АНОТАЦІЯ

Василишин А.В. Термомагнітоелектропружність неідеально поєднаних структур з внутрішніми тонкими включеннями. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 “Прикладна математика” (11 – Математика та статистика). – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2023.

Дисертація стосується дослідження термо-, магніто-, електронапружено-деформованого стану неідеально поєднаних кусково-однорідних термомагнітоелектропружних твердих тіл із внутрішніми тонкими стрічковими включеннями та тунельними отворами. Метою дисертаційної роботи є розробка математичних моделей та високопродуктивних аналітичних і аналітично-числових методів аналізу плоских фізико-механічних полів у кусково-однорідних (півпростори, біматеріали та їхні фрагменти) тілах зі змішаними термомеханічними крайовими умовами на їхніх поверхнях (зокрема й контактних) з урахуванням наявності тонких стрічкових включень (у т.ч. тріщин).

Об’єктом дослідження є кусково-однорідні ізотропні, анізотропні, п'єзоелектричні, термо- та магнітоелектропружні безмежні (півбезмежні) біматеріальні структури та тіла скінченних розмірів з неідеальним температурним контактом їхніх компонент, а також півпростори зі змішаними крайовими умовами на межі, що містять тунельні отвори та тонкі стрічкові включення (як частковий випадок тріщини). Предметом дослідження є двовимірний плоский (плоска деформація) термо-, магніто- електронапружено-деформований стани, розподіл та концентрація фізико-механічних полів у матеріальних півпросторах та біматеріальних тілах з тонкими стрічковими неоднорідностями за врахування змішаних термомеханічних крайових умов на внутрішніх межах та інтерфейсу високої теплопровідності у біматеріалі.

Необхідність створення нових методів аналізу термомагнітоелектропружних матеріалів зумовлена їх широким застосуванням у галузях мікроелектроніки, біотехнологій, енергетики, авіаційній та космічній техніці тощо. Важливі для практичного використання властивості цих матеріалів обумовлені здатністю внутрішньо поєднувати та перерозподіляти енергію декількох полів різної фізичної природи, що відіграє істотну роль у сучасному інженерному проєктуванні і на високотехнологічних виробництвах. З метою отримання унікальних властивостей термомагнітоелектричні матеріали виготовляють шляхом механічного поєднання піроелектричної та піромагнітної фаз, яке, зазвичай, виконується за допомогою зв'язуючого прошарку, що додатково впливає на термомагнітоелектропружні властивості такої мультиматеріальної композиції.

Крім цього, як і будь-які інші, термомагнітоелектропружні матеріали можуть містити різного роду неоднорідності (включення), зокрема, й тонкі. Останні можуть бути природними, цілеспрямовано впровадженими з метою зміни функціональних макро- та мікровластивостей, або ж виникати у процесі виробництва, обробки чи експлуатації. Також в елементах конструкцій чи деталях приладів можуть виникати різного роду структурні зміни, що в свою чергу у більшості випадків спричиняють появу тріщин. Наявність таких неоднорідностей нерідко призводить до виникнення концентрацій напружень та інших фізико-механічних полів і, відповідно, зниження надійності та експлуатаційних характеристик виробів.

У зв'язку з цим виникає необхідність розробки нових високопродуктивних аналітичних та аналітично-числових методів, що дали б можливість здійснити кількісну оцінку інтенсивності та розподілу фізико-механічних полів, що можуть взаємодіяти у кусково-однорідних мультиматеріальних тілах складної геометричної конфігурації із тріщинами, включеннями та іншими тонкими неоднорідностями. Крім цього, розрахункові моделі термомагнітоелектропружних середовищ повинні враховувати велике різноманіття фізичних властивостей полів, що діють у них. Внаслідок цього постає необхідність розробки нових щораз складніших математичних моделей.

Дисертаційна робота складається із чотирьох розділів. У першому розділі здійснено огляд літературних джерел, у яких вивчаються питання теорії тонких неоднорідностей, а також висвітлюються основні методи дослідження тіл (анізотропних п'єзоелектричних, п'єзомагнітних, термомагнітоелектропружних) із тонкими неоднорідностями. У результаті аналізу літературних джерел з'ясовано, що на даний час мало дослідженими є інтегральні формули та сингулярні інтегральні рівняння для математичного моделювання анізотропного термомагнітоелектропружного півпростору з включеннями, отворами, і тріщинами. До цього часу не було створено математичного апарату для розв'язування відповідної плоскої задачі тонкостінних включень з урахуванням усіх можливих змішаних механічних і теплових крайових умов на межі півпростору чи його фрагменту. Також не було створено високоефективних модифікацій числових методів типу граничних елементів для розв'язування відповідної задачі. На даний час не сформульовано підходу, який дав би можливість ефективно аналізувати розподіл фізико-механічних полів у наділених тонкостінними включеннями скінченних двокомпонентних тілах із інтерфейсом високої теплопровідності. Відтак існує необхідність у розробці цілісних математичних моделей і методів аналізу біматеріальних термомагнітоелектропружних тіл, які можуть містити як дефекти структури, так і цілеспрямовано введені тонкі прошарки, які змінюють властивості цих тіл. Досі не було побудовано схеми прямого методу граничних елементів для відповідних задач. Дуже мало досліджень стосується нескінченних та обмежених термомагнітоелектропружних біматеріальних тіл із тонкими неоднорідностями за наявності інтерфейсу високої теплопровідності.

У другому розділі дисертації містяться основні співвідношення термо-магнітоелектропружності для анізотропних тіл, а також формули розширеного формалізму Стро, на основі якого у роботі побудовано інтегральні рівняння сформульованих задач. Також тут описано принцип спряження континуумів різної вимірності та концепцію методу функцій стрибка, які застосовуються для моделювання тіл із тонкими неоднорідностями; наведені моделі тонкого магнітоелектропружного та термомагнітоелектропружного включень. Крім

цього, описана схема модифікованого методу граничних елементів для розв'язування систем сингулярних інтегральних рівнянь плоских задач теорії тонкостінних включень.

У третьому розділі на основі концепції граничноелементного методу функцій стрибка створено підхід для дослідження задач термопружності неоднорідного анізотропного півпростору зі змішаними крайовими умовами на його межі. Для цього із використанням розширеного формалізму Стро та теорії функції комплексної змінної побудовано інтегральні формули типу Сомільяни та відповідні сингулярні інтегральні рівняння, ядра яких записано у явному вигляді і які не містять інтегрування по об'єму чи межі півпростору. За допомогою принципу спряження континуумів різної вимірності побудовано математичну модель анізотропного термомагнітоелектропружного півпростору зі змішаними крайовими умовами на його межі та системами внутрішніх тонких деформівних включень, отворів та тріщин. Отримані системи рівнянь розв'язувалися за допомогою модифікованого методу граничних елементів, завдяки чому отримано розв'язки нових задач для анізотропного півпростору зі змішаними крайовими умовами на його межі у разі, коли тіло також містить тонке прямолінійне включення, нахилене під кутом до поверхні матеріалу. Побудовано графічні залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень від відносної жорсткості та кутів нахилу тонкої неоднорідності. Здійснено числовий аналіз впливу крайових умов на межі півпростору на узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах включення. Також досліджено дію ефекту згину включення на значення цих коефіцієнтів.

У четвертому розділі розглянуто крайові задачі для термомагнітоелектропружного біматеріального простору чи його фрагменту з неідеальним тепловим та ідеальним магнітоелектромеханічним контактом складових, котрі, у свою чергу, можуть містити тунельні отвори, тріщини та внутрішні тонкі стрічкові неоднорідності. На основі теорії функції комплексної змінної та розширеного формалізму Стро у замкнутій формі побудовано суто крайові інтегральні рівняння сформульованої задачі для відповідних задач теорії тонкостінних включень, у яких неідеальна термомагнітоелектромеханічна

взаємодія компонент кусково-однорідного тіла врахована у ядрах цих рівнянь. В останні входять лише інтеграли уздовж ліній стрибків фізико-механічних полів (для тріщин чи тонких включень) та інтеграли уздовж можливої зовнішньої межі, яка виходить на межу півпростору, та берегів внутрішніх отворів. Розв'язування за допомогою модифікованого методу граничних елементів отриманих інтегральних рівнянь дало можливість побудувати числові розв'язки декількох нових задач для скінченних та безмежних біматеріальних тіл, що складаються з однакових та різних анізотропних термомагнітоелектропружних матеріалів, а також містять тонкі деформівні стрічкові включення. Побудовано графічні залежності узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень, електричних зміщень та магнітної індукції від параметра теплопровідності внутрішньої межі поділу матеріалів. Отримані результати показують, що інтерфейс високої теплопровідності істотно впливає на поля напружень у вершинах тонких включень. У тому числі він здійснює значний вплив на значення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності електричних зміщень.

На основі застосування розвинень комплексних потенціалів Стро у степеневі ряди, з подальшим задоволенням крайових умов на основі підходу найменших квадратів побудовано напіваналітичний обчислювальний метод аналізу фізико-механічних полів у біматеріальних структурах із неідеальним контактом складових.

Ключові слова: термомагнітоелектропружність, плоска задача, півпростір, біматеріал, інтерфейс високої теплопровідності, неідеальний тепловий контакт, тонке включення, тріщина, формалізм Стро, міжфазний прошарок, метод граничних елементів.

ABSTRACT

Vasylyshyn A.V. Thermomagnetoelectroelasticity of imperfectly bonded structures with internal thin inclusions. – Manuscript copyright.

Thesis for the Doctor of Philosophy, speciality 113 "Applied Mathematics" (11 – Mathematics and statistics). – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2023**.**

The dissertation concerns the study of the thermo-, magnetic-, electro-elastic-deformed state of imperfectly connected piecewise homogeneous thermo-magneto-electroelastic solids with internal thin ribbon inclusions and tunnel holes. The purpose of the dissertation is the development of mathematical models and high-performance analytical and analytical-numerical methods for the analysis of flat physicomechanical fields in piecewise homogeneous (half-spaces, bimaterials and their fragments) solids with mixed thermomechanical boundary conditions on their surfaces (in particular, contact ones) taking into account the presence thin ribbon inclusions (including cracks).

The need to develop new methods for analyzing thermomagnetoelectroelastic materials arises from their widespread applications in fields such as microelectronics, biotechnology, energy, aviation, aerospace, and more. The practical utility of these materials is driven by their ability to internally combine and redistribute the energy of multiple fields of different physical natures, which plays a significant role in modern engineering design and high-tech manufacturing. To achieve unique properties, thermomagnetoelectroelastic materials are fabricated by mechanically combining pyroelectric and pyromagnetic phases, typically through the use of a bonding layer, which, in turn, affects the thermomagnetoelectroelastic properties of such multi-material compositions.

Furthermore, like any other materials, thermomagnetoelectroelastic materials can contain various types of heterogeneities and inclusions, including thin ones. These inclusions can be either natural or intentionally introduced to alter the functional macro- and micro-properties, or they may arise during the manufacturing, processing,

and usage of the materials. Additionally, structural changes can occur in components of structures or device parts, which, in most cases, lead to the formation of cracks. The presence of such heterogeneities often results in the generation of stress concentrations and other physicomechanical fields, thereby reducing the reliability and operational characteristics of products.

Therefore, there is a need to develop new high-performance analytical and analytical-numerical methods that would allow for a quantitative assessment of the intensity and distribution of physicomechanical fields interacting within complexly shaped, piecewise-homogeneous multi-material solids with cracks, inclusions, and other thin heterogeneities. Additionally, computational models for thermomagneto-electroelastic materials must account for a wide range of physical properties of the fields acting within them, necessitating the development of more complex mathematical models.

The dissertation consists of four chapters. The first chapter provides a literature review focusing on the theory of thin inhomogeneities and highlights the main research methods for solids (including anisotropic piezoelectric, piezomagnetic, thermomagnetoelastic) with thin inhomogeneities. The analysis of the literature reveals that there is currently limited research on integral formulas and singular integral equations for modeling anisotropic thermomagnetoelastic half-spaces with inclusions, voids, and cracks. Up to this point, no solution has been developed for this problem that accounts for all possible mixed mechanical and thermal boundary conditions on the half-space boundary. Moreover, numerical methods such as the boundary element method have not been devised for solving this particular problem.

Currently, there is no formulated approach that would enable the analysis of the distribution of physicomechanical fields in finite two-component solids with a high thermal conductivity interface. There is also a need to develop comprehensive mathematical models and analysis methods for bimaterial thermomagnetoelastic solids, which can include structural defects and intentionally introduced thin layers altering the properties of these solids. A direct boundary element method scheme for these tasks has not been constructed to date. Additionally, there is very limited research

on infinite and bounded bimaterial thermomagnetoelastic solids with thin inhomogeneities in the presence of a high thermal conductivity interface.

The second chapter of the dissertation contains the fundamental relations of thermomagnetoelectroelasticity for anisotropic materials, as well as formulas of the extended Stroh formalism, which are used to formulate integral equations in this work. Additionally, this chapter describes the principle of coupling continua of different dimensions and the concept of the jump function method, which are applied for modeling solids with thin inhomogeneities. Models for thin magnetoelectroelastic and thermomagnetoelectroelastic inclusions are presented. Furthermore, the chapter outlines the scheme of the boundary element method for solving systems of singular integral equations in two-dimensional problems.

In the third chapter, based on the concept of the boundary element method with the jump function approach, an approach is developed to investigate the problems of thermoelasticity in an inhomogeneous anisotropic half-space with mixed boundary conditions on its boundaries. To achieve this, Somigliana type integral formulas and corresponding singular integral equations are derived using the Stroh formalism and the theory of complex variable functions, with their kernels expressed explicitly. By applying the principle of coupling continua of different dimensions, a mathematical model is constructed for an anisotropic thermomagnetoelectroelastic half-space with mixed boundary conditions on its boundaries and systems of internal thin deformable inclusions, holes, and cracks. The resulting systems of equations are solved using a modified boundary element method, which allows obtaining solutions for several new problems involving an anisotropic half-space with mixed boundary conditions on its boundaries, including cases with thin rectilinear inclusions inclined at an angle to the material’s surface. Graphical dependencies of stress intensity factors on relative stiffness and inclination angles of the thin inhomogeneities are constructed. A numerical analysis is also conducted to investigate the influence of boundary conditions on the half-space boundaries on the stress intensity factors at the inclusion vertices. Additionally, the effect of the inclusion bending on the stress intensity factor values is examined.

In the fourth chapter, boundary value problems are considered for a thermo-magnetoelectroelastic bimaterial solid with imperfect thermal and perfect magneto-electromechanical contact between its components, which may, in turn, contain holes, cracks, and internal thin inhomogeneities. Using the theory of complex variable functions and the Stroh formalism, a closed-form formulation is developed for boundary integral equations of the formulated problem. These equations incorporate the imperfect thermomagnetoelectromechanical interaction of the components of the piecewise homogeneous solids within their kernels. The integrals in these equations only include those along the lines of jumps in the physical field variables (for cracks or thin inclusions) and integrals along the external boundary and shores of internal voids. Solving these integral equations using the modified boundary element method has enabled the construction of numerical solutions for several new problems involving finite and infinite bimaterial bodies composed of identical and different anisotropic thermomagnetoelectroelastic materials, including those containing thin deformable strip-like inclusions. Graphical dependencies are established for generalized stress intensity factors, electric displacements, and magnetic inductions as functions of the thermal conductivity parameter at the internal material interface. The obtained results demonstrate a significant influence of the high thermal conductivity interface on stress fields at the vertices of thin inclusions, including its substantial effect on the values of electric displacement intensity factors.

Based on the application of complex expansions of the Stroh potential in a power series followed by the satisfaction of boundary conditions using the least squares approach, a semi-analytical computational method has been developed for the analysis of physicomechanical fields in structures made of two materials with non-ideal contact between components.

Keywords: thermomagnetoelectroelasticity, planar problem, half-space, bimaterial, high-temperature conducting interface, non-ideal thermal contact, thin inclusion, crack, Stroh formalism, interfacial layer, boundary element method.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Sulym H., Pasternak I., **Vasylyshyn A.**, Smal M. Mixed boundary value problem for an anisotropic thermoelastic half-space containing thin inhomogeneities. *Acta Mechanica et Automatica*. 2019. Vol. 13. P. 238–244 (Scopus, Q3).
   DOI: https://doi.org/10.2478/ama-2019-0032
2. **Vasylyshyn A.**, Sulym H., Pasternak I. Thermomagnetoelectroelasticity of Bimaterial Solids with High Temperature Conducting Interface and Thin Internal Inhomogeneities. Structural Integrity. 2020. Vol. 16, P. 261–267 (Scopus, Q4).
   DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_47
3. Sulym H., **Vasylyshyn A.**, Pasternak I. Influence of imperfect interface of anisotropic thermomagnetoelectroelastic bimaterial solids on interaction of thin deformable inclusion. *Acta Mechanica et Automatica*. 2022. 3. P. 242–249 (Scopus, Q3).
   DOI: https://doi.org/10.2478/ama-2022-0029
4. Pasternak Ia.M., Sulym H.T., **Vasylyshyn A.V.**, Iasniy O.P. Influence of interfacial layers of high thermal conductivity on the distribution of physicomechanical fields in two-component structures. *Materials Science.* 2023. Vol. 58, № 6, P. 725–730 (Scopus, Q2).
   DOI: https://doi.org/10.1007/s11003-023-00722-1

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. **Василишин А.**, Пастернак Я., Звізло І., Сулим Г. Термомагнітоелектропружність скінченних кусковооднорідних тіл за наявності сполучного прошарку та внутрішніх тонких включень.

Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики – 2023". Львів, 2023. С. 179–18.

2. Sulym H., Paternak I., **Vasylyshyn A**. Influence of hight temeperature conducting interface on temperature induced fields in finite bimaterial solids. *International conference "Polish Conference on Crystal Growth"*. Gdansk, 2022.
3. **Василишин А.**, Звізло І. Вплив інтерфейсу високої теплопровідності у біматеріальних скінченних тілах. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання* – 2022*"*. Львів, 2022.
4. **Василишин А.**, Сулим Г. Вплив інтерфейсу високої теплопровідності обмежених біматеріальних тіл на взаємодію внутрішніх тріщин. "*15-ий Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові*". Львів, 2021. С. 36-37.
5. **Василишин А**. Періодичні задачі термомагнітоелектропружності тіл із тонкими включеннями. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання* – 2021*"*. Львів, 2021.
6. **Василишин А.**, Пастернак Я., Термомагнітоелектропружність анізотропного біматеріалу із неідеальним магнітоелектромеханічним контактом складових. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання* – 2020*"*. Львів, 2020.
7. **Василишин А.** Термопружність анізотропного півпростору зі змішаними крайовими умовами на межі та внутрішніми тонкими неоднорідностями. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання* – 2019*"*. Львів, 2019.
8. **Василишин А.,** Сулим Г., Пастернак Я. Термомагнітоелектропружність біматеріальних тіл із тонкими включеннями та тріщинами за неідеального контакту фаз. *Друга міжнародна науково-технічна конференція пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського "Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій (до сторіччя від дня народження)"*. Дніпро, 2019. С. 63–64.

9. Сулим Г., **Василишин А.** Термомагнітоелектропружність структурно неоднорідних біматеріальних тіл із неідеальним тепловим контактом складових. *10-а Міжнародна наукова конференція "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур"*. Львів, 2019. С. 202–203.