

До спеціалізованої вченої ради ДФ 35.051.119 у
Львівському національному
університеті імені Івана Франка
79000, м. Львів, вул. Університетська, 1

ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, професора,
завідувача кафедри алгебри та системного аналізу Державного закладу
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»

Жучка Юрія Володимировича

на дисертаційну роботу **Попадюк Ольги Богданівни**
«Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми»,
представлену на здобуття ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 «Математика та статистика»
за спеціальністю 111 «Математика»

Напівгрупи перетворень відіграють досить важливу роль у загальній алгебрі. Добре відомо, що множина всіх перетворень будь-якої алгебраїчної системи, що зберігають задані в ній операції та відношення, утворює напівгрупу відносно композиції перетворень. Більшою мірою саме через перетворення здійснюються зв'язки теорії напівгруп з іншими математичними теоріями. Напівгрупи знайшли застосування у багатьох прикладних напрямках математики, в тому числі в криптології, кодуванні та теоретичній інформатиці. На сьогодні теорія напівгруп складає окремий потужний розділ загальної алгебри, який має власні методи досліджень, задачі та численні результати, а її окремим класам присвячуються цілі монографії. Особливе місце серед об'єктів дослідження сучасної алгебри займають гомоморфізми, зокрема ендоморфізми алгебраїчних систем, які з одного боку, дозволяють ретельно вивчати будову заданих алгебраїчних систем, а з іншого – встановлювати певні зв'язки з більш дослідженими алгебраїчними об'єктами. Напівгрупи ендоморфізмів алгебраїчних систем вивчали такі відомі вчені, як М. Петрич, Б. Стейнберг, Б. І. Плоткін, Г. Житомирський, Б. М. Шайн, Г. Машевицький, Е. Форманек, Л. М. Глускін, Л. Б. Шнеперман, В. С. Мазорчук, У. Кнауер, В. М. Усенко та ін. Особлива увага при вивченні напівгруп ендоморфізмів приділяється побудові точних зображень, опису груп автоморфізмів, абстрактних характеристик, визначеності алгебраїчних систем їх напівгрупами ендоморфізмів, дослідженню алгебраїчних та комбінаторних властивостей тощо.

Одним з центральних понять теорії напівгруп є поняття біциклічної напівгрупи, запропоноване Є.Ляпіним в 1946 р. Вивченню біциклічних розширень з точністю до ізоморфізму, опису їх напівгруп ендоморфізмів та деяких взаємозв'язків з топологією і присвячено роботу Попадюк О.Б. У цій дисертації вивчається структура біциклічного розширення $\mathbf{V}_\omega^{\mathcal{F}_n}$, де сім'я \mathcal{F}_n породжується скінченним початковим інтервалом. Досліджується точне

зображення біциклічного розширення в термінах напівгрупи опуклих часткових порядкових ізоморфізмів певної лінійно впорядкованої множини. Описується структура моноїдів ендоморфізмів напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ та вивчається топологізація зазначеної напівгрупи.

Дисертація складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 181 найменування та додатку з описом публікацій та участі у конференціях. Загальний обсяг роботи – 119 сторінок. Зміст дисертаційної роботи, її логічне викладення відповідає поставленим завданням дослідження. Рукопис дисертації характеризується завершеністю щодо вирішення поставленої мети.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, наведено мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, зазначено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідницькою темою, особистий внесок здобувача, апробацію та публікації основних результатів дисертації.

У першому розділі авторкою проведено огляд літератури за тематикою дисертації, наведено історичну довідку, окреслено мотивацію досліджень, а також сформульовано означення та допоміжні твердження з алгебри та загальної топології.

Другий розділ присвячений дослідженню біциклічного напівгрупового розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$, де сім'я \mathcal{F}_n породжується скінченим початковим інтервалом. Основними в цьому розділі є такі результати. Описано відношення Гріна для напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$, зокрема, доведено, що відношення Гріна \mathcal{D} та \mathcal{J} збігаються на цій напівгрупі (твердження 2.1.1). Доведено, що напівгрупа $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ ізоморфна інверсній напівгрупі $\mathcal{J}_\omega^{n+1}(\overline{\text{con}v})$ опуклих часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини (ω, \leq) рангу $\leq n+1$ (теорема 2.1.5). Встановлено, що на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ існують лише конгруенції Ріса (теорема 2.1.11). Крім того, описано близькі до компактних трансляційно-неперервні T_1 -топології на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$.

У третьому розділі дисертаційної роботи отримано структурне описання напівгрупи ендоморфізмів напівгруп $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ та $\mathcal{J}_\omega^n(\overline{\text{con}v})$ і напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць \mathcal{B}_λ . У підрозділі 3.1 описано ін'єктивні ендоморфізми напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$. Доведено, що напівгрупа ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_n}$ ізоморфна адитивній напівгрупі невід'ємних цілих чисел $(\omega, +)$. У підрозділі 3.2 досліджено структуру напівгрупи усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць \mathcal{B}_λ . Доведено, що напівгрупа усіх ендоморфізмів напівгрупи $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць \mathcal{B}_λ є диз'юнктивним об'єднанням напівгрупи ін'єктивних ендоморфізмів напівгрупи \mathcal{B}_λ і напівгрупи усіх анулюючих ендоморфізмів напівгрупи \mathcal{B}_λ (теорема 3.2.2). У підрозділі 3.3 описано напівгрупу ендоморфізмів інверсної напівгрупи $\mathcal{J}_\omega^n(\overline{\text{con}v})$ за модулем її ідеала $\mathfrak{E}nd^1(\mathcal{J}_\omega^n(\overline{\text{con}v}))$. Доведено, що напівгрупа усіх ендоморфізмів

напівгрупи $J_{\omega}^n(\overline{con\vec{v}})$ є диз'юнктивним об'єднанням множини $\mathbb{E}nd^*(J_{\omega}^n(\overline{con\vec{v}}))$ та ідеалу $\mathbb{E}nd^1(J_{\omega}^n(\overline{con\vec{v}}))$ (теорема 3.3.2).

Представлена дисертація виконана Попадюк О.Б. самостійно та є цілісною роботою, яка має теоретичний характер. Результати роботи, які представлено на захист, є новими, науково обґрунтованими й отримані автором самостійно. Особистий внесок здобувача у публікаціях, виконаних у співавторстві, чітко зазначений у вступі дисертації. Достовірність всіх результатів забезпечена строгими доведеннями, виклад матеріалу дисертації є чітким, логічним та послідовним. Для отримання основних результатів автор використовує різноманітну техніку, яка спирається як на методи теорії напівгруп та загальної топології, так і на комбінаторно-обчислювальні методи дискретної математики.

Загальний список публікацій автора складається з 5 найменувань. Основні результати опубліковано в трьох статтях (одна – одноосібна), які входять до переліку фахових видань, затверджених МОН України, одна з яких у виданні, включеному до міжнародної наукометричної бази Scopus (квартиль Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank). Апробацію деяких матеріалів дисертації здійснено у 2 тезах доповідей міжнародних наукових конференцій.

Дисертація оформлена відповідно до вимог Міністерства освіти і науки України, які висуваються до такого роду наукових робіт, добре структурована та стилістично оформлена. Основні теоретичні положення, що характеризують наукову новизну дослідження та значення його результатів, отримані здобувачкою особисто. Випадків порушення академічної доброчесності, зокрема плагіату, у дисертаційній роботі Попадюк О. Б. не виявлено.

Разом з тим слід відзначити, що дисертаційна робота не є вільною від недоліків. Так, у роботі зустрічаються певні недоліки та описки технічного характеру. Наприклад,

1) на с. 33 у визначенні часткового порядку в умовах (2), (3) треба писати «для всіх $x, y \dots$ » замість «для $x, y \dots$ »;

2) на с. 35, де введено поняття в'язки, варто було б відмітити і інший термін для цього поняття – сполука;

3) на с. 48 після назви п. 2.1 немає крапки в кінці речення (на відміну від інших пунктів);

4) на с. 92, у 10-му рядку знизу замість «крадинала» треба писати «кардинала»;

5) на с. 95 у назві п.3.3 замість «апівгрупи» та «конгуенціями» треба писати «напівгрупи» та «конгруенціями».

Однак, виявлені недоліки та інші технічні неточності, які зустрічаються у тексті роботи, не мають принципового значення, носять переважно редакційний характер та жодним чином не знижують загальної позитивної оцінки роботи.

Відзначимо, що основні результати дисертаційної роботи були успішно представлені на таких алгебраїчних конференціях та наукових семінарах з теорії

напівгруп та топологічної алгебри:

- Міжнародна алгебраїчна конференція «At the End of the Year 2022», м. Київ, 27-28 грудня 2022 р.;
- Міжнародна наукова конференція «The 14th International Algebraic Conference in Ukraine», м. Суми, 3-7 липня 2023 р.;
- Науковий семінар імені проф. М. Комарницького «Теорія полігонів і спектральні простори» у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2022 р., 2023 р.;
- Науковий семінар «Топологічна алгебра» у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2022 р.;
- Науковий семінар кафедри алгебри, топології та основ математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2023 р.

Результати роботи можуть знайти застосування в дослідженнях, що здійснюються науковими колективами Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Інституту математики НАН України, Львівського національного університету імені Івана Франка, Волинського національного університету імені Лесі Українки, Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, Вінницького національного технічного університету, Луганського національного університету імені Тараса Шевченка, а також інших навчальних закладів України, дослідження яких пов'язані з теорією напівгруп.

Підсумовуючи все зазначене вище, вважаю, що дисертація «Біциклічні розширення напівгруп та їхні ендоморфізми» є завершеним науковим дослідженням, містить нові цікаві результати з актуальних розділів теорії напівгруп та відповідає всім необхідним вимогам наказу МОН України №40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» та «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022, а її авторка, Попадюк Ольга Богданівна, заслуговує присудження їй ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика».

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри
алгебри та системного аналізу
Державного закладу «Луганський
національний університет
імені Тараса Шевченка»

Юрій ЖУЧОК