

До разової спеціалізованої ради ДФ 35.051.119
Львівського національного університету
імені Івана Франка
м. Львів, вул. Університетська, 1

РЕЦЕНЗІЯ

на дисертацію

Попадюк Ольги Богданівни

«Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми»,
подану на здобуття ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 «Математика та статистика»
за спеціальністю 111 «Математика».

Актуальність тематики дослідження

Задача точного зображення напівгруп напівгрупами часткових бієкцій є однією з класичних в теорії напівгруп і вона започаткована в працях А. Сушкевича у 20-х роках минулого століття. Другою класичною задачею цього напрямку є топологізація напівгруп та їх зображень компактними та близькими до компактних напівгруповими та трансляційно-неперервними топологіями. Так, зокрема, на нескінченній напівгрупі матричних одиниць кожна гаусдорфова слабо компактна топологія є компактною, а кожна трансляційно-неперервна локально компактна топологія на біциклічному моноїді є або компактною, або дискретною.

У своїй дисертаційній роботі Попадюк О. Б. досліджує властивості біциклічного напівгрупового розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$, що є безпосереднім продовженням досліджень її наукового керівника О. Гутіка. Так, зокрема, у роботі О. Попадюк досліджується топологізація напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ і її близькі до компактних трансляційно-неперервні T_1 -топології на ній.

Здобувачка Попадюк О. Б. у дисертаційній роботі «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» досліджує алгебричні властивості та топологізацію біциклічного напівгрупового розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ у випадку, коли сім'я \mathcal{F}_n породжена множиною $\{0, 1, \dots, n\}$; інверсну напівгрупу $\mathcal{J}_\omega^n(\overrightarrow{\text{con}v})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини (ω, \leq) рангу $\leq n$; напівгрупи ендоморфізмів напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ та $\mathcal{J}_\omega^n(\overrightarrow{\text{con}v})$. Вибір теми дослідження цілком виправданий, має важливе теоретичне значення у теорії напівгруп. На мою думку, актуальність роботи не викликає сумніву.

Структура, зміст та основні результати дисертаційної роботи

Загальний обсяг дисертації становить 119 сторінок і складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел зі 181 найменування та додатка, який містить список публікацій здобувачки за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі наведено загальні відомості про дисертацію, а саме: обґрунтовано актуальність теми, вказано мету, завдання, предмет та об'єкт досліджень, а також наведено відомості про наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

У першому розділі проведений огляд літератури за темою дисертації, зокрема, наведено історичну довідку, мотивацію досліджень, а також сформульовано означення та допоміжні твердження з алгебри та загальної топології.

У другому розділі вивчаються алгебричні та топологічні властивості біциклічного розширення $B_{\omega}^{\mathcal{F}_n}$. У підрозділі 2.1 описано ідемпотенти, відношення Гріна напівгрупи $B_{\omega}^{\mathcal{F}_n}$. Основними результатами підрозділу 2.1 є такі: напівгрупа $B_{\omega}^{\mathcal{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $\mathcal{J}_{\omega}^{n+1}(\overline{conv})$; на напівгрупі $B_{\omega}^{\mathcal{F}_n}$ існують лише конгруенції Ріса. У підрозділі 2.2 досліджується топологізація напівгрупи $B_{\omega}^{\mathcal{F}_n}$. Основним результатом цього підрозділу є такий: для довільної трансляційно-неперервної T_1 -топології τ на напівгрупі $B_{\omega}^{\mathcal{F}_n}$ такі умови еквівалентні: (1) $(B_{\omega}^{\mathcal{F}_n}, \tau)$ – компактна напівтопологічна напівгрупа; (2) простір $(B_{\omega}^{\mathcal{F}_n}, \tau)$ топологічно ізоморфний одноточковій компактифікації Александрова нескінченного зліченного дискретного простору; (3) $(B_{\omega}^{\mathcal{F}_n}, \tau)$ – компактна напівтопологічна напівгрупа з неперервною інверсією; (4) простір $(B_{\omega}^{\mathcal{F}_n}, \tau)$ – $\mathcal{D}(\omega)$ -компактний.

Третій розділ присвячений дослідженню структури напівгруп ендоморфізмів біциклічного напівгрупового розширення $B_{\omega}^{\mathcal{F}_n}$ та інверсної напівгрупи $\mathcal{J}_{\omega}^n(\overline{conv})$. Здобувачка доводить, що напівгрупа ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $B_{\omega}^{\mathcal{F}_n}$ ізоморфна адитивній напівгрупі невід'ємних цілих чисел $(\omega, +)$. У підрозділі 3.2 доведено, що напівгрупа усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць \mathcal{B}_{λ} є диз'юнктивним об'єднанням напівгрупи ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи \mathcal{B}_{λ} і напівгрупи всіх анулюючих ендоморфізмів напівгрупи \mathcal{B}_{λ} . Підрозділ 3.3 присвячений дослідженню напівгрупи усіх ендоморфізмів напівгрупи $\mathcal{J}_{\omega}^n(\overline{conv})$.

Ступінь обґрунтованості результатів, їхня наукова новизна

У дисертаційній роботі Попадюк О. Б. «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» авторкою особисто отримано такі результати:

- Охарактеризовано структуру біциклічного розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$.
- Доведено, що напівгрупа $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $\mathcal{J}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\text{con}v})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини (ω, \leq) рангу $\leq n+1$.
- Доведено, на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ існують лише конгруенції Ріса.
- Описано близькі до компактних трансляційно-неперервні T_1 -топології на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$.
- Описано алгебричну структуру напівгрупи ендоморфізмів напівгруп $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ та $\mathcal{J}_\omega^n(\overrightarrow{\text{con}v})$ і напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць \mathcal{B}_λ .

Усі отримані результати нові та мають строгі доведення.

Зв'язок дисертаційної роботи з державними чи галузевими науковими програмами

Дисертаційна робота Попадюк О. Б. «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри алгебри і логіки (з 2020 року кафедри алгебри, топології та основ математики) механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми «Топологічна алгебра і асимптотична топологія та їх застосування» (номер державної реєстрації 0122U001602).

Практичне значення наукових результатів

Отримані у рамках виконання дисертаційної роботи результати носять суто теоретичний характер і можуть бути використані у подальших дослідженнях у теорії напівгруп, топологічній алгебрі та комп'ютерній алгебрі.

Особистий внесок здобувача

Результати досліджень, які наведені у дисертаційній роботі, належать авторці і є її науковим доробком. У спільних з науковим керівником публікаціях О. В. Гутіку належать постановка задач, вибір методів досліджень, а також обговорення отриманих результатів.

Повнота викладу матеріалів у роботах, які опубліковані здобувачкою

Основні наукові результати, отримані під час виконання дисертаційного дослідження Попадюк О. Б. опубліковано в:

- 3 наукових статтях, з яких 2 віднесено до переліку наукових фахових видань України, та в 1 науковому виданні, що індексується у наукометричних базах Scopus і Web of Science та віднесено до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank;
- 2 збірниках матеріалів доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Це дає право стверджувати, що представлена дисертаційна робота є самостійним, завершеним науковим дослідженням, результати якого мають важливе значення для розвитку теорії напівгруп та топологічної алгебри.

Відомості про дотримання академічної доброчесності

Ознайомившись із науковими публікаціями та дисертацією «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» здобувачки О. Б. Попадюк, відзначаю відсутність порушень академічної доброчесності.

Зауваження до дисертації

Хоча дисертаційне дослідження загалом виконане на достатньо високому рівні, можна вказати декілька зауважень. Відмітимо, що зауваження відносяться до граматичних описок і не стосуються доведень та математичної термінології.

1. Стор. 38²: замість «й» слід писати сполучник «і».
2. Стор. 44₁: замість сім'я $\{\mathcal{A}\}_{s \in S}$ слід писати $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$.
3. Стор. 45: в означенні T_1 -простору слід писати « $x \in U$ і $y \notin U$ або $x \notin U$ і $y \in U$ ».
4. Стор. 46: нарізна неперервність – необхідна умова.
5. Стор. 59₆: замість «покажемо» слід писати «доведемо».
6. На сторінках 71² і 95¹ слово «конгуенція» замінити на «конгруенція».
7. Стор. 75₄: замість «скінченне» слід писати «скінченного».
8. Стор. 74₁₃: простір є метризовним, а не метризованим.
9. Стор. 76⁶: замість слова «протиріччя» слід писати «суперечність».
10. Стор. 79²: замість слова «представлена» слід писати «введена».
11. Стор. 104, 35-та позиція у списку літератури: описки в назві статті.
12. Стор. 107, 66-та позиція у списку літератури: зайвою є права дужка після N.

Висновок щодо відповідності дисертації нормам

На мою думку, дисертація здобувачки О. Б. Попадюк на тему «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» подана на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика», є завершеним дослідженням, яке присвячене дослідженню алгебричних властивостей біциклічного розширення $B_{\omega}^{\mathcal{F}^n}$ та інверсної напівгрупи $J_{\omega}^n(\overrightarrow{con\mathcal{V}})$ та їхніх напівгруп ендоморфізмів, а також компактних та близьких до них напівгрупових і трансляційно-неперервних топологій на $B_{\omega}^{\mathcal{F}^n}$. Робота містить ряд важливих та актуальних досліджень, всі доведення є зрозумілими і логічними. Як у самій дисертації, так і в публікаціях відсутні порушення правил академічної доброчесності.

Вважаю, що за новизною, актуальністю, обсягом та практичним значенням дисертація «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022 року, та наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» (з наступними змінами), а її авторка, Попадюк Ольга Богданівна, заслуговує присудження їй ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук,
доцент, декан механіко-математичного
факультету Львівського національного
університету імені Івана Франка

Ігор ГУРАН