

До спеціалізованої вченої ради ДФ 35.051.119
у Львівському національному
університеті імені Івана Франка
79000, м. Львів, вул. Університетська, 1

ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, доцента,
завідувача кафедри алгебри та геометрії
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
Никифорчина Олега Ростиславовича
на дисертаційну роботу **Попадюк Ольги Богданівни**
«Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми»,
представлену на здобуття ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 «Математика та статистика»
за спеціальністю 111 «Математика»

Дисертаційна робота Попадюк Ольги Богданівни «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» присвячена вивченню алгебричних властивостей та топологізації біциклічного напівгрупового розширення $B_\omega^{F_n}$ у випадку, коли сім'я F_n породжена множиною $\{0, 1, \dots, n\}$, дослідженню інверсної напівгрупи $I_\omega^n(\overline{\text{con}}v)$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини (ω, \leq) рангу $\leq n$ та їхніх напівгруп ендоморфізмів. Цей напрямок досліджень належить до теорії напівгруп, яка знайшла своє застосування у багатьох розділах математики, зокрема, у функціональному аналізі, топології, диференціальних рівняннях.

Багато алгебричних структур мають «красиві» зображення як перетворення певних алгебро-геометричних об'єктів. У дисертації Попадюк О. Б. певні класи біциклічних розширень скінченних інтервалів натуральних чисел мають не лише точне зображення опуклих часткових порядкових ізоморфізмів, а й гарні властивості при топологізації як напівтопологічних напівгруп. Зокрема, у дисертації доведено, що кожна трансляційно-неперервна $D(\omega)$ -компактна T_1 -топологія є компактною на напівгрупі $B_\omega^{F_n}$, що узагальнює відповідний результат для нескінченної напівгрупи матричних одиниць.

Описання напівгруп ендоморфізмів алгебричних систем є дуже складною задачею, тому за цією тематикою опубліковано досить мало робіт. Авторці дисертації, мабуть, випадково, вдалось знайти напівгрупу, яка має унікальну властивість – усі її ендоморфізми породжуються конгруенціями Ріса. У дисертації також описується напівгрупа ендоморфізмів напівгрупи $I_\omega^n(\overline{\text{con}}v)$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини (ω, \leq) рангу $\leq n$.

Дисертація складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 181 найменування та додатку з описом публікацій та участі у конференціях. Загальний обсяг роботи – 119 сторінок. Зміст дисертаційної роботи, її логічне викладення відповідає поставленим завданням дослідження. Рукопис дисертації характеризується завершеністю щодо вирішення поставленої мети.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, наведено мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, зазначено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідницькою темою, особистий внесок здобувача, апробацію та публікації основних результатів дисертації.

У першому розділі авторкою проведено огляд літератури за темою дисертації, наведено історичну довідку, мотивацію досліджень, а також сформульовано означення та допоміжні твердження з алгебри та загальної топології.

Другий розділ присвячений дослідженню біциклічного напівгрупового розширення $B_\omega^{F_n}$, де сім'я F_n породжується скінченим початковим інтервалом. Основними результатами цього розділу є такі:

- описано відношення Гріна для $B_\omega^{F_n}$, зокрема, доведено, що відношення Гріна D та J збігаються на цій напівгрупі (твердження 2.1.1);
- доведено, що напівгрупа $B_\omega^{F_n}$ ізоморфна інверсній напівгрупі $I_\omega^{n+1}(\overline{conv})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини (ω, \leq) рангу $\leq n+1$ (теорема 2.1.5);
- доведено, що на напівгрупі $B_\omega^{F_n}$ існують лише конгруенції Ріса (теорема 2.1.11);
- описано близькі до компактних трансляційно-неперервні T_1 -топології на напівгрупі $B_\omega^{F_n}$.

У третьому розділі дисертаційної роботи отримано структурне описання напівгрупи ендоморфізмів напівгруп $B_\omega^{F_n}$ та $I_\omega^n(\overline{conv})$ і напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць B_λ . У підрозділі 3.1 описано ін'єктивні ендоморфізми напівгрупи $B_\omega^{F_n}$. Доведено, що напівгрупа ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $B_\omega^{F_n}$ ізоморфна адитивній напівгрупі невід'ємних цілих чисел $(\omega, +)$. У підрозділі 3.2 досліджується структура напівгрупи усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць B_λ . Доведено, що напівгрупа усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць B_λ є диз'юнктним об'єднанням напівгрупи ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи B_λ і напівгрупи всіх анулюючих ендоморфізмів напівгрупи B_λ (теорема 3.2.2). У підрозділі 3.3 описано напівгрупу ендоморфізмів інверсної напівгрупи $I_\omega^n(\overline{conv})$ за модулем її ідеала $End^1(I_\omega^n(\overline{conv}))$. Доведено, що напівгрупа усіх ендоморфізмів напівгрупи $I_\omega^n(\overline{conv})$ є диз'юнктним об'єднанням множини $End(I_\omega^n(\overline{conv}))$ та ідеалу $End^1(I_\omega^n(\overline{conv}))$ (теорема 3.3.2).

Усі отримані у дисертаційній роботі результати є новими, а їх доведення не викликають сумніву.

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися на міжнародних конференціях, а також семінарах з теорії напівгруп та топологічної алгебри. Основні результати опубліковано в трьох статтях (одна – одноосібна), які входять до переліку фахових видань, затверджених МОН України, одна з яких у виданні, включеному до міжнародної наукометричної бази Scopus (квартиль Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank).

Дисертаційне дослідження виконано Попадюк О. Б. самостійно. Основні теоретичні положення та розробки, що характеризують наукову новизну дослідження, теоретичне значення його результатів, отримані здобувачкою особисто. Випадків порушення академічної доброчесності, зокрема плагіату, у дисертаційній роботі Попадюк О. Б. не виявлено.

Дисертація оформлена відповідно до вимог Міністерства освіти і науки України, які висуваються до такого роду наукових робіт.

Робота структурована та добре оформлена стилістично. Проте в ній містяться деякі недоліки та описки технічного характеру:

1) означення 1.2.6 насправді є не означенням, а поєднанням твердження і позначення, до того ж розпочинається з «Очевидно, ...»; тільки останнє речення становить означення;

2) у теоремі 1.2.14 (с. 46) «метризованою» замість «метризовною» — безсумнівно, описка;

3) позначення $X \rightarrow Y$ зарезервовано на сторінці 32 для відображень, хоча у роботі повсюдно вживається і для часткових відображень;

4) незначні і нечисленні стилістичні недоліки та пунктуаційні помилки: речення, що розпочинаються з «А ...», не відокремлені комами дієприслівникові звороти (с. 22) та вставні слова, як «мабуть», авторка вживає вислів «виконується випадок» (с. 69-70), термін «непорівняльні» замість «непорівнянні», «вище наведеної» (с. 83) — краще було б «вищенаведеної» чи «наведеної вище».

Однак варто зауважити, що робота безсумнівно ретельно вичитана авторкою (і, мабуть, науковим керівником), тому з складанням списку зауважень опонент мав певний клопіт.

Дисертаційна робота Попадюк О. Б. «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» є завершеним, цілісним та самостійним дослідженням, яке має теоретичний характер. Усі результати дисертації отримані здобувачкою самостійно. Вони мають складні оригінальні доведення, причому при доведенні використані не лише методи теорії напівгруп та загальної топології, а й методи комбінаторики. Отримані результати та методи можуть бути використані та застосовані в теорії напівгруп та топологічній алгебрі.

Вважаю, що за новизною, актуальністю, обсягом та практичним значенням дисертація відповідає вимогам наказу МОН України №40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» та «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022, а її авторка, Попадюк Ольга Богданівна, заслуговує присудження їй ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика».

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук,
доцент, завідувач кафедри
алгебри та геометрії
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника

Олег НИКИФОРЧИН