

До разової спеціалізованої ради ДФ 35.051.119
Львівського національного університету
імені Івана Франка
м. Львів, вул. Університетська, 1

РЕЦЕНЗІЯ

на дисертацію

Попадюк Ольги Богданівни

«Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми»,
подану на здобуття ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 «Математика та статистика»
за спеціальністю 111 «Математика».

Актуальність тематики дослідження

Теорія напівгруп перетворень хоча і була заснована ще понад сто років тому Антоном Сушкевичем, з перших днів свого існування отримала застосування в багатьох розділах математики: функціональному аналізі, топології, диференціальних рівняннях та ін. На основі теорії напівгруп перетворень в період Другої світової війни виникло багато нових напрямків прикладної математики, зокрема, алгебрична теорія кодів та шифрів, теорія автоматів і теорія формальних мов та ін.

В алгебричній теорії напівгруп ще на самому її початку ключову роль відіграв біциклічний моноїд, завдяки якому та його точним зображенням вдалось довести ряд ключових теорем і побудувати важливі напівгрупові розширення. Саме такими є: конструкції Брука та Брука-Рейлі, теорема Андресена про цілком прості напівгрупи, теорема Рейлі-Уорна про структуру регулярної ω -напівгрупи та ін.

У дисертаційній роботі Попадюк О. Б. досліджуються алгебричні властивості та топологізація біциклічного напівгрупового розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$, які є безпосереднім продовженням досліджень її наукового керівника О. Гутіка. Зокрема, О. Гутіком і М. Михаленичем було запропоновано загальну конструкцію біциклічних розширень $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ сім'єю \mathcal{F} ω -замкнених підмножин в ω . Така конструкція дозволяє будувати багато різноманітних прикладів Е-унітарних комбінаторних інверсних напівгруп. Структура напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$, де \mathcal{F} – сім'я атомарних підмножин в ω описана в працях О. Гутіка та О. Лисецької на мові λ^0 -розширень Брандта напіврешітки (ω, \max) . Тому виникає природна задача описання напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ та її напівгрупи ендоморфізмів скінченною порядково опуклою n -елементною множиною \mathcal{F} в ω .

Здобувачка Попадюк О. Б. у дисертаційній роботі «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» досліджує: алгебричні властивості та

топологізацію біциклічного напівгрупового розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ у випадку, коли сім'я \mathcal{F}_n породжена множиною $\{0, 1, \dots, n\}$; інверсну напівгрупу $\mathcal{J}_\omega^n(\overrightarrow{\text{con}v})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини (ω, \leq) рангу $\leq n$; напівгрупи ендоморфізмів напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ та $\mathcal{J}_\omega^n(\overrightarrow{\text{con}v})$. Вибір теми дослідження цілком виправданий, має важливе теоретичне значення у теорії напівгруп. На мою думку, актуальність роботи не викликає сумніву.

Структура, зміст та основні результати дисертаційної роботи

Дисертація має загальний обсяг 119 сторінок і складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел зі 181 найменування та додатка, який містить список публікацій здобувачки за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі наведено загальні відомості про дисертацію, а саме: обґрунтовано актуальність теми, вказано мету, завдання, предмет та об'єкт досліджень, а також наведено відомості про наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

У першому розділі здобувачка проводить огляд літератури за темою дисертації, зокрема, наведено історичну довідку, мотивацію досліджень, а також сформульовано означення та допоміжні твердження з алгебри та загальної топології.

Другий розділ дисертації повністю присвячений вивченню алгебричних та топологічних властивостей біциклічного напівгрупового розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$. В цьому розділі описано відношення Гріна, показано, що напівгрупа $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ ізоморфна напівгрупі $\mathcal{J}_\omega^{n+1}(\overrightarrow{\text{con}v})$ і доведено, що на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ існують лише конгруенції Ріса, а також досліджено існування компактних та близьких до них напівгрупових і трансляційно-неперервних топологій на $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$.

Третій розділ присвячений дослідженню структури ендоморфізмів біциклічного напівгрупового розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$, інверсної напівгрупи $\mathcal{J}_\omega^n(\overrightarrow{\text{con}v})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини (ω, \leq) рангу $\leq n$. Здобувачка наводить конструкцію напівгрупи ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$, напівгрупи усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць \mathcal{B}_λ та напівгрупи ендоморфізмів напівгрупи $\mathcal{J}_\omega^n(\overrightarrow{\text{con}v})$. Основними результатами є такі твердження: напівгрупа ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ ізоморфна адитивній напівгрупі невід'ємних цілих чисел $(\omega, +)$; напівгрупа усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць \mathcal{B}_λ є диз'юнктивним об'єднанням напівгрупи ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи \mathcal{B}_λ і напівгрупи всіх анулюючих ендоморфізмів напівгрупи \mathcal{B}_λ ; напівгрупа усіх ендоморфізмів напівгрупи $\mathcal{J}_\omega^n(\overrightarrow{\text{con}v})$ є диз'юнктивним об'єднанням множини $\mathfrak{Cnd}^*(\mathcal{J}_\omega^n(\overrightarrow{\text{con}v}))$ та ідеалу $\mathfrak{Cnd}^1(\mathcal{J}_\omega^n(\overrightarrow{\text{con}v}))$.

Ступінь обґрунтованості результатів, їхня наукова новизна

У дисертаційній роботі Попадюк О. Б. «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» авторкою особисто отримано такі результати:

- Охарактеризовано структуру біциклічного розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^n}$;
- Доведено, що напівгрупа $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^n}$ ізоморфна напівгрупі $\mathcal{J}_\omega^{n+1}(\overline{con\mathcal{V}})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини (ω, \leq) рангу $\leq n+1$;
- Доведено, на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^n}$ існують лише конгруенції Піса;
- Описано близькі до компактних трансляційно-неперервні T_1 -топології на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^n}$;
- Описано алгебричну структуру напівгрупи ендоморфізмів напівгруп $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^n}$ та $\mathcal{J}_\omega^n(\overline{con\mathcal{V}})$ і напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць \mathcal{B}_λ .

Усі отримані результати нові та мають строгі доведення.

Зв'язок дисертаційної роботи з державними чи галузевими науковими програмами

Дисертаційна робота Попадюк О. Б. «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри алгебри і логіки (з 2020 року – кафедри алгебри, топології та основ математики) механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми «Топологічна алгебра і асимптотична топологія та їх застосування» (номер державної реєстрації 0122U001602).

Практичне значення наукових результатів

Отримані у рамках виконання дисертаційної роботи результати носять суто теоретичний характер і можуть бути використані у подальших дослідженнях у теорії напівгруп, топологічній алгебрі та комп'ютерній алгебрі.

Особистий внесок здобувача

Результати досліджень, які наведені у дисертаційній роботі, належать авторці, і є її науковим доробком. У спільних з науковим керівником публікаціях О. В. Гутіку належать постановка задач, вибір методів досліджень, а також обговорення отриманих результатів.

Повнота викладу матеріалів у роботах, які опубліковані здобувачкою

Основні наукові результати, отримані під час виконання дисертаційного дослідження Попадюк О. Б., опубліковано в:

- трьох наукових статтях, з яких дві віднесено до переліку наукових фахових видань України, та в одному науковому виданні, що індексується у наукометричних базах Scopus і Web of Science та віднесено до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank;
- двох збірниках матеріалів доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Це дає право стверджувати, що представлена дисертаційна робота є самостійним, завершеним науковим дослідженням, результати якого мають важливе значення для розвитку теорії напівгруп та топологічної алгебри.

Відомості про дотримання академічної доброчесності

Ознайомившись із науковими публікаціями та дисертацією «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» здобувачки О. Б. Попадюк, відзначаю відсутність порушень академічної доброчесності.

Зауваження до дисертації

Хоча дисертаційне дослідження загалом виконане на достатньо високому рівні, можна вказати декілька технічних, граматичних та пунктуаційно помилок, а саме:

- на стор. 35 замість «двобічний» краще було написати «двосторонній»;
- на стор. 37 у переліку властивостей слід писати крапку з комою замість крапки;
- на стор. 38-39 речення «Тоді виконуються такі умови.» варто було продовжити, поставивши двокрапку, а в нумерованому списку писати крапку з комою;
- на стор. 68 в першому реченні після виносної формули зайва крапка;
- на стор. 71 замість «конгуенція» слід писати «конгруенція»;
- на стор. 79 замість слова «представлена» слід писати «введена»;
- на стор. 91 замість слова «тотожнім» слід писати «тотожним»;
- на стор. 104 в 35-й позиції у списку літератури є описки в назві статті;
- на стор. 107 в 66-й позиції у списку літератури після N стоїть зайва дужка;
- на стор. 113 в 138-й позиції - описка у назві статті;
- на стор. 115 у позиції 139 замість «2nd edn.» слід писати «ed.»;
- на стор. 139 на початку речення замість «von Neumann» слід писати «Von Neumann».

Висновок щодо відповідності дисертації нормам

На мою думку, дисертація здобувачки О. Б. Попадюк на тему «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми», подана на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика», є завершеним дослідженням, яке присвячене дослідженню властивостей біциклічного розширення $B_{\omega}^{\mathcal{F}^n}$ та інверсної напівгрупи $J_{\omega}^n(\overline{conv})$ та їхніх напівгруп ендоморфізмів, зокрема, й напівгрупи едоморфізмів напівгрупи B_{λ} $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць. Робота містить ряд важливих та актуальних досліджень, всі доведення є зрозумілими і логічними. Як у самій дисертації, так і в публікаціях відсутні порушення правил академічної доброчесності.

Вважаю, що за новизною, актуальністю, обсягом та практичним значенням дисертація «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 44 від 12 січня 2022 року, та наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації», а її авторка, Попадюк Ольга Богданівна, заслуговує присудження їй ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри алгебри, топології та
основ математики Львівського національного
університету імені Івана Франка

Іванна МЕЛЬНИК