АНОТАЦІЯ

Мокрицький Т.В. Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – "Математика" (Галузь знань – 11 "Математика та статистика"). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2023.

Якщо деяка сім'я перетворень заданої множини замкнена відносно операції композиції, то ця сім'я перетворень утворює напівгрупу відносно операції композиції. Оскільки довільна напівгрупа ізоморфна деякій напівгрупі перетворень, то поняття перетворення є найбільш зручним для вивчення напівгруп в найбільш загальному вигляді. Першою фундаментальною працею з теорії напівгруп перетворень вважається дисертація Антона Сушкевича "Теория действия как общая теория групп" [11]. Основні результати в області теорії напівгруп перетворень були отримані у 50-70-х роках XX-го століття і представлені в оглядах: Меггіла [78] та Глускіна-Шайна-Шнеперман-Ярокера [46]. До числа відомих математиків, які працювали у цьому напрямку, входять Гауі, Глускін, Ґрін, Кліффорд, Ляпін, Меггіл, Престон, Саббіах, Сушкевич, Улям, Шайн, Шнеперман, Шутов та Ярокер.

Природно розглядати перетворення, які зберігають визначену на множині структуру (наприклад, відношення, операцію, топологію чи іншу "геометрію"). Так особливе місце у дослідженнях напівгруп перетворень займають напівгрупи монотонних перетворень частково впорядкованих множин. Цією проблематикою займались такі математики як Айзенштат [1, 2], Гарба [45], Гомес і Гауі [47], Глускін [4], Гутік і Реповш [56, 58, 59], Дорошен-

ко [6, 32], Кім і Кожухов [7, 8], Лараджі та Умар [72, 73], Соломон [96].

Відомо, що біциклічна напівгрупа ізоморфна напівгрупі $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha, \beta)$, яка породжена частковими перетвореннями α і β множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, що визначаються так: $(n)\alpha = n+1$, якщо $n \geqslant 1$ і $(n)\beta = n-1$, якщо $n > 1$. Більше того, напівгрупа $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha, \beta)$ є напівгрупою порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ зі звичайним лінійним порядком.

Біциклічна напівгрупа $\mathcal{C}(p, q)$ біпроста та кожна її конгруенція є або одиничною, або груповою. Більше того, або гомоморфізм h з біциклічної напівгрупи є ізоморфізмом, або образ $\mathcal{C}(p, q)$ стосовно гомоморфізму h є циклічною групою (див. [30, наслідок 1.32]). Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп і в теорії топологічних напівгруп. Зокрема, добре відомий результат Андерсона [18] стверджує, що (0–)проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0–)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфної копії біциклічної напівгрупи. Біциклічний моноїд допускає лише дискретну напівгрупову гаусдорфову топологію, і якщо топологічна напівгрупа S містить його як щільну піднапівгрупу, то $\mathcal{C}(p, q)$ є відкритою підмножиною в S [33]. У кожній гаусдорфовій напівтопологічній (а отже, й у топологічній) напівгрупі S, яка містить біциклічну напівгрупу $\mathcal{C}(p, q)$ як щільну піднапівгрупу, підпростір біциклічної напівгрупи є відкритим і дискретним, і більше того, підмножина $S \setminus \mathcal{C}(p, q)$ є ідеалом в S [26]. Стабільні та Γ-компактні топологічні напівгрупи не містять біциклічного моноїда [19, 62]. Проблема ізоморфного занурення біциклічного моноїда в топологічні напівгрупи близькі до компакних вивчалась в працях [21, 22, 57]. Незалежно від результатів Ебергарт-Селден про топологізацію біциклічної напівгрупи, в праці [14] Тайманов побудував приклад комутативної напівгрупи, яка допускає лише дискретну напівгрупову топологію. Також Тайманов в праці [13] описав достатні умови на комутативну напівгрупу, щоб на ній існувала напівгрупова недискретна топологія. У праці [60] показано, що для напівгрупи Тайманова $\mathfrak{A}_\kappa$ з [14] виконуються такі умови: кожна T_1-топологія τ на напівгрупі $\mathfrak{A}_\kappa$ така, що $(\mathfrak{A}_\kappa, \tau)$ топологічна напівгрупа є дискретною; для кожної T_1-топологічної напівгрупи, що містить $\mathfrak{A}_\kappa$ як піднапівгрупу, $\mathfrak{A}_\kappa$ є замкненою піднапівгрупою в S; і кожний гомоморфний неізоморфний образ $\mathfrak{A}_\kappa$ є напівгрупою з нульовим множенням.

Оскільки біциклічна напівгрупа ізоморфна напівгрупі $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha, \beta)$, яка є напівгрупою порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ зі звичайним лінійним порядком, то природно виникають наступні узагальнення біциклічної напівгрупи:

— *напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів скінченного степеня множини натуральних чисел з порядком добутку для довільного натурального числа $n \geqslant 2$;*

— *напівгрупа $\mathcal{IPF}({}^\kappa\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини*

$$^\kappa\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{N}^\kappa \colon |\{x \in \kappa : \ (x)\, a \neq 1\}| < \infty\}$$

з порядком добутку для довільного нескінченного кардинала κ.

Мета даної дисертаційної роботи полягає у вивченні алгебричних властивостей моноїдів $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $\mathcal{IPF}({}^\kappa\mathbb{N})$, зокрема, встановленні таких властивостей як біпростота, E-унітарність, F-інверсність; дослідженні відношень Ґріна; аналізі конгруенцій на цих напівгрупах та визначенні мінімальної групової конгруенції; дослідженні топологізації напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, зокрема, у перевірці існування на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ гаусдорфової трансляційно-неперервної недискретної топології, дослідженні вкладень моноїда $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ у близькі до компактних топологічні напівгрупи та дослідженні топологічної будови гаусдорфової локально компактної напівтопологічної напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем.

Об'єктом дослідження є моноїди $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$, напівтопологічна напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$.

Предмет дисертаційного дослідження — алгебричні властивості моноїда $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ та його топологізація, а також алгебричні властивості моноїда $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$.

У процесі дослідження дисертаційних задач застосовуються методи алгебричної теорії напівгруп, загальної топології та топологічної алгебри.

Дисертація містить анотації українською та англійською мовами, вступ, чотири основні розділи, висновки, перелік використаної літератури та додаток.

У вступі висвітлено актуальність дослідницької теми, визначено мету, поставлені завдання, об'єкт та предмет дослідження, а також описано методи, що використовувались. Також наведено наукову новизну, практичне значення здобутих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідною темою, особистий внесок здобувача і деталі апробації та публікації основних результатів дисертації.

У першому розділі представлено огляд відповідної літератури по темі дисертації, надано історичний контекст, обґрунтування для проведення досліджень, а також викладено означення понять та допоміжні твердження з алгебри, загальної топології та топологічної алгебри, які використовуються в тексті дисертації.

У розділі 2 вивчаються алгебричні властивості моноїда $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, де n – довільне натуральне число $\geqslant 2$. Зокрема, доведено, що напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є біпростою (твердження 2.1.1), E-унітарною (наслідок 2.1.22) та F-інверсною (наслідок 2.1.23) напівгрупою. Описано відношення Ґріна (твердження 2.1.1), напівґратку ідемпотентів (твердження 2.1.1) і природний частковий порядок на напівгрупі $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ (твердження 2.1.21). Доведено, що група одиниць $H(\mathbb{I})$ моноїда $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна групі підстановок $\mathcal{S}_n$ (теорема 2.1.5), а також описано максимальні підгрупи цього моноїда. Доведено, що напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна напівпрямому добутку прямого n-го степеня біциклічного моноїда групою підстановок $\mathcal{S}_n$ (теорема 2.1.18). Показано, що кожна неодинична конгруенція $\mathfrak{C}$ на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є груповою (теорема 2.1.12), описано мінімальну групову конгренцію $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ (теорема 2.1.19) і доведено, що фактор-напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_n \ltimes \mathbb{Z}_+^n$ прямого n-го степеня адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}_+^n$ групою підстановок $\mathcal{S}_n$ (теорема 2.1.20).

Розділ 3 складається з двох підрозіділів, які присвячені дослідженням топологізації напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$. У першому підрозділі доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є дискретною (теорема 3.1.1). Цей результат узагальнює результат Бертман-Веста з [26] (а отже, і результат Ебергарта-Селдена з [33]). Також доведено теорему 3.1.2, яка узагальнює ще один результат Ебергарта-Селдена, теорему I.3 з [33]: якщо для деякого натурального числа $n \geqslant 2$ напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є щільною підмножиною гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $(S, \cdot)$ й $I = S \setminus \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \neq \varnothing$, то I – двобічний ідеал в S. В теоремі 3.1.6 доведено, що якщо для деякого натурального числа $n \geqslant 2$, гаусдорфова топологічна напівгрупа S містить напівгрупу $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ як щільну піднапівгрупу, то квадрат $S \times S$ не є слабко компактним простором.

У другому підрозділі наведено приклад недискретної гаусдорфової компактної трансляційно-неперервної топології τ_{Ac} на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем (приклад 3.2.8). Доведено, що гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною (теорема 3.2.10). Ця теорема узагальнює результат Гутіка [61], що кожний гаусдорфовий локально компактний напівтопологічний біциклічний моноїд $\mathcal{C}^0$ з приєднаним нулем є або компактним, або дискретним простором.

У розділі 4 вивчаються алгебричні властивості моноїда $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини ${}^{\kappa}\mathbb{N}$ з порядком добутку, де κ – довільний нескінченний кардинал. Зокрема, доведено, що напівгрупа $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ є біпростою (твердження 4.1.1), E-унітарною (твердження 4.1.18) та F-інверсною (твердження 4.1.19) напівгрупою. Описано її напівґратку ідемпотентів (твердження 4.1.1), природний частковий порядок (твердження 4.1.17) і відношення Ґріна (твердження 4.1.1) на напівгрупі $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. Доведено, що група одиниць $H(\mathbb{I})$ моноїда $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ ізоморфна групі бієкцій $\mathcal{S}_{\kappa}$ кардинала κ (теорема 4.1.6), а також описано максимальні підгрупи цього моноїда. Доведено, що напівгрупа $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_{\kappa} \ltimes {}^{\kappa}\mathbb{B}$ напівгрупи ${}^{\kappa}\mathbb{B}$ групою $\mathcal{S}_{\kappa}$ (теорема 4.1.13). Доведено, що кожна неодинична конгренція $\mathfrak{C}$ на моноїді $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ є груповою (теорема 4.1.23), описано мінімальну групову конгруенцію $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ на цій напівгрупі (теорема 4.1.15) і доведено, що фактор-напівгрупа $\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ по мінімальній груповій конгруенції $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_{\kappa} \ltimes {}^{\kappa}\mathbb{Z}_{+}$ групи ${}^{\kappa}\mathbb{Z}_{+}$ групою $\mathcal{S}_{\kappa}$ (теорема 4.1.16).

Додаток включає перелік публікацій автора, пов'язаних з темою дисертації, а також деталі щодо апробації результатів дослідження.

Практичне значення отриманих результатів: дослідження, проведені в дисертації, мають теоретичну основу і можуть бути використані в областях теорії напівгруп та топологічної алгебри.

Ключові слова: *інверсна напівгрупа, монотонне перетворення, напівгрупа часткових порядкових ізоморфізмів, мінімальна групова конгруенція, група підстановок, біциклічний моноїд, напівпрямий добуток, відношення Ґріна, напівтопологічна напівгрупа, топологічна напівгрупа, локально компактний простір, компактний простір.*

Abstract

Mokrytskyi T. V. Semigroups of partial order isomorphisms of partially ordered spaces. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in speciality 111 — "Mathematics" (field of studies 11 — "Mathematics and statistics"). — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2023.

If some family of transformations of a given set is closed under the composition operation, then this family of transformations forms a semigroup under the operation of composition operation. Since an arbitrary semigroup is isomorphic to some semigroup of transformations, the concept of transformations is the most convenient for studying semigroups in the most general form. Anton Sushkevich's thesis "The theory of action as a general theory of groups" [11] is the first work on semigroups of transformations. The main results in the theory of semigroup transformation were obtained in the 50s-70s of the 20th century and are presented in the following reviews: Magill [78] and Gluskin, Schein, Šneperman, Yaroker [46]. Works on the theory of semigroups of transformations were published by mathematicians such as Gaui, Gluskin, Green, Clifford, Lyapin, Magill, Preston, Sabbiah, Sullivan, Sushkevich, Ulam, Shine, Šneperman, Shutov, Yaroker.

It is natural to consider transformations that preserve the structure defined on the set (for example, a relation, operation, topology, or other "geometry"). Thus, semigroups of monotone transformations of partially ordered sets occupy a special place in studies of transformation semigroups. This topic was studied by mathematicians such as Aizenshtat [1,2], Garba [45], Gomes and Howie [47], Gluskin [4], Gutik and Repovš [56,58,59], Doroshenko [6,32], Kim and Kozhukhov [7,8], Laradji and Umar [72,73], Solomon [96].

It is known that the bicyclic semigroup is isomorphic to the semigroup $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha,\beta)$, which is generated by the partial transformations α and β of the set of positive integers $\mathbb{N}$, which are defined as follows: $(n)\alpha = n+1$, if $n \geqslant 1$ and

$(n)\beta = n - 1$, if $n > 1$ (see remark 1.2.10). Moreover, the semigroup $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha, \beta)$ is a semigroup of order isomorphisms between principal filters of the set of positive integers $\mathbb{N}$ with the usual linear order.

The bicyclic semigroup is bisimple and every its congruence is either identity or a group congruence. Moreover, every homomorphism h of the bicyclic semigroup is either an isomorphism or the image of $\mathcal{C}(p, q)$ under h is a cyclic group (see [30, Corollary 1.32]). The bicyclic semigroup plays an important role in algebraic theory of semigroups and in the theory of topological semigroups. For example a well-known Andersen's result [18] states that a (0–)simple semigroup with an (non-zero)idempotent is completely (0–)simple if and only if it contains no isomorphic copy of the bicyclic semigroup. The bicyclic monoid admits only the discrete semigroup Hausdorff topology and if a topological semigroup S contains it as a dense subsemigroup, then $\mathcal{C}(p, q)$ is an open subset of S [33]. In every Hausdorff semitopological (and hence in topological) semigroup S that contains the bicyclic semigroup $\mathcal{C}(p, q)$ as a dense subsemigroup, the subspace of the bicyclic semigroup is open and discrete, and moreover the subset $S \setminus \mathcal{C}(p, q)$ is an ideal in S [26]. Stable and Γ-compact topological semigroups do not contain the bicyclic monoid [19, 62]. The problem of embedding the bicyclic monoid into compact-like topological semigroups are studied in [21, 22, 57]. Independently to Eberhart-Selden results on topolozabilty of the bicyclic semigroup, in [14] Taimanov constructed a commutative semigroup $\mathfrak{A}_\kappa$ of cardinality κ which admits only the discrete semigroup topology. Also, Taimanov [13] gave sufficient conditions on a commutative semigroup to have a non-discrete semigroup topology. In the paper [60] it was showed that for the Taimanov semigroup $\mathfrak{A}_\kappa$ from [14] the following conditions hold: every T_1-topology τ on the semigroup $\mathfrak{A}_\kappa$ such that $(\mathfrak{A}_\kappa, \tau)$ is a topological semigroup is discrete; for every T_1-topological semigroup which contains $\mathfrak{A}_\kappa$ as a subsemigroup, $\mathfrak{A}_\kappa$ is a closed subsemigroup of S; and every homomorphic non-isomorphic image of $\mathfrak{A}_\kappa$ is a zero-semigroup.

Since the bicyclic semigroup is isomorphic to the semigroup $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha,\beta)$, which is the semigroup of order isomorphisms between principal filters of positive integers $\mathbb{N}$ with the usual linear order, then the following generalizations of the bicyclic semigroup naturally arise:

— *The semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ of order isomorphisms between principal filters of finite power of the set of positive integers with product order, for any positive integer $n \geqslant 2$;*

— *The semigroup $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ of order isomorphisms between principal filters of the set*

$$ {}^{\kappa}\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{N}^{\kappa} \colon |\{x \in \kappa : \ (x)\, a \neq 1\}| < \infty\} $$

with product order, for any infinite cardinal κ.

The purpose of the work is to study the algebraic properties of the monoids $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ and $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$, in particular check that this monoids are bisimple, E-unitary, F-inverse; to study the Green's relations; to analyze the congruences on these semigroups and describe the least group congruence; to study the topologization of the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, in particular to check that on the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ there exists a Hausdorff shift-continuous non-discrete topology, to study embeddings of the monoid $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ into compact-like spaces and to study Hausdorff locally compact semitopological semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ with adjoined zero.

The object of the research are monoids $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ and $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$, the semitopological semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$.

The subjects of the study are algebraic properties of the monoid $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ and its topologization, as well as algebraic properties of the monoid $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$.

The methods of the algebraic theory of semigroups, general topology, and topological algebra are used in the process of researching thesis problems.

The thesis consists of an abstracts in Ukrainian and in English, an introduction, four main chapters, conclusions, references and an appendix.

The introduction highlights the relevance of the research topic, defines the purpose, tasks, object and subject of the research, and also describes the methods used. The scientific novelty, the practical significance of the obtained results, the connection of the work with the state scientific research topic, the applicant's contribution and the details of the approval and publication of the main results of the thesis are also given.

The first chapter presents a review of relevant publications on the topic of the thesis, provides historical context, a motivation for research, and formulates definitions and auxiliary statements from algebra, topology, and topological algebra.

In Chapter 2 we study the algebraic properties of the monoid $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ of order isomorphisms between principal filters of the finite power of the set of positive integers with the product order, for any positive integer $n \geqslant 2$. It is shown that the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is bisimple (Proposition 2.1.1), E-unitary (Corollary 2.1.22) and F-inverse (Corollary 2.1.23) semigroup. Green's relation (Proposition 2.1.1), the semilattice of the idempotents (Proposition 2.1.1) and the natural partial order (Proposition 2.1.21) on the monoid $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is described. It is proved (Theorem 2.1.5) that the group of units $H(\mathbb{I})$ of the monoid $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is isomorphic to the permutation group $\mathcal{S}_n$, and maximal subgroups of this monoid are described. Also, it is proved (Theorem 2.1.18) that the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is isomorphic to the semidirect product of the direct n-th power of the bicyclic monoid by the group of permutation $\mathcal{S}_n$. It is shown (Theorem 2.1.12) that every non-identity congruence $\mathfrak{C}$ on the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is a group congruence. The least group congruence $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ is described (Theorem 2.1.19) and it is proved that the quotient-semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ by the least group congruence $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ is isomorphic to the semidirect product $\mathcal{S}_n \ltimes \mathbb{Z}_+^n$ of the direct n-th power of the additive group of integers $\mathbb{Z}_+^n$ by the group of permutations $\mathcal{S}_n$ (Theorem 2.1.20).

Chapter 3 consists of two subsections, which are devoted to the topologization of the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$. In the first subsection, it is shown (Theorem 3.1.1) that each Hausdorff shift-continuous topology on the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is discrete.

This result generalizes the Bertman-West result from [26] (and hence Eberhart-Selden result from [33]). Theorem 3.1.2 is also proved, which generalizes another Eberhart-Selden result, Theorem I.3 from [33]. So, Theorem 3.1.2 states that if for some positive integer $n \geqslant 2$ the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is a dense subset of the Hausdorff semitopological semigroup $(S, \cdot)$ and $I = S \setminus \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \neq \varnothing$, then I is a two-sided ideal in S. Next, Theorem 3.1.6 states that if for some positive integer $n \geqslant 2$, the Hausdorff topological semigroup S contains the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ as a dense subsemigroup, then the square $S \times S$ is not a feebly compact space.

The second subsection considers an example (3.2.8) of a non-discrete Hausdorff compact shift-continuous topology τ_{Ac} on the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ with adjoined zero. It is justified (Remark 3.2.9) why this topology τ_{Ac} is the unique Hausdorff compact shift-continuous topology on $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0$. And it is proved that the Hausdorff locally compact semitopological semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ with adjoined zero is either compact or discrete (Theorem 3.2.10). This theorem extends the following Gutik's result [61]: every Hausdorff locally compact semitopological bicyclic monoid $\mathcal{C}^0$ with adjoined zero is either compact or discrete.

In Chapter 4 the algebraic properties of the monoid $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ of order isomorphisms between principal filters of the set ${}^{\kappa}\mathbb{N}$ with the product order, for any infinite cardinal κ are studied. It is shown that the semigroup $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ is bisimple (Proposition 4.1.1), E-unitary (Proposition 4.1.18) and F-inverse (Proposition 4.1.19) semigroup. It is described the semilattice of the idempotents (Proposition 4.1.1), the natural partial order (Proposition 4.1.17) and Green's relations (Proposition 4.1.1) on the monoid $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. It is proved (Theorem 4.1.6) that the group of units $H(\mathbb{I})$ of the monoid $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ is isomorphic to the group $\mathcal{S}_\kappa$ of all bijections of the cardinal κ, and maximal subgroups of this monoid are described, too. Also, it is proved (Theorem 4.1.13) that the semigroup $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ is isomorphic to the semidirect product $\mathcal{S}_\kappa \ltimes {}^{\kappa}\mathbb{B}$ of the semigroup ${}^{\kappa}\mathbb{B}$ by the group $\mathcal{S}_\kappa$. It is shown (Theorem 4.1.23) that every non-identity congruence $\mathfrak{C}$ on the semigroup $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ is a group, described (Theorem 4.1.15) the least group congruence $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ and proved (Theorem 4.1.16) that the quotient-semigroup $\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ is isomorphic to the semidirect product $\mathcal{S}_\kappa \ltimes {}^{\kappa}\mathbb{Z}_+$ of the group ${}^{\kappa}\mathbb{Z}_+$ by the group $\mathcal{S}_\kappa$.

The appendix contains a list of the author's publications related to the topic of the thesis, as well as details on the approbation of the research results.

Practical significance of the obtained results: the studies carried out in the thesis have a theoretical basis and can be used in the fields of semigroup theory and topological algebra.

Keywords: *inverse semigroup, monotone mapping, semigroup of partial order isomorphisms, least group congruence, permutation group, bicyclic monoid, semidirect product, Green's relations, semitopological semigroup, topological semigroup, locally compact space, compact, discrete space.*

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Список публікацій, в яких опубліковано основні результати дисертації:

(1) Mokrytskyi, T.: On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$ with adjoined zero. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **87**, 37–45 (2019).

(2) Gutik, O., Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^\kappa$. European Journal of Mathematics. **6**, 14–36 (2020). (Scopus, Q2)

(3) Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\sigma\mathbb{N}^\kappa$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **93**, 14–33 (2022).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

(1) Gutik, O., Mokrytskyi, T.: On the semigroup of order isomorphisms of principal filters of a power of the integers. In: Abstracts of the International Conference in Functional Analysys dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, p. 74. University of Lviv, Lviv, Ukraine, 18–23 September 2017.

(2) Mokrytskyi, T.: On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms of principal filters of a power of the positive integers with adjoined zero. In: Abstracts of the International Conference dedicated to 70th anniversary of Professor A. M. Plichko "Banach Spaces and their Applications", p. 85–86. Lviv, Ukraine, 26–29 June 2019.

(3) Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal

filters of $\sigma(\mathbb{N}^{\kappa})$. In: Abstracts of the International Algebraic Conference "At the End of the Year", p. 19. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 27–28 December, 2021.