

ВИСНОВОК

про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми»

здобувача ступеня доктора філософії з галузі знань

11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика»

Попадюк Ольги Богданівни

1. Актуальність теми дисертації

Алгебрична теорія напівгруп належить до тих сфер математики, які мають дуже широке коло застосувань: теорія формальних мов, алгебрична теорія автоматів, теорія кодів, шифрування та ін.

Одним із центральних об'єктів в теорії напівгруп є біциклічна напівгрупа, яка неодноразово використовувалися в побудові різноманітних напівгрупових конструкцій та доведення структурних теорем. Ідеологія та принципи біциклічного моноїда неодноразово використовувалися для описання структури та властивостей напівгруп часткових бієктивних перетворень певних порядкових та метричних структур. Загальна конструкція біциклічних розширень $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ сім'єю \mathcal{F} ω -замкнених підмножин в ω , запропонована декілька років тому О. Гутіком і М. Михаленичем, дозволяє будувати багато різноманітних прикладів E-унітарних комбінаторних інверсних напівгруп. Вона поєднує в собі такі напівгрупи як біциклічна напівгрупа та напівгрупа $\omega \times \omega$ -матричних одиниць. Тому виникає природна задача про описання структури біциклічного розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ для певних сімей \mathcal{F} ω -замкнених підмножин в ω , зокрема ідеалів, конгруенцій та відношень Гріна на $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$.

Однією з ключових задач алгебри є вивчення ендоморфізмів алгебричних систем. Описання конгруенцій на біциклічному розширенні $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ не дає змогу описати властивості ендоморфізмів на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$. Будучи інверсною напівгрупою, біциклічне розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ має багато регулярних зображень в симетричному інверсному моноїді, тому природно виникає завдання описання зображення напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ для ω -замкненої сім'ї \mathcal{F}_n , породженої скінченним інтервалом $[0, n]$ в ω , в симетричній інверсній напівгрупі обмеженого рангу.

В контексті топологічної алгебри виникає природна задача про описання напівгрупових і трансляційно-неперервних гаусдорфових топологій на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$. Природною є також задача про існування таких компактних і близьких до них топологій на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$.

Тему дисертації затверджено на засіданні Вченої ради Львівського національного університету імені Івана Франка, протокол № 77/11 від 27.11.2019 року та протокол № 44/2 від 01.03.2023 року.

2. Зв'язок теми дисертації з державними програмами, науковими напрямками університету та кафедри

Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри алгебри і логіки (з 2020 року кафедри алгебри, топології та основ математики) механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми «Топологічна алгебра і асимптотична топологія та їх застосування» (номер державної реєстрації 0122U001602).

3. Особистий внесок здобувача в отриманні наукових результатів

У дисертаційній роботі здобувачкою наведено опис алгебричних властивостей біциклічного розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$, породженого скінченним інтервалом $[0, n]$. Зокрема, описано відношення Гріна на цій напівгрупі і доведено, що відношення Гріна \mathcal{D} і \mathcal{J} збігаються на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$.

Доведено, що напівгрупа $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $\mathcal{J}_\omega^{n+1}(\overline{con\vec{v}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини (ω, \leq) рангу $\leq n+1$.

Ольга Попадюк наводить опис близьких до компактних трансляційно-неперервних T_1 -топологій на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$.

Попадюк О. Б. описала наріст алгебричної структури при топологічному замиканні напівгрупи $\mathcal{J}_\omega^{n+1}(\overline{con\vec{v}})$ в T_1 -напівтопологічній напівгрупі, яка містить її як власну піднапівгрупу.

Також здобувачка описала напівгрупу ін'єктивних ендоморфізмів інверсної напівгрупи $\mathcal{J}_\omega^n(\overline{con\vec{v}})$ для довільного натурального числа $n \geq 2$. Попадюк О. Б. довела, що напівгрупа ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ ізоморфна адитивній напівгрупі невід'ємних цілих чисел $(\omega, +)$.

Попадюк О. Б. описала структуру напівгрупи $\mathfrak{End}(\mathcal{B}_\lambda)$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць \mathcal{B}_λ та структуру напівгрупи $\mathfrak{End}(\mathcal{J}_\omega^n(\overline{con\vec{v}}))$ усіх ендоморфізмів напівгрупи $\mathcal{J}_\omega^n(\overline{con\vec{v}})$ за модулем ідеала $\mathfrak{End}^1(\mathcal{J}_\omega^n(\overline{con\vec{v}}))$.

Основні результати, що виносяться на захист, отримані авторкою самостійно. В опублікованих спільно з науковим керівником працях, О. В. Гутіку належать постановка задач, вибір методів дослідження та обговорення одержаних результатів. У спільній статті Gutik, O., Popadiuk, O. (2023). On the semigroup $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ which is generated by the family \mathcal{F}_n of finite bounded intervals of ω . *Carpathian Math. Publ.*, 15 (2), 331–355, О. Б. Попадюк

належать усі результати, окрім теорем 6-9, наслідку 2, прикладу 2 і твердження 7, які належать співавторові О. В. Гутіку.

4. Достовірність та обґрунтованість отриманих результатів та запропонованих автором вирішень, висновків, рекомендацій

Дисертаційна робота містить повні та строгі доведення всіх наукових результатів. Матеріали дисертації апробовано на двох міжнародних наукових конференціях, а також на семінарах «Теорія полігонів і спектральні простори» та «Топологічна алгебра» у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Результати, наведені в дисертації, опубліковано в трьох наукових статтях, які належать до переліку наукових фахових видань України, в тому числі 1 стаття в науковому виданні, що індексується у наукометричних базах Scopus і Web of Science та віднесено до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank.

5. Ступінь новизни основних результатів дисертації порівняно з відомими дослідженнями аналогічного характеру

У дисертаційній роботі:

- охарактеризовано структуру біциклічного розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$, зокрема описано відношення Гріна на цій напівгрупі;
- доведено, що напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ та $\mathcal{J}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\text{con}v})$ ізоморфні;
- доведено, що на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$, а отже, і на напівгрупі $\mathcal{J}_\omega^n(\overrightarrow{\text{con}v})$ існують лише конгруенції Ріса;
- описано близькі до компактних трансляційно-неперервні T_1 -топології на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$;
- отримано структурне описання напівгрупи ендоморфізмів напівгруп $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ та $\mathcal{J}_\omega^n(\overrightarrow{\text{con}v})$ і напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць \mathcal{B}_λ для довільного нескінченного кардинала λ .

6. Перелік наукових праць, які відображають основні результати дисертації

6.1. Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Gutik, O., Popadiuk, O. (2022). On the semigroup of injective endomorphisms of the semigroup $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ which is generated by the family \mathcal{F}_n of initial finite intervals of ω . *Мат. методи фіз.-мех. поля*, 65 (1-2), 42–57. Особистий внесок здобувача: формулювання та доведення всіх тверджень, лем, теорем, наслідків.

2. Popadiuk, O. (2022). On endomorphisms of the inverse semigroup of convex order isomorphisms of the set ω of a bounded rank which are generated by Rees congruences. *Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична*, 93, 34–41.

6.2. Публікації у наукових періодичних виданнях, що індексуються у наукометричних базах Scopus та/або Web of Science Core Collection:

1. Gutik, O., Popadiuk, O. (2023). On the semigroup $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ which is generated by the family \mathcal{F}_n of finite bounded intervals of ω . *Carpathian Math. Publ.*, 15 (2), 331–355 (Q2). Особистий внесок здобувача: формулювання та доведення тверджень 1-6, лем 1-4, теорем 1-5, наслідку 1; зауваження 1 та приклад 1.

7. Апробація основних результатів дослідження на конференціях, симпозіумах, семінарах тощо

1. Popadiuk, O., Gutik, O.: On the semigroup $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ which is generated by the family \mathcal{F}_n of finite bounded intervals of ω . In: Abstracts of the International Algebraic Conference “At the End of the Year” 2022, p. 41. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 27-28 December 2022.

2. Popadiuk, O.: On endomorphisms of the inverse semigroup of convex order isomorphisms of a bounded rank which are generated by Rees congruences. In: Abstracts of the 14th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 106. Sumy State Pedagogical University named after A. S. Makarenko, Sumy, Ukraine, 3-7 July 2023.

8. Наукове значення виконаного дослідження із зазначенням можливих наукових галузей та розділів програм навчальних курсів, де можуть бути застосовані отримані результати

Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у теорії напівгруп, топологічній алгебрі та прикладній алгебрі.

9. Практична цінність результатів дослідження із зазначенням конкретного підприємства або галузі, де вони можуть бути застосовані

Отримані результати можуть бути використані в математичних дослідженнях в таких ЗВО: Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Інституті математики НАН України, Державному закладі “Луганський національний університет імені Тараса Шевченка”,

Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника, які є осередками науково-дослідницької діяльності в теорії напівгруп та топологічній алгебрі.

10. Оцінка структури дисертації, її мови та стилю викладення

Дисертація за структурою, мовою та стилем викладу відповідає вимогам МОН України.

Дисертацію заслухано та обговорено на науковому семінарі кафедри алгебри, топології та основ математики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка (протокол №1 від 29 серпня 2023 року). У ході обговорення дисертації суттєвих зауважень, які стосуються суті роботи, не було висунуто.

Дисертація Попадюк Ольги Богданівни «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» є завершеною науковою працею в рамках поставлених задач.

Основні результати відображено у трьох наукових статтях, які опубліковано у наукових фахових виданнях України, в тому числі 1 стаття в науковому виданні, що індексується у наукометричних базах Scopus і Web of Science та віднесено до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank.

На основі вищесказаного можна зробити такі висновки щодо поданої дисертаційної роботи:

1. За актуальністю обраної теми, обсягом, достовірністю та рівнем апробації отриманих результатів, науковою новизною, обґрунтованістю висновків, практичною цінністю дисертаційна робота «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» відповідає вимогам наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» та п. 6 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 року № 44.

2. Дисертація відповідає спеціальності 111 «Математика» (галузь знань 11 «Математика та статистика»).

3. Наукові праці Попадюк Ольги Богданівни, опубліковані за результатами дисертаційної роботи, за кількістю та якістю відповідають пп. 8-9 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 року № 44.

4. Дисертація «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» Попадюк Ольги Богданівни рекомендується для подання до розгляду та захисту у спеціалізованій вченій раді.

Головуючий на засіданні наукового семінару,
завідувач кафедри алгебри, топології та
основ математики
д-р фіз.-мат. наук, професор



Тарас БАНАХ

29 серпня 2023 року

Підпис професора Тараса Банаха засвідчую.

Вчений секретар
Львівського національного
університету імені Івана Франка
доцент



Ольга ГРАБОВЕЦЬКА