів сучасної алгебри, зокрема, теорії напівгруп перетворень. Це продукує новітню ідеологію Ерлангенської програми Кляйна.

В Ерлангенській програмі [120] Фелікс Кляйн сформулював дві класичні задачі, які на сучасний стан розвитку математики можна переформулювати так:

(1) які алгебричні структури перетворень фіксованої математичної структури визначають її з точністю до відношення еквівалентності?

(2) описати алгебри перетворень математичної структури.

Якщо на даній множині задана деяка структура, наприклад, відношення порядку, то природно розглядати напівгрупи таких перетворень, які зберігають дану структуру. Прикладами таких напівгруп є напівгрупи ендоморфізмів графів, напівгрупи неперервних перетворень топологічних просторів, напівгрупи ізотонних перетворень частково впорядкованих множин, тобто які зберігають порядок.

Так, зокрема, в працях Л. Б. Шнепермана [41, 42], М. Гаврилова [9], Мегілла [132, 133] описані різні типи топологічних просторів, які описуються з точністю до гомеоморфізму своїми напівгрупами неперервних або неперервних замкнених перетворень. А в праці [147] Ґ. Престон дав характеристику регулярності та сильної недосяжності кардиналів у термінах напівгруп перетворень. Глускін довів, що напівгрупа перетворень, яка зберігає порядок квазівпорядкованої множини, визначає її з точністю до ізоморфізму або антиізоморфізму [10].

У 1962 році Айзенштат [1] розглядала моноїд O_n усіх повних перетворень n-елементного ланцюга, які зберігають порядок. Нею отримано зображення напівгрупи O_n твірними елементами та визначальними співвідношеннями. У статті [2] було описано частково впорядковані множини, у яких напівгрупа перетворень, що зберігає порядок, є регулярною.

Комбінаторним аспектам напівгрупи перетворень, що зберігає порядок присвячені праці Умара та Ларанджи [123–125]. Гауї у статті [118] також вивчав деякі комбінаторні та алгебричні властивості моноїда O_n. Гомес разом з Гауї також повертались до вивчення напівгруп O_n та PO_n [83]. Моноїд POI_n всіх ін'єктивних елементів з напівгрупи PO_n був в центрі уваги Фернандеса [69–74], а також Коуана та Рейлі [64]. У [75] праці Фернандесом у співавторстві з Гомесом та Хесусом вивчалися моноїди всіх, а також часткових перетворень скінченного ланцюга, які збергіають чи змінюють порядок на протилежний, а у статті [76] вивчався моноїд всіх повних перетворень скінченного ланцюга, що зберігають порядок.

Напівгрупі повних перетворень, що зберігають порядок присвячені праці [119, 181]. Зокрема, у [181] розглянуто напівгрупу всіх повних перетворень n-елементного ланцюга, що зберігають порядок, а у [119] показано, що напівгрупа всіх повних перетворень підланцюгів множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ є регулярною і описано, коли напівгрупа всіх повних перетворень інтервалу дійсних чисел є регулярною, а також в роботі розглянуто перетворення, що зберігають порядок для множин, які не є ланцюгами.

Напівгрупі $\mathcal{O}(\mathbb{Z})$ усіх монотонних зростаючих перетворень множини $\mathbb{Z}$, напівгрупа $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ усіх монотонних зростаючих перетворень множини $\mathbb{N}$, напівгрупі $\mathcal{O}_{fin}(\mathbb{Z})$ усіх монотонних зростаючих перетворень множини $\mathbb{Z}$ з коскінченним доповненням до області значень і напівгрупі $\mathcal{O}_{fin}(\mathbb{N})$ усіх монотонних зростаючих перетворень множини $\mathbb{N}$ з коскінченним доповненням до області значень присвячені праці [18, 66] Дорошенка. Серед інших задач Дорошенко також описав групи автоморфізмів таких напівгруп.

У [103] Гутік і Реповш вивчали напівгрупу $\mathcal{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ часткових коскінченних монотонних бієктивних перетворень множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Вони довели, що напівгрупа $\mathcal{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ є біпростою та всі її нетривіальні гомоморфізми є або ізоморфізмами, або груповими гомоморфізмами, тобто вона має алгебричні властивості близькі до властивостей біциклічної напівгрупи. Подібний результат був отриманий у праці [104] для напівгрупи $\mathcal{IO}_{\infty}(\mathbb{Z})$ всіх часткових коскінченних монотонних бієктивних перетворень мнодини цілих чисел $\mathbb{Z}$.

Однією з ключових інверсних напівгруп в теорії напівгруп є біциклічна напівгрупа $\mathscr{C}(p, q)$, яка введена Є. Ляпіним в 1946 році. Біциклічна напівгрупа (біциклічний моноїд) відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Класична теорема Олафа Андерсена стверджує, що проста (0-проста) напівгрупа з ідемпотентом (з ненульовим ідемпотентом) є цілком простою (цілком 0-простою) тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи [44]. Топологізації біциклічного моноїда та проблема про його занурення в різні класи топологічних напівгруп досліджувалися в працях [45, 52, 53, 57, 67, 85, 102, 110, 122].

Відомо (див. [62, §1.12, приклад 2] або [140, вправа IV.1.1(ii)]), що елементи біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$ мають просте зображення частковими монотонними відображеннями між нескінченними променями множини натуральних чисел. Тому природно виникає задача описання подібних часткових перетворень множин натуральних і цілих чисел. Зауважимо, що близькі до властивостей біциклічного моноїда та його вище згаданого зображення мають напівгрупи коскінченних монотонних і майже монотонних часткових бієкцій натуральних та цілих чисел [60,97,103,104,106], напівгрупи ізоморфізмів між фільтрами скінченного степеня та σ-добутку множини натуральних чисел [91,137,138], напівгрупи часткових коскінченних ізометрій натуральних чисел [17,26,107,108], і напівгрупа коскінченних часткових бієкцій нескінченного кардинала [105]. Однак, вище описані результати не можна поширити на напівгрупи коскінченних часткових монотонних бієкцій скінченних степенів натуральних чисел з частковим порядком добутку [88, 98, 99].

Різні розширення та узагальнення біциклічного моноїда вводилися раніше різними авторами [77–79, 93, 180]. Такими, зокрема, є конструкції Брука та Брука–Рейлі занурення напівгруп у прості й описання інверсних біпростих і 0-біпростих ω-напівгруп [58, 86, 151, 179].

Зображення біциклічного моноїда напівгрупою часткових монотонних відображень нескінченних променів множини натуральних чисел, спонукало Гутіка та Михаленича ввести в [11] біциклічне розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ з ω-замкненою сім'єю $\mathscr{F}$ підмножин множини ω невід'ємних цілих чисел. У [11] доведено, що $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ – інверсна комбінаторна E-унітарна напівгрупа та вказано умови на сім'ю $\mathscr{F}$, за виконання яких напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, ізоморфна напівгрупі $\omega \times \omega$-матричних одиниць, є простою, 0-простою, біпростою, чи 0-біпростою. У праці [12] досліджувалася структура напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}$ складається з непорожніх індуктивних підмножин у ω. Зокрема, у [12, 92] вивчалися групові конгруенції на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, її гомоморфні ретракти та топологізація. Структура напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$, її зображення та топологізація, у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_1$ складається з атомарних підмножин у ω, описані в працях [90, 131].

Враховуючи вище сказане, природно виникає задача: дослідити структуру напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, описати її "хороші" зображення, конгруенції та топологізації у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_n$ породжується скінченним інтервалом $[k, k+n]$ в ω, для деяких невід'ємних цілих чисел k і n, зокрема коли

$$\mathscr{F}_n = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}, \ldots, \{0,1,\ldots,n\}\}.$$

Описання структури автоморфізмів та ендоморфізмів напівгруп перетворень є класичною проблемою теорії напівгруп. Напівгрупи ендоморфізмів утворених алгебр вивчали І. Валуце [8] і Шмідт [158]. Напівгрупи ендоморфізмів вивчалися Пултром, Вопенкою і Гердліном в працях [148, 178], а напівгрупи часткових однозначних і багатозначних ендоморфізмів (відношень графів) досліджував А. М. Калманович [19], який, зокрема, знайшов умови за яких напівгрупи часткових ендоморфізмів двох графів ізоморфні. Однією з перших праць про напівгрупи автоматних перетворень вільної напівгрупи є праця Лисковца і Фейнберга [20]. У праці [1] А. Я. Айзенштат знайшла необхідні і достатні умови лінійного впорядкування множини всіх ідеалів напівгрупи ендоморфізмів впорядкованої множини.

Напівгрупи ендоморфізмів описані повністю лише для деяких напівгруп перетворень, зокрема для скінченної напівгрупи повних перетворень [156], скінченної симетричної інверсної напівгрупи [154, 155], симетричної напівгрупи відображень на скінченній множині [157], скінченних напівгруп Брауера [134] та інших напівгруп перетворень та їхніх зображень [13–15, 100]. А отже, виникає задача: *описати напівгрупу ендоморфізмів напівгрупи* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

Отже, природним чином виникає задача про описання структури напівгрупи часткових монотонних перетворень опуклих відрізків множини натуральних чисел обмеженої довжини та її напівгрупи ендоморфізмів.

1.2. Означення і допоміжні твердження

У цьому підрозділі наведено означення, термінологію та допоміжні твердження, які використовуються в тексті дисертаційної роботи. Термінологію, означення та позначення використано так, як у монографіях [59, 62, 63, 68, 129, 140, 152].

1.2.1. Теорія множин.

У дисертаційній роботі великими латинськими літерами позначатимемо множини, топологічні простори та напівгрупи, а малими – їхні елементи, якщо не зазначено інше.

Через ω будемо позначати множину всіх невід'ємних цілих чисел, а через $\mathbb{N}$ – множину натуральних чисел.

Для довільної множини A через $|A|$ будемо позначати потужність множини A.

Нехай X та Y – довільні дві непорожні множини. *Відношенням* на декартовому добутку $X \times Y$ множин X й Y називається довільна підмножина $\alpha \subseteq X \times Y$. Порожня множина $\varnothing$, як підмножина в $X \times Y$ називається *порожнім відношенням.* Для довільного відношення α на $X \times Y$ означимо:

$$\operatorname{dom} \alpha = \{x \in X : \text{ існує } y \in Y \text{ такий, що } (x, y) \in \alpha\}$$

та

$$\operatorname{ran} \alpha = \{y \in Y : \text{ існує } x \in X \text{ такий, що } (x, y) \in \alpha\}.$$

Для відношення α на $X \times Y$ підмножини $\operatorname{dom} \alpha \subseteq X$ і $\operatorname{ran} \alpha \subseteq Y$ називаються *областю визначення* та *областю значень* відношення α. Відношення f на $X \times Y$ називається *частковим відображенням* з множини X в множину Y, якщо для довільного $x \in X$ існує не більше одного елемента $y \in Y$ такого, що $(x, y) \in f$. *Відображенням* f з непорожньої множини X в непорожню множину Y будемо називати таке часткове відображення

$f\colon X \rightharpoonup Y$, що $\operatorname{dom} f = X$, і позначатимемо його через $f\colon X \to Y$. Якщо $f\colon X \to Y$ – відображення з множини X у множину Y, то образ елемента $x \in X$ при відображенні f позначаємо через $(x)f$.

Відображення f множини X в множину Y називається *ін'єктивним*, якщо для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ з рівності $(x_1)f = (x_2)f$ випливає, що $x_1 = x_2$. Відображення $f\colon X \to Y$ називається *сюр'єктивним*, якщо для кожного елемента y з Y, існує щонайменше один елемент $x \in X$ такий, що $(x)f = y$. Відображення називається *бієктивним*, якщо воно є одночасно сюр'єктивним та ін'єктивним.

Перетворенням (частковим перетворенням) множини X називається відображення (часткове відображення) з X в X.

Потужність множини $\operatorname{ran} f$ називається *рангом* часткового перетворення f і позначається $\operatorname{rank} \alpha$. Для зручності через $\varnothing$ позначатимемо *порожнє перетворення*, тобто таке часткове відображення, для якого $\operatorname{dom} \varnothing = \operatorname{ran} \varnothing = \varnothing$. В сучасній літературі з теорії інверсних напівгруп часткові ін'єктивні перетворення (відображення) для спрощення викладу часто називають частковими біекціями.

Через $\mathscr{P}(X)$ позначимо множину всіх підмножин непорожньої множини X.

Відношенням (або *бінарним відношенням*) на множині X називається підмножина декартового добутку $\rho \subseteq X \times X$. Якщо елементи x та y є у відношенні ρ, то будемо це записувати так $(x, y) \in \rho$ або $x\rho y$.

Відношення ρ на множині X називається *відношенням еквівалентності*, якщо виконуються такі умови:

(1) $x\rho x$ для кожного $x \in X$;

(2) якщо $x\rho y$, то $y\rho x$ для $x, y \in X$;

(3) якщо $x\rho y$ і $y\rho z$, то $x\rho z$ для $x, y, z \in X$.

Відношення еквівалентності ρ на множині X розбиває множину X на диз'юнктні класи еквівалентності за відношенням ρ:

$$x\rho = \{y \in X |\, y\rho x\}$$

Множина, елементами якої є класи еквівалентності множини X за відношенням ρ, називається *фактор-множиною множини X за відношенням еквівалентності* ρ і позначається X/ρ. Відображення $\bar{\rho}\colon X \to X/\rho$ означене $(x)\bar{\rho} = x\rho$ називається *природним*.

1.2.2. Теорія частково впорядкованих множин.

Відношення $\leqslant$ на множині X називається *частковим порядком*, якщо виконуються такі умови:

(1) $x \leqslant x$ для кожного $x \in X$;

(2) якщо $x \leqslant y$ і $y \leqslant x$, то $x = y$ для $x, y \in X$;

(3) якщо $x \leqslant y$ і $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ для $x, y, z \in X$.

Множина X із заданим на ній відношенням часткового порядку $\leqslant$ називається *частково впорядкованою*, і позначається $(X, \leqslant)$. Елементи x та y частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називаються *порівняльними*, якщо виконується хоча б одна з умов: $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, а в протилежному випадку елементи x та y називаються *непорівняльними*. Якщо в частково впорядкованій множині $(X, \leqslant)$ виконуються умови: $x \leqslant y$ і $x \neq y$, то будемо говорити, що елемент x *менший за* y, а елемент y *більший за* x. Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається *максимальним*, якщо для довільного елемента $y \in X$ виконується умова:

$$\text{з} \quad x \leqslant y \quad \text{випливає} \quad x = y.$$

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається *мінімальним*, якщо для довільного елемента $y \in X$ виконується умова:

$$\text{з} \quad y \leqslant x \quad \text{випливає} \quad x = y.$$

Підмножина A частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається *лінійно впорядкованою*, якщо два довільні елементи з A є порівняльними. У цьому випадку кажуть, що $(A, \leqslant)$ — *лінійно впорядкована множина* або *ланцюг*, і $\leqslant$ — *лінійний порядок* на A.

Для частково впорядкованої множини $(P, \leqq)$, підмножина X у P називається *опукло впорядкованою*, якщо з того, що $x \leqq z \leqq y$ і $\{x, y\} \subset X$ випливає, що $z \in X$, для усіх $x, y, z \in P$ [109].

Відображення f з частково впорядкованої множини $(X, \leqq)$ на частково впорядковану множину $(Y, \leqslant)$ називається:

- *монотонним* (також будемо говорити, що f *зберігає порядок*), якщо з $x \leqq y$ випливає, що $(x)f \leqslant (y)f$;
- *впорядкованим ізоморфізмом*, якщо відображення f є бієктивним і $x \leqq y$ тоді і лише тоді, коли $(x)f \leqslant (y)f$.

Якщо $(X, \leqq)$ і $(Y, \leqslant)$ – частково впорядковані множини, $A \subseteq X$ і $B \subseteq Y$, то часткове відображення $f \colon X \rightharpoonup Y$ називається:

- *частковим порядковим ізоморфізмом* з A на B, якщо
  1) $\operatorname{dom} f = A$;
  2) $\operatorname{ran} f = B$;
  3) звуження $f|_A \colon A \to B$ є порядковим ізоморфізмом.
- *опуклим частковим порядковим ізоморфізмом*, якщо $f \colon (X, \leqq) \to (Y, \leqslant)$ – частковий порядковий ізоморфізм, що зберігає порядково опуклі множини.

Для довільних елементів x частково впорядкованої множини $(X, \leqq)$ позначимо

$$\uparrow_{\leqq} x = \{y \in X \colon x \leqq y\} \qquad \text{і} \qquad \downarrow_{\leqq} x = \{y \in X \colon y \leqq x\}.$$

1.2.3. Теорія напівгруп.

Напівгрупою називається непорожня множина S із заданою на ній бінарною асоціативною операцією: $\mu \colon S \times S \to S$. Напівгрупова операція μ в напівгрупі S часто називається *множенням* і позначається $\mu(a,b) = a \cdot b$. У літературі з теорії напівгруп прийнято, що заради спрощення викладу символ "$\cdot$" часто опускається, або замінюється іншим, в залежності від визначення напівгрупової операції.

Елемент a напівгрупи S називається *одиницею* в S, якщо $sa = as = s$ для всіх $s \in S$. Надалі одиницю напівгрупи S будемо позначати через 1_S або просто через 1. Напівгрупа з одиницею називається *моноїдом.* Для напівгрупи S через S^1 позначатимемо напівгрупу S з приєднаною одиницею:

$$S^1 = \begin{cases} S \cup \{1\}, & \text{якщо } 1 \notin S; \\ S, & \text{якщо } 1 \in S. \end{cases}$$

Непорожня підмножина I напівгрупи S називається *лівим ідеалом*, якщо $SI \subseteq I$, *правим ідеалом*, якщо $IS \subseteq I$, і *(двобічним) ідеалом*, якщо I є одночасно лівим і правим ідеалом.

Елемент e напівгрупи S називається *ідемпотентом*, якщо $ee = e$. Ненульовий ідемпотент напівгрупи з нулем називається *примітивним*, якщо він є мінімальним стосовно природного часткового порядку на множині ненульових ідемпотентів. Якщо S – напівгрупа, то підмножину усіх ідемпотентів з S позначатимемо через $E(S)$. Напівгрупа ідемпотентів називається *в'язкою.* Якщо в'язка $E(S)$ є непорожньою множиною, то напівгрупова операція на в'язці $E(S)$ визначає частковий порядок $\preccurlyeq$ на ній:

$$e \preccurlyeq f \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad ef = fe = e \text{ для } e, f \in E(S).$$

Так визначений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним. Напівґатка* — це комутативна напівгрупа ідемпотентів. Напівґатка E називається *лінійно впорядкованою* або *ланцюгом*, якщо напівгрупова операція індукує на E лінійний природний порядок. Нагадаємо [159], що ланцюг L частково впорядкованої множини X називається *максимальним* тоді і лише тоді коли, для всіх ланцюгів $M \subseteq X$ з $L \subseteq M$ випливає, що $L = M$. З леми Цорна випливає, що будь-який ланцюг частково впорядкованої множини X міститься в її максимальному ланцюзі.

Через $(\omega, \min)$ позначимо множину ω з напівґратковою операцією $x \cdot y = \min\{x, y\}$. Через $(\omega, +)$ позначимо множину ω зі звичайним додаванням $(x, y) \mapsto x + y$. Означимо такий ідеал $I_n = \{x \in \omega \mid x \geqslant n\}$ напівгрупи $(\omega, +)$. Приймемо $(\omega_n, \dot{+}) = (\omega, +)/I_n$.

Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного елемента $x \in S$ існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$, і в цьому випадку елемент x^{-1} називається *інверсним до* елемента $x \in S$. Якщо S – інверсна напівгрупа, то відображення $\mathrm{inv}\colon S \to S$, яке ставить у відповідність кожному елементу x напівгрупи S його інверсний елемент x^{-1}, називається *інверсією*.

Якщо S – інверсна напівгрупа, то напівгрупова операція на S визначає частковий порядок $\preccurlyeq$ на S:

$s \preccurlyeq t$ тоді і лише тоді, коли існує елемент $e \in E(S)$ такий, що $s = te$.

Цей порядок називається *природним частковим порядком* на напівгрупі S. Зауважимо, що звуження природного часткового порядку на інверсну напівгрупу $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

У лемі 1.2.1 описаний природний частковий порядок на інверсній напівгрупі S на мові напівгрупової операції.

Лема 1.2.1 ([129, лема 1.4.6])**.** *Нехай S – інверсна напівгрупа. Тоді такі твердження еквівалентні:*

(1) *$s \preccurlyeq t$;*

(2) *$s = ft$ для деякого ідемпотента $f \in S$;*

(3) *$s^{-1} \preccurlyeq t^{-1}$;*

(4) *$s = ss^{-1}t$;*

(5) *$s = ts^{-1}s$,*

де $s, t \in S$.

Інверсна напівгрупа S з нулем називається 0-*E-унітарною*, якщо для довільного ненульового ідемпотента $e \in S$ з умови $e \preccurlyeq s$, де $s \in S$, випливає що s є ідемпотентом в S [129]. Клас 0-E-унітарних напівгруп вперше був визначений Марією Сендрей в праці [177], хоча вона називала такі інверсні напівгрупи E^*-унітарними. Термін 0-E-унітарний мабуть належить Мікіну та Сепіру, і введений в статті [135].

Для напівгруп S і T відображення $\mathfrak{h}\colon S \to T$ називається:

- *гомоморфізмом*, якщо $(s_1 \cdot s_2)\mathfrak{h} = (s_1)\mathfrak{h} \cdot (s_2)\mathfrak{h}$ для довільних елементів $s_1, s_2 \in S$;
- *анулюючим гомоморфізмом*, якщо $\mathfrak{h}$ – гомоморфізм і $(s_1)\mathfrak{h} = (s_2)\mathfrak{h}$ для довільних елементів $s_1, s_2 \in S$;
- *ізоморфізмом*, якщо $\mathfrak{h}\colon S \to T$ – бієктивний гомоморфізм.

Для напівгрупи S гомоморфізм (ізоморфізм) $\mathfrak{h}\colon S \to S$ називається *ендоморфізмом* (*автоморфізмом*) напівгрупи S.

Якщо S — напівгрупа, тоді через $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ та $\mathscr{H}$ будемо позначати відношення Ґріна на S (див. [84] або [63, розділ 2.1]):

$$\begin{array}{rll} a\mathscr{R}b & \text{тоді і лише тоді, коли} & aS^1 = bS^1; \\ a\mathscr{L}b & \text{тоді і лише тоді, коли} & S^1a = S^1b; \\ a\mathscr{J}b & \text{тоді і лише тоді, коли} & S^1aS^1 = S^1bS^1; \end{array}$$

$$\mathscr{D} = \mathscr{L}\circ\mathscr{R} = \mathscr{R}\circ\mathscr{L};$$

$$\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}.$$

Твердження 1.2.2 описує взаємозв'язок між відношеннями Ґріна на інверсній напівгрупі та її піднапівгрупі.

Твердження 1.2.2 ([129, твердження 3.2.11]). *Нехай S – інверсна піднапівгрупа інверсної напівгрупи T. Тоді*

(1) $\mathscr{L}(T) \cap (S \times S) = \mathscr{L}(S)$.

(2) $\mathscr{R}(T) \cap (S \times S) = \mathscr{R}(S)$.

(3) $\mathscr{H}(T) \cap (S \times S) = \mathscr{H}(S)$.

(4) $\mathscr{D}(S) \subseteq \mathscr{D}(T) \cap (S \times S)$.

(5) $\mathscr{J}(S) \subseteq \mathscr{J}(T) \cap (S \times S)$.

Твердження 1.2.3 ([129, твердження 3.2.17]). *Нехай S – інверсна напівгрупа й $y \in S$. Якщо $\mathscr{D}$-клас D_y містить мінімальний елемент стосовно природного часткового порядку на S, то $D_y = J_y$.*

Підмножина D напівгрупи S називається *ω-нестійкою*, якщо D нескінченна і для будь-якого елемента $a \in D$ і нескіченної підмножини $B \subseteq D$, виконується умова $aB \cup Ba \nsubseteq D$ [89]. Простий приклад ω-нестійких множин наведено в праці [89]:

> для нескінченного кардинала λ множина $D = \mathscr{I}_\omega^n \setminus \mathscr{I}_\omega^{n-1}$ є ω-нестійкою підмножиною в $\mathscr{I}_\omega^n$.

Конгруенцією на напівгрупі S називається відношенням еквівалентності $\mathfrak{C}$ на S таке, що з $(s,t) \in \mathfrak{C}$ випливають умови $(as, at), (sb, tb) \in \mathfrak{C}$ для усіх $a, b \in S$. Кожна конгуенція $\mathfrak{C}$ на напівгрупі S породжує *асоційований з нею природний гомоморфізм* $\mathfrak{C}^\natural \colon S \to S/\mathfrak{C}$, який ставить у відповідність кожному елементові s напівгрупи S його клас еквівалентності $[s]_{\mathfrak{C}}$ у фактор-напівгрупі $S/\mathfrak{C}$. Також кожний гомоморфізм $\mathfrak{h} \colon S \to T$ напівгруп S і T породжує конгуенцію $\mathfrak{C}_\mathfrak{h}$ на S:

> $(s_1, s_2) \in \mathfrak{C}_\mathfrak{h}$ тоді і лише тоді, коли $(s_1)\mathfrak{h} = (s_2)\mathfrak{h}$.

Кожен ідеал I напівгрупи S породжує конгуенцію $\mathfrak{C}_I = (I \times I) \cup \Delta_S$ на S, яка називається *конгуенцією Ріса* на напівгрупі S.

Властивості конгуенцій на інверсній напівгрупі описує твердження 1.2.4.

Твердження 1.2.4 ([129, твердження 2.3.4]). *Нехай ρ – конгуенція на інверсній напівгрупі S. Тоді:*

(1) *якщо $(s,t) \in \rho$, то $(s^{-1}, t^{-1}) \in \rho$, $(s^{-1}s, t^{-1}t) \in \rho$ і $(ss^{-1}, tt^{-1}) \in \rho$;*

(2) *якщо $(s,e) \in \rho$, де e – ідемпотент, то $(s, s^{-1}) \in \rho$, $(s, s^{-1}s) \in \rho$ і $(s, ss^{-1}) \in \rho$.*

Основні властивості гомоморфізму інверсних напівгруп описує таке твердження.

Твердження 1.2.5 ([129, твердження 1.4.21]). *Нехай $\theta \colon S \to T$ – гомоморфізм інверсних напівгруп. Тоді виконуються такі умови.*

(1) $(s^{-1})\theta = ((s)\theta)^{-1}$ *для всіх елементів* $s \in S$.

(2) *Якщо елемент* e *– ідемпотент, то* $(e)\theta$ *– ідемпотент.*

(3) *Якщо* $(s)\theta$ *– ідемпотент, то в напівгрупі* S *існує ідемпотент* e *такий, що* $(s)\theta = (e)\theta$.

(4) $\operatorname{Im}\theta$ *– інверсна піднапівгрупа напівгрупи* T.

(5) *Якщо* U *– інверсна піднапівгрупа напівгрупи* T*, то повний прообраз* $(U)\theta^{-1}$ *– інверсна піднапівгрупа напівгрупи* S.

(6) *Відображення* θ *зберігає частковий порядок.*

(7) *Нехай елементи* $a, b \in S$ *такі, що* $(a)\theta \leqslant (b)\theta$*. Тоді існує елемент* $a\prime \in S$ *такий, що* $a\prime \leqslant b$ *і* $(a\prime)\theta = (a)\theta$.

Нехай λ — довільний ненульовий кардинал. Через $\mathscr{I}_\lambda$ позначимо множину усіх часткових взаємно однозначних перетвореннь кардинала λ з напівгруповою операцією:

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta, \text{ якщо}$$
$$x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \colon y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \text{ для } \alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

Стосовно так визначеної операції $\mathscr{I}_\lambda$ є інверсною напівгрупою та називається *симетричним інверсним моноїдом*, або *симетричною інверсною напівгрупою*, над кардиналом λ (див. [62]). Симетрична інверсна напівгрупа була введена В. В. Вагнером у [4] і відіграє важливу роль в теорії напівгруп.

Приймемо $\mathscr{I}_\lambda^n = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda \colon \operatorname{rank}\alpha \leqslant n\}$, для $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Очевидно, що $\mathscr{I}_\lambda^n$ $(n \in \{1, 2, 3, \ldots\})$ – інверсна напівгрупа, множина $\mathscr{I}_\lambda^n$ є ідеалом напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda$, для кожного $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ називається *симетричною інверсною напівгрупою скінченних перетворень рангу* $\leqslant n$ [101]. Через

$$\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{smallmatrix}\right)$$

позначимо часткове взаємно однозначне перетворення, яке відображає x_1 в y_1, x_2 в y_2, …, і x_n в y_n. Очевидно, що в кожному випадку отримуємо, що $x_i \neq x_j$ і $y_i \neq y_j$ для $i \neq j$ $(i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\})$. Порожнє часткове відображення $\varnothing \colon \lambda \rightharpoonup \lambda, \varnothing \mapsto \varnothing$, позначимо через $\mathbf{0}$. Очевидно, що $\mathbf{0}$ є нулем напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$.

Означення 1.2.6. Очевидно, що множина всіх часткових порядкових ізоморфізмів між порядково опуклими підмножинами множини $(\omega, \leqslant)$ стосовно композиції часткових перетворень утворює інверсну піднапівгрупу симетричної інверсної напівгрупи $\mathscr{I}_\omega$ над множиною невід'ємних цілих чисел ω. Позначимо цю напівгрупу через $\mathscr{I}_\omega(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$. Приймемо

$$\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) = \mathscr{I}_\omega(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) \cap \mathscr{I}_\omega^n$$

і очевидно, що напівгрупа $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ замкнена стосовно напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\omega^n$. Напівгрупа $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ називається *інверсною напівгрупою опуклих часткових порядкових ізоморфізмів на множині* $(\omega, \leqslant)$ *рангу* $\leqslant n$.

Біциклічним моноїдом (або *біциклічною напівгрупою*) $\mathscr{C}(p, q)$ називається напівгрупа з одиницею 1, породжена двома елементами p та q, зв'язаних умовою $pq = 1$ [63]. Різні елементи біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}(p, q)$ можна зобразити у вигляді нескінченної таблиці

$$\begin{array}{ccccc}
1 & p & p^2 & p^3 & \cdots \\
q & qp & qp^2 & qp^3 & \cdots \\
q^2 & q^2p & q^2p^2 & q^2p^3 & \cdots \\
q^3 & q^3p & q^3p^2 & q^3p^3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array},$$

а напівгрупова операція на $\mathscr{C}(p, q)$ визначається за формулою

$$q^k p^l \cdot q^m p^n = q^{k+m-\min\{l,m\}} p^{l+n-\min\{l,m\}}.$$

Відомо, що біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p, q)$ є біпростою (а тому і простою) комбінаторною E-унітарною інверсною напівгрупою та кожна нетривіальна конгруенція на $\mathscr{C}(p, q)$ є груповою [63].

На множині $\boldsymbol{B}_\omega = \omega\times\omega$ означимо напівгрупову операцію “$\cdot$” за формулою

$$(i_1,j_1)\cdot(i_2,j_2)=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2), & \text{якщо } j_1\leqslant i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2), & \text{якщо } j_1\geqslant i_2.\end{cases}$$

Добре відомо, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega$ ізоморфна біциклічному моноїду стосовно відображення $\mathfrak{h}\colon \mathscr{C}(p,q)\to\boldsymbol{B}_\omega$, $q^kp^l\mapsto(k,l)$ (див.: [62, розділ 1.12] або [140, вправа IV.1.11(ii)]). Надалі ми ототожнюватимемо біциклічну напівгрупу з напівгрупою $\boldsymbol{B}_\omega$.

Нехай λ – ненульовий кардинад і $\mathbf{0}\notin\lambda\times\lambda$. Множина $\mathscr{B}_\lambda=\lambda\times\lambda\cup\{\mathbf{0}\}$ з напівгруповою операцією, визначено за формулами

$$(a,b)\cdot(c,d)=\begin{cases}(a,d), & \text{якщо}\ \ b=c;\\ \mathbf{0}, & \text{якщо}\ \ b\neq c\end{cases}$$

і

$$(a,b)\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}\cdot(a,b)=\mathbf{0}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0},\quad \text{для усіх}\quad a,b,c,d\in\lambda,$$

називається *напівгрупою* $\lambda\times\lambda$*-матричних одиниць* [62]. Напівгрупа $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\lambda$ є комбінаторною, примітивною, цілком 0-простою інверсною напівгрупою [129, 140], і більше того, напівгрупа $\mathscr{B}_\lambda$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^1$.

Напівгрупа S називається конгуенц-простою, якщо на ній існує лише одинична та універсальна конгуенції.

Наслідок 1.2.7 ([94, наслідок 3])**.** *Напівгрупа $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\lambda$ є конгруенц-простою для довільного кардинала $\lambda\geqslant 2$.*

Наступна конструкція запропонована О. Гутіком та М. Михаленичем в праці [11].

Нехай $\mathscr{P}(\omega)$ — сім'я усіх підмножин множини ω. Для довільного елемента $F\in\mathscr{P}(\omega)$ та довільних чисел $n,m\in\omega$ покладемо

$$n-m+F=\{n-m+k\colon k\in F\}.$$

Підсім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ називається *ω-замкненою* в $\mathscr{P}(\omega)$, якщо $F_1 \cap (-n + F_2) \in \mathscr{F}$ для всіх $n \in \omega$ та $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$.

Нехай $\boldsymbol{B}_\omega$ — біциклічний моноїд і $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. На множині $\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}$ визначимо напівгрупову операцію "$\cdot$" так:

$$(i_1, j_1, F_1)\cdot(i_2, j_2, F_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & \text{якщо } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)), & \text{якщо } j_1 \geqslant i_2. \end{cases}$$

У праці [11] доведено: якщо сім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ є ω-замкненою, то $(\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)$ є напівгрупою. Більше того, якщо ω-замкнена сім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ містить порожню множину $\varnothing$, то множина $\boldsymbol{I} = \{(i, j, \varnothing) \colon i, j \in \omega\}$ є ідеалом напівгрупи $(\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)$. Якщо $\mathscr{F}$ – ω-замкнена сім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, то означимо (див. [11]):

$$\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}} = \begin{cases} (\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)/\boldsymbol{I}, & \text{якщо } \varnothing \in \mathscr{F}; \\ (\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot), & \text{якщо } \varnothing \notin \mathscr{F}. \end{cases}$$

У праці [11] доведено, що $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ є комбінаторною інверсною напівгрупою, описано відношення Ґріна, природний частковий порядок на $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ та множину її ідемпотентів. Наведені критерії простоти, 0-простоти, біпростоти, 0-біпростоти напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$. Також у [11] доведено, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі тоді і лише тоді, коли $\mathscr{F}$ складається з єдиної непорожньої індукованої підмножини в ω.

Позначимо $[0; 0] = \{0\}$ і $[0; k] = \{0, \ldots, k\}$ для довільного натурального числа k. Множина $[0; k]$, де $k \in \omega$, називається *початковим скінченним інтервалом* множини ω.

Для довільного числа $n \in \omega$ приймемо

$$\mathscr{F}_n = \{\varnothing, [0; 0], [0; 1], [0; 2], \ldots, [0; n]\}.$$

Очевидно, що сім'я $\mathscr{F}_n$ є ω-замкненою сім'єю в $\mathscr{P}(\omega)$.

Твердження 1.2.8 ([11, твердження 1]). *Якщо сім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ є ω-замкненою, то $(\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)$ є напівгрупою.*

Твердження 1.2.9 описує природній частковий порядок на інверсні напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ підмножин в $\mathscr{P}(\omega)$.

Твердження 1.2.9 ([11, твердження 2]). *Нехай (i_1, j_1, F_1) і (i_2, j_2, F_2) – ненульові елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Тоді $(i_1, j_1, F_1) \preccurlyeq (i_2, j_2, F_2)$ тоді і лише тоді, коли $F_1 \subseteq -k + F_2$ й $i_1 - i_2 = j_1 - j_2 = k$ для деякого $k \in \omega$.*

Теорема 1.2.10 описує відношення Ґріна на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Теорема 1.2.10 ([11, теорема 2]). *Нехай $\mathscr{F}$ – ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Тоді:*

- **(i)** *$(i_1, j_1, F_1)\mathscr{R}(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли $i_1 = i_2$ і $F_1 = F_2$;*
- **(ii)** *$(i_1, j_1, F_1)\mathscr{L}(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли $j_1 = j_2$ і $F_1 = F_2$;*
- **(iii)** *$(i_1, j_1, F_1)\mathscr{H}(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$ і $F_1 = F_2$, а отже, всі $\mathscr{H}$-класи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є одноелементними;*
- **(iv)** *$(i_1, j_1, F_1)\mathscr{D}(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли $F_1 = F_2$;*
- **(v)** *$(i_1, j_1, F_1)\mathscr{J}(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли існують $k_1, k_2 \in \omega$ такі, що $F_1 \subseteq -k_1 + F_2$ і $F_2 \subseteq -k_2 + F_1$.*

Твердження 1.2.11 ([11, твердження 4]). *Нехай $\mathscr{F}$ – ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega\times\omega$-матричних одиниць $\mathscr{B}_{\omega}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathscr{F} = \{F, \varnothing\}$, де F – одноточкова підмножина в ω.*

Означення 1.2.12 ([89]). Ряд ідеалів для напівгрупи S є ланцюгом ідеалів

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_m = S. \tag{1.1}$$

Ряд (1.1) називається *щільним*, якщо I_0 є скінченною множиною і $D_k = I_k \setminus I_{k-1}$ є ω-нестійкою множиною для кожного числа $k \in \{1, \ldots, m\}$.

1.2.4. Загальна топологія.

Якщо X – топологічний простір і $A \subseteq X$, тоді через $cl_X(A)$ та $int_X(A)$ позначатимемо топологічне замикання та внутрішність множини A в топологічному просторі X, відповідно.

Підмножина A топологічного простору X називається *щільною* в X, якщо $cl_X(A) = X$.

Сім'я $\mathscr{B}$ називається *базою топологічного простору* X, якщо довільну непорожню відкриту множину простору X можна подати у вигляді об'єднання деякої підсім'ї сім'ї $\mathscr{B}$.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ називається *базою топологічного простору* X *в точці* x, якщо для довільного відкритого околу U точки x існує такий елемент $V \in \mathscr{B}(x)$, що $x \in V \subset U$.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X та Y називається *гомеоморфізмом*, якщо f взаємнооднозначно відображає X на Y і обереннене відображення $f^{-1}\colon Y \to X$ є неперервним. Якщо існує гомеоморфізм з топологічного простору X на топологічний простір Y, то простори X та Y називаються *гомеоморфними*.

Нехай (X, τ) – топологічний простір і для кожного елемента x простору X задано базу $\mathscr{B}(x)$ простору (X, τ) в точці x. Сім'я $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ називається *сім'єю околів топологічного простору* (X, τ). Кожна система околів $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ задовольняє такі властивості ([68]):

(PB1) для кожного елемента x в X сім'я $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ і для кожного елемента U сім'ї $\mathscr{B}(x)$ маємо $x \in U$;

(PB2) якщо $x \in U \in \mathscr{B}(x)$, то існує елемент V сім'ї $\mathscr{B}(x)$ такий, що $V \subset U$;

(PB3) для довільних $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ існує елемент U сім'ї $\mathscr{B}(x)$ такий, що $U \subset U_1 \cap U_2$.

Точка x називається *ізольованою* в топологічному просторі X, якщо $\{x\}$ є відкритою підмножиною в X.

Топологічний простір, в якого всі точки ізольовані називається *дискретним*. Надалі для довільного кардинала λ через $\mathfrak{D}(\lambda)$ позначимо дискретний топологічний простір потужності λ.

Сім'я $\{\mathscr{A}\}_{s \in S}$ підмножин топологічного простору X називається *дис-*

кретною, якщо для кожної точки $x \in X$ існує її окіл, який перетинається не більше ніж з однією множиною цієї сім'ї.

Покриттям множини X називається сім'я $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ підмножин в X така, що $\bigcup_{s\in S} A_s = X$. Підсім'я $\mathscr{A}_0$ в $\mathscr{A}$ називається *підпокриттям* множини X, якщо $\mathscr{A}_0$ – покриття множини X.

Нагадаємо [68], що топологічний простір X називається:

- T_1-*простором*, якщо для довільної пари різних точок $x, y \in X$ існує така відкрита підмножина U в X, що $x \in U$ і $y \notin U$;
- T_2-*простором (гаусдорфовим простором)*, якщо для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існують такі відкриті підмножина U, V в X, що $x \in U$, $y \in V$ і $U \cap V = \varnothing$;
- T_3-*простором (регулярним простором)*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та будь-якої замкненої підмножини F в X, що $x \notin F$, існують такі відкриті підмножини U, V в X, що $x \in U$, $F \subset V$ і $U \cap V = \varnothing$;
- *метризовним*, якщо його топологія породжується деякою метрикою на X;
- *компактним*, якщо кожне відкрите покриття простору X містить скінченне підпокриття;
- *простором з другою аксіомою зліченності*, якщо він має зліченну базу;
- *розрідженим*, якщо X не містить непорожньої власної підмножини, яка є щільна в ньому;
- 0-*вимірним*, якщо X має базу, яка складається з відкрито-замкнених підмножин;
- *колективно нормальним*, якщо для довільної дискретної сім'ї $\{F_i\}_{i\in\mathscr{S}}$ замкнених підмножин простору X існує попарно неперетинна сім'я відкритих множин $\{U_i\}_{i\in\mathscr{S}}$ таких, що $F_i \subseteq U_i$ для усіх $i \in \mathscr{S}$.

Теорема 1.2.13 ([68, теорема 5.1.17])**.** *T_1-простір X колективно нормаль-*

ним тоді і лише тоді, коли для кожної дискретної сім'ї $\{F_s\}_{s\in S}$ замкнених підмножин простору X існує сім'я $\{U_s\}_{s\in S}$ відкритих підмножин простору X таких, що $F_s \subset U_s$ для кожного елемента $s \in S$ і $U_s \cap U_{s'} = \varnothing$, коли $s \neq s'$.

Теорема 1.2.14 ([68, теорема 4.2.9]). *Простір з другою аксіомою зліченності є метризованим тоді і лише тоді, коли він є регулярним простором.*

Нехай α – довільний ненульовий кардинал і $\mathfrak{D}(\alpha)$ – дискретний простір потужності α і $a \notin \alpha$. На множині $\mathscr{A}(\alpha) = \{a\} \cup \mathfrak{D}(\alpha)$ означимо топологію τ_{Ac} так:

(1) усі точки $x \in \mathscr{A}(\alpha) \setminus \{a\}$ є ізольованими в $(\mathscr{A}(\alpha), \tau_{\mathrm{Ac}})$;

(2) сім'я $\mathscr{B}_{\mathscr{A}}(a) = \{\{a\} \cup B : \mathfrak{D}(\alpha) \setminus B$ – скінченна множина$\}$ визначає базу топології τ_{Ac} в точці a.

Топологічний простір $(\mathscr{A}(\alpha), \tau_{\mathrm{Ac}})$ називається *одноточковою компактифікацією Александрова дискретного простору* $\mathfrak{D}(\alpha)$.

1.2.5. Теорія напівтопологічних напівгруп.

Топологічний простір S із заданою на ньому напівгруповою операцією "$\cdot$" називається *напівтопологічною напівгрупою*, якщо ця напівгрупова операція є нарізно неперервною, тобто для довільного відкритого околу $U(a\cdot b)$ точки $a\cdot b$ в S існують відкриті околи $V(a)$ і $V(b)$ точок a і b в S, відповідно, такі, що

$$V(a) \cdot b \subseteq U(a \cdot b) \qquad \text{і} \qquad a \cdot V(b) \subseteq U(a \cdot b).$$

Якщо S – напівгрупа і τ – така топологія на S, що (S, τ) – напівтопологічна напівгрупа, то τ називатимемо *трансляційно-неперервною топологією* на S.

Твердження 1.2.15 ([89, твердження 7]). *Нехай S – напівтопологічна регулярна напівгрупа й існує щільний ряд ідеалів $I_0 \subseteq \ldots \subseteq I_m = S$. Тоді кожний ідеал I_k замкнений в напівгрупі S і кожний елемент множини $S \setminus I_{m-1}$ є ізольованою точкою в просторі S.*

Лема 1.2.16 ([86, лема 4.4]). *Нехай S – напівтопологічна напівгрупа і M – щільна піднапівгрупа напівгрупи S. Якщо елементи 1_M і 0_M є відповідно одиницею і нулем напівгрупи M, то елементи 1_M і 0_M є одиницею та нулем в напівгрупі S.*

РОЗДІЛ 2
БІЦИКЛІЧНЕ РОЗШИРЕННЯ $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, ПОРОДЖЕНЕ СКІНЧЕННИМ ІНТЕРВАЛОМ $[0,n]$

2.1. Алгебричні властивості напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$

Нагадаємо, що $[0;0]=\{0\}$ і $[0;k]=\{0,\ldots,k\}$ для довільного натурального числа k. Для довільного числа $n\in\omega$ приймемо

$$\mathscr{F}_n=\{\varnothing,[0;0],[0;1],[0;2],\ldots,[0;n]\}.$$

Очевидно, що сім'я $\mathscr{F}_n$ є ω-замкненою сім'єю в $\mathscr{P}(\omega)$, тому за твердженням 1.2.8 $(\boldsymbol{B}_{\omega}\times\mathscr{F}_n,\cdot)$ є напівгрупою.

У твердженні 2.1.1 підсумовуємо властивості, які випливають із властивостей напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ у загальному випадку. Деякі з цих властивостей є безпосередніми наслідками результатів праці [11].

Твердження 2.1.1. *Для довільного числа $n\in\omega$ виконуються такі твердження:*

(1) $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ *– інверсна напівгрупа, а саме* $\mathbf{0}^{-1}=\mathbf{0}$ *і*

$$(i,j,[0;k])^{-1}=(j,i,[0;k]),$$

для будь-яких чисел $i,j,k\in\omega$;

(2) *елемент $(i,j,[0;k])$ є ідемпотентом в напівгрупі $B_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ тоді і лише тоді, коли $i=j$;*

(3) $(i_1,i_1,[0;k_1])\preccurlyeq(i_2,i_2,[0;k_2])$ *в* $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})$ *тоді і лише тоді, коли $i_1\geqslant i_2$ й $i_1+k_1\leqslant i_2+k_2$, і цей природний частковий порядок на $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})$ зображений на рис. 2.1;*

(4) $(i,i,[0;n])$ *– максимальний ідемпотент напівґратки $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})$ для довільного числа $i\in\omega$;*

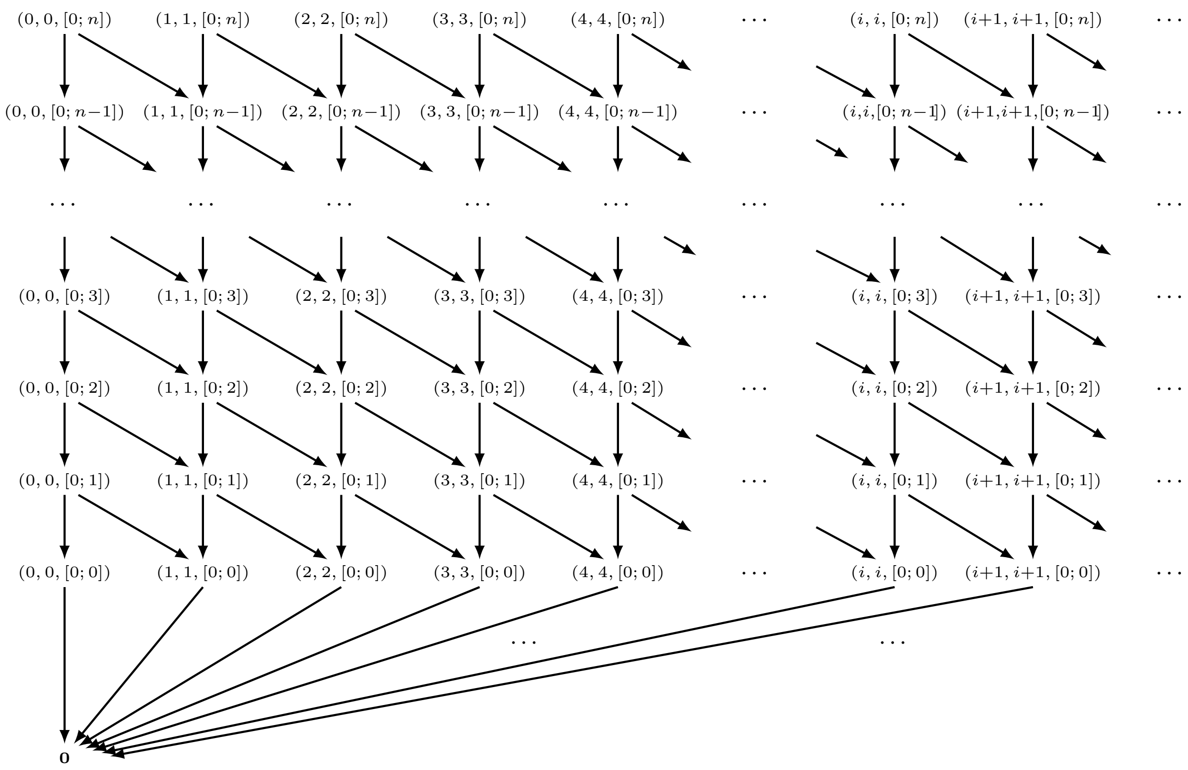

Рис. 2.1. Природний частковий порядок на напівґратці $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})$

(5) $(i,i,[0;0])$ – *примітивний ідемпотент напівґратки* $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})$ *для довільного числа* $i\in\omega$;

(6) $(i_1,j_1,[0;k_1])\mathscr{R}(i_2,j_2,[0;k_2])$ *в* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ *тоді і лише тоді, коли* $i_1=i_2$ *і* $k_1=k_2$;

(7) $(i_1,j_1,[0;k_1])\mathscr{L}(i_2,j_2,[0;k_2])$ *в* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ *тоді і лише тоді, коли* $j_1=j_2$ *і* $k_1=k_2$;

(8) $(i_1,j_1,[0;k_1])\mathscr{H}(i_2,j_2,[0;k_2])$ *в* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ *тоді і лише тоді, коли* $i_1=i_2$, $j_1=j_2$ *і* $k_1=k_2$;

(9) $(i_1,j_1,[0;k_1])\mathscr{D}(i_2,j_2,[0;k_2])$ *в* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ *тоді і лише тоді, коли* $k_1=k_2$;

(10) $\mathscr{D}=\mathscr{J}$ *у напівгрупі* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$;

(11) $(i_1,j_1,[0;k_1])\preccurlyeq(i_2,j_2,[0;k_2])$ *в* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ *тоді і лише тоді, коли* $i_1\geqslant i_2$,

$$i_1-j_1=i_2-j_2 \text{ і } i_1+k_1\leqslant i_2+k_2;$$

(12) $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ *є* 0-E-*унітарною інверсною напівгрупою.*

Доведення. Твердження (1)–(5) тривіальні, твердження (6)–(8) випливають з твердження 1.2.2 та відповідного твердження теореми 1.2.10.

(9) ($\Rightarrow$) Припустимо, що $(i_1, j_1, [0; k_1])\mathscr{D}(i_2, j_2, [0; k_2])$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Тоді існує елемент $(i_0, j_0, [0; k_0]) \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ такий, що $(i_1, j_1, [0; k_1])\mathscr{L}(i_0, j_0, [0; k_0])$ і $(i_0, j_0, [0; k_0])\mathscr{R}(i_2, j_2, [0; k_2])$. З твердження (6) випливає, що $i_0 = i_2$ і $k_0 = k_2$, а за твердженням (7) маємо, що $j_0 = j_1$ і $k_1 = k_0$. Звідси випливає рівність $k_1 = k_2$.

($\Leftarrow$) Нехай $(i_1, j_1, [0; k])$ і $(i_2, j_2, [0; k])$ елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. За твердженнями (6) і (7) маємо, що

$$(i_1, j_1, [0; k])\mathscr{L}(i_1, j_2, [0; k])\mathscr{R}(i_2, j_2, [0; k]),$$

а отже, $(i_1, j_1, [0; k])\mathscr{D}(i_2, j_2, [0; k])$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

(10) Очевидно, що $\mathscr{D}$-клас, який містить нуль $\mathbf{0}$ збігається з одноелементною множиною $\{\mathbf{0}\}$. Також $\mathscr{J}$-клас нуля $\mathbf{0}$ збігається з одноелементною множиною $\{\mathbf{0}\}$.

Зафіксуємо довільний ненульовий елемент $(i_0,j_0,[0; k_0])$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. За твердженням (9) маємо, що $\mathscr{D}$-клас елемента $(i_0,j_0,[0; k_0])$ збігається з множиною $\mathbf{D} = \{(i, j, [0; k_0]) \colon i, j \in \omega\}$. За твердженням (3) довільні два різні ідемпотенти множини $\mathbf{D}$ є порівняльними, а отже, кожен ідемпотент з $\mathscr{D}$-класу елемента $(i_0, j_0, [0; k_0])$ є мінімальним стосовно природного часткового порядку на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. За твердженням 1.2.3, якщо $\mathscr{D}$-клас D_y має мінімальний елемент, то $D_y = J_y$, а отже, $\mathscr{D}$-клас елемента $(i_0, j_0, [0; k_0])$ збігається з його $\mathscr{J}$-класом. Тому $\mathscr{D} = \mathscr{J}$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

(11) За твердженням 1.2.9 нерівність $(i_1, j_1, [0; k_1]) \preccurlyeq (i_2, j_2, [0; k_2])$ еквівалентна умовам

$$[0; k_1] \subseteq i_2 - i_1 + [0; k_2] = j_2 - j_1 + [0; k_2],$$

які еквівалентні умовам

$$i_2 - i_1 = j_2 - j_1 \leqslant 0 \qquad \text{і} \qquad k_1 \leqslant i_2 - i_1 + k_2.$$

Очевидно, що останні дві умови еквівалентні умовам

$$i_1 \geqslant i_2, \qquad i_1 - j_1 = i_2 - j_2 \qquad \text{і} \qquad i_1 + k_1 \leqslant i_2 + k_2,$$

що завершує доведення твердження.

Твердження (12) випливає з (11). □

Лема 2.1.2. *Нехай $n \in \omega$. Тоді $\uparrow_{\preccurlyeq}(i_0, j_0, [0; k_0])$ і $\downarrow_{\preccurlyeq}(i_0, j_0, [0; k_0])$ – скінченні підмножини напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ для довільного її ненульового елемента $(i_0, j_0, [0; k_0])$, $i_0, j_0 \in \omega$, $k_0 \in \{0, \ldots, n\}$.*

Доведення. За твердженням 2.1.1(11) існує скінченна кількість чисел $i, j \in \omega$ та $k \in \{0, \ldots, n\}$ таких, що $(i, j, [0; k]) \preccurlyeq (i_0, j_0, [0; k_0])$, а отже, множина $\downarrow_{\preccurlyeq}(i_0, j_0, [0; k_0])$ скінченна.

З нерівності $k \leqslant n$ і твердження 2.1.1(11) випливає, що існує скінченна кількість $i, j \in \omega$ та $k \in \{0, \ldots, n\}$ таких, що $(i_0, j_0, [0; k_0]) \preccurlyeq (i, j, [0; k])$, а отже, множина $\uparrow_{\preccurlyeq}(i_0, j_0, [0; k_0])$ також скінченна. □

Лема 2.1.3. *Якщо $n \in \omega$, то для довільних елементів $\alpha, \beta \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ множина $\alpha \cdot \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \cdot \beta$ скінченна.*

Доведення. Твердження леми є тривіальним у випадку $\alpha = \mathbf{0}$ або $\beta = \mathbf{0}$.

Зафіксуємо довільні ненульові елементи $\alpha = (i_\alpha, j_\alpha, [0; k_\alpha])$ та $\beta = (i_\beta, j_\beta, [0; k_\beta])$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Якщо $i \geqslant j_\alpha + n + 1$ або $j \geqslant i_\beta + n + 1$, то для довільного числа $k \in \{0, \ldots, n\}$ матимемо, що

$$(i_\alpha, j_\alpha, [0; k_\alpha]) \cdot (i, j, [0; k]) = (i_\alpha - j_\alpha + i, j, (j_\alpha - i + [0; k_\alpha]) \cap [0; k]) = \mathbf{0}$$

і

$$(i, j, [0; k]) \cdot (i_\beta, j_\beta, [0; k_\beta]) = (i, j - i_\beta + j_\beta, [0; k] \cap (i_\beta - j + [0; k_\beta])) = \mathbf{0}.$$

Отже, існує лише скінченна кількість елементів $(i, j, [0; k])$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ таких, що $\alpha \cdot (i, j, [0; k]) \cdot \beta \neq \mathbf{0}$, звідки випливає твердження леми. □

Лема 2.1.4. *Нехай $n \in \omega$. Тоді для довільних ненульових елементів $(i_1, j_1, [0; k_1])$ і $(i_2, j_2, [0; k_2])$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ множини розв'язків рівнянь*

$$(i_1, j_1, [0; k_1]) \cdot \chi = (i_2, j_2, [0; k_2]) \qquad \textit{і} \qquad \chi \cdot (i_1, j_1, [0; k_1]) = (i_2, j_2, [0; k_2])$$

в напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ скінченні.

Доведення. Припустимо, що χ – розв'язок рівняння

$$(i_1, j_1, [0; k_1]) \cdot \chi = (i_2, j_2, [0; k_2]).$$

З означення напівгрупової операції на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ випливає, що $\chi \neq \mathbf{0}$ і $k_1 \geqslant k_2$. Припустимо, що $\chi = (i, j, [0; k])$ для деяких чисел $i, j \in \omega$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Тоді отримуємо, що

$$\begin{aligned}(i_2, j_2, [0; k_2]) &= (i_1, j_1, [0; k_1]) \cdot (i, j, [0; k]) = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i, j, (j_1 - i + [0; k_1]) \cap [0; k]), & \text{якщо } j_1 < i; \\ (i_1, j, [0; k_1] \cap [0; k]), & \text{якщо } j_1 = i; \\ (i_1, j_1 - i + j, [0; k_1] \cap (i - j_1 + [0; k])), & \text{якщо } j_1 > i. \end{cases}\end{aligned}$$

Розглянемо такі випадки.

1. Якщо $j_1 < i$, то $i = i_2 - i_1 + j_1$, $j = j_2$, $k \geqslant k_2$ і
$$j_1 - i + k_1 = j_1 - i_2 + i_1 - j_1 + k_1 = i_1 - i_2 + k_1 \geqslant k.$$
2. Якщо $j_1 = i$, то $j = j_2$ і $k \geqslant k_2$.
3. Якщо $j_1 > i$, то $i = i_2$, $j = j_2 - j_1 + i = j_2 - j_1 + i_2$ і $i - j_1 + k = i_2 - j_1 + k \geqslant k_2$.

Позаяк $k \leqslant n$, то з вище розглянутих випадків випливає, що рівняння $(i_1, j_1, [0; k_1]) \cdot \chi$=$(i_2, j_2, [0; k_2])$ має скінченну кількість розв'язків.

Доведення твердження, що рівняння

$$\chi \cdot (i_1, j_1, [0; k_1]) = (i_2, j_2, [0; k_2])$$

має скінченну кількість розв'язків аналогічне попередньому. $\square$

Теорема 2.1.5. *Для довільного числа $n \in \omega$ напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ ізоморфна інверсній напівгрупі $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$.*

Доведення. Визначемо відображення $\mathfrak{I}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \to \mathscr{I}_{\omega}^{n+1}$ за формулами $(\mathbf{0})\mathfrak{I} = \mathbf{0}$ та

$$(i, j, [0; k])\mathfrak{I} = \left(\begin{smallmatrix} i & i+1 & \cdots & i+k \\ j & j+1 & \cdots & j+k \end{smallmatrix}\right), \qquad \text{для всіх} \quad i, j \in \omega \quad \text{та} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Очевидно, що так визначене відображення $\mathfrak{I}$ є ін'єктивним.

Далі доведемо, що відображення $\mathfrak{I}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \to \mathscr{I}_{\omega}^{n+1}$ є гомоморфізмом.

Очевидно, що

$$\begin{aligned}(\mathbf{0} \cdot \mathbf{0})\mathfrak{I} = (\mathbf{0})\mathfrak{I} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \\ = (\mathbf{0})\mathfrak{I} \cdot (\mathbf{0})\mathfrak{I},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{0} \cdot (i, j, [0; k]))\mathfrak{I} &= (\mathbf{0})\mathfrak{I} = \mathbf{0} = \\ &= \mathbf{0} \cdot \left(\begin{smallmatrix} i & i+1 & \cdots & i+k \\ j & j+1 & \cdots & j+k \end{smallmatrix}\right) = \\ &= (\mathbf{0})\mathfrak{I} \cdot (i, j, [0; k])\mathfrak{I},\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}((i, j, [0; k]) \cdot \mathbf{0})\mathfrak{I} &= (\mathbf{0})\mathfrak{I} = \mathbf{0} = \\ &= \left(\begin{smallmatrix} i & i+1 & \cdots & i+k \\ j & j+1 & \cdots & j+k \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathbf{0} = \\ &= (i, j, [0; k])\mathfrak{I} \cdot (\mathbf{0})\mathfrak{I},\end{aligned}$$

для довільного ненульового елемента $(i, j, [0; k])$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

Зафіксуємо довільні числа $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \omega$ та $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, n\}$. Якщо $k_1 \leqslant k_2$, то

$$((i_1, j_1, [0; k_1]) \cdot (i_2, j_2, [0; k_2]))\mathfrak{I} =$$
$$= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [0; k_1]) \cap [0; k_2])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [0; k_1] \cap [0; k_2])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; k_1] \cap (i_2 - j_1 + [0; k_2]))\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\mathbf{0})\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 - i_2 + k_1 < 0; \\ (i_1{-}j_1{+}i_2, j_2, [0;0])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 - i_2 + k_1 = 0; \\ (i_1{-}j_1{+}i_2, j_2, [0; j_1{-}i_2{+}k_1])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad 1 \leqslant j_1 - i_2 + k_1 \leqslant k_2; \\ (i_1, j_2, [0; k_1])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2, [0; k_1])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad k_1 \leqslant i_1 - j_1 + k_2; \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2, [0; i_2{-}j_1{+}k_2])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad k_1 > i_1 - j_1 + k_2; \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2, [0;0])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 = i_2 + k_2; \\ (\mathbf{0})\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 > i_2 + k_2 \end{cases}$$

$$
= \begin{cases}
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad j_1 - i_2 + k_1 < 0; \\
\binom{i_1 - j_1 + i_2}{j_2}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad j_1 - i_2 + k_1 = 0; \\
\begin{pmatrix} i_1 - j_1 + i_2 & \cdots & i_1 + k_1 \\ j_2 & \cdots & j_2 + j_1 - i_2 + k_1 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad 1 \leqslant j_1 - i_2 + k_1 \leqslant k_2; \\
\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1 + k_1 \\ j_2 & \cdots & j_2 + k_1 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1 + k_1 \\ j_1 - i_2 + j_2 & \cdots & j_1 - i_2 + j_2 + k_1 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad k_1 \leqslant i_2 - j_1 + k_2; \\
\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1 + i_2 - j_1 + k_2 \\ j_1 - i_2 + j_2 & \cdots & j_2 + k_2 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad k_1 > i_2 - j_1 + k_2; \\
\binom{i_1}{j_1 - i_2 + j_2}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad j_1 = i_2 + k_2; \\
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \ \text{ і } \ j_1 > i_2 + k_2
\end{cases}
$$

$$
= \begin{cases}
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad j_1 - i_2 + k_1 < 0; \\
\binom{i_1 + k_1}{j_2}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad j_1 - i_2 + k_1 = 0; \\
\begin{pmatrix} i_1 - j_1 + i_2 & \cdots & i_1 + k_1 \\ j_2 & \cdots & j_2 + j_1 - i_2 + k_1 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad 1 \leqslant j_1 - i_2 + k_1 \leqslant k_2; \\
\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1 + k_1 \\ j_2 & \cdots & j_2 + k_1 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1 + k_1 \\ j_1 - i_2 + j_2 & \cdots & j_1 - i_2 + j_2 + k_1 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad k_1 \leqslant i_2 - j_1 + k_2; \\
\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1 + i_2 - j_1 + k_2 \\ j_1 - i_2 + j_2 & \cdots & j_2 + k_2 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad k_1 > i_2 - j_1 + k_2; \\
\binom{i_1}{j_2 + k_2}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad j_1 = i_2 + k_2; \\
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \ \text{ і } \ j_1 > i_2 + k_2
\end{cases}
$$

і

$$
\begin{aligned}
&(i_1, j_1, [0;k_1])\mathfrak{I} \cdot (i_2, j_2, [0;k_2])\mathfrak{I} = \\
&\qquad = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1+k_1 \\ j_1 & \cdots & j_1+k_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_2+k_2 \\ j_2 & \cdots & j_2+k_2 \end{pmatrix} = \\
&\qquad = \begin{cases}
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \text{ і } j_1+k_1 < i_2; \\
\begin{pmatrix} i_1+k_1 \\ j_2 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \text{ і } j_1+k_1 = i_2; \\
\begin{pmatrix} i_1-j_1+i_2 & \cdots & i_1+k_1 \\ j_2 & \cdots & j_2+j_1-i_2+k_1 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \text{ і} \\
 & \qquad j_1+k_1 \geqslant i_2+1; \\
\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1+k_1 \\ j_2 & \cdots & j_2+k_1 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1+k_1 \\ j_1-i_2+j_2 & \cdots & j_1-i_2+j_2+k_1 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \text{ і} \\
 & \qquad j_1+k_1 \leqslant i_2+k_2; \\
\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1-j_1+i_2+k_2 \\ j_1-i_2+j_2 & \cdots & j_2+k_2 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \text{ і} \\
 & \qquad j_1+k_1 > i_2+k_2; \\
\begin{pmatrix} i_1 \\ j_2+k_2 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \text{ і } j_1 = i_2+k_2; \\
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \text{ і } j_1 > i_2+k_2.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Якщо $k_1 \geqslant k_2$, то

$$
\begin{aligned}
&((i_1, j_1, [0;k_1]) \cdot (i_2, j_2, [0;k_2]))\mathfrak{I} = \\
&\qquad = \begin{cases}
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [0;k_1]) \cap [0;k_2])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\
(i_1, j_2, [0;k_1] \cap [0;k_2])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0;k_1] \cap (i_2 - j_1 + [0;k_2]))\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 > i_2
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{cases} (\mathbf{0})\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \quad j_1 - i_2 + k_1 < 0; \\ (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0;0])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \quad j_1 - i_2 + k_1 = 0; \\ (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; j_1 - i_2 + k_1])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \quad 1 \leqslant j_1 + k_1 \leqslant i_2 + k_2; \\ (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; k_2])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \quad j_1 + k_1 > i_2 + k_2; \\ (i_1, j_2, [0; k_2])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; i_2 - j_1 + k_2])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \quad i_2 - j_1 + k_2 > 0; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0;0])\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \quad i_2 - j_1 + k_2 = 0; \\ (\mathbf{0})\mathfrak{I}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \quad i_2 - j_1 + k_2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \quad j_1 - i_2 + k_1 < 0; \\ \left(\begin{smallmatrix} i_1 - j_1 + i_2 \\ j_2 \end{smallmatrix}\right) & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \quad j_1 - i_2 + k_1 = 0; \\ \left(\begin{smallmatrix} i_1 - j_1 + i_2 & \cdots & i_1 + k_1 \\ j_2 & \cdots & j_1 - i_2 + j_2 + k_1 \end{smallmatrix}\right) & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \quad j_1 + k_1 \leqslant i_2 + k_2; \\ \left(\begin{smallmatrix} i_1 - j_1 + i_2 & \cdots & i_1 - j_1 + i_2 + k_2 \\ j_2 & \cdots & j_2 + k_2 \end{smallmatrix}\right) & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \quad j_1 + k_1 > i_2 + k_2; \\ \left(\begin{smallmatrix} i_1 + k_2 & \cdots & i_1 + k_2 \\ j_2 + k_2 & \cdots & j_2 + k_2 \end{smallmatrix}\right) & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ \left(\begin{smallmatrix} i_1 & \cdots & i_1 - j_1 + i_2 + k_2 \\ j_1 - i_2 + j_2 & \cdots & j_2 + k_2 \end{smallmatrix}\right) & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \quad i_2 - j_1 + k_2 > 0; \\ \left(\begin{smallmatrix} i_1 \\ j_1 - i_2 + j_2 \end{smallmatrix}\right) & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \quad i_2 - j_1 + k_2 = 0; \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \quad i_2 - j_1 + k_2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 - i_2 + k_1 < 0; \\ \begin{pmatrix} i_1+k_1 \\ j_2 \end{pmatrix} & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 - i_2 + k_1 = 0; \\ \begin{pmatrix} i_1-j_1+i_2 & \cdots & i_1+k_1 \\ j_2 & \cdots & j_1-i_2+j_2+k_1 \end{pmatrix} & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 + k_1 \leqslant i_2 + k_2; \\ \begin{pmatrix} i_1-j_1+i_2 & \cdots & i_1-j_1+i_2+k_2 \\ j_2 & \cdots & j_2+k_2 \end{pmatrix} & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 + k_1 > i_2 + k_2; \\ \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1+k_2 \\ j_2 & \cdots & j_2+k_2 \end{pmatrix} & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1-j_1+i_2+k_2 \\ j_1-i_2+j_2 & \cdots & j_2+k_2 \end{pmatrix} & \text{якщо } j_1 > i_2 \text{ і } j_1 < i_2 + k_2; \\ \begin{pmatrix} i_1 \\ j_2+k_2 \end{pmatrix} & \text{якщо } j_1 > i_2 \text{ і } j_1 = i_2 + k_2; \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \text{ і } j_1 > i_2 + k_2. \end{cases}$$

і

$$\begin{aligned} & (i_1, j_1, [0; k_1])\mathfrak{I} \cdot (i_2, j_2, [0; k_2])\mathfrak{I} = \\ & \qquad = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1+k_1 \\ j_1 & \cdots & j_1+k_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_2+k_2 \\ j_2 & \cdots & j_2+k_2 \end{pmatrix} = \\ & \qquad = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \text{ і } j_1 + k_1 < i_2; \\ \begin{pmatrix} i_1+k_1 \\ j_2 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \text{ і } j_1 + k_1 = i_2; \\ \begin{pmatrix} i_1-j_1+i_2 & \cdots & i_1+k_1 \\ j_2 & \cdots & j_2+j_1-i_2+k_1 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 + k_1 \leqslant i_2 + k_2; \\ \begin{pmatrix} i_1-j_1+i_2 & \cdots & i_1-j_1+i_2+k_2 \\ j_2 & \cdots & j_2+k_2 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 + k_1 > i_2 + k_2; \\ \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1+k_2 \\ j_2 & \cdots & j_2+k_2 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_1-j_1+i_2+k_2 \\ j_1-i_2+j_2 & \cdots & i_2+k_2 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \text{ і } j_1 < i_2 + k_2; \\ \begin{pmatrix} i_1 \\ j_2+k_2 \end{pmatrix}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \text{ і } j_1 = i_2 + k_2; \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \text{ і } j_1 > i_2 + k_2. \end{cases} \end{aligned}$$

За твердженням 1.2.5(4) гомоморфний образ $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})\mathfrak{I}$ є інверсною піднапівгрупою в $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}$.

Очевидно, що $(\mathbf{0})\mathfrak{I}$ є порожнім частковим перетворенням множини ω і за припущенням є порядково опуклим частковим ізоморфізмом лінійно впорядкованої множини $(\omega,\leqslant)$. Також гомоморфний образ

$$(i,j,[0;k])\mathfrak{I}=\left(\begin{smallmatrix} i & i+1 & \cdots & i+k\\ j & j+1 & \cdots & j+k\end{smallmatrix}\right)$$

є порядково опуклим частковим ізоморфізмом підмножини в $(\omega,\leqslant)$ для всіх $i,j\in\omega$ і $k\in\{0,1,\ldots,n\}$. З означення відображення $\mathfrak{I}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}\to\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}$ випливає, що його ко-звуження на образ $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є сюр'єктивним, а отже, $\mathfrak{I}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}\to\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ – напівгруповий ізоморфізм. $\square$

Зауваження 2.1.6. Легко бачити, що гомоморфний образ $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})\mathfrak{I}$ не містить усіх ідемпотентів напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}$, а саме $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2\\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right)\notin(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})\mathfrak{I}$ для будь-якого числа $n\geqslant 1$. Однак, за твердженням 1.2.11 напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$ ізоморфна напівгрупі $\omega\times\omega$-матричних одиниць, а отже $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{I}_{\omega}^{1}$.

Для будь-якого числа $n\in\omega$ з означення напівгрупової операції на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ випливає, що її піднапівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_k}$ є ідеалом в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ для довільного числа $k\in\{0,\ldots,n\}$. Також, оскільки множина $\mathscr{I}_{\omega}^{k+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})\setminus\mathscr{I}_{\omega}^{k}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є нескінченною в $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ для довільного числа $k\in\{0,\ldots,n\}$, то з наведених вище аргументів і теореми 2.1.5 випливає така лема:

Лема 2.1.7. *Для довільного числа $n\in\omega$ множини $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}\setminus\{\mathbf{0}\}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_k}\setminus\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{k-1}}$ є ω-нестійкими в напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ для будь-якого числа $k\in\{1,\ldots,n\}$.*

Доведення. Покажемо, що множина $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_k}\setminus\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{k-1}}$ є ω-нестійкою, а доведення того, що множина $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}\setminus\{\mathbf{0}\}$ є ω-нестійкою є подібним.

Зафіксуємо довільні різні елементи $(i_1,j_1,[0;k]),(i_2,j_2,[0;k])$ з множини $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_k}\setminus\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{k-1}}$. З означення напівгрупової операції на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ випливає, що для довільного елемента $(i,j,[0;k])\in\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_k}\setminus\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{k-1}}$ маємо, що

$$(i,j,[0;k])\cdot(i_p,j_p,[0;k])=\begin{cases}(i-j+i_p,j_p,(j-i_p+[0;k])\cap[0;k]), & \text{якщо } j<i_p;\\ (i,j_p,[0;k]\cap[0;k]), & \text{якщо } j=i_p;\\ (i,j-i_p+j_p,[0;k]\cap(i_p-j+[0;k])), & \text{якщо } j>i_p\end{cases}$$

для $p \in \{1, 2\}$. У випадку $i_1 \neq i_2$ маємо, що

$$(i, j, [0; k]) \cdot \{(i_1, j_1, [0; k]), (i_2, j_2, [0; k])\} \nsubseteq \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_k} \setminus \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{k-1}}.$$

У випадку $j_1 \neq j_2$ доведення аналогічне. $\square$

З леми 2.1.7 випливає

Твердження 2.1.8. *Для довільного числа $n \in \omega$ ряд ідеалів*

$$\{\mathbf{0}\} \subseteq \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0} \subseteq \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \subseteq \cdots \subseteq \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{n-1}} \subseteq \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$$

є щільним.

Твердження 2.1.9. *Для будь-якого невід'ємного цілого числа n і довільного $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ відображення $\mathfrak{h}_p \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ визначене за формулами $(\mathbf{0})\mathfrak{h}_p = \mathbf{0}$ і*

$$(i, j, [0; k])\mathfrak{h}_p = \begin{cases} \mathbf{0}, & \textit{якщо } k \in \{0, 1, \ldots, p\}; \\ (i, j, [0; k-p-1]), & \textit{якщо } k \in \{p+1, \ldots, n\}, \end{cases}$$

є гомоморфізмом, який відображає напівгрупу $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ на її піднапівгрупу $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{n-p-1}}$.

Доведення. Спочатку покажемо, що відображення $\mathfrak{h}_0 \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ визначене за формулами $(\mathbf{0})\mathfrak{h}_0 = \mathbf{0}$ і

$$(i, j, [0; k])\mathfrak{h}_0 = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{якщо } k = 0; \\ (i, j, [0; k-1]), & \text{якщо } k \in \{1, \ldots, n\}, \end{cases}$$

є гомоморфізмом.

Очевидно, що

$$(\mathbf{0})\mathfrak{h}_0 \cdot (i, j, [0])\mathfrak{h}_0 = \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = (\mathbf{0})\mathfrak{h}_0 = (\mathbf{0} \cdot (i, j, [0]))\mathfrak{h}_0$$

і

$$(i, j, [0])\mathfrak{h}_0 \cdot (\mathbf{0})\mathfrak{h}_0 = \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = (\mathbf{0})\mathfrak{h}_0 = ((i, j, [0]) \cdot \mathbf{0})\mathfrak{h}_0$$

для довільних $i, j \in \omega$.

Зафіксуємо довільні числа $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \omega$ і натуральні числа k_1 і k_2. Якщо $k_1 \leqslant k_2$, то

$$
\begin{aligned}
&(i_1, j_1, [0; k_1])\mathfrak{h}_0 \cdot (i_2, j_2, [0; k_2])\mathfrak{h}_0 = (i_1, j_1, [0; k_1 - 1]) \cdot (i_2, j_2, [0; k_2 - 1]) = \\
&= \begin{cases}
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [0; k_1 - 1]) \cap [0; k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\
(i_1, j_2, [0; k_1 - 1] \cap [0; k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; k_1 - 1] \cap (i_2 - j_1 + [0; k_2 - 1])), & \text{якщо } j_1 > i_2
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad j_1 - i_2 + k_1 - 1 < 0; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; j_1 - i_2 + k_1 - 1]), & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad 0 \leqslant j_1 - i_2 + k_1 - 1 \leqslant k_2 - 1; \\
(i_1, j_2, [0; k_1 - 1]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; k_1 - 1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad k_1 - 1 \leqslant i_1 - j_1 + k_2 - 1; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; i_2 - j_1 + k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad k_1 - 1 > i_1 - j_1 + k_2 - 1 \geqslant 0; \\
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad k_1 - 1 > i_1 - j_1 + k_2 - 1 < 0
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \quad j_1 - i_2 + k_1 < 1; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; j_1 - i_2 + k_1 - 1]), & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \quad 1 \leqslant j_1 - i_2 + k_1 \leqslant k_2; \\
(i_1, j_2, [0; k_1 - 1]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; k_1 - 1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \quad k_1 \leqslant i_2 - j_1 + k_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; i_2 - j_1 + k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \quad k_1 > i_2 - j_1 + k_2 \geqslant 1; \\
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \quad k_1 > i_2 - j_1 + k_2 < 1,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

і

$$
((i_1, j_1, [0; k_1]) \cdot (i_2, j_2, [0; k_2]))\mathfrak{h}_0 =
$$

$$= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [0;k_1]) \cap [0;k_2])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [0;k_1] \cap [0;k_2])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0;k_1] \cap (i_2 - j_1 + [0;k_2]))\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\mathbf{0})\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 - i_2 + k_1 < 0; \\ (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0;0] \cap [0;k_2])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 - i_2 + k_1 = 0; \\ (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; j_1 - i_2 + k_1])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad 1 \leqslant j_1 - i_2 + k_1 \leqslant k_2; \\ (i_1, j_2, [0;k_1])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0;k_1])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad k_1 \leqslant i_2 - j_1 + k_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0;k_1] \cap [0;0])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad k_1 > i_2 - j_1 + k_2 = 0; \\ (\mathbf{0})\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad k_1 > i_2 - j_1 + k_2 < 0 \end{cases}$$

$$
= \begin{cases}
(\mathbf{0})\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{i} \\
 & \qquad j_1 - i_2 + k_1 < 0; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0;0])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{i} \\
 & \qquad j_1 - i_2 + k_1 = 0; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; j_1 - i_2 + k_1])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{i} \\
 & \qquad 1 \leqslant j_1 - i_2 + k_1 \leqslant k_2; \\
(i_1, j_2, [0; k_1])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; k_1])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{i} \\
 & \qquad k_1 \leqslant i_2 - j_1 + k_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0;0])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{i} \\
 & \qquad k_1 > i_2 - j_1 + k_2 = 0; \\
(\mathbf{0})\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{i} \\
 & \qquad k_1 > i_2 - j_1 + k_2 < 0
\end{cases}
$$

$$
= \begin{cases}
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{i} \\
 & \qquad j_1 - i_2 + k_1 < 0; \\
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{i} \\
 & \qquad j_1 - i_2 + k_1 = 0; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; j_1 - i_2 + k_1])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{i} \\
 & \qquad 1 \leqslant j_1 - i_2 + k_1 \leqslant k_2; \\
(i_1, j_2, [0; k_1])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; k_1])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{i} \\
 & \qquad k_1 \leqslant i_2 - j_1 + k_2; \\
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{i} \\
 & \qquad k_1 > i_2 - j_1 + k_2 = 0; \\
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{i} \\
 & \qquad k_1 > i_2 - j_1 + k_2 < 0
\end{cases}
$$

$$
= \begin{cases}
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad j_1 - i_2 + k_1 < 1; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; j_1 - i_2 + k_1 - 1]), & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad 1 \leqslant j_1 - i_2 + k_1 \leqslant k_2; \\
(i_1, j_2, [0; k_1 - 1]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; k_1 - 1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad k_1 \leqslant i_2 - j_1 + k_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; i_2 - j_1 + k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad k_1 > i_2 - j_1 + k_2 \geqslant 1; \\
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \qquad k_1 > i_2 - j_1 + k_2 < 1,
\end{cases}
$$

Якщо $k_1 \geqslant k_2$, то

$$
\begin{aligned}
&(i_1, j_1, [0; k_1])\mathfrak{h}_0 \cdot (i_2, j_2, [0; k_2])\mathfrak{h}_0 = \\
&= (i_1, j_1, [0; k_1 - 1]) \cdot (i_2, j_2, [0; k_2 - 1]) = \\
&= \begin{cases}
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [0; k_1 - 1]) \cap [0; k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\
(i_1, j_2, [0; k_1 - 1] \cap [0; k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; k_1 - 1] \cap (i_2 - j_1 + [0; k_2 - 1])), & \text{якщо } j_1 > i_2
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases}
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
 & j_1 - i_2 + k_1 - 1 < 0; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0;0] \cap [0; k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
 & j_1 - i_2 + k_1 - 1 = 0; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; j_1 - i_2 + k_1 - 1] \cap [0; k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
 & 1 \leqslant j_1 - i_2 + k_1 - 1 \leqslant k_2 - 1; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
 & k_2 - 1 < j_1 - i_2 + k_1 - 1; \\
(i_1, j_2, [0; k_1 - 1] \cap [0; k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; i_2 - j_1 + k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
 & i_2 - j_1 + k_2 - 1 \geqslant 0; \\
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
 & i_2 - j_1 + k_2 - 1 < 0
\end{cases}
$$

$$
= \begin{cases}
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
 & \quad j_1 - i_2 + k_1 < 1; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0;0]), & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
 & \quad j_1 - i_2 + k_1 = 1; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; j_1 - i_2 + k_1 - 1]), & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
 & \quad 1 \leqslant j_1 - i_2 + k_1 - 1 \leqslant k_2 - 1; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
 & \quad k_2 < j_1 - i_2 + k_1; \\
(i_1, j_2, [0; k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; i_2 - j_1 + k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
 & \quad i_2 - j_1 + k_2 \geqslant 1; \\
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
 & \quad i_2 - j_1 + k_2 < 1
\end{cases}
$$

і

$$((i_1, j_1, [0; k_1]) \cdot (i_2, j_2, [0; k_2]))\mathfrak{h}_0 =$$

$$= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [0;k_1]) \cap [0;k_2])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [0;k_1] \cap [0;k_2])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0;k_1] \cap (i_2 - j_1 + [0;k_2]))\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\mathbf{0})\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 - i_2 + k_1 < 0; \\ (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0;0])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad j_1 - i_2 + k_1 = 0; \\ (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; j_1 - i_2 + k_1])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad k_2 \geqslant j_1 - i_2 + k_1 \geqslant 1; \\ (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0;k_2])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad k_2 < j_1 - i_2 + k_1 \geqslant 1; \\ (i_1, j_2, [0;k_2])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; i_2 - j_1 + k_2])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad 1 \leqslant i_2 - j_1 + k_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0;0])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad 0 = i_2 - j_1 + k_2; \\ (\mathbf{0})\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\ & \qquad i_2 - j_1 + k_2 < 0 \end{cases}$$

$$
= \begin{cases}
(\mathbf{0})\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \quad j_1 - i_2 + k_1 < 0; \\
(\mathbf{0})\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \quad j_1 - i_2 + k_1 = 0; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; j_1 - i_2 + k_1])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \quad k_2 \geqslant j_1 - i_2 + k_1 \geqslant 1; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; k_2])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \quad k_2 < j_1 - i_2 + k_1 \geqslant 1; \\
(i_1, j_2, [0; k_2])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; i_2 - j_1 + k_2])\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \quad 1 \leqslant i_2 - j_1 + k_2; \\
(\mathbf{0})\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \quad 0 = i_2 - j_1 + k_2; \\
(\mathbf{0})\mathfrak{h}_0, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \quad i_2 - j_1 + k_2 < 0
\end{cases}
$$

$$
= \begin{cases}
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \quad j_1 - i_2 + k_1 \leqslant 0; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; j_1 - i_2 + k_1 - 1]), & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \quad k_2 \geqslant j_1 - i_2 + k_1 \geqslant 1; \\
(i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0; k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 < i_2 \quad \text{і} \\
& \quad k_2 < j_1 - i_2 + k_1 \geqslant 1; \\
(i_1, j_2, [0; k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\
(i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0; i_2 - j_1 + k_2 - 1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \quad 1 \leqslant i_2 - j_1 + k_2; \\
\mathbf{0}, & \text{якщо } j_1 > i_2 \quad \text{і} \\
& \quad i_2 - j_1 + k_2 \leqslant 0.
\end{cases}
$$

Далі зауважимо, що за індукцією отримуємо, що

$$\mathfrak{h}_p = \underbrace{\mathfrak{h}_0 \circ \cdots \circ \mathfrak{h}_0}_{p+1\text{-разів}} = \mathfrak{h}_0^{p+1}.$$

для будь-яких $p \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Безпосередньою перевіркою доводиться, що гомоморфізм $\mathfrak{h}_p \colon \boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_n} \to \boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_n}$ відображає напівгрупу $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_n}$ в її піднапівгрупу $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_{n-p-1}}$. □

Твердження 2.1.10. *Для будь-якого натурального числа n кожна конгруенція на напівгрупі $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є конгруенцією Ріса.*

Доведення. Спочатку зауважимо, оскільки напівгрупа $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ містить нуль $\mathbf{0}$, то одинична конгуенція на $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є конгруенцією Ріса, і очевидно, що універсальна конгуенція на $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є також конгруенцією Ріса.

За індукцією доведемо таке твердження:

> *якщо $\mathfrak{C}$ є конгруенцією на напівгрупі $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ такою, що для деякого числа $k \leqslant n$ існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні елементи $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\omega^k(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ з $\max\{\operatorname{rank}\alpha, \operatorname{rank}\beta\} = k$, то всі елементи піднапівгрупи $\mathscr{I}_\omega^k(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.*

У випадку $k = 1$, очевидно, що напівгрупа $\mathscr{I}_\omega^1(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{I}_\omega^1$, яка ізоморфна напівгрупі $\omega\times\omega$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\omega$. Оскільки напівгрупа $\omega\times\omega$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\omega$ є конгруенц-простою (див. наслідок 1.2.7), то з твердження, що два різні елементи напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^1(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є $\mathfrak{C}$-еквіваленті випливає, що усі елементи напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^1(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. Отже, виконується початковий крок індукції.

Далі доведемо крок індукції:

> *якщо $\mathfrak{C}$ є конгруенцією на $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ такою, що існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні елементи α і β напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{k+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ з $\max\{\operatorname{rank}\alpha, \operatorname{rank}\beta\} = k+1$, то з твердження, що усі елементи піднапівгрупи $\mathscr{I}_\omega^k(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними випливає, що всі*

елементи піднапівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{k+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ *також є* $\mathfrak{C}$*-еквівалентними.*

Далі розглянемо всі можливі випадки.

(I). Припустимо, що $\alpha = \begin{pmatrix} a & a+1 & \cdots & a+k \\ b & b+1 & \cdots & b+k \end{pmatrix}$, $\beta = \mathbf{0}$ і $\alpha\mathfrak{C}\beta$. Оскільки $\mathfrak{C}$ – конгуенція на напівгрупі $\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, то для довільного елемента $\gamma = \begin{pmatrix} c & c+1 & \cdots & c+k_1 \\ d & d+1 & \cdots & d+k_1 \end{pmatrix}$ піднапівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{k+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, де $k_1 \leqslant k+1$, отримуємо, що елемент

$$\gamma = \begin{pmatrix} c & c+1 & \cdots & c+k_1 \\ a & a+1 & \cdots & a+k_1 \end{pmatrix} \cdot \alpha \cdot \begin{pmatrix} b & b+1 & \cdots & b+k_1 \\ d & d+1 & \cdots & d+k_1 \end{pmatrix}$$

є $\mathfrak{C}$-еквівалентним до елемента

$$\begin{pmatrix} c & c+1 & \cdots & c+k_1 \\ a & a+1 & \cdots & a+k_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{0} \cdot \begin{pmatrix} b & b+1 & \cdots & b+k_1 \\ d & d+1 & \cdots & d+k_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

а отже, $\gamma\mathfrak{C}\mathbf{0}$.

(II). Припустимо, що $\alpha = \begin{pmatrix} a & a+1 & \cdots & a+k \\ a & a+1 & \cdots & a+k \end{pmatrix}$ і $\beta = \begin{pmatrix} b & b+1 & \cdots & b+k_1 \\ b & b+1 & \cdots & b+k_1 \end{pmatrix}$ – ненульові $\mathfrak{C}$-еквівалентні ідемпотентни піднапівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{k}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ такі, що $k_1 \leqslant k$ і $\beta \preccurlyeq \alpha$. У цьому випадку маємо, що $[b; b+k_1] \subseteq [a; a+k]$. Приймемо

$$\varepsilon = \begin{cases} \begin{pmatrix} a+1 & \cdots & a+k \\ a+1 & \cdots & a+k \end{pmatrix}, & \text{якщо } a = b; \\ \begin{pmatrix} a & \cdots & a+k-1 \\ a & \cdots & a+k-1 \end{pmatrix}, & \text{якщо } a+k = b+k_1 \end{cases}$$

і $\gamma = \begin{pmatrix} a & a+1 & \cdots & a+k \\ a+1 & a+2 & \cdots & a+k+1 \end{pmatrix}$, якщо $a < b$ і $b + k_1 < a + k$.

У випадку, $a = b$ або $a + k = b + k_1$ отримуємо, що $\varepsilon\alpha$ і $\varepsilon\beta$ є різними $\mathfrak{C}$-еквівалентними ідемпотентами піднапівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, а отже, за припущенням індукції усі елементи напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.

У випадку коли $a < b$ і $b+k_1 < a+k$ отримаємо, що $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ і $\gamma\beta\gamma^{-1}$ є різними $\mathfrak{C}$-еквівалентними ідемпотентами піднапівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{k}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, оскільки вони мають різний ранг $\leqslant k$. Отже, за припущенням індукції усі елементи піднапівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{k}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.

В обидвох наведених вище випадках отримуємо, що $\alpha\mathfrak{C}\mathbf{0}$, з чого випливає, що виконується випадок **(I)**.

(III). Припустимо, що α і β – різні непорівняльні ненульові $\mathfrak{C}$-еквівалентні ідемпотенти піднапівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{k}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ в $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ такі, що $\operatorname{rank}\alpha = k+1$. Тоді $\alpha = \alpha\alpha\mathfrak{C}\alpha\beta$ і $\alpha\beta \preccurlyeq \alpha$, з чого випливає, що виконується випадок **(II)** або випадок **(I)**.

(IV). Припустимо, що α і β – різні ненульові $\mathfrak{C}$-еквівалентні елементи піднапівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{k}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ такі, що $\operatorname{rank}\alpha = k+1$. Тоді виконується хоча б одна з умов $\alpha\alpha^{-1} \neq \beta\beta^{-1}$ або $\alpha^{-1}\alpha \neq \beta^{-1}\beta$, оскільки за твердженням 2.1.1(8) і теоремою 2.1.5 усі $\mathscr{H}$-класи напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ одноелементні. За твердженням 1.2.4(1) маємо, що $\alpha\alpha^{-1}\mathfrak{C}\beta\beta^{-1}$ і $\alpha^{-1}\alpha\mathfrak{C}\beta^{-1}\beta$, а отже, виконується принаймні один з випадків **(II)** або **(III)**. □

З теореми 2.1.5 і твердження 2.1.10 випливає описання усіх конгруенцій на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

Теорема 2.1.11. *Для довільного числа $n \in \omega$ на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ існують лише конгруенції Ріса.*

Теорема 2.1.12. *Нехай n – невід'ємне ціле число та S – довільна напівгрупа. Для будь-якого гомоморфізму $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \to S$ образ $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})\mathfrak{h}$ є або ізоморфним напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_k}$ для деякого числа $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, або є одноелементною множиною.*

Доведення. За теоремою 2.1.11 гомоморфізм $\mathfrak{h}$ порожує конгруенцію Ріса $\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}$ на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. За твердженням 2.1.1(9) ряд ідеалів

$$\{\mathbf{0}\} \subsetneqq \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0} \subsetneqq \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \subsetneqq \cdots \subsetneqq \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{n-1}} \subsetneqq \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$$

є максимальним у напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, тобто якщо $\mathscr{J}$ – ідеал напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, то або $\mathscr{J} = \{\mathbf{0}\}$, або $\mathscr{J} = \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_m}$ для деякого числа $m \in \{0,1,\ldots,n\}$.

Очевидно, якщо $\mathscr{J} = \{\mathbf{0}\}$, то конгруенція Ріса $\mathfrak{C}_{\mathscr{J}}$ породжує ін'єктивний гомоморфізм $\mathfrak{h}_{\mathfrak{C}_{\mathscr{J}}}$, а отже, образ $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})\mathfrak{h}_{\mathfrak{C}_{\mathscr{J}}}$ ізоморфний напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Подібно, у випадку $\mathscr{J} = \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ маємо, що образ $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})\mathfrak{h}_{\mathfrak{C}_{\mathscr{J}}}$ – одноелементна множина.

Припустимо, що $\mathscr{I} = \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_m}$ для деякого числа $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Тоді конгуенція Ріса $\mathfrak{C}_{\mathscr{I}}$ породжує природний гомоморфізм $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}/\mathscr{I}$. Очевидно, що $\alpha\mathfrak{C}_{\mathscr{I}}\beta$ тоді і лише тоді, коли $(\alpha)\mathfrak{h}_m = (\beta)\mathfrak{h}_m$ для $\alpha, \beta \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, де $\mathfrak{h}_m\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ – гомоморфізм визначений в твердженні 2.1.9. За твердженням 2.1.9 гомоморфний образ $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})\mathfrak{h}$ ізоморфний напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{n-m-1}}$. $\square$

2.2. Напівтопологічна напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$

У цьому підрозділі досліджується топологізація напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ і її близькі до компактних трансляційно-неперервні T_1-топології на ній.

Теорема 2.2.1. *Нехай n – невід'ємне ціле число. Тоді для довільної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ кожний ненульовий елемент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ є ізольованою точкою в топологічному просторі $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n},\tau)$, а отже, кожна підмножина в просторі $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n},\tau)$, яка містить нуль $\mathbf{0}$ є замкненою. Більше того, для довільного ненульового елемента $(i,j,[0;k])$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ множина ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(i,j,[0;k])$ є відкрито-замкненою в топологічному просторі $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n},\tau)$.*

Доведення. Зафіксуємо довільний ненульовий елемент $(i,j,[0;k])$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, де $i,j\in\omega$, $k\in\{0,\ldots,n\}$. З тверджень 1.2.15 і 2.1.9 випливає існування відкритого околу $U_{(i,j,[0;k])}$ точки $(i,j,[0;k])$ в топологічному просторі $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n},\tau)$ такого, що

- $U_{(i,j,[0;k])}\subseteq \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}\setminus \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{k-1}}$ й $(i,j,[0;k])$ – ізольована точка топологічного простору $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_k}$, якщо $k\in\{1,\ldots,n\}$;
- $U_{(i,j,[0;k])}\subseteq \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}\setminus\{\mathbf{0}\}$ й $(i,j,[0;k])$ – ізольована точка топологічного простору $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$, якщо $k=0$.

З нарізної неперервності напівгрупової операції на $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n},\tau)$ випливає, що існує відкритий окіл $V_{(i,j,[0;k])}$ точки $(i,j,[0;k])$ такий, що $V_{(i,j,[0;k])}\subseteq U_{(i,j,[0;k])}$ й

$$(i,i,[0;k])\cdot V_{(i,j,[0;k])}\cdot (j,j,[0;k])\subseteq U_{(i,j,[0;k])}.$$

Ми стверджуємо, що $V_{(i,j,[0;k])}\subseteq {\uparrow_{\preccurlyeq}}(i,j,[0;k])$. Припустимо протилежне: існує точка $(i_1,j_1,[0;k_1])\in V_{(i,j,[0;k])}\setminus {\uparrow_{\preccurlyeq}}(i,j,[0;k])$. Тоді за лемою 1.2.1(4) маємо, що

$$(i,i,[0;k])\cdot(i_1,j_1,[0;k_1])\cdot(j,j,[0;k])\neq(i,j,[0;k]).$$

Оскільки $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_k}$ – ідеал напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, то з вище наведеної умови випливає, що

$$(i,i,[0;k]) \cdot V_{(i,j,[0;k])} \cdot (j,j,[0;k]) \nsubseteq U_{(i,j,[0;k])},$$

а це суперечить нарізній неперервності напівгрупової операції в $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$. Отже, виконується включення $V_{(i,j,[0;k])} \subseteq {\uparrow_{\preccurlyeq}}(i,j,[0;k])$. За лемою 2.1.2 множина ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(i,j,[0;k])$ скінченна, звідки випливає, що $(i,j,[0;k])$ – ізольована точка в топологічному просторі $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$, оскільки $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ є T_1-простором.

Останнє твердження випливає з рівності

$${\uparrow_{\preccurlyeq}}(i,j,[0;k]) = \left\{(a,b,[0;p]) \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \colon (i,i,[0;k]) \cdot (a,b,[0;p]) = (i,j,[0;k])\right\}$$

і припущення, що τ – трансляційно-неперервна T_1-топологія на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. □

Наслідок 2.2.2. *Нехай n – невід'ємне ціле число. Тоді для довільної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ простір $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ є розрідженим, 0-вимірним і колективно нормальним.*

Доведення. З теореми 2.2.1 випливає, що топологічний простір $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ є розрідженим і 0-вимірним.

Нехай $\{F_s\}_{s\in\mathscr{S}}$ – дискретна сім'я замкнених підмножин топологічного простору $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau\right)$. За теоремою 2.2.1 кожний ненульовий елемент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ є ізольованою точкою в топологічному просторі $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$. У випадку, коли кожний елемент сім'ї $\{F_s\}_{s\in\mathscr{S}}$ не містить нуля $\mathbf{0}$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, то кожний елемент сім'ї $\{F_s\}_{s\in\mathscr{S}}$ є відкритою підмножиною топологічного простору $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau\right)$. У цьому випадку $U_s = F_s$ для всіх $s \in \mathscr{S}$. Припустимо тепер, що $\mathbf{0} \in F_{s_0}$ для деякого елемента $s_0 \in \mathscr{S}$. Нехай $U(\mathbf{0})$ – відкритий окіл нуля $\mathbf{0}$ в топологічному просторі $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau\right)$, який перетинає декілька елементів сім'ї $\{F_s\}_{s\in\mathscr{S}}$. Приймемо $U_{s_0} = U(0) \cup F_{s_0}$ і $U_s = F_s$ для всіх елементів $s \in \mathscr{S} \setminus \{s_o\}$. У двох вище розглянутих випадках маємо, що $U_s \cap U_t = \varnothing$ для всіх різних елементів $s, t \in \mathscr{S}$, а отже, за теоремою 1.2.13 топологічний простір $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau\right)$ є колективно нормальним. □

З прикладу 2.2.3 випливає, що на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ існує компактна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія.

Приклад 2.2.3. Нехай n – невід'ємне ціле число. Означимо топологію τ_{Ac} на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ так:

- усі ненульові елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ є ізольованими точками топологічного простору $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}})$;
- сім'я

$$\mathscr{B}_{\mathrm{Ac}}(\mathbf{0}) = \left\{A \subseteq \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \colon \mathbf{0} \in A \text{ і } \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \setminus A \text{ – скінченна}\right\}$$

  визначає базу топології τ_{Ac} в точці $\mathbf{0}$.

Очевидно, що топологічний простір $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ гомеоморфний одноточковій компактифікації Алєксандрова дискретного нескінченного зліченного простору, а отже, $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ – гаусдорфовий компактний простір. Тоді простір $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ є нормальним, і оскільки він має зліченну базу, то за теоремою Урисона про метризацію (див. теорема 1.2.14) простір $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ є метризованим.

Далі доведемо, що $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ – напівтопологічна напівгрупа. Нехай α і β – ненульові елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Оскільки α і β є ізольованими точками в топологічному просторі $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$, то достатньо показати, як знайти для довільного фіксованого відкритого околу $U_{\mathbf{0}}$ нуля $\mathbf{0}$ відкриті околи $V_{\mathbf{0}}$ і $W_{\mathbf{0}}$ нуля $\mathbf{0}$ в просторі $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ такі, що

$$V_{\mathbf{0}} \cdot \alpha \subseteq U_{\mathbf{0}} \qquad \text{і} \qquad \beta \cdot W_{\mathbf{0}} \subseteq U_{\mathbf{0}}.$$

Оскільки простір $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ гомеоморфний одноточковій компактифікації Алєксандрова, то довільний відкритий окіл $U_{\mathbf{0}}$ нуля $\mathbf{0}$ є коскінченною підмножиною в напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. За лемою 2.1.3 отримуємо, що

$$V_{\mathbf{0}} = \{\gamma \in U_{\mathbf{0}} \colon \gamma \cdot \alpha \in U_{\mathbf{0}}\} \qquad \text{і} \qquad W_{\mathbf{0}} = \{\gamma \in U_{\mathbf{0}} \colon \beta \cdot \gamma \in U_{\mathbf{0}}\}$$

є коскінченними підмножинами множини $U_{\mathbf{0}}$, а отже, за означенням топології τ_{Ac} множини $V_{\mathbf{0}}$ і $W_{\mathbf{0}}$ є шуканими відкритими околами нуля $\mathbf{0}$ в просторі $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$.

Оскільки всі ненульові елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ є ізольованими точками в топологічному просторі $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ і кожний відкритий окіл $U_{\mathbf{0}}$ нуля $\mathbf{0}$ в просторі $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ має скінченне доповнення в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, то інверсія є неперервною в напівтопологічній напівгрупі $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$.

Теорема 2.2.4 описує близькі до компактних трансляційно-неперервні T_1-топології на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

Теорема 2.2.4. *Нехай n – невід'ємне ціле число. Тоді для довільної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ такі умови еквівалентні:*

(1) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ *– компактна напівтопологічна напівгрупа;*

(2) *напівтопологічна напівгрупа $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ топологічно ізоморфна напівтопологічній напівгрупі $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau_{\mathrm{Ac}}\right)$;*

(3) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ *– компактна напівтопологічна напівгрупа з неперервною інверсією;*

(4) $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ *є $\mathfrak{D}(\omega)$-компактним простором.*

Доведення. Імплікації (1)⇒(4), (2)⇒(1), (2)⇒(3) і (3)⇒(1) очевидні. Оскільки за теоремою 2.2.1 кожний ненульовий елемент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ є ізольованою точкою в топологічному просторі $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$, то з компактності простору $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ і з твердження (1) випливає твердження (2).

(4)⇒(1) Припустимо, що існує трансляційно-неперервна T_1-топологія τ на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ така, що $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$ є некомпактним $\mathfrak{D}(\omega)$-компактним простором. Тоді існує відкрите покриття $\mathscr{U} = \{U_s\}$ простору $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$, яке не містить скінченне підпокриття. Нехай U_{s_0} – елемент покриття $\mathscr{U}$ такий, що $U_{s_0} \ni \mathbf{0}$. Тоді $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \setminus U_{s_0}$ – нескінченна зліченна підмножина ізольованих точок простору $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$. Пронумеруємо множину $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \setminus U_{s_0}$ натуральними числами, тобто нехай $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \setminus U_{s_0} = \{\alpha_i \colon i \in \mathbb{N}\}$. Визначимо відображення

$f\colon (\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau) \to \mathfrak{D}(\omega)$ за формулою

$$(\alpha)f = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha \in U_{s_0};\\ i, & \text{якщо } \alpha = \alpha_i \text{ для деякого } i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

За теоремою 2.2.1 множина U_{s_0} є відкрито-замкненою в просторі $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$, а отже, так визначене відображення f неперервне. Однак образ $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})f$ нескінченний, а отже, не є компактною підмножиною дискретного простору $\mathfrak{D}(\omega)$, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає імплікація (4)⇒(1). $\square$

За твердженням 2.2.5 напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ має подібне замикання в T_1-напівтопологічній напівгрупі як і біциклічний моноїд (див. [57] і [67]), λ-поліциклічний моноїд [56], графові інверсні напівгрупи [54,136], напівгрупи МакКалістера [55], локально компактні напівтопологічні 0-біпрості інверсні ω-напівгрупи з компактною максимальною підгрупою [86], та інші дискретні напівгрупи бієктивних часткових перетворень, які досліджувалися в працях [16, 60, 61, 87, 91, 97, 103, 104, 106].

Твердження 2.2.5. *Нехай n – невід'ємне ціле число. Якщо S – T_1-напівтопологічна напівгрупа, яка містить $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ як щільну власну піднапівгрупу, то $I = (S \setminus \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}) \cup \{\boldsymbol{0}\}$ – ідеал напівгрупи S.*

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $\nu \in I$. Якщо $\chi \cdot \nu = \zeta \notin I$ для деякого елемента $\chi \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, то існує відкритий окіл $U(\nu)$ точки ν в топологічному просторі S такий, що

$$\{\chi\} \cdot U(\nu) = \{\zeta\} \subset \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \setminus \{\boldsymbol{0}\}.$$

За лемою 2.1.4 відкритий окіл $U(\nu)$ містить скінченну кількість елементів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, а це суперечить нашому припущенню. Отже, $\chi \cdot \nu \in I$ для всіх елементів $\chi \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ і $\nu \in I$. Доведення твердження, що $\nu \cdot \chi \in I$ для всіх елементів $\chi \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ і $\nu \in I$ аналогічне.

Припустимо, що $\chi \cdot \nu = \mu \notin I$ для деяких елементів $\chi, \nu \in I$. Тоді $\mu \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ і з нарізно неперервності напівгрупової операції в S випливає, що існують відкриті околи $U(\chi)$ і $U(\nu)$ точок χ і ν у топологічному просторі S, відповідно, такі, що

$$\{\chi\} \cdot U(\nu) = \{\mu\} \quad \text{i} \quad U(\chi) \cdot \{\nu\} = \{\mu\}.$$

Позаяк околи $U(\chi)$ і $U(\nu)$ містять нескінченну кількість елементів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, то рівності

$$\{\chi\} \cdot U(\nu) = \{\mu\} \quad \text{i} \quad U(\chi) \cdot \{\nu\} = \{\mu\}$$

не виконуються, оскільки $\{\chi\} \cdot \big(U(\nu) \cap \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}\big) \subseteq I$. З отриманої суперечності випливає, що $\chi \cdot \nu \in I$. $\square$

Для довільного числа $k \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$ покладемо

$$D_k = \left\{\alpha \in \mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) \colon \operatorname{rank} \alpha = k\right\}.$$

З твердження 2.1.1(9) і теореми 2.1.5 випливає, що

$$\boldsymbol{D} = \{D_k \colon k = 0, 1, \ldots, n+1\}$$

є сім'єю усіх $\mathscr{D}$-класів напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$.

Твердження 2.2.6 описує наріст алгебричної структури при топологічному замиканні напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ в T_1-напівтопологічній напівгрупі S, яка містить її як власну піднапівгрупу.

Твердження 2.2.6. *Нехай n – невід'ємне ціле число. Якщо S – T_1-напівтопологічна напівгрупа, яка містить напівгрупу $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ як щільну власну піднапівгрупу, то $\chi \cdot \chi = \mathbf{0}$ для всіх елементів $\chi \in S \setminus \mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$.*

Доведення. З леми 1.2.16 випливає, що елемент $\mathbf{0}$ напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є нулем напівгрупи S.

Зафіксуємо довільний елемент $\chi \in S \setminus \mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ і довільний відкритий окіл $U(\chi)$ точки χ в топологічному просторі S. Оскільки $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ – щільна власна піднапівгрупа напівгрупи S, то множина $U(\chi)\cap(\mathscr{I}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})\setminus\{\mathbf{0}\})$ нескінченна. Позаяк сім'я $\boldsymbol{D}$ скінченна, то існує число $i\in\{1,\ldots,n+1\}$ таке, що множина $U(\chi)\cap D_i$ нескінченна. Звідси та з означення напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ випливає, що принаймні одна із сімей

$$\mathfrak{dom}\, D_iU(\chi)=\{\operatorname{dom}\alpha\colon \alpha\in U(\chi)\cap D_i\}$$

або

$$\mathfrak{ran}\, D_iU(\chi)=\{\operatorname{ran}\alpha\colon \alpha\in U(\chi)\cap D_i\}$$

нескінченна. Припустимо, що сім'я $\mathfrak{dom}\, D_iU(\chi)$ нескінченна. Тоді з означення напівгрупової операції на $\mathscr{I}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ випливає, що існує нескінченна кількість елементів $\beta\in U(\chi)\cap\mathscr{I}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ таких, що $\mathbf{0}\in\beta\cdot U(\chi)$, і оскільки S – T_1-простір, то маємо, що $\beta\cdot\chi=\mathbf{0}$ для таких елементів β. Також, з нескінченності множини $\mathfrak{dom}\, D_iU(\chi)$ й означення напівгрупової операції на напівгрупі $\mathscr{I}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ випливає існування нескінченної кількості елементів $\gamma\in U(\chi)\cap\mathscr{I}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ таких, що $\mathbf{0}\in U(\chi)\cdot\gamma$. Оскільки S – T_1-простір, то отримуємо, що $\chi\cdot\gamma=\mathbf{0}$ для таких елементів γ. У випадку, коли сім'я $\mathfrak{ran}\, D_iU(\chi)$ нескінчена аналогічно отримуємо, що існує нескінченна кількість елементів $\beta,\gamma\in U(\chi)\cap\mathscr{I}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ таких, що

$$\beta\cdot\chi=\mathbf{0}\quad \text{і}\quad \chi\cdot\gamma=\mathbf{0}.$$

Отже, ми довели, що $\mathbf{0}\in V(\chi)\cdot\chi$ і $\mathbf{0}\in\chi\cdot V(\chi)$ для довільного відкритого околу $V(\chi)$ точки χ в топологічному просторі S. Оскільки S є T_1-простором, то звідси випливає рівність $\chi\cdot\chi=\mathbf{0}$ для всіх елементів $\chi\in S\setminus\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_n}$. $\square$

Позаяк за теоремою 2.1.5 напівгрупа $\mathscr{I}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ ізоморфна напівгрупі $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_n}$, то з твердження 2.2.6 випливає наслідок 2.2.7.

Наслідок 2.2.7. *Нехай n – невід'ємне ціле число. Якщо S – T_1-напівтопологічна напівгрупа, яка містить напівгрупу $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_n}$ як щільну власну піднапівгрупу, то $\chi\cdot\chi=\mathbf{0}$ для всіх елементів $\chi\in S\setminus\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_n}$.*

2.3. Висновки до розділу 2

У цьому розділі досліджується напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, яка представлена у праці [11], у випадку коли ω-замкнута сім'я $\mathscr{F}_n$ породжена множиною $\{0, 1, \ldots, n\}$. Підрозділ 2.1 присвячений вивченню алгебричних властивостей напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, а саме описано відношення Ґріна, доведено, що відношення Ґріна $\mathscr{D}$ і $\mathscr{J}$ збігаються на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів множини $(\omega, \leqslant)$ рангу $\leqslant n+1$, і на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ існують лише конгруенції Ріса.

Підрозділ 2.2 присвячений топологізації напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Зокрема, доведено, що для довільної трансляційно-неперервної T_1-топології τ на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ кожний ненульовий елемент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ є ізольованою точкою в топологічному просторі $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}, \tau)$, на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ існує єдина компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія, і кожна $\mathfrak{D}(\omega)$-компактна трансляційно-неперервна T_1-топологія компактна. Описано наріст алгебричної структури при топологічному замиканні напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ в T_1-напівтопологічній напівгрупі S, яка містить її як власну піднапівгрупу.

РОЗДІЛ 3
ЕНДОМОРФІЗМИ НАПІВГРУПИ $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$

3.1. Ін'єктивні ендоморфізми напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$

Твердження 3.1.1. *Для довільного натурального числа n і довільного числа $p \in \omega$ відображення $\mathfrak{e}_p \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ визначене за формулами $(\mathbf{0})\mathfrak{e}_p = \mathbf{0}$ і*

$$(i,j,[0;k])\mathfrak{e}_p = (p+i,p+j,[0;k]),$$

є ендоморфізмом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.

Доведення. Очевидно, що

$$(\mathbf{0})\mathfrak{e}_p \cdot (\mathbf{0})\mathfrak{e}_p = \mathbf{0}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0} = (\mathbf{0})\mathfrak{e}_p = (\mathbf{0}\cdot\mathbf{0})\mathfrak{e}_p$$

і

$$\begin{aligned}
(\mathbf{0})\mathfrak{e}_p \cdot (i,j,[0;k])\mathfrak{e}_p &= \mathbf{0}\cdot(p+i,p+j,[0;k]) = \\
&= \mathbf{0} = \\
&= (\mathbf{0})\mathfrak{e}_p = \\
&= (\mathbf{0}\cdot(i,j,[0;k]))\mathfrak{e}_p; \\
(i,j,[0;k])\mathfrak{e}_p \cdot (\mathbf{0})\mathfrak{e}_p &= (p+i,p+j,[0;k])\cdot\mathbf{0} = \\
&= \mathbf{0} = \\
&= (\mathbf{0})\mathfrak{e}_p = \\
&= ((i,j,[0;k])\cdot\mathbf{0})\mathfrak{e}_p,
\end{aligned}$$

для довільного ненульового елемента $(i,j,[0;k])$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Також для ненульових елементів $(i_1,j_1,[0;k_1])$ і $(i_2,j_2,[0;k_2])$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ отримуємо, що

$$(i_1,j_1,[0;k_1])\mathfrak{e}_p\cdot(i_2,j_2,[0;k_2])\mathfrak{e}_p=(p+i_1,p+j_1,[0;k_1])\cdot(p+i_2,p+j_2,[0;k_2])=$$

$$=\begin{cases} (p{+}i_1{-}(p{+}j_1){+}p{+}i_2, p{+}j_2, (p{+}j_1{-}(p{+}i_2){+}[0;k_1]){\cap}[0;k_2]), & \\ \hfill \text{якщо } p+j_1 < p+i_2; & \\ (p+i_1, p+j_2, [0;k_1] \cap [0;k_2]), \hfill \text{якщо } p+j_1 = p+i_2; & \\ (p{+}i_1, p{+}j_1{-}(p{+}i_2){+}p{+}j_2, [0;k_1]{\cap}(p{+}i_2{-}(p{+}j_1){+}[0;k_2])), & \\ \hfill \text{якщо } p{+}j_1{>}p{+}i_2 & \end{cases}$$

$$=\begin{cases} (p{+}i_1{-}j_1{+}i_2, p{+}j_2, (j_1{-}i_2{+}[0;k_1]){\cap}[0;k_2]), & \text{якщо } j_1{<}i_2; \\ (p{+}i_1, p{+}j_2, [0;k_1]{\cap}[0;k_2]), & \text{якщо } j_1{=}i_2; \\ (p{+}i_1, p{+}j_1{-}i_2{+}j_2, [0;k_1]{\cap}(i_2{-}j_1{+}[0;k_2])), & \text{якщо } j_1{>}i_2 \end{cases}$$

і

$$((i_1, j_1, [0;k_1]) \cdot (i_2, j_2, [0;k_2]))\mathfrak{e}_p =$$

$$=\begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [0;k_1]) \cap [0;k_2])\mathfrak{e}_p, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [0;k_1] \cap [0;k_2])\mathfrak{e}_p, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0;k_2] \cap (i_2 - j_1 + [0;k_2]))\mathfrak{e}_p, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} (p + i_1 - j_1 + i_2, p + j_2, (j_1 - i_2 + [0;k_1]) \cap [0;k_2]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (p + i_1, p + j_2, [0;k_1] \cap [0;k_2]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (p + i_1, p + j_1 - i_2 + j_2, [0;k_2] \cap (i_2 - j_1 + [0;k_2])), & \text{якщо } j_1 > i_2, \end{cases}$$

то відображення $\mathfrak{e}_p$ є ендоморфізмом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. □

За теоремою 2.1.5 для довільного числа $n \in \omega$ напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ стосовно відображення $\mathfrak{I}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \to \mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, яке визначене за формулами $(\mathbf{0})\mathfrak{I} = \mathbf{0}$ і

$$(i, j, [0;k])\mathfrak{I} = \left(\begin{smallmatrix} i & i+1 & \cdots & i+k \\ j & j+1 & \cdots & j+k \end{smallmatrix}\right).$$

Звідси та з твердження 3.1.1 випливає такий наслідок.

Наслідок 3.1.2. *Для довільного натурального числа n і довільного числа $p \in \omega$ відображення $\mathfrak{e}_p\colon \mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) \to \mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ визначене за формулами $(\mathbf{0})\mathfrak{e}_p = \mathbf{0}$ і*

$$\left(\begin{smallmatrix} i & i+1 & \cdots & i+k \\ j & j+1 & \cdots & j+k \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{e}_p = \left(\begin{smallmatrix} p+i & p+i+1 & \cdots & p+i+k \\ p+j & p+j+1 & \cdots & p+j+k \end{smallmatrix}\right), \qquad k \in \{0, \ldots, n-1\},$$

є ендоморфізмом напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$.

Далі ми досліджуватимемо ендоморфізми напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$.

Лема 3.1.3. *Нехай* n *– довільне натуральне число й* $\mathfrak{a}$ *– довільний неанулюючий ендоморфізм напівгрупи* $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$. *Тоді* $(\mathbf{0})\mathfrak{a} = \mathbf{0}$.

Доведення. Припустимо протилежне: $(\mathbf{0})\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \neq \mathbf{0}$. За теоремою 2.1.12 образ напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ стосовно ендоморфізму $\mathfrak{a}$ ізоморфний напівгрупі $\mathscr{I}_{\omega}^{m}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ для деякого натурального числа $m \leqslant n$. Отже, піднапівгрупа $(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a}$ напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ має нескінченну кількість ідемпотентів. Однак за теоремою 2.1.5 і лемою 2.1.2 множина $\uparrow_{\preccurlyeq}\boldsymbol{e} = (\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a}$ скінченна, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає рівність $(\mathbf{0})\mathfrak{a} = \mathbf{0}$. $\square$

З леми 3.1.3 випливає наслідок 3.1.4.

Наслідок 3.1.4. *Нехай* n *– довільне натуральне число й* $\mathfrak{a}$ *– ендоморфізм напівгрупи* $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$. *Якщо* $(\mathbf{0})\mathfrak{a} \neq \mathbf{0}$, *то* $\mathfrak{a}$ *– анулюючий ендоморфізм.*

Лема 3.1.5. *Нехай* n *– натуральне число* $\geqslant 2$ *і* $\mathfrak{a}$ *– довільний неанулюючий ендоморфізм напівгрупи* $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$. *Якщо* $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, *то* $\mathfrak{a}$ *є тотожним автоморфізмом напівгрупи* $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$.

Доведення. Спочатку доведемо, що звуження ендоморфізму $\mathfrak{a}$ на напівґратку $E(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ є тотожним відображенням.

З означення природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на напівґратці $E(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ випливає, що

$$\uparrow_{\preccurlyeq}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \ldots, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\right\}.$$

За твердженням 1.2.5(6) кожний гомоморфізм інверсних напівгруп зберігає природний частковий порядок, а отже, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a}$, оскільки $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Також за твердженням 2.1.10 кожна конгруенція на напівгрупі $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є конгруенцією Ріса, звідки випливає, що $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a}$. Отже, отримуємо, що $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Подібно за індукцією отримуємо, що $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & k \\ 0 & 1 & \cdots & k \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & k \\ 0 & 1 & \cdots & k \end{smallmatrix}\right)$ для довільного числа $k \in \{2, \ldots, n-1\}$.

З означення природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на напівґратці $E(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ випливає, що $\mathbf{0} \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. З вище наведеної частини доведення, леми 3.1.3 і твердження 2.1.10 випливає, що

$$\mathbf{0} = (\mathbf{0})\mathfrak{a} \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Знову з означення природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на напівґратці $E(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ отримуємо, що з нерівностей $\mathbf{0} \preccurlyeq \boldsymbol{x} \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ випливає, що або $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, або $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Тоді за твердженням 2.1.10 маємо, що $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. З аналогічних міркувань і умов

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

випливає, що $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Далі за індукцією отримуємо, що

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & k+1 \\ 1 & 2 & \cdots & k+1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & k+1 \\ 1 & 2 & \cdots & k+1 \end{smallmatrix}\right)$$

для довільного числа $k \in \{2, \ldots, n-1\}$.

Зауважимо, що доведення кроку індукції:

з того, що рівності

$$\left(\begin{smallmatrix} p \\ p \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} p \\ p \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a}, \left(\begin{smallmatrix} p & p+1 \\ p & p+1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} p & p+1 \\ p & p+1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a}, \ldots,$$
$$\left(\begin{smallmatrix} p & p+1 & \cdots & p+n-1 \\ p & p+1 & \cdots & p+n-1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} p & p+1 & \cdots & p+n-1 \\ p & p+1 & \cdots & p+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a}$$

виконуються для $p \leqslant m$, випливає, що ці рівності виконуться для $p = m+1$,

аналогічне до вище наведеної частини доведення.

Зафіксуємо довільне часткове перетворення $\boldsymbol{x} \in \mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) \setminus E(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ з $\operatorname{rank} \boldsymbol{x} = k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Позаяк $\boldsymbol{x}$ – опуклий частковий порядковий ізоморфізм лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leqslant)$, то існують числа $s, t \in \omega$ такі, що $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} s & s+1 & \cdots & s+k-1 \\ t & t+1 & \cdots & t+k-1 \end{smallmatrix}\right)$. Позаяк $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-1}, \boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{x} \in E(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$, то за твердженням 1.2.5(1) отримуємо, що

$$(\boldsymbol{x})\mathfrak{a} \cdot ((\boldsymbol{x})\mathfrak{a})^{-1} = (\boldsymbol{x})\mathfrak{a} \cdot (\boldsymbol{x}^{-1})\mathfrak{a} =$$

$$
\begin{aligned}
&= (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-1})\mathfrak{a} = \\
&= \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-1} = \\
&= \left(\begin{smallmatrix} s & s+1 & \cdots & s+k-1 \\ t & t+1 & \cdots & t+k-1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} s & s+1 & \cdots & s+k-1 \\ t & t+1 & \cdots & t+k-1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \\
&= \left(\begin{smallmatrix} s & s+1 & \cdots & s+k-1 \\ t & t+1 & \cdots & t+k-1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} t & t+1 & \cdots & t+k-1 \\ s & s+1 & \cdots & s+k-1 \end{smallmatrix}\right) = \\
&= \left(\begin{smallmatrix} s & s+1 & \cdots & s+k-1 \\ s & s+1 & \cdots & s+k-1 \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

і

$$
\begin{aligned}
((\boldsymbol{x})\mathfrak{a})^{-1} \cdot (\boldsymbol{x})\mathfrak{a} &= (\boldsymbol{x}^{-1})\mathfrak{a} \cdot (\boldsymbol{x})\mathfrak{a} = \\
&= (\boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{x})\mathfrak{a} = \\
&= \boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{x} = \\
&= \left(\begin{smallmatrix} s & s+1 & \cdots & s+k-1 \\ t & t+1 & \cdots & t+k-1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} s & s+1 & \cdots & s+k-1 \\ t & t+1 & \cdots & t+k-1 \end{smallmatrix}\right) = \\
&= \left(\begin{smallmatrix} t & t+1 & \cdots & t+k-1 \\ s & s+1 & \cdots & s+k-1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} s & s+1 & \cdots & s+k-1 \\ t & t+1 & \cdots & t+k-1 \end{smallmatrix}\right) = \\
&= \left(\begin{smallmatrix} t & t+1 & \cdots & t+k-1 \\ t & t+1 & \cdots & t+k-1 \end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

З вище наведених рівностей випливає, що

$$
\operatorname{dom}((\boldsymbol{x})\mathfrak{a}) = \operatorname{dom}((\boldsymbol{x})\mathfrak{a} \cdot ((\boldsymbol{x})\mathfrak{a})^{-1}) = \{s, \ldots, s+k-1\}
$$

і

$$
\operatorname{ran}((\boldsymbol{x})\mathfrak{a}) = \operatorname{dom}(((\boldsymbol{x})\mathfrak{a})^{-1} \cdot (\boldsymbol{x})\mathfrak{a}) = \{t, \ldots, t+k-1\}.
$$

Позаяк $(\boldsymbol{x})\mathfrak{a}$ – опуклий частковий порядковий ізоморфізм лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leqslant)$, то $(\boldsymbol{x})\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} s & s+1 & \cdots & s+k-1 \\ t & t+1 & \cdots & t+k-1 \end{smallmatrix}\right)$, що завершує доведення леми. $\square$

Для візуального спрощення доведення теореми 3.1.6, схематично зобразимо природний частковий порядок на напівґратці $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ на рис. 3.1.

Для довільного числа $i_0 \in \omega$ означимо ендоморфізм $\mathfrak{e}_{i_0} \colon \mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) \to \mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ так

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{0})\mathfrak{e}_{i_0} = \boldsymbol{0}, \ \left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{e}_{i_0} = \left(\begin{smallmatrix} i+i_0 \\ j+i_0 \end{smallmatrix}\right), \ \left(\begin{smallmatrix} i & i+1 \\ j & j+1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{e}_{i_0} = \left(\begin{smallmatrix} i+i_0 & i+1+i_0 \\ j+i_0 & j+1+i_0 \end{smallmatrix}\right), \ \ldots, \\
&\left(\begin{smallmatrix} i & i+1 & \cdots & i+n-1 \\ j & j+1 & \cdots & j+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{e}_{i_0} = \left(\begin{smallmatrix} i+i_0 & i+1+i_0 & \cdots & i+n-1+i_0 \\ j+i_0 & j+1+i_0 & \cdots & j+n-1+i_0 \end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

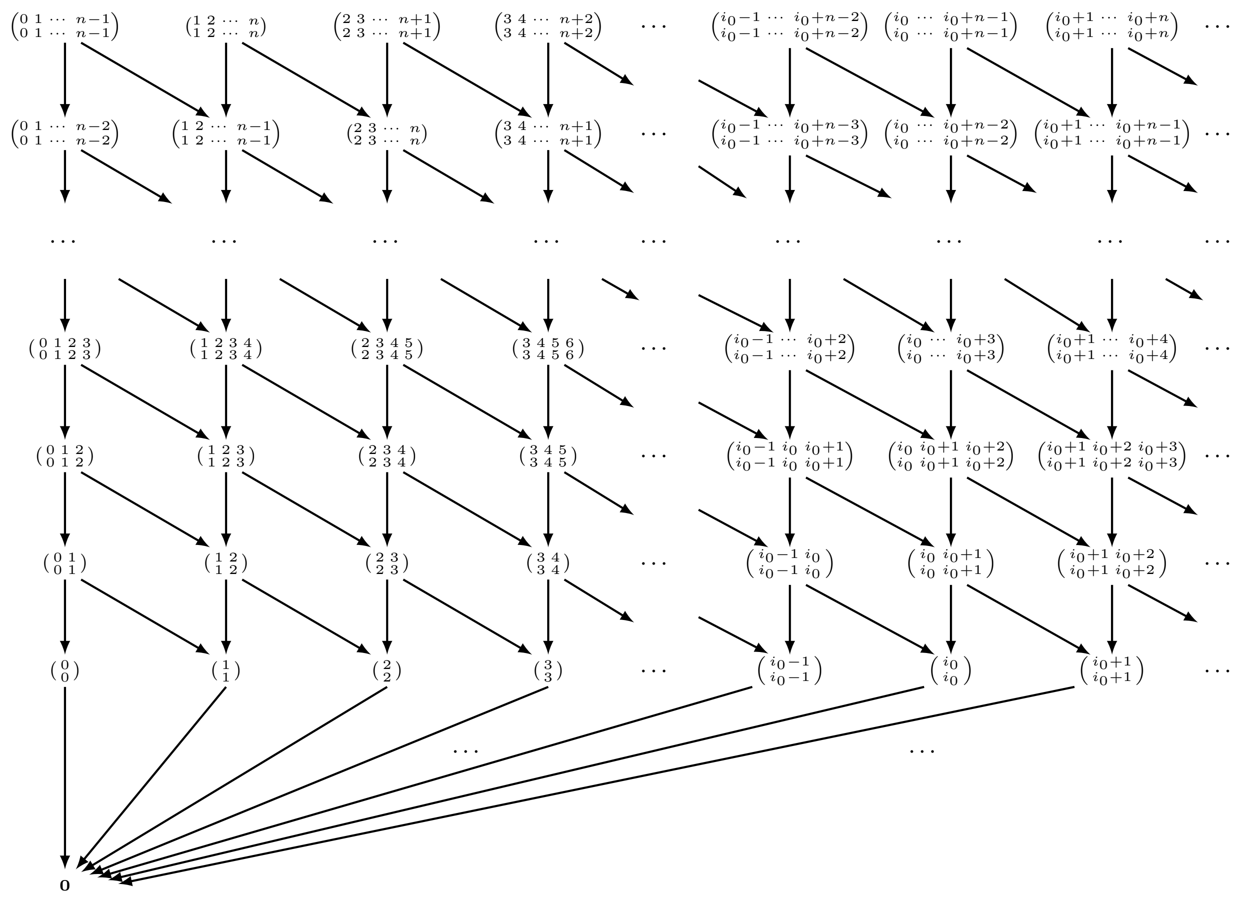

Рис. 3.1. Природний частковий порядок на напівґратці $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$

Теорема 3.1.6. *Нехай n – довільне натуральне число $\geqslant 2$. Для кожного ін'єктивного ендоморфізму $\mathfrak{a}\colon \mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) \to \mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ існує число $i_0 \in \omega$ таке, що $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_{i_0}$.*

Доведення. З леми 3.1.3 випливає, що $(\mathbf{0})\mathfrak{a} = \mathbf{0}$.

Очевидно, що

$$\mathfrak{M} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} i & i+1 & \cdots & i+n-1 \\ i & i+1 & \cdots & i+n-1 \end{smallmatrix}\right) : i \in \omega \right\}$$

є множиною усіх максимальних ідемпотентів напівґратки $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$, і, крім того, кожний максимальний ланцюг напівґратки $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ містить $n+1$ ідемпотент. Отже, отримуємо, що

$$L_0 = \left\{ \mathbf{0}, \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \ldots, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$

і

$$L_1 = \{\mathbf{0}, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \ldots, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right)\}$$

є максимальними ланцюгами в напівґратці $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$. Позаяк $\mathfrak{a}$ – ін'єктивний ендоморфізм напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, то з твердження 1.2.5(6) випливає, що гомоморфні образи $(L_0)\mathfrak{a}$ і $(L_1)\mathfrak{a}$ є максимальними ланцюгами в напівґратці $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$.

Приймемо

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{M}.$$

Позаяк

$$\operatorname{rank}\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right) = n-1, \left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right) \text{ і } \left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right),$$

то з означення природного часткового порядку на напівґратці $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ і твердження 1.2.5(6) випливає, що або

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-2 \\ i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-2 \end{smallmatrix}\right),$$

або

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right).$$

Припустимо, що

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-2 \\ i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-2 \end{smallmatrix}\right).$$

Позаяк $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{M}$, то $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}$, а тоді з означення природного часткового порядку на напівґратці $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ і з твердження 1.2.5(6) випливає, що

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0-1 & i_0 & \cdots & i_0+n-2 \\ i_0-1 & i_0 & \cdots & i_0+n-2 \end{smallmatrix}\right).$$

Знову з означення природного часткового порядку на напівґратці $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ і з твердження 1.2.5(6) отримуємо, що

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 & \cdots & n \\ 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0-1 & i_0 & \cdots & i_0+n-3 \\ i_0-1 & i_0 & \cdots & i_0+n-3 \end{smallmatrix}\right),$$

оскільки

$$\operatorname{rank}\left(\begin{smallmatrix} 2 & \cdots & n \\ 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right) = n-1 \quad \text{i} \quad \left(\begin{smallmatrix} 2 & \cdots & n \\ 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right).$$

Позаяк $\left(\begin{smallmatrix} 2 & \cdots & n \\ 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \end{smallmatrix}\right)$, то з вище наведених аргументів випливає, що

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0-2 & i_0-1 & \cdots & i_0+n-3 \\ i_0-2 & i_0-1 & \cdots & i_0+n-3 \end{smallmatrix}\right) \text{ i } \left(\begin{smallmatrix} 3 & \cdots & n+1 \\ 3 & \cdots & n+1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0-2 & i_0-1 & \cdots & i_0+n-4 \\ i_0-2 & i_0-1 & \cdots & i_0+n-4 \end{smallmatrix}\right).$$

Далі крок за кроком розширюємо описану вище процедуру, використовуючи означення природного часткового порядку на напівґратці $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ і за твердженням 1.2.5(6) отримуємо, що

$$\left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{i} \quad \left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right).$$

Позаяк $\mathfrak{a}$ – ін'єктивний ендоморфізм напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$,

$$\left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right)$$

і

$$\left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n \\ i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n \end{smallmatrix}\right)$$

в напівґратці $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$, то з твердження 1.2.5(6) випливає, що

$$\left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a}$$

і

$$\left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n \\ i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a}.$$

Однак

$$\left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)$$

– єдиний ідемпотент напівґратки $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$, який більший за ідемпотент

$$\left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right).$$

З отриманої суперечності випливає, що

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \neq \left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-2 \\ i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-2 \end{smallmatrix}\right),$$

а отже, отримуємо, що $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right)$.

З нерівності $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)$ випливає, що

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a},$$

а отже, з означення природного часткового порядку на напівґратці $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$, ін'єктивності ендоморфізму $\mathfrak{a}$, твердження 1.2.5(6) і рівності

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right)$$

випливає, що

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-2 \\ i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-2 \end{smallmatrix}\right).$$

Знову, оскільки

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{і} \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right),$$

отримуємо, що

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \quad \text{і} \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a}.$$

З наведених двох нерівностей і рівностей

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{і} \quad \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-2 \\ i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-2 \end{smallmatrix}\right)$$

випливає, що

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n-2 \\ i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n-2 \end{smallmatrix}\right).$$

Тепер, якщо повторимо описану вище процедуру крок за кроком, то отримаємо рівності

$$\begin{array}{ll}
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right), & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n \\ i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n \end{smallmatrix}\right), \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-2 \\ i_0 & i_0+1 & \cdots & i_0+n-2 \end{smallmatrix}\right), & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n-1 \\ i_0+1 & i_0+2 & \cdots & i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right), \\
\quad \cdots \qquad\qquad \cdots & \quad \cdots \qquad\qquad \cdots \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_0+1 \\ i_0 & i_0+1 \end{smallmatrix}\right), & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+1 & i_0+2 \\ i_0+1 & i_0+2 \end{smallmatrix}\right),
\end{array}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0 \\ i_0 \end{smallmatrix}\right), \qquad \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+1 \\ i_0+1 \end{smallmatrix}\right).$$

Таким чином, ми довели, що виконується початковий крок індукції.

Далі доведемо, що виконується крок індукції: якщо рівності

$$\begin{gathered}
\left(\begin{smallmatrix} p & p+1 & \cdots & p+n-1 \\ p & p+1 & \cdots & p+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} p+i_0 & p+i_0+1 & \cdots & p+i_0+n-1 \\ p+i_0 & p+i_0+1 & \cdots & p+i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right), \\
\left(\begin{smallmatrix} p & p+1 & \cdots & p+n-2 \\ p & p+1 & \cdots & p+n-2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} p+i_0 & p+i_0+1 & \cdots & p+i_0+n-2 \\ p+i_0 & p+i_0+1 & \cdots & p+i_0+n-2 \end{smallmatrix}\right), \\
\ldots \qquad\qquad \ldots \\
\left(\begin{smallmatrix} p & p+1 \\ p & p+1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} p+i_0 & p+i_0+1 \\ p+i_0 & p+i_0+1 \end{smallmatrix}\right), \\
\left(\begin{smallmatrix} p \\ p \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} p+i_0 \\ p+i_0 \end{smallmatrix}\right)
\end{gathered}$$

виконуються для числа $p \in \{0, 1, \ldots, k\}$, то вони виконуються і для $p = k + 1$.

За припущенням індукції маємо, що

$$\left(\begin{smallmatrix} k & k+1 & \cdots & k+n-1 \\ k & k+1 & \cdots & k+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} k+i_0 & k+i_0+1 & \cdots & k+i_0+n-1 \\ k+i_0 & k+i_0+1 & \cdots & k+i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right)$$

і

$$\left(\begin{smallmatrix} k & k+1 & \cdots & k+n-2 \\ k & k+1 & \cdots & k+n-2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} k+i_0 & k+i_0+1 & \cdots & k+i_0+n-2 \\ k+i_0 & k+i_0+1 & \cdots & k+i_0+n-2 \end{smallmatrix}\right).$$

Позаяк ендоморфізм $\mathfrak{a}$ – ін'єктивне відображення, то звідси, з нерівностей

$$\left(\begin{smallmatrix} k & k+1 & \cdots & k+n-2 \\ k & k+1 & \cdots & k+n-2 \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} k & k+1 & \cdots & k+n-1 \\ k & k+1 & \cdots & k+n-1 \end{smallmatrix}\right)$$

і

$$\left(\begin{smallmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \\ k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \end{smallmatrix}\right) \preccurlyeq \left(\begin{smallmatrix} k & k+1 & \cdots & k+n-1 \\ k & k+1 & \cdots & k+n-1 \end{smallmatrix}\right),$$

з означення природного часткового порядку на напівґратці $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$, твердження 1.2.5(6) випливає, що

$$\left(\begin{smallmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \\ k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} k+i_0+1 & k+i_0+2 & \cdots & k+i_0+n-1 \\ k+i_0+1 & k+i_0+2 & \cdots & k+i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right).$$

Знову, оскільки $\left(\begin{smallmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & k+n \\ k+1 & k+2 & \cdots & k+n \end{smallmatrix}\right)$ єдиний ідемпотент напівґратки $E(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$, який більший за ідемпотент $\left(\begin{smallmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \\ k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \end{smallmatrix}\right)$ і відмінний від ідемпотента $\left(\begin{smallmatrix} k & k+1 & \cdots & k+n-1 \\ k & k+1 & \cdots & k+n-1 \end{smallmatrix}\right)$, то з означення природного часткового порядку на напівґратці $E(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ і твердження 1.2.5(6) випливає, що

$$\left(\begin{smallmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & k+n \\ k+1 & k+2 & \cdots & k+n \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} k+i_0+1 & k+i_0+2 & \cdots & k+i_0+n \\ k+i_0+1 & k+i_0+2 & \cdots & k+i_0+n \end{smallmatrix}\right).$$

Далі з рівності

$$\left(\begin{smallmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \\ k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} k+i_0+1 & k+i_0+2 & \cdots & k+i_0+n-1 \\ k+i_0+1 & k+i_0+2 & \cdots & k+i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right)$$

і вище наведених аргументів випливає, що

$$\left(\begin{smallmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & k+n-2 \\ k+1 & k+2 & \cdots & k+n-2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} k+i_0+1 & k+i_0+2 & \cdots & k+i_0+n-2 \\ k+i_0+1 & k+i_0+2 & \cdots & k+i_0+n-2 \end{smallmatrix}\right),$$

і аналогічно поетапно отримуємо, що рівності

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & k+n \\ k+1 & k+2 & \cdots & k+n \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} &= \left(\begin{smallmatrix} k+i_0+1 & k+i_0+2 & \cdots & k+i_0+n \\ k+i_0+1 & k+i_0+2 & \cdots & k+i_0+n \end{smallmatrix}\right), \\
\left(\begin{smallmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \\ k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} &= \left(\begin{smallmatrix} k+i_0+1 & k+i_0+2 & \cdots & k+i_0+n-1 \\ k+i_0+1 & k+i_0+2 & \cdots & k+i_0+n-1 \end{smallmatrix}\right), \\
\cdots & \qquad \cdots \\
\left(\begin{smallmatrix} k+1 & k+2 \\ k+1 & k+2 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} &= \left(\begin{smallmatrix} k+i_0+1 & k+i_0+2 \\ k+i_0+1 & k+i_0+2 \end{smallmatrix}\right), \\
\left(\begin{smallmatrix} k+1 \\ k+1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{a} &= \left(\begin{smallmatrix} k+i_0+1 \\ k+i_0+1 \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

виконуються, а отже, доведено крок індукції.

Зафіксуємо довільний неідемпотентний елемент $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} a & a+1 & \cdots & a+m \\ b & b+1 & \cdots & b+m \end{smallmatrix}\right)$ напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, для деяких чисел $a, b \in \omega$ і $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Тоді

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & a+1 & \cdots & a+m \\ a & a+1 & \cdots & a+m \end{smallmatrix}\right) \quad \text{і} \quad \boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} b & b+1 & \cdots & b+m \\ b & b+1 & \cdots & b+m \end{smallmatrix}\right),$$

а отже, згідно з попередньою частиною доведення, отримуємо, що

$$(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-1})\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+a & i_0+a+1 & \cdots & i_0+a+m \\ i_0+a & i_0+a+1 & \cdots & i_0+a+m \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{і} \qquad (\boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{x})\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+b & i_0+b+1 & \cdots & i_0+b+m \\ i_0+b & i_0+b+1 & \cdots & i_0+b+m \end{smallmatrix}\right).$$

Позаяк $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ – інверсна піднапівгрупа симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_{\omega}$ над множиною ω, то робимо висновок, що

$$\operatorname{dom}((\boldsymbol{x})\mathfrak{a}) = \operatorname{dom}((\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-1})\mathfrak{a}) = \{i_0+a, i_0+a+1, \ldots, i_0+a+m\}$$

і

$$\operatorname{ran}((\boldsymbol{x})\mathfrak{a}) = \operatorname{ran}((\boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{x})\mathfrak{a}) = \{i_0 + b, i_0 + b + 1, \ldots, i_0 + b + m\}\,.$$

Тепер з означення напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ випливає, що

$$(\boldsymbol{x})\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+a & i_0+a+1 & \cdots & i_0+a+m \\ i_0+b & i_0+b+1 & \cdots & i_0+b+m \end{smallmatrix}\right).$$

За наслідком 3.1.2, $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_{i_0}$ – ендоморфізм напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, що і завершує доведення теореми. □

З леми 3.1.5 і теореми 3.1.6 випливає такий наслідок.

Наслідок 3.1.7. *Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ кожний автоморфізм напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є тотожнім відображенням напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$.*

Для довільного натурального числа n і довільних ін'єктивних ендоморфізмів $\mathfrak{e}_{i_1}$ і $\mathfrak{e}_{i_2}$ напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ прості обрахунки показують, що

$$\mathfrak{e}_{i_1} \circ \mathfrak{e}_{i_2} = \mathfrak{e}_{i_1+i_2} = \mathfrak{e}_{i_2} \circ \mathfrak{e}_{i_1}.$$

Звідси і з теореми 3.1.6 випливає така теорема.

Теорема 3.1.8. *Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ напівгрупа ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ ізоморфна напівгрупі $(\omega, +)$. Зокрема, група автоморфізмів напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ тривіальна.*

Позаяк за теоремою 2.1.5 для довільного числа $n \in \omega$ напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{I}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, то з наслідку 3.1.7 і теореми 3.1.8 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3.1.9. *Для довільного натурального числа n кожний автоморфізм напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_n}$ є тотожнім відображенням напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_n}$.*

Наслідок 3.1.10. *Для довільного натурального числа n напівгрупа ін'єктивний ендоморфізмів напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $(\omega, +)$. Зокрема, група автоморфізмів напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_n}$ тривіальна.*

3.2. Ендоморфізми напівгрупи $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\lambda$

Для ненульового кардинала λ позначимо через $\mathscr{S}_\lambda$ групу бієктивних перетворень кардинала λ і через $\mathscr{I\!T}_\lambda$ – напівгрупу ін'єктивних перетворень кардинала λ.

Теорема 3.2.1. *Напівгрупа $\mathfrak{End}^{\mathrm{inj}}(\mathscr{B}_\lambda)$ ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\lambda$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{I\!T}_\lambda$, і більше того, група $\mathfrak{Aut}(\mathscr{B}_\lambda)$ автоморфізмів напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$ ізоморфна групі $\mathscr{S}_\lambda$.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{e}$ – ін'єктивний ендоморфізм напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$. Тоді $(\mathbf{0})\mathfrak{e}=\mathbf{0}$ і звуження ендоморфізму $\mathfrak{e}$ на множину $E(\mathscr{B}_\lambda)\setminus\{\mathbf{0}\}$ є ін'єктивним відображенням, тобто існує ін'єктивне перетворення $\mathfrak{i}_\mathfrak{e}\colon\lambda\to\lambda$ таке, що $(a,a)\mathfrak{e}=((a)\mathfrak{i}_\mathfrak{e},(a)\mathfrak{i}_\mathfrak{e})$ для довільного елемента $a\in\lambda$. Очевидно, що $\mathfrak{i}_\mathfrak{e}\in\mathscr{I\!T}_\lambda$. Позаяк композиція $\mathfrak{e}_1\circ\mathfrak{e}_2$ двох ін'єктивних ендоморфізмів $\mathfrak{e}_1$ і $\mathfrak{e}_2$ напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$ є ін'єктивним ендоморфізмом, то

$$(a,a)(\mathfrak{e}_1\circ\mathfrak{e}_2)=((a)\mathfrak{i}_{\mathfrak{e}_1},(a)\mathfrak{i}_{\mathfrak{e}_1})\mathfrak{e}_2=(((a)\mathfrak{i}_{\mathfrak{e}_1})\mathfrak{i}_{\mathfrak{e}_2},((a)\mathfrak{i}_{\mathfrak{e}_1})\mathfrak{i}_{\mathfrak{e}_2}),$$

а отже, $\mathfrak{i}_{\mathfrak{e}_1\circ\mathfrak{e}_2}=\mathfrak{i}_{\mathfrak{e}_1}\circ\mathfrak{i}_{\mathfrak{e}_2}$ є ін'єктивним перетворенням крадинала λ. Звідси випливає, що так визначене відображення

$$\mathfrak{I}\colon\mathfrak{End}^{\mathrm{inj}}(\mathscr{B}_\lambda)\to\mathscr{I\!T}_\lambda,\mathfrak{I}\colon\mathfrak{e}\mapsto\mathfrak{i}_\mathfrak{e}$$

є гомоморфізмом. Далі доведемо, що гомоморфізм $\mathfrak{I}$ є сюр'єктивним відображенням. Зафіксуємо довільне ін'єктивне відображення $\mathfrak{i}\colon\lambda\to\lambda$. Ми стверджуємо, що відображення $\mathfrak{e}_\mathfrak{i}\colon\mathscr{B}_\lambda\to\mathscr{B}_\lambda$ визачене за формулами

$$(a,b)\mathfrak{e}_\mathfrak{i}=((a)\mathfrak{i},(b)\mathfrak{i})\quad\text{для всіх}\quad a,b\in\lambda\qquad\text{і}\qquad(\mathbf{0})\mathfrak{e}_\mathfrak{i}=\mathbf{0},$$

є ін'єктивним ендоморфізмом напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$. Справді, оскільки відображення $\mathfrak{i}\colon\lambda\to\lambda$ ін'єктивне, то

$$(a,b)\mathfrak{e}_\mathfrak{i}\cdot(c,d)\mathfrak{e}_\mathfrak{i}=((a)\mathfrak{i},(b)\mathfrak{i})\cdot((c)\mathfrak{i},(d)\mathfrak{i})=$$

$$= \begin{cases} ((a)\mathfrak{i},(d)\mathfrak{i}), & \text{якщо} \quad (b)\mathfrak{i}=(c)\mathfrak{i}; \\ \mathbf{0}, & \text{якщо} \quad (b)\mathfrak{i}\neq(c)\mathfrak{i} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (a,d)\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}, & \text{якщо} \quad b=c; \\ \mathbf{0}, & \text{якщо} \quad b\neq c \end{cases} =$$

$$= ((a,b)\cdot(c,d))\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}},$$

і

$$\begin{aligned} (a,b)\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}\cdot(\mathbf{0})\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}} &= (a,b)\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}=(\mathbf{0})\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}= \\ &= ((a,b)\cdot\mathbf{0})\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}; \\ (\mathbf{0})\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}\cdot(a,b)\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}} &= \mathbf{0}\cdot(a,b)\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}=\mathbf{0}=(\mathbf{0})\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}= \\ &= (\mathbf{0}\cdot(a,b))\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}; \\ (\mathbf{0})\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}\cdot(\mathbf{0})\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}} &= \mathbf{0}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}=(\mathbf{0})\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}= \\ &= (\mathbf{0}\cdot\mathbf{0})\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}, \end{aligned}$$

а отже, $\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}$ – ендоморфізм напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$. Очевидно, що з ін'єктивності відображення $\mathfrak{i}\colon\lambda\to\lambda$ випливає, що ендоморфізм $\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}$ є також ін'єктивним відображенням.

Легко доводиться, якщо $\mathfrak{e}$ – автоморфізм напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$, то відображення $\mathfrak{i}_{\mathfrak{e}}\colon\lambda\to\lambda$ бієктивне, і з бієктивності відображення $\mathfrak{i}\colon\lambda\to\lambda$ випливає, що $\mathfrak{e}_{\mathfrak{i}}$ – автоморфізм напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$. Це завершує доведення останнього твердження. □

Нагадаємо [62], що напівгрупа S називається напівгрупою з *лівим* (*правим*) *скороченням*, якщо для усіх елементів $a,b,c\in S$, з рівності $ab=ac$ ($ba=ca$) випливає, що $b=c$. Очевидно, що напівгрупа $\mathscr{I\!T}_\lambda$ (а отже, напівгрупа $\mathfrak{End}^{\mathrm{inj}}(\mathscr{B}_\lambda)$) є напівгрупою з лівим скороченням, але напівгрупа $\mathscr{I\!T}_\lambda$ не є напівгрупою з правим скороченням.

Добре відомо, що напівгрупа $\lambda{\times}\lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\lambda$ є конгруенц-простою, тобто напівгрупа $\mathscr{B}_\lambda$ має тільки дві конгруенції: тотожню та універсальну. Звідси випливає, що кожний ендоморфізм напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$ є або ін'єктивним (тобто, є ізоморфізмом "в"), або є анулюючим.

Через $\mathfrak{End}^{\mathrm{ann}}(\mathscr{B}_\lambda)$ позначимо напівгрупу всіх анулюючих ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$.

Очевидно, що для кожного анулюючого ендоморфізму $\mathfrak{a}$ напівгрупи $\mathscr{B}_\lambda$ існує ідемпотент $x \in \mathscr{B}_\lambda$ такий, що $(y)\mathfrak{a} = x$ для всіх $y \in \mathscr{B}_\lambda$. Надалі такий ендоморфізм позначатимемо через $\mathfrak{a}_x$. Звідси випливає, що

$$\mathfrak{End}^{\mathrm{ann}}(\mathscr{B}_\lambda) = \{\mathfrak{a}_{\mathbf{0}}\} \cup \left\{\mathfrak{a}_{(a,a)} \colon a \in \lambda\right\}.$$

Очевидно, що множина $\mathfrak{End}^{\mathrm{ann}}(\mathscr{B}_\lambda)$ стосовно операції композиції відображень є напівгрупою з правим нульовим множенням, напівгрупа $\mathfrak{End}^{\mathrm{ann}}(\mathscr{B}_\lambda)$ є простою зліва, а отже, є простою.

Для довільних $\mathfrak{e} \in \mathfrak{End}^{\mathrm{inj}}(\mathscr{B}_\lambda)$ і $\mathfrak{a}_x \in \mathfrak{End}^{\mathrm{ann}}(\mathscr{B}_\lambda)$ маємо, що

$$\mathfrak{e} \circ \mathfrak{a}_x = \mathfrak{a}_x \qquad \text{і} \qquad \mathfrak{a}_x \circ \mathfrak{e} = \mathfrak{a}_{(x)\mathfrak{e}}.$$

Наведені вище аргументи підсумуємо в такій теоремі.

Теорема 3.2.2. *Напівгрупа $\mathfrak{End}(\mathscr{B}_\lambda)$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\lambda$ є диз'юнктним об'єднанням напівгруп $\mathfrak{End}^{\mathrm{inj}}(\mathscr{B}_\lambda)$ і $\mathfrak{End}^{\mathrm{ann}}(\mathscr{B}_\lambda)$. Більше того, напівгрупа $\mathfrak{End}^{\mathrm{inj}}(\mathscr{B}_\lambda)$ є напівгрупою з лівим скороченням і напівгрупа $\mathfrak{End}^{\mathrm{ann}}(\mathscr{B}_\lambda)$ є мінімальним ідеалом напівгрупи $\mathfrak{End}(\mathscr{B}_\lambda)$, яка є напівгрупою з правим нульовим множенням.*

3.3. Ендоморфізми апівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, породжені конгуенціями Ріса

За теоремою 2.1.5 для довільного числа $n \in \omega$ напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ стосовно відображення $\mathfrak{I}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \to \mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, яке визначається за формулами $(\mathbf{0})\mathfrak{I} = \mathbf{0}$ і

$$(i, j, [0; k])\mathfrak{I} = \left(\begin{smallmatrix} i & i+1 & \cdots & i+k \\ j & j+1 & \cdots & j+k \end{smallmatrix}\right).$$

Надалі ми досліджуватимемо ендоморфізми напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$.

За теоремою 2.1.11 для довільного числа $n \in \omega$ на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ (а отже, на напівгрупі $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$) існують лише конгруенції Ріса. Більше того, за теоремою 2.1.12 для будь-якого гомоморфізму $\mathfrak{h}$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ в напівгрупу S гомоморфний образ $(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n})\mathfrak{h}$ є або ізоморфним напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_k}$ для деякого $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, або є одноелементною множиною. Також лема 3.1.3 стверджує, якщо n – довільне натуральне число й $\mathfrak{a}$ – довільний неанулюючий ендоморфізм напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, то $(\mathbf{0})\mathfrak{a} = \mathbf{0}$.

За твердженням 2.1.9 для невід'ємного цілого числа n відображення $\mathfrak{h}_0\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ визначеного за формулами $(\mathbf{0})\mathfrak{h}_0 = \mathbf{0}$ і

$$(i, j, [0; k])\mathfrak{h}_0 = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{якщо } k = 0; \\ (i, j, [0; k-1]), & \text{якщо } k \in \{1, \ldots, n\}, \end{cases}$$

є ендоморфізмом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Використовуючи ізоморфізм $\mathfrak{I}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n} \to \mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, отримаємо, що ендоморфізм $\mathfrak{h}_0$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ породжує ендоморфізм $\mathfrak{r}_1\colon \mathscr{I}_{\omega}^{m+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) \to \mathscr{I}_{\omega}^{m}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ $(m \in \mathbb{N})$, який визначається за формулами

$$(\mathbf{0})\mathfrak{r}_1 = \mathbf{0}, \quad \left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{r}_1 = \mathbf{0},$$

$$\left(\begin{smallmatrix} i & i+1 \\ j & j+1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{r}_1 = \left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right), \quad \ldots \quad ,$$

$$\left(\begin{smallmatrix} i & \cdots & i+k-1 & i+k \\ j & \cdots & j+k-1 & j+k \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{r}_1 = \left(\begin{smallmatrix} i & \cdots & i+k-1 \\ j & \cdots & j+k-1 \end{smallmatrix}\right)$$

для всіх чисел $i, j \in \omega$ і $k \in \{1, \ldots, m\}$. Очевидно, що так визначений ендоморфізм $\mathfrak{r}_1$ напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^m(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ породжується конгруенцією Ріса $\mathfrak{C}_{\mathfrak{r}_1}$, яка породжена ідеалом $\mathscr{I}_\omega^1(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$. Також для числа $p \in \{1, \ldots, m\}$ відображення $\mathfrak{r}_p = \underbrace{\mathfrak{r}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{r}_1}_{p-\text{разів}}$ є ендоморфізмом напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^m(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ і ендоморфізм $\mathfrak{r}_p$ породжується конгруенцією Ріса $\mathfrak{C}_{\mathfrak{r}_p}$, яка породжена ідеалом $\mathscr{I}_\omega^p(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^m(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$. Надалі для числа $p \in \{1, \ldots, m\}$ вище визначений ендоморфізм $\mathfrak{r}_p$ називатимемо *p-канонічним ендоморфізмом Ріса* напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^m(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$.

Далі ми будемо досліджувати ендоморфізми напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ для довільного натурального числа n.

За наслідком 3.1.2 для довільного натурального числа n і довільного числа $i_0 \in \omega$ відображення $\mathfrak{e}_{i_0} \colon \mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) \to \mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ визначене за формулами $(\mathbf{0})\mathfrak{e}_{i_0} = \mathbf{0}$ і

$$\left(\begin{smallmatrix} i & i+1 & \cdots & i+k \\ j & j+1 & \cdots & j+k \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{e}_{i_0} = \left(\begin{smallmatrix} i_0+i & i_0+i+1 & \cdots & i_0+i+k \\ i_0+j & i_0+j+1 & \cdots & i_0+j+k \end{smallmatrix}\right), \qquad k \in \{0, \ldots, n-1\},$$

є ендоморфізмом напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, і більше того, цей ендоморфізм є ін'єктивним. Очевидно, що для довільного числа $i_0 \in \omega$ ендоморфізм $\mathfrak{e}_{i_0}$ породжується одиничною конгруенцією на напівгрупі $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$. Також за теоремою 3.1.6 для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ для кожного ін'єктивного ендоморфізму $\mathfrak{a} \colon \mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) \to \mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ існує число $i_0 \in \omega$ таке, що $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_{i_0}$.

Зафіксуємо довільне число $i_0 \in \omega$. Тоді отримуємо, що

$$\begin{gathered}
((\mathbf{0})\mathfrak{r}_1)\mathfrak{e}_{i_0} = (\mathbf{0})\mathfrak{e}_{i_0} = \mathbf{0}, \\
\left(\left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{r}_1\right)\mathfrak{e}_{i_0} = (\mathbf{0})\mathfrak{e}_{i_0} = \mathbf{0}, \\
\left(\left(\begin{smallmatrix} i & i+1 \\ j & j+1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{r}_1\right)\mathfrak{e}_{i_0} = \left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{e}_{i_0} = \left(\begin{smallmatrix} i+i_0 \\ j+i_0 \end{smallmatrix}\right), \\
\ldots \qquad\qquad \ldots, \\
\left(\left(\begin{smallmatrix} i & \cdots & i+k-1 & i+k \\ j & \cdots & j+k-1 & k+k \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{r}_1\right)\mathfrak{e}_{i_0} = \left(\begin{smallmatrix} i & \cdots & i+k-1 \\ j & \cdots & j+k-1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{e}_{i_0} = \left(\begin{smallmatrix} i+i_0 & \cdots & i+k-1+i_0 \\ j+i_0 & \cdots & j+k-1+i_0 \end{smallmatrix}\right)
\end{gathered}$$

і

$$
\begin{gathered}
((\mathbf{0})\mathfrak{e}_{i_0})\mathfrak{r}_1 = (\mathbf{0})\mathfrak{r}_1 = \mathbf{0},\\
\left(\left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{e}_{i_0}\right)\mathfrak{r}_1 = \left(\begin{smallmatrix} i+i_0 \\ j+i_0 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{r}_1 = \mathbf{0},\\
\left(\left(\begin{smallmatrix} i & i+1 \\ j & j+1 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{e}_{i_0}\right)\mathfrak{r}_1 = \left(\begin{smallmatrix} i+i_0 & i+1+i_0 \\ j+i_0 & j+1+i_0 \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{r}_1 = \left(\begin{smallmatrix} i+i_0 \\ j+i_0 \end{smallmatrix}\right),\\
\ldots \qquad\qquad\qquad \ldots,\\
\left(\left(\begin{smallmatrix} i & \cdots & i+k-1 & i+k \\ j & \cdots & j+k-1 & k+k \end{smallmatrix}\right)\mathfrak{e}_{i_0}\right)\mathfrak{r}_1 = \begin{pmatrix} i+i_0 & \cdots & i+k-1+i_0 & i+k+i_0 \\ j+i_0 & \cdots & j+k-1+i_0 & k+k+i_0 \end{pmatrix}\mathfrak{r}_1 = \begin{pmatrix} i+i_0 & \cdots & i+k-1+i_0 \\ j+i_0 & \cdots & j+k-1+i_0 \end{pmatrix}
\end{gathered}
$$

для всіх чисел $i, j \in \omega$ і $k \in \{1, \ldots, n\}$. Звідси випливає рівність

$$\mathfrak{e}_{i_0} \circ \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1 \circ \mathfrak{e}_{i_0}.$$

Тоді з означення p-канонічного ендоморфізму Ріса $\mathfrak{r}_1$ напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ випливає лема 3.3.1.

Лема 3.3.1. *Нехай n – натуральне число $\geqslant 2$. Тоді для довільних чисел $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ та $i_0 \in \omega$ p-канонічний ендоморфізм Ріса $\mathfrak{r}_1$ та ін'єктивний ендоморфізм $\mathfrak{e}_{i_0}$ напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ комутують, тобто*

$$\mathfrak{e}_{i_0} \circ \mathfrak{r}_p = \mathfrak{r}_p \circ \mathfrak{e}_{i_0}.$$

Через $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ позначимо напівгрупу всіх ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$. Визначимо

$$\mathfrak{End}^1(\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})) = \left\{\mathfrak{a} \in \mathfrak{End}(\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})) | (\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{I}_\omega^{1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})\right\}.$$

Доведемо, що множина $\mathfrak{End}^1(\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ є ідеалом напівгрупи $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$. Справді, нехай $\mathfrak{b} \in \mathfrak{End}(\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ і $\mathfrak{a} \in \mathfrak{End}^1(\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$. Тоді для довільного елемента $\alpha \in \mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ з означення напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ випливає, що

$$(\alpha)(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}) \in ((\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a})\mathfrak{b} \subseteq (\mathscr{I}_\omega^{1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{b} \subseteq \mathscr{I}_\omega^{1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}),$$

і

$$(\alpha)(\mathfrak{b} \circ \mathfrak{a}) \in ((\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{b})\mathfrak{a} \subseteq (\mathscr{I}_\omega^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{I}_\omega^{1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}).$$

Нехай $\mathfrak{a} \in \mathfrak{End}^1(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$. За теоремами 2.1.5 і 2.1.12 гомоморфний образ $(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a}$ ізоморфний напівгрупі $\mathscr{I}_\omega^1(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, яка ізоморфна напівгрупі $\omega \times \omega$-матричних одиниць $\mathscr{B}_\omega$. Звідси випливає, що існує ізоморфізм

$$\mathfrak{e}\colon \mathscr{I}_\omega^1(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) \to (\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a}.$$

Тоді отримуємо, що $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_{n-1} \circ \mathfrak{e}$, де $\mathfrak{r}_{n-1}$ – $(n-1)$-канонічний ендоморфізм Ріса напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$.

Позначимо

$$\mathfrak{End}^*(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})) = \mathfrak{End}(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})) \setminus \mathfrak{End}^1(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})).$$

Очевидно, що $\mathfrak{a} \in \mathfrak{End}^*(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ тоді і лише тоді, коли

$$(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a} \cap (\mathscr{I}_\omega^2(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) \setminus \mathscr{I}_\omega^1(\overrightarrow{\mathrm{conv}})) \neq \varnothing.$$

Нехай $\mathfrak{b} \in \mathfrak{End}^*(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$. З теорем 2.1.5 і 2.1.12 і рівності $|\operatorname{ran}\mathfrak{b}| = k$ випливає, що образ $(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{b}$ ізоморфний напівгрупі $\mathscr{I}_\omega^k(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ для деякого числа $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Тоді існує ізоморфізм

$$\mathfrak{e}_{i_0}\colon \mathscr{I}_\omega^k(\overrightarrow{\mathrm{conv}}) \to (\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{b}$$

такий, що

$$(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{b} = (\mathscr{I}_\omega^k(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{e}_{i_0}.$$

Отже, $\mathfrak{b} = \mathfrak{e}_{i_0} \circ \mathfrak{r}_{n-k}$, де $\mathfrak{r}_{n-k}$ є $(n-k)$-канонічним ендоморфізмом Ріса напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$.

З вище наведених аргументів випливає така теорема.

Теорема 3.3.2. *Напівгрупа $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є диз'юнктним об'єднанням множини $\mathfrak{End}^*(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ та ідеалу $\mathfrak{End}^1(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$. Більше того,*

- $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_{n-1} \circ \mathfrak{e}$ *для довільного ендоморфізму* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{End}^*(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$;
- $\mathfrak{b} = \mathfrak{e}_{i_0} \circ \mathfrak{r}_{n-k}$ *для довільного ендоморфізму* $\mathfrak{b} \in \mathfrak{End}^1(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$.

Легко бачити, що для довільних p_1- і p_2-канонічних ендоморфізмів Ріса $\mathfrak{r}_{p_1}$ і $\mathfrak{r}_{p_2}$ напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ маємо, що

$$\mathfrak{r}_{p_1} \circ \mathfrak{r}_{p_2} = \mathfrak{r}_{p_1+p_2} = \mathfrak{r}_{p_2} \circ \mathfrak{r}_{p_1},$$

і більше того, якщо $p_1 + p_2 \geqslant n$, то $\mathfrak{r}_{p_1} \circ \mathfrak{r}_{p_2}$ є анулюючим ендоморфізмом напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$, тобто $(\alpha)(\mathfrak{r}_{p_1} \circ \mathfrak{r}_{p_2}) = \mathbf{0}$, для всіх елементів $\alpha \in \mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$. Звідси випливає таке твердження.

Твердження 3.3.3. *Для довільного натурального числа n, напівгрупа p-канонічних ендоморфізмів Ріса напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ ізоморфна напівгрупі $(\omega_n, \dot{+})$.*

За теоремою 3.1.8 для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ напівгрупа ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ ізоморфна напівгрупі $(\omega, +)$.

Нехай $I_\omega^0 = \{(0, j) \mid j \in \omega\}$ – підмножина прямого добутку напівгруп $(\omega_{n-1}, \dot{+})$ і $(\omega, +)$. Очевидно, що I_ω^0 – ідеал напівгрупи $(\omega_{n-1}, \dot{+}) \times (\omega, +)$.

Звідси випливає така теорема.

Теорема 3.3.4. *Для довільного натурального числа n фактор-напівгрупа $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))/\mathfrak{End}^1(\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ ізоморфна фактор-напівгрупі Ріса*

$$((\omega_{n-1}, \dot{+}) \times (\omega, +))/I_\omega^0.$$

3.4. Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджуються ендоморфізми біциклічного напівгрупового розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_n$ породжена множиною $\{0, 1, \ldots, n\}$ та інверсної напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leqslant)$ рангу $\leqslant n$.

Підрозділ 3.1 присвячений описанню ін'єктивних ендоморфізмів інверсної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$. Зокрема, доведено, що напівгрупа ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ є ізоморфною напівгрупі $(\omega, +)$. У підрозділі 3.2 досліджується структура напівгрупи $\mathfrak{End}(\mathscr{B}_{\lambda})$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda{\times}\lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_{\lambda}$.

Підрозділ 3.3 присвячений дослідженню напівгрупи $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ за модулем її ідеала $\mathfrak{End}^{1}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$, який складається з таких елементів $\mathfrak{a}$, що образ $(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))\mathfrak{a}$ ізоморфний напівгрупі $\omega \times \omega$-матричних одиниць. Зокрема, доведено, що напівгрупа $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є диз'юнктним об'єднанням множини $\mathfrak{End}^{*}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ та ідеалу $\mathfrak{End}^{1}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано такі результати:

1. Описано алгебричні властивості біциклічного розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, породженого скінченним інтервалом $[0,n]$, зокрема описано відношення Ґріна на цій напівгрупі (твердження 2.1.1). Доведено, що відношення Ґріна $\mathscr{D}$ і $\mathscr{J}$ збігаються на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$.
2. Доведено, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів множини $(\omega, \leqslant)$ рангу $\leqslant n+1$ (теорема 2.1.5).
3. Доведено, що на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ існують лише конгруенції Ріса (теорема 2.1.11).
4. Описано близькі до компактних трансляційно-неперервні T_1-топології на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ (теорема 2.2.4).
5. Описано наріст алгебричної структури при топологічному замиканні напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ в T_1-напівтопологічній напівгрупі S, яка містить її як власну піднапівгрупу (твердження 2.2.6).
6. Описано напівгрупу ін'єктивних ендоморфізмів інверсної напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ (теорема 3.1.8). Зокрема, доведено, що напівгрупа ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $(\omega, +)$ (наслідок 3.1.10).
7. Описано структуру напівгрупи $\mathfrak{End}(\mathscr{B}_{\lambda})$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathscr{B}_{\lambda}$ (теорема 3.2.2).
8. Описано структуру напівгрупи $\mathfrak{End}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ за модулем ідеала $\mathfrak{End}^{1}(\mathscr{I}_{\omega}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{conv}}))$ (теорема 3.3.4).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айзенштат, А. Я.: Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейно упорядоченного множества. Сиб. матем. журн. **3** (2), 161–169 (1962).
2. Айзенштат, А. Я.: Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств. Уч. зап. Ленинградского гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена **387**, 3–11 (1968).
3. Вагнер, В. В.: К теорнн частнчных преобразований. ДАН СССР **84**, 653–656 (1952).
4. Вагнер, В. В.: Обощенные группы. ДАН СССР **84**, 1119–1122 (1952).
5. Вагнер, В. В.: Теория обобщенных груд и обобщенных групп. Матем. сб. **32**(**74**) (3), 545–632 (1953).
6. Вагнер, В. В.: Полугруппы частичных преобразований с симметричным отношением транзитивности. Изв. вузов. Матем. **1**, 81–88 (1957).
7. Вагнер, В. В.: Основания дифференциальной геометрии и современная алгебра. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961, т. 1. Л., АН СССР, 17–29 (1963).
8. Валуцэ, И. И.: Об эндоморфизмах одного класса универсальных алгебр. В сб. «Материалы докл. 1-й Научно-техн. конференции Кишинавск. политехи, ин-та.», Кишинев, 90–91 (1965).
9. Гаврилов, М.: Върху две полугрупи от преобразования на топологически пространства. Годишшж Софийск. ун-та. Матем. фак., 1962—1963 **57**, 377–380 (1964).
10. Глускин, Л. М.: Полугруппы изотонных преобразований УМН. **16** (5), 157–162 (1961).
11. Гутік, О., Михаленич, М.: Про одне узагальнення біциклічного моно-

їда. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **90**, 5–19 (2020).

12. Гутік, О., Михаленич, М.: Про групові конгруенції на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ та її гомоморфні ретракти у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}$ складається з непорожніх індуктивних підмножин у ω. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **91**, 5–27 (2021).
13. Гутік, О., Михаленич, М.: Про автоморфізми напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ у випадку сім'ї $\mathscr{F}$ непорожніх індуктивних підмножин у ω. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **93**, 54–65 (2022).
14. Гутік, О., Прохоренкова, О.: Про гомоморфізми біциклічних розширень архімедових лінійно впорядкованих групп. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **93**, 42–53 (2022).
15. Гутік, О., Прохоренкова, О., Сех, Д.: Про ендоморфізми біциклічної напівгрупи та розширеної біциклічної напівгрупи. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **92**, 5–16 (2021).
16. Гутік, О., Савчук, А.: Про напівгрупу $\mathbf{ID}_{\infty}$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **83**, 5–19 (2017).
17. Гутік, О., Савчук, А.: Напівгрупа часткових коскінченних ізометрій натуральних чисел. Буковинський мат. журн. **4** (1–2), 42–51 (2018).
18. Дорошенко, В. В.: Про напівгрупи перетворень зліченних лінійно упорядкованих множин, які зберігають порядок. Укр. мат. журн. **61** (6), 723–732 (2009).
19. Калманович, А. М.: Півгрупи часткових ендоморфізмів графа. Доповіді АН УРСР **2**, 147–450 (1965).
20. Лисковец, В. А., Фейнберг, В. З.: Об автоматных отображениях. Весці АН БССР. Сер. фіз.-матем. н., Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. н. **3**, 55–63 (1965).
21. Ляпин, Е. С.: Полугруппы. Физматтиз, Москва (1960).
22. Мальцев, А.: О включении ассоциативных систем в группы. Матем. сб. **48** (2), 331–336 (1939).

23. Мальцев, А.: О включении ассоциативных систем в группы, II. Матем. сб. **50** (2), 251—264 (1940).

24. Мальцев, А. И.: К истории алгебры в СССР за первые 25 лет. Алгебра и логика **10** (1), 103–118 (1971).

25. Рябухо, О. М., Парконєн, Н. С.: Дослідження А. К. Сушкевича з теорії напівгруп перетворень над нескінченними множинами. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету Донбаського державного педагогічного університету **2**, 77–81 (2012).

26. Савчук, А.: Про гомоморфні ретракти моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **88**, 22–31 (2019).

27. Сушкевич, А. К.: Теория действия как общая теория групп. Диссертация, Воронеж (1922).

28. Сушкевич, А. К.: Про деякі властивост1 одного типу узагальнених груп. Учен. зап. ХДУ **2–3**, 23–25 (1935).

29. Сушкевич, А. К.: Про розширення півгрупи на всю групу. Зап. Харьк. матем. об-ва, сер. **4** (12), 81–87 (1935).

30. Сушкевич, А. К.: Системы с одним действием. Труды 1-го Всесоюзн. съезда математиков в Харькове, 1930 г., ОНТИ, Москва-Ленинград, 231–239 (1936).

31. Сушкевич, А. К.: Дослідження в галузі узагальнених груп. Учені записки Харк. ун-ту (6–7), 49–52 (1936).

32. Сушкевич, А. К.: Про деяш типии особливих матриць. Учені записки Харк. ун-ту (10), 5–16 (1937).

33. Сушкевич, А. К.: Теория обобщенных групп. ДНТВУ, Харьков—Киев (1937).

34. Сушкевич, А. К.: Обобщенные группы особенных матриц. Зап. НИИМ ХГУ и Харьк. матем. об-ва, сер. **4** (16), 3–11 (1939).

35. Сушкевич, А. К.: Узагальнет групи деяких титв нескшченних матриць. Зап. НИИМ ХГУ и Харьк. матем. об-ва, сер. **4** (16), 115–120

(1939).

36. Сушкевич, А. К.: Об одном типе обобщенных полугрупп. Зап. НИИМ ХГУ и Харьк. матем. об-ва, сер. **4** (17), 19–28 (1940).
37. Сушкевич, А. К.: Исследования о бесконечных подстановках. Зап. НИИМ ХГУ и Харьк. матем. об-ва, сер. **4** (18), 27–37 (1940).
38. Сушкевич, А. К.: Исследования о бесконечных подстановках. Сборник посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве, под. ред. О. Ю. Шмидта, Б. Н. Делоне, Н. Г. Чеботарева. Москва-Ленинград, 245–255 (1940).
39. Сушкевич, А. К.: Числовые области целости без единицы. Научные зап. Харьк. инст. сов. торговли **2**, 131–139 (1941).
40. Сушкевич, А. К.: Прямые произведения некоторых типов обобщенных групп. Материалы научно-иссл. работы каф. матем. Харьк. инст. сов. торговли, 11–14 (1941).
41. Шнеперман, Л. Б.: Полугруппы непрерывных преобразований топологических пространств. Сибирск. матем. ж. **6** (1), 221–229 (1965).
42. Шнеперман, Л. Б.: Полугруппы непрерывных преобразований замкнутых множеств числовой прямой. Изв. высш. учебн. заведений. Математика **6** 166–175 (1965).
43. Abel, N. H.: Untersuchung der Funktionen zweier unabhängigen veränderlichen Größen x und y, wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f[z, f(x, y)]$ eine symmetrische Funktion von x, y und z ist. J. Reine Angew. Math. **1**, 11–15 (1826).
44. Andersen, O.: Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen. PhD Thesis, Hamburg (1952).
45. Anderson, L. W., Hunter, R. P., Koch, R. J.: Some results on stability in semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. **117**, 521–529 (1965).
46. Banakh, T., Bardyla, S.: Characterizing chain-compact and chain-finite topological semilattices. Semigroup Forum **98** (2), 234–250 (2019).

47. Banakh, T., Bardyla, S.: Completeness and absolute H-closedness of topological semilattices. Topology Appl. **260**, 189–202 (2019).
48. Banakh, T., Bardyla, S.: On images of complete topologized subsemilattices in sequential semitopological semilattices. Semigroup Forum **100** (3), 662–670 (2020).
49. Banakh, T., Bardyla, S.: Complete topologized posets and semilattices. Topol. Proc. **57**, 177–196 (2021).
50. Banakh, T., Bardyla, S.: Characterizing categorically closed commutative semigroups. J. Algebra **591**, 84–110 (2022).
51. Banakh, T., Bardyla, S., Ravsky, A.: The closedness of complete subsemilattices in functionally Hausdorff semitopological semilattices. Topology Appl. **267**, 106874 (2019).
52. Banakh, T., Dimitrova, S., Gutik, O.: The Rees-Suschkewitsch Theorem for simple topological semigroups. Mat. Stud. **31** (2), 211–218 (2009).
53. Banakh, T., Dimitrova, S., Gutik, O.: Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups. Topology Appl. **157** (18), 2803–2814 (2010).
54. Bardyla, S.: Embedding of graph inverse semigroups into CLP-compact topological semigroups. Topology Appl. **272**, 107058 (2020).
55. Bardyla, S.: On topological McAlister semigroups. J. Pure Appl. Algebra **227** (4), 107274 (2023).
56. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological polycyclic monoid. Algebra Discr. Math. **21** (2), 163–183 (2016).
57. Bertman, M. O., West, T. T.: Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups. Proc. Roy. Irish Acad. **A76** (21–23), 219–226 (1976).
58. Bruck, R. H.: A survey of binary systems. (Erg. Math. Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 20) Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1958).

59. Carruth, J.H., Hildebrant, J.A., Koch, R.J.: The theory of topological semigroups. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, 1. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel (1983).
60. Chuchman, I. Ya., Gutik, O. V.: Topological monoids of almost monotone, injective cofinite partial selfmaps of positive integers. Карпатські мат. публ. **2** (1), 119–132 (2010).
61. Chuchman, I., Gutik, O.: On monoids of injective partial selfmaps almost everywhere the identity. Demonstr. Math. **44** (4), 699–722 (2011).
62. Clifford, A. H., Preston, G. B.: The algebraic theory of semigroups. Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I. (1961).
63. Clifford, A. H., Preston, G. B.: The algebraic theory of semigroups. Vol. II, Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I. (1967).
64. Cowan, D. F., Reilly, N. R.: Partial cross-sections of symmetric inverse semigroups. Int. J. Algebra Comput. **5** (3), 259–287 (1995).
65. Dickson, L. E.: On semi-groups and the general isomorphism between infinite groups. Trans. Amer. Math. Soc. **6**, 205–208 (1905).
66. Doroshenko, V.: Generators and relations for the semigroups of increasing functions on N) and Z. Algebra Discr. Math. **4**, 1–15 (2005).
67. Eberhart, C., Selden, J.: On the closure of the bicyclic semigroup. Trans. Amer. Math. Soc. **144**, 115–126 (1969).
68. Engelking, R.: General topology. 2nd ed. Heldermann, Berlin (1989).
69. Fernandes, V. H.: Presentations for some monoids of partial transformations on a finite chain: a survey. Semigroups, Algorithms, Automata and Languages 363–378 (2002).
70. Fernandes, V. H.: Semigroups of order-preserving mappings on a finite chain: a new class of divisors. Semigroup Forum **54**, 230–236 (1997).
71. Fernandes, V. H.: Normally ordered inverse semigroups. Semigroup Forum **58**, 418–433 (1998).

72. Fernandes, V. H.: The monoid of all injective orientation preserving partial transformations on a finite chain. Comm. Alg. **28** (7), 3401–3426 (2000).
73. Fernandes, V. H.: The monoid of all injective order preserving partial transformations on a finite chain. Semigroup Forum **62**, 178–204 (2001).
74. Fernandes, V. H.: A division theorem for the pseudovariety generated by semigroups of orientation preserving transformations on a finite chain. Comm. Alg. **29** (1), 451–456 (2001).
75. Fernandes, V. H., Gomes, G. M. S., Jesus, M. M.: Presentations for some monoids of partial transformations on a finite chain. Communocations in Algebra **33** (2), 587–604 (2005).
76. Fernandes, V. H., Quinteiro, T. M.: On the monoids of transformations that preserve the order and a uniform partition. Communocations in Algebra **39** (8), 2798–2815 (2011).
77. Fortunatov, V. A.: Congruences on simple extensions of semigroups. Semigroup Forum **13**, 283–295 (1976).
78. Fotedar, G. L.: On a semigroup associated with an ordered group. Math. Nachr. **60** (1–6), 297–302 (1974).
79. Fotedar, G. L.: On a class of bisimple inverse semigroups. Riv. Mat. Univ. Parma **4** (4), 49–53 (1978).
80. Frobenius, G., Schur, I.: Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 209–217 (1906).
81. Galois, E.: Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois. Publiées sous les auspices de la Société mathématique de France, avec une Introduction par M. Émile Picard. Paris: Gauthier-Villars et Fils. Mit dem Bildnis Galois' (1897).
82. Gluskin, L. M., Schein, B. M.: The theory of operations as the general theory of groups. A. K. Suskevic (Suschkewitsch) Dissertation, voronez, 1922 (80 Pages). Semigroup Forum **4** (1), 367–371 (1972).

83. Gomes, G. M. S., Howie, J. M.: On the ranks of certain semigroups of order-preserving transformations. Semigroup Forum **45** (3), 272–282 (1992).
84. Green, J.: On the structure of semigroups. Ann. Math. **54** (2), 163–172 (1951).
85. Gutik, O.: On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **80**, 33–41 (2015).
86. Gutik, O.: On locally compact semitopological 0-bisimple inverse ω-semigroups. Topol. Algebra Appl. **6**, 77–101 (2018).
87. Gutik, O., Khylynskyi, P.: On the monoid of cofinite partial isometries of $\mathbb{N}$ with a bounded finite noise. In: Walczak S. Proceedings of the Contemporary Mathematics in Kielce 2020, Poland, February 24-27, 2021, Sciendo, De Gruyter Poland Sp. z o.o. Warsaw, Poland 127–144 (2021).
88. Gutik, O., Krokhmalna, O.: The monoid of monotone injective partial selfmaps of the poset $(\mathbb{N}^3, \leqslant)$ with cofinite domains and images. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **88**, 32–50 (2019).
89. Gutik, O., Lawson, J., Repovš, D.: Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups. Semigroup Forum **78** (2), 326–336 (2009).
90. Gutik, O., Lysetska, O.: On the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ which is generated by the family $\mathscr{F}$ of atomic subsets of ω. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **92**, 34–50 (2021).
91. Gutik, O., Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms of principal filters of $\mathbb{N}^n$. Eur. J. Math. **6** (1), 14–36 (2020).
92. Gutik, O., Mykhalenych, M.: On a semitopological semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ when a family $\mathscr{F}$ consists of inductive non-empty subsets of ω. Мат. Студії **59** (1), 20–28 (2023).
93. Gutik, O., Pagon, D., Pavlyk, K.: Congruences on bicyclic extensions of a linearly ordered group. Acta Comment. Univ. Tartu. Math. **15** (2), 61–80

(2011).

94. Gutik, O. V., Pavlyk, K. P.: Topological semigroups of matrix units. Algebra Discrete Math. **4** (3), 1–17 (2005).
95. Gutik, O., Popadiuk, O.: On the semigroup of injective endomorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of initial finite intervals of ω. Мат. методи фіз.-мех. поля. **65** (1-2), 42–57 (2022).
96. Gutik, O., Popadiuk, O.: On the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of finite bounded intervals of ω. Carpathian Math. Publ. **15**(2), 331–355 (2023).
97. Gutik, O., Pozdnyakova, I.: On monoids of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{lex} \mathbb{Z}$ with cofinite domains and images. Algebra Discrete Math. **17** (2), 256–279 (2014).
98. Gutik, O., Pozdnyakova, I.: On the monoid of monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ with cofinite domains and images. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **81**, 100–116 (2016).
99. Gutik, O., Pozdnyakova, I.: On the monoid of monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ with cofinite domains and images, II. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **82**, 109–127 (2016).
100. Gutik, O., Pozdnyakova, I.: On the group of automorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ with the family $\mathscr{F}$ of inductive nonempty subsets of ω. Algebra Discrete Math. **35** (1), 42–61 (2023).
101. Gutik, O. V., Reiter, A. R.: Symmetric inverse topological semigroups of finite rank $\leqslant n$. Math. Methods and Phys.-Mech. Fields **52** (3), 7–14 (2009); **reprinted version:** J. Math. Sc. **171** (4), 425–432 (2010).
102. Gutik, O., Repovš, D.: On countably compact 0-simple topological inverse semigroups. Semigroup Forum **75** (2), 464–469 (2007).
103. Gutik, O., Repovš, D.: Topological monoids of monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ with cofinite domain and image. Studia Scient. Math. Hungar. **48** (3), 342–353 (2011).

104. Gutik, O., Repovš, D.: On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images. Georgian Math. J. **19** (3), 511–532 (2012).
105. Gutik, O., Repovš, D.: On monoids of injective partial cofinite selfmaps. Math. Slovaca **65** (5), 981–992 (2015).
106. Gutik, O. V., Savchuk, A. S.: On inverse submonoids of the monoid of almost monotone injective cofinite partial selfmaps of positive integers. Карпатські мат. публ. **11** (2), 296–310 (2019).
107. Gutik, O., Savchuk, A.: On the monoid of cofinite partial isometries of $\mathbb{N}^n$ with the usual metric. Proc. Intern. Geometry Center **12** (3), 51–68 (2019).
108. Gutik, O., Savchuk, A.: On the monoid of cofinite partial isometries of $\mathbb{N}$ with the usual metric. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **89**, 17–30 (2020).
109. Harzheim, E.: Ordered sets. Advances in Math., **7**. Springer, New-York (2005).
110. Hildenbrandt, J. A., Koch, R. J.: Swelling actions of Γ-compact semigroups. Semigroup Forum **33**, 65–85 (1988).
111. Hille, E.: Functional analysis and semi-groups. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **31**, Amer. Math. Soc, New York (1948).
112. Hofmann, K. H.: Topological semigroups history, theory, applications. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **78**, 9–59 (1976).
113. Hofmann, K. H.: Semigroups in the 19th century? A historical note. Theory of semigroups, Proc. Conf., Geifswald/GDR 1984, 44–55 (1984).
114. Hofmann, K. H.: Zur Geschichte des Halbgruppenbegriffs. Hist. Math. **19** (1), 40-59 (1992).
115. Hofmann, K. H.: A history of topological and analytical semigroups. A personal view. Semigroup Forum **61** (1), 1–25 (2000).

116. Hollings, C.: Anton Kazimirovich Suschkewitsch (1889-1961). BSHM Bull. **24** (3), 172–179 (2009).

117. Hollings, C.: Mathematics across the Iron Curtain. A history of the algebraic theory of semigroups. History of Mathematics **41**. Providence, RI, Amer. Math. Soc. (2014).

118. Howie, J. M.: Product of idempotents in certain semigroups of transformations. Proc. Edinburgh Math. Soc. **17** (3), 223–236 (1971).

119. Kemprasit, Y., Changphas, T.: Regular order-preserving transformation semigroups. Bull. Austral. Math. Soc. **62**, 511–524 (2000).

120. Klein, F.: Ueber eine neue Art der Riemann‘schen Flächen. Erlang. Ber. 1874 (1874).

121. Knauer, U.: Zur Entwicklung der algebraischen Theorie der Halbgruppen. Simon Stevin **54**, 165–177 (1980).

122. Koch, R. J., Wallace, A. D.: Stability in semigroups. Duke Math. J. **24**, 193–195 (1957).

123. Laradji, A., Umar, A.: On certain finite semigroups of order-decreasing transformations. King Fahd Univ. Petroleum and Minerals. Tech. Rep. Ser. 1–19 (2003).

124. Laradji, A., Umar, A.: Combinatorial results for semigroups of orderprevi-ng partial transformations. King Fahd Univ. of Petroleum and Minerals (Sandi Avabia), Dept. Math. Sci. Technical Report Series 1–18 (2004).

125. Laradji, A., Umar, A.: On the number of nilpotents in the partial symmetric semigroups. Communications in Algebra **32** (8), 3017–3032 (2004).

126. Lawson, J. D.: Historical links to a Lie theory of semigroups. Seminar Sophie Lie **2**, 263–278 (1992).

127. Lawson, J. D.: The earliest semigroup paper? Semigroup Forum, **52** (1), 55–60 (1996).

128. Lawson, J. D.: A tribute to Karl H. Hofmann on the occasion of his 75th birthday. Semigroup Forum **77** (1), 2–4 (2008).
129. Lawson, M. V.: Inverse semigroups: the theory of partial symmetries. World Scientific, Singapore (1998).
130. Lie, S.: Over en Classe geometriske Transformationer. I. Christiania Videnskabs-Selskab, 57–109 (1871).
131. Lysetska, O.: On feebly compact topologies on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **90**, 48–56 (2020).
132. Magill, K. D.: Semigroups of continuous functions. Amer. Math. Monthly **71** (9), 984–988 (1964).
133. Magill K. D., Some homomorphism theorems for a class of semigroups. Proc. London Math. Soc. **15** (3), 517–526 (1965).
134. Mazorchuk, V.: Endomorphisms of $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{PB}_n$, and $\mathfrak{C}_n$. Commun. Algebra **30** (7), 3489–3513 (2002).
135. Meakin, J., Sapir, M.: Congruences on free monoids and submonoids of polycyclic monoids. J. Aust. Math. Soc., Ser. A **54** (2), 236–253 (1993).
136. Mesyan, Z., Mitchell, J. D., Morayne, M., Péresse, Y. H.: Topological graph inverse semigroups. Topology Appl. **208**, 106126, 106–126 (2016).
137. Mokrytskyi, T.: On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$ with adjoined zero. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **87**, 37–45 (2019).
138. Mokrytskyi, T.: The momoid of order isomorphisms between principal filters of $\sigma\mathbb{N}^{\kappa}$. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **93**, 14–33 (2022).
139. von Neumann, J.: On regular rings. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **22**, 707–713 (1936).
140. Petrich, M.: Inverse semigroups. John Wiley & Sons, New York (1984).
141. Popadiuk, O.: On endomorphisms of the inverse semigroup of convex order isomorphisms of the set ω of a bounded rank which are generated by Rees

congrueces. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **93**, 34–41 (2022).

142. Popadiuk, O.: On endomorphisms of the inverse semigroup of convex order isomorphisms of a bounded rank which are generated by Rees congruences. In: Abtracts of the 14th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 106. Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, Sumy, Ukraine, 3–7 July 2023.
143. Popadiuk, O., Gutik, O.: On the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of finite bounded intervals of ω. In: Abstracts of the International Algebraic Conference "At the End of the Year" 2022, p. 41. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 27–28 December 2022.
144. Preston, G. B.: Inverse semi-groups. J. London Math. Soc. **29** (4), 396–403 (1954).
145. Preston, G. B.: Inverse semi-groups with minimal right ideals. J. London Math. Soc. **29** (4), 404–411 (1954).
146. Preston, G. B.: Representations of inverse semi-groups. J. London Math. Soc. **29** (4), 411–419 (1954).
147. Preston, G. B.: Congruences on completely O-simple semigroups. Proc. London. Math. Soc. **11** (43), 557–576 (1961).
148. Pultr, A., Hedrlin, Z.: Relations (graphs) with given infinite semigroups. Monatsh. Math. **68** (5), 421–425 (1964).
149. Rees, D.: On semi-groups. Proc. Cambridge philos. Soc. **36**, 387–400 (1940).
150. Rees, D.: On the group of a set of partial transformations. J. Lond. Math. Soc. **22**, 281–284 (1947).
151. Reilly, N. R.: Bisimple ω-semigroups. Proc. Glasgow Math. Assoc. **7** (3), 160–167 (1966).

152. Ruppert, W.: Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory. Lect. Notes Math., **1079**. Springer, Berlin (1984).

153. de Séguier, J. A.: Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits. Paris, Gauthier-Villars (1904).

154. Schein, B. M.: Endomorphisms of finite symmetric semigroups. Shum, Kar-Ping (ed.) et al., Algebras and combinatorics. Papers from the international congress, ICAC'97, Hong Kong, August 1997. Singapore: Springer, 381–390 (1999).

155. Schein, B. M., Teclezghi, B.: Endomorphisms of finite symmetric inverse semigroups. J. Algebra **198** (1), 300-310 (1997).

156. Schein, B. M., Teclezghi, B.: Endomorphisms of finite full transformation semigroups. Proc. Am. Math. Soc. **126** (9), 2579–2587 (1998).

157. Schein, B. M., Teclezghi, B.: Endomorphisms of symmetric semigroups of functions on a finite set. Commun. Algebra **26** (12), 3921–3938 (1998).

158. Schmidt, E. T.: Universale Algebren mit gegebenen Automorphismengruppen und Kongruenzverbanden. Acta math. Acad scient. hung. **15** (1–2), 37–45 (1964).

159. Schröder, B.: Ordered Sets – an Introduction with Connections from Combinatorics to Topology, 2nd edn. Boston, Birkhäuser Verlag (2016).

160. Stepp, J.W.: t A note on maximal locally compact semigroups. Proc. Amer. Math. Soc. **20**, 251–253 (1969).

161. Stepp, J. W.: Algebraic maximal semilattices. Pacific J. Math. **58** (1), 243–248 (1975).

162. Suschkewitsch, A. K.: Über die Darstellung der eindeutig nicht umkehrbaren Gruppen mittels der verallgemeinerten Substitutionen. Матем. сб. **33**, 371–374 (1926).

163. Suschkewitsch, A. K.: Sur quelques cas des groupes finis sans la loi de l'inversion univoque. Сообщ. Харьк. матем. об-ва, сер. **4** (1), 17–24 (1927).

164. Suschkewitsch, A. K.: Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit. Math. Ann. **99**, 30–50 (1928).

165. Suschkewitsch, A. K.: Untersuchungen fiber veralldgemeinerte Substitutionen. Atti del Congresso Internationale dei Matematici, Bologna, T. 2, 147–157 (1928).

166. Suschkewitsch, A. K.: Über die Streckenrechnung. Матем. сб. **35**, 251–262 (1928).

167. Suschkewitsch, A. K.: On a generalization of the associative law. Trans. Amer. Math. Soc. **31**, 204–214 (1929).

168. Suschkewitsch, A. K.: Über die Addition und Multiplikation im Gebiete der reellen Zahlen. Зап. Харьк. матем. об-ва **4**, 145–160 (1930).

169. Suschkewitsch, A. K.: Über die Matrizendarstellung der verallgemeinerten Gruppen. Зап. Харьк. матем. об-ва, сер. **4** (6), 27–38 (1933).

170. Suschkewitsch, A. K.: Über den Zusammenhang der Rauterschen Übergruppe mit den gewöhnlichen Gruppen. Math. Zeitschr. **38**, 643—649 (1934).

171. Suschkewitsch, A. K.: Über Semigruppen. Зап. Харьк. матем. об-ва, сер. **4** (8), 25–27 (1934).

172. Suschkewitsch, A. K.: Über ein Elementensystem mit zwei Operationen, fur welche zwei Distributivgesetze gelten. Зап. Харьк. матем. об-ва, сер. **4** (8), 29–32 (1934).

173. Suschkewitsch, A. K.: Über einen merkwurdigen Typus der verallgemeinerten unendlichen Gruppen. Зап. Харьк. матем. об-ва, сер. **4** (9), 39–44 (1934).

174. Suschkewitsch, A. K.: Über einen merkwurdigen Integritatsbereich. Зап. Харьк. матем. об-ва, сер. **4** (10), 75–76 (1934).

175. Suschkewitsch, A. K.: Über eine verallgemeinerung der Semigruppen. Зап. Харьк. матем. об-ва, сер. **4** (12), 89–97 (1935).

176. Suschkewitsch, A. K.: Sur quelques propriétés des semigroupes généralisés. Зап. Харк. матем. т-ва, сер. **4** (13), 29–39 (1936).

177. Szendrei, M. B.: A generalization of McAlister's P-theorem for E-unitary regular semigroups. Acta Sci. Math. **51** (1–2), 229–249 (1987).

178. Vopěnka, P., Pultr, A., Hedrlin, Z.: A rigid relation exists on any set. Comment math., Univ. carolinae **2**, 119–155 (1965).

179. Warne, R. J.: A class of bisimple inverse semigroups. Pacif. J. Math. **18** (3), 563–577 (1966).

180. Warne, R. J.: Bisimple inverse semigroups mod groups. Duke Math. J. **34** (4), 787–812 (1967).

181. Xiuliang, Y., Chunghan, L.: Maximal properties of some subsemigroups in finite order-preserving transformation semigroups. Comm. Algebra **28** (7), 3125–3135 (2000).

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Список публікацій, в яких опубліковано основні результати дисертації:

(1) Gutik, O., Popadiuk, O.: On the semigroup of injective endomorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of initial finite intervals of ω. Мат. методи фіз.-мех. поля. **65** (1-2), 42–57 (2022).

(2) Popadiuk, O.: On endomorphisms of the inverse semigroup of convex order isomorphisms of the set ω of a bounded rank which are generated by Rees congrueces. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **93**, 34–41 (2022).

(3) Gutik, O., Popadiuk, O.: On the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of finite bounded intervals of ω. Carpathian Math. Publ. **15** (2), 331–355 (2023).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

(1) Popadiuk, O., Gutik, O.: On the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$ which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of finite bounded intervals of ω. In: Abstracts of the International Algebraic Conference "At the End of the Year" 2022, p. 41. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 27–28 December 2022.

(2) Popadiuk, O.: On endomorphisms of the inverse semigroup of convex order isomorphisms of a bounded rank which are generated by Rees congruences. In: Abtracts of the 14th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 106. Sumy State Pedagogical University named after A.S.

Makarenko, Sumy, Ukraine, 3–7 July 2023.

Відомості про апробацію матеріалів дисертації:

(1) Міжнародна алгебраїчна конференція "At the End of the Year" 2022, м. Київ, 27–28 грудня 2022 року, форма участі – дистанційна, усна доповідь.

(2) Міжнародна наукова конференція "The 14th International Algebraic Conference in Ukraine", м. Суми, 3–7 липня 2023 року, форма участі – дистанційна, усна доповідь.

(3) Науковий семінар імені проф. М. Комарницького "Теорія полігонів і спектарльні простори" у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2022, 2023, форми участі – очна/дистанційна, усні доповіді.

(4) Науковий семінар "Топологічна алгебра" у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2022, форма участі – дистанційна, усна доповідь.

(5) Науковий семінар кафедри алгебри, топології на основ математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2023, форма участі – очна, усна доповідь.