Львівський національний університет імені Івана Франка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Мокрицький Тарас Володимирович

УДК 512.536+512.568.2

ДИСЕРТАЦІЯ

Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів

Спеціальність — 111 ”Математика”
Галузь знань — 11 ”Математика та статистика”

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _________________ Т. В. Мокрицький

Науковий керівник **Гутік Олег Володимирович**,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
старший науковий співробітник

Львів—2023

АНОТАЦІЯ

Мокрицький Т.В. Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – "Математика" (Галузь знань – 11 "Математика та статистика"). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2023.

Якщо деяка сім'я перетворень заданої множини замкнена відносно операції композиції, то ця сім'я перетворень утворює напівгрупу відносно операції композиції. Оскільки довільна напівгрупа ізоморфна деякій напівгрупі перетворень, то поняття перетворення є найбільш зручним для вивчення напівгруп в найбільш загальному вигляді. Першою фундаментальною працею з теорії напівгруп перетворень вважається дисертація Антона Сушкевича "Теория действия как общая теория групп" [11]. Основні результати в області теорії напівгруп перетворень були отримані у 50-70-х роках XX-го століття і представлені в оглядах: Меггіла [78] та Глускіна-Шайна-Шнеперман-Ярокера [46]. До числа відомих математиків, які працювали у цьому напрямку, входять Гауі, Глускін, Ґрін, Кліффорд, Ляпін, Меггіл, Престон, Саббіах, Сушкевич, Улям, Шайн, Шнеперман, Шутов та Ярокер.

Природно розглядати перетворення, які зберігають визначену на множині структуру (наприклад, відношення, операцію, топологію чи іншу "геометрію"). Так особливе місце у дослідженнях напівгруп перетворень займають напівгрупи монотонних перетворень частково впорядкованих множин. Цією проблематикою займались такі математики як Айзенштат [1, 2], Гарба [45], Гомес і Гауі [47], Глускін [4], Гутік і Реповш [56, 58, 59], Дорошен-

ко [6, 32], Кім і Кожухов [7, 8], Лараджі та Умар [72, 73], Соломон [96].

Відомо, що біциклічна напівгрупа ізоморфна напівгрупі $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha, \beta)$, яка породжена частковими перетвореннями α і β множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, що визначаються так: $(n)\alpha = n+1$, якщо $n \geqslant 1$ і $(n)\beta = n-1$, якщо $n > 1$. Більше того, напівгрупа $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha, \beta)$ є напівгрупою порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ зі звичайним лінійним порядком.

Біциклічна напівгрупа $\mathcal{C}(p, q)$ біпроста та кожна її конгруенція є або одиничною, або груповою. Більше того, або гомоморфізм h з біциклічної напівгрупи є ізоморфізмом, або образ $\mathcal{C}(p, q)$ стосовно гомоморфізму h є циклічною групою (див. [30, наслідок 1.32]). Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп і в теорії топологічних напівгруп. Зокрема, добре відомий результат Андерсона [18] стверджує, що (0–)проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0–)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфної копії біциклічної напівгрупи. Біциклічний моноїд допускає лише дискретну напівгрупову гаусдорфову топологію, і якщо топологічна напівгрупа S містить його як щільну піднапівгрупу, то $\mathcal{C}(p, q)$ є відкритою підмножиною в S [33]. У кожній гаусдорфовій напівтопологічній (а отже, й у топологічній) напівгрупі S, яка містить біциклічну напівгрупу $\mathcal{C}(p, q)$ як щільну піднапівгрупу, підпростір біциклічної напівгрупи є відкритим і дискретним, і більше того, підмножина $S \setminus \mathcal{C}(p, q)$ є ідеалом в S [26]. Стабільні та Г-компактні топологічні напівгрупи не містять біциклічного моноїда [19, 62]. Проблема ізоморфного занурення біциклічного моноїда в топологічні напівгрупи близькі до компакних вивчалась в працях [21, 22, 57]. Незалежно від результатів Ебергарт-Селден про топологізацію біциклічної напівгрупи, в праці [14] Тайманов побудував приклад комутативної напівгрупи, яка допускає лише дискретну напівгрупову топологію. Також Тайманов в праці [13] описав достатні умови на комутативну напівгрупу, щоб на ній існувала напівгрупова недискретна топологія. У праці [60] показано, що для напівгрупи Тайманова $\mathfrak{A}_\kappa$ з [14] виконуються такі умови: кожна T_1-топологія τ на напівгрупі $\mathfrak{A}_\kappa$ така, що $(\mathfrak{A}_\kappa, \tau)$ топологічна напівгрупа є дискретною; для кожної T_1-топологічної напівгрупи, що містить $\mathfrak{A}_\kappa$ як піднапівгрупу, $\mathfrak{A}_\kappa$ є замкненою піднапівгрупою в S; і кожний гомоморфний неізоморфний образ $\mathfrak{A}_\kappa$ є напівгрупою з нульовим множенням.

Оскільки біциклічна напівгрупа ізоморфна напівгрупі $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha, \beta)$, яка є напівгрупою порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ зі звичайним лінійним порядком, то природно виникають наступні узагальнення біциклічної напівгрупи:

— *напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів скінченного степеня множини натуральних чисел з порядком добутку для довільного натурального числа $n \geqslant 2$;*

— *напівгрупа $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини*

$$ {}^{\kappa}\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{N}^{\kappa} \colon |\{x \in \kappa : \ (x)\,a \neq 1\}| < \infty\} $$

з порядком добутку для довільного нескінченного кардинала κ.

Мета даної дисертаційної роботи полягає у вивченні алгебричних властивостей моноїдів $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$, зокрема, встановленні таких властивостей як біпростота, E-унітарність, F-інверсність; дослідженні відношень Ґріна; аналізі конгруенцій на цих напівгрупах та визначенні мінімальної групової конгруенції; дослідженні топологізації напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$, зокрема, у перевірці існування на напівгрупі $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ гаусдорфової трансляційно-неперервної недискретної топології, дослідженні вкладень моноїда $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ у близькі до компактних топологічні напівгрупи та дослідженні топологічної будови гаусдорфової локально компактної напівтопологічної напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем.

Об'єктом дослідження є моноїди $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$, напівтопологічна напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$.

Предмет дисертаційного дослідження — алгебричні властивості моноїда $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ та його топологізація, а також алгебричні властивості моноїда $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$.

У процесі дослідження дисертаційних задач застосовуються методи алгебричної теорії напівгруп, загальної топології та топологічної алгебри.

Дисертація містить анотації українською та англійською мовами, вступ, чотири основні розділи, висновки, перелік використаної літератури та додаток.

У вступі висвітлено актуальність дослідницької теми, визначено мету, поставлені завдання, об'єкт та предмет дослідження, а також описано методи, що використовувались. Також наведено наукову новизну, практичне значення здобутих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідною темою, особистий внесок здобувача і деталі апробації та публікації основних результатів дисертації.

У першому розділі представлено огляд відповідної літератури по темі дисертації, надано історичний контекст, обґрунтування для проведення досліджень, а також викладено означення понять та допоміжні твердження з алгебри, загальної топології та топологічної алгебри, які використовуються в тексті дисертації.

У розділі 2 вивчаються алгебричні властивості моноїда $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, де n – довільне натуральне число $\geqslant 2$. Зокрема, доведено, що напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є біпростою (твердження 2.1.1), E-унітарною (наслідок 2.1.22) та F-інверсною (наслідок 2.1.23) напівгрупою. Описано відношення Ґріна (твердження 2.1.1), напівґратку ідемпотентів (твердження 2.1.1) і природний частковий порядок на напівгрупі $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ (твердження 2.1.21). Доведено, що група одиниць $H(\mathbb{I})$ моноїда $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна групі підстановок $\mathcal{S}_n$ (теорема 2.1.5), а також описано максимальні підгрупи цього моноїда. Доведено, що напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна напівпрямому добутку прямого n-го степеня біциклічного моноїда групою підстановок $\mathcal{S}_n$ (теорема 2.1.18). Показано, що кожна неодинична конгруенція $\mathfrak{C}$ на напівгрупі $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є груповою (теорема 2.1.12), описано мінімальну групову конгренцію $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ (теорема 2.1.19) і доведено, що фактор-напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_n \ltimes \mathbb{Z}_+^n$ прямого n-го степеня адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}_+^n$ групою підстановок $\mathcal{S}_n$ (теорема 2.1.20).

Розділ 3 складається з двох підрозіділів, які присвячені дослідженням топологізації напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$. У першому підрозділі доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є дискретною (теорема 3.1.1). Цей результат узагальнює результат Бертман-Веста з [26] (а отже, і результат Ебергарта-Селдена з [33]). Також доведено теорему 3.1.2, яка узагальнює ще один результат Ебергарта-Селдена, теорему I.3 з [33]: якщо для деякого натурального числа $n \geqslant 2$ напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є щільною підмножиною гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $(S, \cdot)$ й $I = S \setminus \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n) \neq \varnothing$, то I – двобічний ідеал в S. В теоремі 3.1.6 доведено, що якщо для деякого натурального числа $n \geqslant 2$, гаусдорфова топологічна напівгрупа S містить напівгрупу $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ як щільну піднапівгрупу, то квадрат $S \times S$ не є слабко компактним простором.

У другому підрозділі наведено приклад недискретної гаусдорфової компактної трансляційно-неперервної топології τ_{Ac} на напівгрупі $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем (приклад 3.2.8). Доведено, що гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною (теорема 3.2.10). Ця теорема узагальнює результат Гутіка [61], що кожний гаусдорфовий локально компактний напівтопологічний біциклічний моноїд $\mathcal{C}^0$ з приєднаним нулем є або компактним, або дискретним простором.

У розділі 4 вивчаються алгебричні властивості моноїда $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини ${}^{\kappa}\mathbb{N}$ з порядком добутку, де κ – довільний нескінченний кардинал. Зокрема, доведено, що напівгрупа $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ є біпростою (твердження 4.1.1), E-унітарною (твердження 4.1.18) та F-інверсною (твердження 4.1.19) напівгрупою. Описано її напівґратку ідемпотентів (твердження 4.1.1), природний частковий порядок (твердження 4.1.17) і відношення Ґріна (твердження 4.1.1) на напівгрупі $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. Доведено, що група одиниць $H(\mathbb{I})$ моноїда $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ ізоморфна групі бієкцій $\mathcal{S}_{\kappa}$ кардинала κ (теорема 4.1.6), а також описано максимальні підгрупи цього моноїда. Доведено, що напівгрупа $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_{\kappa} \ltimes {}^{\kappa}\mathbb{B}$ напівгрупи ${}^{\kappa}\mathbb{B}$ групою $\mathcal{S}_{\kappa}$ (теорема 4.1.13). Доведено, що кожна неодинична конгренція $\mathfrak{C}$ на моноїді $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ є груповою (теорема 4.1.23), описано мінімальну групову конгруенцію $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ на цій напівгрупі (теорема 4.1.15) і доведено, що фактор-напівгрупа $\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ по мінімальній груповій конгруенції $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_{\kappa} \ltimes {}^{\kappa}\mathbb{Z}_{+}$ групи ${}^{\kappa}\mathbb{Z}_{+}$ групою $\mathcal{S}_{\kappa}$ (теорема 4.1.16).

Додаток включає перелік публікацій автора, пов'язаних з темою дисертації, а також деталі щодо апробації результатів дослідження.

Практичне значення отриманих результатів: дослідження, проведені в дисертації, мають теоретичну основу і можуть бути використані в областях теорії напівгруп та топологічної алгебри.

Ключові слова: *інверсна напівгрупа, монотонне перетворення, напівгрупа часткових порядкових ізоморфізмів, мінімальна групова конгруенція, група підстановок, біциклічний моноїд, напівпрямий добуток, відношення Ґріна, напівтопологічна напівгрупа, топологічна напівгрупа, локально компактний простір, компактний простір.*

Abstract

Mokrytskyi T. V. Semigroups of partial order isomorphisms of partially ordered spaces. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in speciality 111 — "Mathematics" (field of studies 11 — "Mathematics and statistics"). — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2023.

If some family of transformations of a given set is closed under the composition operation, then this family of transformations forms a semigroup under the operation of composition operation. Since an arbitrary semigroup is isomorphic to some semigroup of transformations, the concept of transformations is the most convenient for studying semigroups in the most general form. Anton Sushkevich's thesis "The theory of action as a general theory of groups" [11] is the first work on semigroups of transformations. The main results in the theory of semigroup transformation were obtained in the 50s-70s of the 20th century and are presented in the following reviews: Magill [78] and Gluskin, Schein, Šneperman, Yaroker [46]. Works on the theory of semigroups of transformations were published by mathematicians such as Gaui, Gluskin, Green, Clifford, Lyapin, Magill, Preston, Sabbiah, Sullivan, Sushkevich, Ulam, Shine, Šneperman, Shutov, Yaroker.

It is natural to consider transformations that preserve the structure defined on the set (for example, a relation, operation, topology, or other "geometry"). Thus, semigroups of monotone transformations of partially ordered sets occupy a special place in studies of transformation semigroups. This topic was studied by mathematicians such as Aizenshtat [1,2], Garba [45], Gomes and Howie [47], Gluskin [4], Gutik and Repovš [56,58,59], Doroshenko [6,32], Kim and Kozhukhov [7,8], Laradji and Umar [72,73], Solomon [96].

It is known that the bicyclic semigroup is isomorphic to the semigroup $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha, \beta)$, which is generated by the partial transformations α and β of the set of positive integers $\mathbb{N}$, which are defined as follows: $(n)\alpha = n+1$, if $n \geqslant 1$ and

$(n)\beta = n - 1$, if $n > 1$ (see remark 1.2.10). Moreover, the semigroup $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha, \beta)$ is a semigroup of order isomorphisms between principal filters of the set of positive integers $\mathbb{N}$ with the usual linear order.

The bicyclic semigroup is bisimple and every its congruence is either identity or a group congruence. Moreover, every homomorphism h of the bicyclic semigroup is either an isomorphism or the image of $\mathcal{C}(p, q)$ under h is a cyclic group (see [30, Corollary 1.32]). The bicyclic semigroup plays an important role in algebraic theory of semigroups and in the theory of topological semigroups. For example a well-known Andersen's result [18] states that a (0–)simple semigroup with an (non-zero)idempotent is completely (0–)simple if and only if it contains no isomorphic copy of the bicyclic semigroup. The bicyclic monoid admits only the discrete semigroup Hausdorff topology and if a topological semigroup S contains it as a dense subsemigroup, then $\mathcal{C}(p, q)$ is an open subset of S [33]. In every Hausdorff semitopological (and hence in topological) semigroup S that contains the bicyclic semigroup $\mathcal{C}(p, q)$ as a dense subsemigroup, the subspace of the bicyclic semigroup is open and discrete, and moreover the subset $S \setminus \mathcal{C}(p, q)$ is an ideal in S [26]. Stable and Γ-compact topological semigroups do not contain the bicyclic monoid [19, 62]. The problem of embedding the bicyclic monoid into compact-like topological semigroups are studied in [21, 22, 57]. Independently to Eberhart-Selden results on topolozabilty of the bicyclic semigroup, in [14] Taimanov constructed a commutative semigroup $\mathfrak{A}_\kappa$ of cardinality κ which admits only the discrete semigroup topology. Also, Taimanov [13] gave sufficient conditions on a commutative semigroup to have a non-discrete semigroup topology. In the paper [60] it was showed that for the Taimanov semigroup $\mathfrak{A}_\kappa$ from [14] the following conditions hold: every T_1-topology τ on the semigroup $\mathfrak{A}_\kappa$ such that $(\mathfrak{A}_\kappa, \tau)$ is a topological semigroup is discrete; for every T_1-topological semigroup which contains $\mathfrak{A}_\kappa$ as a subsemigroup, $\mathfrak{A}_\kappa$ is a closed subsemigroup of S; and every homomorphic non-isomorphic image of $\mathfrak{A}_\kappa$ is a zero-semigroup.

Since the bicyclic semigroup is isomorphic to the semigroup $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha,\beta)$, which is the semigroup of order isomorphisms between principal filters of positive integers $\mathbb{N}$ with the usual linear order, then the following generalizations of the bicyclic semigroup naturally arise:

— *The semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ of order isomorphisms between principal filters of finite power of the set of positive integers with product order, for any positive integer $n \geqslant 2$;*

— *The semigroup $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ of order isomorphisms between principal filters of the set*

$$
{}^{\kappa}\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{N}^{\kappa} \colon |\{x \in \kappa : \ (x)\, a \neq 1\}| < \infty\}
$$

with product order, for any infinite cardinal κ.

The purpose of the work is to study the algebraic properties of the monoids $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ and $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$, in particular check that this monoids are bisimple, E-unitary, F-inverse; to study the Green's relations; to analyze the congruences on these semigroups and describe the least group congruence; to study the topologization of the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, in particular to check that on the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ there exists a Hausdorff shift-continuous non-discrete topology, to study embeddings of the monoid $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ into compact-like spaces and to study Hausdorff locally compact semitopological semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ with adjoined zero.

The object of the research are monoids $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ and $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$, the semitopological semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$.

The subjects of the study are algebraic properties of the monoid $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ and its topologization, as well as algebraic properties of the monoid $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$.

The methods of the algebraic theory of semigroups, general topology, and topological algebra are used in the process of researching thesis problems.

The thesis consists of an abstracts in Ukrainian and in English, an introduction, four main chapters, conclusions, references and an appendix.

The introduction highlights the relevance of the research topic, defines the purpose, tasks, object and subject of the research, and also describes the methods used. The scientific novelty, the practical significance of the obtained results, the connection of the work with the state scientific research topic, the applicant's contribution and the details of the approval and publication of the main results of the thesis are also given.

The first chapter presents a review of relevant publications on the topic of the thesis, provides historical context, a motivation for research, and formulates definitions and auxiliary statements from algebra, topology, and topological algebra.

In Chapter 2 we study the algebraic properties of the monoid $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ of order isomorphisms between principal filters of the finite power of the set of positive integers with the product order, for any positive integer $n \geqslant 2$. It is shown that the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is bisimple (Proposition 2.1.1), E-unitary (Corollary 2.1.22) and F-inverse (Corollary 2.1.23) semigroup. Green's relation (Proposition 2.1.1), the semilattice of the idempotents (Proposition 2.1.1) and the natural partial order (Proposition 2.1.21) on the monoid $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is described. It is proved (Theorem 2.1.5) that the group of units $H(\mathbb{I})$ of the monoid $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is isomorphic to the permutation group $\mathcal{S}_n$, and maximal subgroups of this monoid are described. Also, it is proved (Theorem 2.1.18) that the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is isomorphic to the semidirect product of the direct n-th power of the bicyclic monoid by the group of permutation $\mathcal{S}_n$. It is shown (Theorem 2.1.12) that every non-identity congruence $\mathfrak{C}$ on the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is a group congruence. The least group congruence $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ is described (Theorem 2.1.19) and it is proved that the quotient-semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ by the least group congruence $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ is isomorphic to the semidirect product $\mathcal{S}_n \ltimes \mathbb{Z}_+^n$ of the direct n-th power of the additive group of integers $\mathbb{Z}_+^n$ by the group of permutations $\mathcal{S}_n$ (Theorem 2.1.20).

Chapter 3 consists of two subsections, which are devoted to the topologization of the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$. In the first subsection, it is shown (Theorem 3.1.1) that each Hausdorff shift-continuous topology on the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is discrete.

This result generalizes the Bertman-West result from [26] (and hence Eberhart-Selden result from [33]). Theorem 3.1.2 is also proved, which generalizes another Eberhart-Selden result, Theorem I.3 from [33]. So, Theorem 3.1.2 states that if for some positive integer $n \geqslant 2$ the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ is a dense subset of the Hausdorff semitopological semigroup $(S, \cdot)$ and $I = S \setminus \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \neq \varnothing$, then I is a two-sided ideal in S. Next, Theorem 3.1.6 states that if for some positive integer $n \geqslant 2$, the Hausdorff topological semigroup S contains the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ as a dense subsemigroup, then the square $S \times S$ is not a feebly compact space.

The second subsection considers an example (3.2.8) of a non-discrete Hausdorff compact shift-continuous topology τ_{Ac} on the semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ with adjoined zero. It is justified (Remark 3.2.9) why this topology τ_{Ac} is the unique Hausdorff compact shift-continuous topology on $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0$. And it is proved that the Hausdorff locally compact semitopological semigroup $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ with adjoined zero is either compact or discrete (Theorem 3.2.10). This theorem extends the following Gutik's result [61]: every Hausdorff locally compact semitopological bicyclic monoid $\mathcal{C}^0$ with adjoined zero is either compact or discrete.

In Chapter 4 the algebraic properties of the monoid $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ of order isomorphisms between principal filters of the set ${}^{\kappa}\mathbb{N}$ with the product order, for any infinite cardinal κ are studied. It is shown that the semigroup $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ is bisimple (Proposition 4.1.1), E-unitary (Proposition 4.1.18) and F-inverse (Proposition 4.1.19) semigroup. It is described the semilattice of the idempotents (Proposition 4.1.1), the natural partial order (Proposition 4.1.17) and Green's relations (Proposition 4.1.1) on the monoid $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. It is proved (Theorem 4.1.6) that the group of units $H(\mathbb{I})$ of the monoid $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ is isomorphic to the group $\mathcal{S}_\kappa$ of all bijections of the cardinal κ, and maximal subgroups of this monoid are described, too. Also, it is proved (Theorem 4.1.13) that the semigroup $\mathcal{IPF}({}^\kappa\mathbb{N})$ is isomorphic to the semidirect product $\mathcal{S}_\kappa \ltimes {}^\kappa\mathbb{B}$ of the semigroup ${}^\kappa\mathbb{B}$ by the group $\mathcal{S}_\kappa$. It is shown (Theorem 4.1.23) that every non-identity congruence $\mathfrak{C}$ on the semigroup $\mathcal{IPF}({}^\kappa\mathbb{N})$ is a group, described (Theorem 4.1.15) the least group congruence $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ and proved (Theorem 4.1.16) that the quotient-semigroup $\mathcal{IPF}\left({}^\kappa\mathbb{N}\right)/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ is isomorphic to the semidirect product $\mathcal{S}_\kappa \ltimes {}^\kappa\mathbb{Z}_+$ of the group ${}^\kappa\mathbb{Z}_+$ by the group $\mathcal{S}_\kappa$.

The appendix contains a list of the author's publications related to the topic of the thesis, as well as details on the approbation of the research results.

Practical significance of the obtained results: the studies carried out in the thesis have a theoretical basis and can be used in the fields of semigroup theory and topological algebra.

Keywords: *inverse semigroup, monotone mapping, semigroup of partial order isomorphisms, least group congruence, permutation group, bicyclic monoid, semidirect product, Green's relations, semitopological semigroup, topological semigroup, locally compact space, compact, discrete space.*

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Список публікацій, в яких опубліковано основні результати дисертації:

(1) Mokrytskyi, T.: On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$ with adjoined zero. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **87**, 37–45 (2019).

(2) Gutik, O., Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^\kappa$. European Journal of Mathematics. **6**, 14–36 (2020). (Scopus, Q2)

(3) Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\sigma\mathbb{N}^\kappa$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **93**, 14–33 (2022).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

(1) Gutik, O., Mokrytskyi, T.: On the semigroup of order isomorphisms of principal filters of a power of the integers. In: Abstracts of the International Conference in Functional Analysys dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, p. 74. University of Lviv, Lviv, Ukraine, 18–23 September 2017.

(2) Mokrytskyi, T.: On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms of principal filters of a power of the positive integers with adjoined zero. In: Abstracts of the International Conference dedicated to 70th anniversary of Professor A. M. Plichko "Banach Spaces and their Applications", p. 85–86. Lviv, Ukraine, 26–29 June 2019.

(3) Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal

filters of $\sigma(\mathbb{N}^\kappa)$. In: Abstracts of the International Algebraic Conference "At the End of the Year", p. 19. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 27–28 December, 2021.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Одне з основних завдань математики – вивчення взаємовідношень між об'єктами за допомогою понять відображення, часткове відображення та перетворення.

Напівгрупи перетворень неявно з'явилися в XIX столітті в роботах Абеля та Лі і стали активно вивчатися у XX столітті. Вони займають важливе місце в математиці, особливо при розгляді напівгруп перетворень, які зберігають визначену на множині структуру (наприклад відношення, операцію, топологію чи іншу "геометрію"). Зокрема, особливе місце займають напівгрупи монотонних перетворень частково впорядкованих множин.

Основні питання в теорії напівгруп перетворень стосуються взаємозв'язку між властивостями структури та алгебричними характеристиками її напівгрупи перетворень. Багато досліджень присвячено напівгрупам монотонних перетворень частково впорядкованих множин, зокрема ланцюгів, і їх алгебричним та комбінаторним властивостям. Айзенштат в праці [1] побудувала козображення напівгрупи $O(X)$ монотонних перетворень скінченного ланцюга X. В огляді [85] висвітленно різні питання і проблематика напівгруп монотонних перетворень графів. Глускін в праці [4] показав, що з ізоморфізму напівгруп $O(X)$ та $O(Y)$ монотонних перетворень частково впорядкованих множин X та Y випливає, що X та Y є ізоморфними або антиізоморфними. Кім і Кожухов в праці [10] описали необхідні та достатні умови регулярності напівгрупи монотонних перетворень $O(X)$ зліченного ланцюга X.

Також багато праць присвячено обчислювально-комбінаторним задачам теорії напівгруп монотонних часткових перетворень скінченних ланцюгів, серед яких можна вказати праці [28, 37–42] та інші. Зокрема, Гауі в праці [68] обчислив потужність моноїда O_n всіх монотонних перетворень скінченного n-елементного ланцюга і спільно з Гомесом в праці [47] обчислив потужність моноїда PO_n всіх монотонних часткових перетворень n-елементного ланцюга. Також в праці [68] Гауі обчислив потужність множини ідемпотентів напівгрупи O_n, а Лараджі та Умар в працях [72, 73] обчислили потужність множини ідемпотентів моноїда PO_n. Гауі та Гомес в праці [47] вивчали ранг моноїдів O_n і PO_n, а в праці [45] Гарба вивчав ідемпотентний ранг напівгруп монотонних перетворень скінченного ланцюга. В праці [96] Соломон досліджував зображення моноїда PO_n.

У праці [5] Дорошенко описав піднапівгрупи напівгруп ін'єктивних перетворень натуральних чисел і в працях [6, 32] досліджував напівгрупи монотонних функцій множини натуральних і цілих чисел з природним відношенням строгого лінійного порядку на цих множинах, а також їхні піднапівгрупи коскінченних монотонних функцій.

Напівгрупу часткових коскінченних монотонних перетворень множини натуральних чисел досліджували Гутік і Реповш в праці [56]. Вони довели, що алгебрична структура цієї напівгрупи є близькою до біциклічного моноїда. Також Гутік і Реповш у праці [56] досліджували напівгрупу всіх часткових коскінченних монотонних бієктивних перетворень множини цілих чисел і в праці [58] вивчали напівгрупу коскінченних часткових бієкцій нескінченної множини потужності λ.

Теорія топологічних напівгруп виникла в кінці 40-х років минулого століття на основі праць ряду математиків, в тому числі Коха [71], Нумакури [87, 88], Тамури [99], Уоллеса [100, 102–107], Фосетта [35, 36], Шварца [15,16,93], Ісекі [69]. Уоллесова оглядова стаття "The structure of topological semigroups" [101] стала важливою для розвитку цієї області. Згодом дослідження переорієнтувалися на компактні зв'язні топологічні напівгрупи. У 60-х роках з'явилися нові напрями в теорії топологічних напівгруп, зокрема напівтопологічні напівгрупи. Основні задачі теорії топологічних напівгруп включають топологізацію напівгрупи, замикання піднапівгрупи в топологічній напівгрупі та дослідження вкладення топологічних напівгруп у топологічні напівгрупи з "хорошими" властивостями, наприклад, у топологічні напівгрупи з властивостями близькими до компактних напівгруп.

Відомо, що біциклічна напівгрупа ізоморфна напівгрупі $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha, \beta)$, яка породжена частковими перетвореннями α і β множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, які визначаються так: $(n)\alpha = n+1$, для $n \geqslant 1$ і $(n)\beta = n-1$, для $n > 1$ (див. зауваження 1.2.10). Оскільки напівгрупа $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha, \beta)$ є напівгрупою порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини натуральних чисел відносно звичайного порядку, то природно виникають наступні узагальнення біциклічної напівгрупи:

- *напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів скінченного степеня множини натуральних чисел відносно порядку добутку, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$;*
- *напівгрупа $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини*

$$ {}^{\kappa}\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{N}^{\kappa} \colon |\{x \in \kappa : (x)a \neq 1\}| < \infty\} $$

  відносно порядку добутку, для довільного нескінченного кардинала κ.

Дана дисертація присвячена дослідженням моноїдів $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$, зокрема досліджується питання: *чи мають ці напівгрупи алгебричні і топологічні властивості аналогічні до властивостей біциклічного моноїда?*

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри геометрії і топології (з 2020 року кафедри алгебри, топології та основ математики) механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми "Топологія та її застосування у фрактальній геометрії та математичній економіці" (номер державної реєстрації 0116U001537).

Мета і завдання дослідження. За *мету* було поставлено дослідити алгебричні властивості моноїдів $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $\mathcal{IPF}(^{\kappa}\mathbb{N})$; вивчити топологічні властивості напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$; дослідити гаусдорфову локально компактну напівтопологічну напівгрупу $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем.

Завдання дослідження полягають у розв'язанні таких задач:

1) встановити такі властивості моноїдів $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $\mathcal{IPF}(^{\kappa}\mathbb{N})$, як біпростота, E-унітарність, F-інверсність; дослідити відношення Ґріна; проаналізувати конгруенції на цих напівгрупах та визначити мінімальні групові конгруенції;
2) дослідити існування гаусдорфової трансляційно-неперервної недискретної топології на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$;
3) дослідити вкладення моноїда $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ у простори близькі до компактних.

Об'єктом дослідження є моноїди $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $\mathcal{IPF}(^{\kappa}\mathbb{N})$, напівтопологічна напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$.

Предмет досліджень — алгебричні властивості моноїда $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ та його топологізація, а також алгебричні властивості моноїда $\mathcal{IPF}(^{\kappa}\mathbb{N})$.

Методи дослідження. У процесі дослідження дисертаційних проблем застосовуються методи алгебричної теорії напівгруп, загальної топології та топологічної алгебри.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі результати отримані в дисертаційній роботі є новими. Основні наукові результати, що виносяться на захист:

1. Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ описано алгебричну структуру моноїда $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Доведено, що напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_n \ltimes_\Phi \mathcal{C}^n(p,q)$ n-го степеня біциклічної напівгрупи $\mathcal{C}(p,q)$ групою $\mathcal{S}_n$.
2. Доведено, що для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є дискретною.
3. Доведено, що для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ кожна недискретна гаусдорфова локально компактна трансляційно-неперервна топологія τ на напівгрупі $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем збігається з одноточковою компактифікацією Алєксандрова зліченного дискретного простору.
4. Для довільного нескінченного кардинала κ описано алгебричну структуру моноїда $\mathscr{IPF}({}^\kappa\mathbb{N})$. Доведено, що напівгрупа $\mathscr{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N})$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_\kappa \ltimes_\Phi {}^\kappa\mathbb{B}$ κ кодобутку ${}^\kappa\mathbb{B}$ біциклічної напівгрупи $\mathbb{B}$ групою $\mathcal{S}_\kappa$.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у топологічній алгебрі.

Особистий внесок здобувача. Автор самостійно отримав основні результати, які виносяться на захист. В опублікованих спільно з науковим керівником працях, О. В. Гутіку належать постановка задачі, вибір методів дослідження та обговорення отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах:

1) Міжнародній конференції з функціонального аналізу присвяченій 125-річчю Стефана Банаха, м. Львів, 2017;

2) Всеукраїнському конкурсі студентських наукових робіт із галузі знань "Математика та статистика. Прикладна математика (механіка)", м. Львів, 2018;
3) Міжнародній конференції "Банахові простори та їх застосування" присвяченій 70-річчю А. М. Плічка, м. Львів, 2019;
4) Міжнародній конференції "At the End of the Year", м. Київ, 2021;
5) Семінарі "Теорія полігонів і спектральні простори" у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2021, 2022.
6) Семінарі "Топологічна алгебра" у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2017, 2019, 2021.

Публікації. Основні результати роботи опубліковано у 6 працях: 2 статті у журналах, які входять до переліку наукових фахових видань України ([81], [84]); 1 стаття у науковому виданні, віднесеному до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank([50]); 3 тези у матеріалах міжнародних конференцій ([51], [82], [83]).

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та одного додатка.

Повний обсяг роботи – 120 сторінок. Список використаної літератури займає 9 сторінок і налічує 107 найменувань.

Подяка. Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику кандидату фізико-математичних наук, старшому науковому співробітнику, доценту кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету імені Івана Франка Олегу Володимировичу Гутіку за постановку задач, допомогу в роботі над дисертацією і його терплячість, коли виникали труднощі.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, МОТИВАЦІЯ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Історична довідка, огляд літератури та мотивація досліджень

На думку багатьох дослідників історії математики, перші дослідження з алгебричної теорії напівгруп розпочалися з праць Антона Сушкевич [97,98], де він описав структуру скінченних простих напівгруп і структуру мінімального ідеала скінченних напівгруп. Однак на думку класиків теорії топологічних напівгруп Джиммі Д. Лоусона [74–76] та Карла Г. Гофмана [63–66] ідеї теорії топологічних напівгруп були закладені ще Нільсом Г. Абелем у праці 1826 року [17], а ідеологія використання алгебричних методів в геометрії, а отже, й у всій математиці, проголошена в Ерлагенській програмі Фелікса Кляйна [70]. Сам термін ”напівгрупа” (semigroup, demigroup, halbgruppe) виникає як допоміжний при означенні поняття ”група” в працях де Сег'є [94], Діксона [31], Фробеніуса та Шура [44] на початку XX-го століття. В 1937 році Сушкевич опублікував першу монографію з теорії напівгруп ”Теорія узагальнених груп” [12]. Мальцев досліджував занурення напівгруп у групи [9], Девід Ріс у праці [90] на мові матричних напівгруп над групами спростив складний опис Сушкевичем будови простих напівгруп. Кліфорд та Престон в 1961 році опублікували перший том монографії ”Алгебрична теорія напівгруп” [30], а в 1967 році, разом з перевиданням відредагованого першого тому вийшов другий том цієї монографії.

Якщо деяка сім'я перетворень заданої множини замкнена відносно операції композиції, то ця сім'я перетворень утворює напівгрупу відносно операції композиції. Оскільки довільна напівгрупа ізоморфна деякій напівгрупі перетворень, то поняття перетворення є найбільш зручним для вивчення напівгруп в найбільш загальному вигляді. Першою фундаментальною працею з теорії напівгруп перетворень вважається дисертація Антона Сушкевича “Теория действия как общая теория групп” [11]. Основні результати в області теорії напівгруп перетворень були отримані у 50-70-х роках XX-го століття і представлені в оглядах: Меггіла [78] та Глускіна-Шайна-Шнеперман-Ярокера [46]. До числа відомих математиків, які працювали у цьому напрямку, входять Гауі, Глускін, Ґрін, Кліффорд, Ляпін, Меггіл, Престон, Саббіах, Сушкевич, Улям, Шайн, Шнеперман, Шутов та Ярокер.

Природно розглядати перетворення, які зберігають визначену на множині структуру (наприклад, відношення, операцію, топологію чи іншу “геометрію”). Так особливе місце у дослідженнях напівгруп перетворень займають напівгрупи монотонних перетворень частково впорядкованих множин. Цією проблематикою займались такі математики як Айзенштат [1, 2], Гарба [45], Гомес і Гауі [47], Глускін [4], Гутік і Реповш [56, 58, 59], Дорошенко [6, 32], Кім і Кожухов [7, 8], Лараджі та Умар [72, 73], Соломон [96].

Відомо, що біциклічна напівгрупа ізоморфна напівгрупі $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha,\beta)$, яка породжена частковими перетвореннями α і β множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, що визначаються так: $(n)\alpha = n+1$, якщо $n \geqslant 1$ і $(n)\beta = n-1$, якщо $n > 1$. Більше того, напівгрупа $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha,\beta)$ є напівгрупою порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ зі звичайним лінійним порядком.

Біциклічна напівгрупа $\mathcal{C}(p,q)$ біпроста та кожна її конгруенція є або одиничною, або груповою. Більше того, або гомоморфізм h з біциклічної напівгрупи є ізоморфізмом, або образ $\mathcal{C}(p,q)$ стосовно гомоморфізму h є циклічною групою (див. [30, наслідок 1.32]). Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп і в теорії топологічних напівгруп. Зокрема, добре відомий результат Андерсона [18] стверджує, що (0–)проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0–)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфної копії біциклічної напівгрупи. Біциклічний моноїд допускає лише дискретну напівгрупову гаусдорфову топологію, і якщо топологічна напівгрупа S містить його як щільну піднапівгрупу, то $\mathcal{C}(p,q)$ є відкритою підмножиною в S [33]. У кожній гаусдорфовій напівтопологічній (а отже, й у топологічній) напівгрупі S, яка містить біциклічну напівгрупу $\mathcal{C}(p,q)$ як щільну піднапівгрупу, підпростір біциклічної напівгрупи є відкритим і дискретним, і більше того, підмножина $S \setminus \mathcal{C}(p,q)$ є ідеалом в S [26]. Стабільні та Г-компактні топологічні напівгрупи не містять біциклічного моноїда [19, 62]. Проблема ізоморфного занурення біциклічного моноїда в топологічні напівгрупи близькі до компакних вивчалась в працях [21, 22, 57]. Незалежно від результатів Ебергарт-Селден про топологізацію біциклічної напівгрупи, в праці [14] Тайманов побудував приклад комутативної напівгрупи, яка допускає лише дискретну напівгрупову топологію. Також Тайманов в праці [13] описав достатні умови на комутативну напівгрупу, щоб на ній існувала напівгрупова недискретна топологія. У праці [60] показано, що для напівгрупи Тайманова $\mathfrak{A}_\kappa$ з [14] виконуються такі умови: кожна T_1-топологія τ на напівгрупі $\mathfrak{A}_\kappa$ така, що $(\mathfrak{A}_\kappa, \tau)$ топологічна напівгрупа є дискретною; для кожної T_1-топологічної напівгрупи, що містить $\mathfrak{A}_\kappa$ як піднапівгрупу, $\mathfrak{A}_\kappa$ є замкненою піднапівгрупою в S; і кожний гомоморфний неізоморфний образ $\mathfrak{A}_\kappa$ є напівгрупою з нульовим множенням.

В праці [67] Хоган довів, що для довільного ординала α кожна напівгрупова гаусдорфова локально компактна топологія на α-біциклічній напівгрупі є дискретною. Також у [95] Селден побудувала недискретну напівгрупову гаусдорфову топологію на α-біциклічній напівгрупі. Проте Бардила знайшов прогалину в доведенні теореми 3.9 [67] і в праці [25] побудував недискретну напівгрупову гаусдорофову локально компактну топологію на $(\omega+1)$-біциклічній напівгрупі. Також в праці [25] Бардила показав, що твердження теореми 3.9 [67] виконується і для випадку, коли $\alpha \leqslant \omega$ і в праці [25] для довільного ординала $\alpha \leqslant \omega$ описав всі трансляційно-неперервні локально компактні гаусдорфові топології на α-біциклічному моноїді.

У праці [43] доведено, що дискретна топологія – єдина трансляційно-неперервна гаусдорфова топологія на розширенній топологічній напівгрупі $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$. Зауважимо, що для довільних (0-)біпростих напівгруп перетворень S виконуються такі твердження: *кожна трансляційно-неперервна гаусдорфова берівська (зокрема, локально компактна) топологія на S є дискретною* (див. [29, 55, 56, 59]). В статі [80] Месян, Мітчел, Морайне і Перес показали, що для скінченного графа E кожна локально компактна гаусдорфова напівгрупова топологія на графовій інверсній напівгрупі $G(E)$ є дискретною. У [23] доведено, що аналогічне твердження виконується і для графа E, який містить одну вершину і нескінченну кількість петель. Неочікувана дихотомія для біциклічного моноїда з приєднаним нулем $\mathcal{C}^0 = \mathcal{C}(p,q) \sqcup \{0\}$ доведена в [61]: кожен гаусдорфовий локально компактний напівтопологічний біциклічний моноїд $\mathcal{C}^0$ з приєднаним нулем є або компактним, або дискретним простором. Наведена вище дихотомія була поширена Бардилою в [24] для локально компактних λ-поліциклічних напівтопологічних моноїдів і Гутіком та Максимик для локально компактних напівтопологічних інтерасоціативностей біциклічного моноїда з приєднаним нулем [49].

Зауважимо, що деякі класи інверсних напівгруп часткових перетворень з коскінченними областями визначення та областями значень мають аналогічні алгебричні властивості, що і біциклічний моноїд. У праці [58] доведено, що напівгрупа $\mathcal{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ ін'єктивних коскінченних часткових перетворень кардинала λ є біпростою інверсною напівгрупою і, що для кожного непорожнього ланцюга L в $E(\mathcal{I}_\lambda^{\mathrm{cf}})$ існує інверсна піднапівгрупа S в $\mathcal{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ така, що S ізоморфна біциклічній напівгрупі і $L \subseteq E(S)$, а також доведено, що кожна нетривіальна конгруенція на $\mathcal{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ є груповою.

Напівгрупи $\mathcal{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ і $\mathcal{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ ін'єктивних ізотонних часткових власних перетворень з коскінченними областями визначення та областями значень натуральних і цілих чисел, відповідно, досліджені в працях [56] і [59]. Доведено, що напівгрупи $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ і $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ є біпростими і кожний нетривіальний гомоморфний образ $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ і $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ є групою, і більше того, максимальний груповий образ напівгрупи $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ є адитивною групою цілих чисел $\mathbb{Z}_{+}$, а максимальний груповий образ напівгрупи $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ є групою $\mathbb{Z}_{+} \times \mathbb{Z}_{+}$.

У праці [55] досліджувалась напівгрупа $\mathscr{IO}_{\infty}(\mathbb{Z}^n_{\operatorname{lex}})$ монотонних ін'єктивних часткових власних перетворень множини $L_n \times_{\operatorname{lex}} \mathbb{Z}$, які мають коскінченні область визначення і область значень, де $L_n \times_{\operatorname{lex}} \mathbb{Z}$ – це лексикографічний добуток n-елементного ланцюга і множини цілих чисел зі звичайним лінійним порядком. Показано, що напівгрупа $\mathscr{IO}_{\infty}(\mathbb{Z}^n_{\operatorname{lex}})$ є біпростою і досліджено її проективні конгруенції. Також доведено, що напівгрупа $\mathscr{IO}_{\infty}(\mathbb{Z}^n_{\operatorname{lex}})$ – скінченно породжена, кожен автоморфізм $\mathscr{IO}_{\infty}(\mathbb{Z})$ є внутрішнім, і показано, що у випадку $n \geqslant 2$ напівгрупа $\mathscr{IO}_{\infty}(\mathbb{Z}^n_{\operatorname{lex}})$ немає внутрішніх автоморфізмів. У праці [55] доведено, що для довільного натурального числа n фактор-напівгрупа $\mathscr{IO}_{\infty}(\mathbb{Z}^n_{\operatorname{lex}})/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$, де $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ мінімальна конгруенція на $\mathscr{IO}_{\infty}(\mathbb{Z}^n_{\operatorname{lex}})$, ізоморфна прямому добутку $\mathbb{Z}_{+}^{2n}$. Структура піднапівґратки конгруенцій на $\mathscr{IO}_{\infty}(\mathbb{Z}^n_{\operatorname{lex}})$, які містять найменшу групову конгруенцію описана в [54].

З іншого боку, напівгрупа $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ монотонних ін'єктивних часткових власних перетворень з коскінченними областю визначення і областю значень квадрату $\mathbb{N}^2$ з порядком добутку має більш складні властивості, ніж вище описані інверсні напівгрупи [53]. Зокрема, доведено, що $\mathscr{D} = \mathscr{J}$. В [52] доведено, що природний частковий порядок $\preccurlyeq$ на $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ збігається з природним частковим порядком, який індукується з симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ над $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ на напівгрупу $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Описана конгруенція σ на напівгрупі $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$, яка породжена природнім частковим порядком $\preccurlyeq$ на напівгрупі $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$: $\alpha\sigma\beta$ тоді і лише тоді, коли α і β порівняльні в $\big(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}), \preccurlyeq\big)$. Також було доведено, що фактор-напівгрупа $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})/\sigma$ ізоморфна напівпрямому добутку вільного комутативного моноїда $\mathfrak{AM}_{\omega}$

над нескінченною зліченною множиною на циклічну групу порядку два $\mathbb{Z}_2$.

Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ розглянемо частково впорядковану множину $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ як n-тий степінь натуральних чисел $\mathbb{N}$ з порядком добутку:

$$(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, \ldots, y_n) \qquad \text{тоді і лише тоді, коли} \qquad x_i \leqslant y_i$$

$$\text{для всіх} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Аналогічно для довільного нескінченного кардинала κ вводиться порядок добутку на $\mathbb{N}^\kappa$.

Очевидно, що множина всіх порядкових ізоморфізмів головних фільтрів частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ відносно операції композиції часткових відображень утворює напівгрупу. Цю напівгрупу ми позначатимемо через $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$.

Аналогічно для довільного нескінченно кардинала κ визначимо напівгрупу $\mathcal{IPF}({}^\kappa\mathbb{N})$ як множину всіх порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини

$${}^\kappa\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{N}^\kappa \colon |\{x \in \kappa : \ (x)\, a \neq 1\}| < \infty\}$$

відносно порядку добутку з операцією композиції часткових відображень.

Із зауваження 1.2.10 випливає, що напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $\mathcal{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N})$ є узагальненнями біциклічної напівгрупи $\mathcal{C}(p, q)$. Тому природним є питання: *чи мають ці напівгрупи алгебричні і топологічні властивості аналогічні до властивостей біциклічного моноїда?*

1.2. Означення і допоміжні твердження

У цьому підрозділі наведено означення та допоміжні твердження, які використовуються в тексті дисертаційної роботи. Термінологію, означення та позначення використано такі, як у монографіях [27, 30, 34, 89, 91].

У дисертаційній роботі великими латинськими літерами позначатимемо множини, напівгрупи та топологічні простори, а малими - їхні елементи. Усі топологічні простори вважатимемо гаусдорфовими, якщо не зазначено інше.

Множини X та Y називаються *рівнопотужними*, якщо існує взаємо-однозначне відображення множини X на Y. У цьому випадку пишемо $|X| = |Y|$, де $|X|$ – найменший ординал рівнопотужний множині X. Такі ординали називають *кардиналами (кардинальними числами)* або *потужністю* множини X. Іноді абстрагуючись від природи множини X, ми ототожнюватимемо множину X з її потужністю $|X|$, й у випадку, коли $|X| = \kappa$, замість X, будемо використовувати позначення κ. Через $\mathbb{Z}$ позначатимемо множину цілих чисел, через $\mathbb{N}_0$ – множину невід'ємних цілих чисел, а через $\mathbb{N}$ – множину натуральних чисел. Для довільного ненульового кардинала κ, через $\mathcal{S}_\kappa$ позначимо симетричну групу порядку κ, тобто групу всіх бієкцій кардинала κ.

Підмножина A множини X називається *власною* (або *міститься в X власно*), якщо $A \neq X$.

Для відображення $f\colon X \to Y$ з множини X у множину Y образ елемента $x \in X$ при відображенні f позначатимемо через $(x)f$. Якщо A підмножина в X, то через $(A)f$ позначатимемо множину всіх образів елементів з A, тобто $(A)f = \{(x)\,f \mid x \in A\}$ і через $f\big|_A$ – позначатимемо звуження відображення f на множину A. Тотожне відображення множини X позначатимемо через id_X. Для довільного ненульового кардинала κ через X^κ позначатимемо множину всіх відображень з кардинала κ в множину X.

Відношенням (або *бінарним відношенням*) на множині X називається підмножина декартового добутку $\rho \subseteq X \times X$. Будемо казати, що елементи x та y множини X *є у відношенні* ρ, якщо $(x, y) \in \rho$ і будемо це записувати так: $x\rho y$. Відношення $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ називатемемо *діагональним* відношенням.

Відношення ρ на множині X називається *відношенням еквівалентності*, якщо виконуються такі умови:

(1) $x\rho x$ для кожного $x \in X$;

(2) якщо $x\rho y$, то $y\rho x$ для всіх $x, y \in X$;

(3) якщо $x\rho y$ і $y\rho z$, то $x\rho z$ для всіх $x, y, z \in X$.

Нехай ρ – відношення еквівалентності на множині X. Елементи x та y множини X називаються *ρ-еквівалентними*, якщо $x\rho y$. Відношення еквівалентності ρ розбиває множину X на диз'юнктні *класи еквівалентності* за відношенням ρ:

$$\rho_x = \{y \in X \mid y\rho x\}$$

Множина, елементами якої є класи еквівалентності множини X за відношенням ρ, називається *фактор-множиною множини X за відношенням ρ* і позначається X/ρ. Відображення $\bar{\rho}\colon X \to X/\rho$, означене так: $(x)\bar{\rho} = \rho_x$, називається *природним.*

Відношення $\leqslant$ на множині X називається *частковим порядком*, якщо виконуються такі умови:

(1) $x \leqslant x$ для кожного $x \in X$;

(2) якщо $x \leqslant y$ і $y \leqslant x$, то $x = y$ для всіх $x, y \in X$;

(3) якщо $x \leqslant y$ і $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ для всіх $x, y, z \in X$.

Множина X із заданим на ній відношенням часткового порядку $\leqslant$ називається *частково впорядкованою*, і позначається $(X, \leqslant)$. Елементи x та y частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називаються *порівняльними*, якщо $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$; у протилежному випадку елементи x та y називаються *непорівняльними.*

Підмножина A частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається *лінійно впорядкованою*, якщо два довільні елементи з A є порівняльними. У цьому випадку кажуть, що $(A, \leqslant)$ — *лінійно впорядкована множина* або *ланцюг*, і $\leqslant$ — *лінійний порядок* на A. Скінченний ланцюг з k елементів називається *k-елементним ланцюгом.*

Нехай $(X, \leqslant)$ — частково впорядкована множина. Для довільного елемента $x \in X$ введемо такі позначення:

$$\uparrow x = \{y \in X : x \leqslant y\}, \qquad \downarrow x = \{y \in X : y \leqslant x\}.$$

Множини $\uparrow x$ і $\downarrow x$ називаються *головним фільтром* і *головним ідеалом*, відповідно, породжені елементом $x \in X$.

Елемент v частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається *найбільшим*, якщо $x \leqslant v$ для всіх $x \in X$. Якщо $v \leqslant x$ для всіх $x \in X$, то елемент v називається *найменшим.*

Відображення $\alpha\colon (X, \leqslant) \to (Y, \lessdot)$ з частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ в частково впорядковану множину $(Y, \lessdot)$ називається *монотонним*, якщо з того, що $x \leqslant y$ в $(X, \leqslant)$ випливає, що $(x)\alpha \lessdot (y)\alpha$ в $(Y, \lessdot)$. Бієктивне монотонне відображення $\alpha\colon (X, \leqslant) \to (Y, \lessdot)$ називається *порядковим ізоморфізмом*, якщо обернене до нього відображення $\alpha^{-1}\colon (Y, \lessdot) \to (X, \leqslant)$ є монотонним.

Напівгрупою називається непорожня множина із заданою на ній бінарною асоціативною операцією.

Елемент $1 \in S$ називається *одиницею*, якщо $s1 = 1s = s$ для довільного елемента $s \in S$. Напівгрупа з одиницею називається *моноїдом.*

Напівгрупа G називається *групою*, якщо для довільних елементів $a, b \in G$ існують елементи $x, y \in G$ такі, що виконуються рівності:

$$ax = b \quad \text{i} \quad ya = b.$$

Непорожня підмножина T напівгрупи S називається *піднапівгрупою* в S, якщо для довільних елементів a, b з T виконується умова $ab \in T$ і *підгрупою* в S, якщо $aT = Ta = T$ для кожного елемента a з T.

Підгрупа T напівгрупи S називається *максимальною*, якщо вона не міститься власно в будь-якій іншій підгрупі з S. Максимальна підгрупа моноїда S, яка містить одиницю цього моноїда називається *групою одиниць* і позначається через $H(\mathbb{I})$.

Елемент e напівгрупи S називається *ідемпотентом*, якщо $ee = e$. Якщо S – напівгрупа, то підмножину усіх ідемпотентів з S позначатимемо через $E(S)$. Комутативна напівгрупа ідемпотентів називається *напівґраткою.*

Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для кожного елемента x з S існує єдиний $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. У цьому випадку елемент x^{-1} називається *інверсним до* $x \in S$. Якщо S – інверсна напівгрупа, то відображення $\mathrm{inv}\colon S \to S$, яке ставить у відповідність кожному елементові x інверсної напівгрупи S його інверсний елемент x^{-1}, називається *інверсією.*

Кожна інверсна напівгрупа S допускає частковий порядок:

$$a \preccurlyeq b \quad \text{тоді і лише тоді, коли існує} \quad e \in E(S) \quad \text{такий, що} \quad a = be.$$

Так визначений порядок називається *природним частковим порядком* на S. Зауважимо, що $a \preccurlyeq b$ в інверсній напівгрупі S тоді і лише тоді, коли $a = fb$ для деякого елемента $f \in E(S)$ (див. лема 1.2.1)

Лема 1.2.1 ([77, лема 1.4.6]). *Нехай S — інверсна напівгрупа. Тоді наступні властивості еквівалентні:*

(*i*) $a \preccurlyeq b$;

(*i*) $a = fb$, *для деякого ідемпотента* $f \in E(S)$.

Інверсна напівгрупа S називається *E-унітарною*, якщо з того, що $ae \in E(S)$, для деякого елемента $e \in E(S)$ випливає, що $a \in E(S)$ [77]. *E*-

унітарна інверсна напівгрупа вперше введена Сайто в [92], де вона називалась "*власно впорядкованою інверсною напівгрупою*".

Відображення $\varphi : S \to S'$ з напівгрупи S в напівгрупу S' називається *гомоморфізмом*, якщо $(ab)\varphi = (a)\varphi(b)\varphi$, для довільних елементів $a, b \in S$.

Бієктивний гомоморфізм напівгрупи S у напівгрупу S' називається *ізоморфізмом* S в S'. Гомоморфізм напівгрупи S в себе називається *ендоморфізмом*, а ізоморфізм напівгрупи S на себе називається *автоморфізмом.*

Лема 1.2.2 ([89, лема II.1.10])**.** *Гомоморфний образ інверсної напівгрупи є інверсною напівгрупою.*

Відношення еквівалентності $\mathfrak{C}$ на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для всіх елементів $a, b, c \in S$ з того, що $a\mathfrak{C}b$ випливає, що $ac\mathfrak{C}bc$ і $ca\mathfrak{C}cb$. Конгруенція $\Delta = \{(s, s) | s \in S\}$ називається *тотожною*, а конгруенція $S \times S$ — *універсальною.* Конгруенція, яка відрізняється від тотожної та універсальної конгруенцій називається *нетривіальною.* Фактор-множина $S/\mathfrak{C}$ всіх $\mathfrak{C}$-класів з операцією

$$\mathfrak{C}_a\mathfrak{C}_b = \mathfrak{C}_{ab}$$

називається *фактор-напівгрупою*, індукованою конгруенцією $\mathfrak{C}$. Відображення

$$\widetilde{\mathfrak{C}}\colon s \mapsto \mathfrak{C}_s \quad (s \in S)$$

називається *природним гомоморфізмом* з S на $S/\mathfrak{C}$. Якщо фактор-напівгрупа $S/\mathfrak{C}$ є групою, то конгруенція $\mathfrak{C}$ називається *груповою.*

На кожній інверсній напівгрупі S існує *мінімальна групова конгруенція* $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ (див. [89, § III]): $s\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}t$ тоді і лише тоді, коли існує ідемпотент $e \in S$ такий, що $se = te$.

Інверсна напівгрупа S називається *F-інверсною*, якщо $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$-клас кожного елемента s містить найбільший елемент стосовно природного часткового порядку на S [79].

Твердження 1.2.3 ([77, твердження 2.3.4]). *Нехай* $\mathfrak{C}$ — *конгруенція на інверсній напівгрупі* S. *Тоді виконуються такі властивості:*

(1) *якщо* $(s,t)\in\mathfrak{C}$, *то*

$$(s^{-1},t^{-1})\in\mathfrak{C},\quad (s^{-1}s,t^{-1}t)\in\mathfrak{C}\quad i\quad (ss^{-1},tt^{-1})\in\mathfrak{C};$$

(2) *якщо* $(s,e)\in\mathfrak{C}$ *для деякого ідемпотента* e, *то*

$$(s,s^{-1})\in\mathfrak{C},\quad (s,s^{-1}s)\in\mathfrak{C}\quad i\quad (s,ss^{-1})\in\mathfrak{C}.$$

Лівим (правим) ідеалом напівгрупи S називається така непорожня підмножина A в S, що $SA\subseteq A$ ($AS\subseteq A$). *Двобічним ідеалом* (або просто *ідеалом*) називається підмножина напівгрупи, яка одночасно є і лівим, і правим ідеалом. Напівгрупа S називається *простою*, якщо S не містить власних двобічних ідеалів.

Якщо S — напівгрупа, тоді:

- через S^1 позначатимемо напівгрупу S з приєднаною одиницею [30];
- через S^0 позначатимемо напівгрупу S з приєднаним нулем [30].

Нехай $s\in S$ — деякий елемент напівгрупи S. Перетин всіх лівих ідеалів напівгрупи S, які містять елемент s, називається *головним ідеалом породженим елементом* s і позначається через $L(s)$. Праві та двобічні головні ідеали напівгрупи S, породжені елементом s, визначаються аналогічно і позначаються через $R(s)$ та $J(s)$, відповідно. Крім того, $L(s)=S^1s$, $R(s)=sS^1$ та $J(s)=S^1sS^1$.

Якщо S — напівгрупа, тоді через $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{D}$ та $\mathcal{H}$ будемо позначати відношення Ґріна на S (див. [48] чи [30, розділ 2.1]):

$a\mathcal{L}b$ тоді і лише тоді, коли $S^1a=S^1b$;
$a\mathcal{R}b$ тоді і лише тоді, коли $aS^1=bS^1$;
$a\mathcal{J}b$ тоді і лише тоді, коли $S^1aS^1=S^1bS^1$;

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L};$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}.$$

Також для того, щоб уточнити на якій саме напівгрупі розглядаються ці відношення, будемо використовувати позначення $\mathcal{L}(S)$, $\mathcal{R}(S)$, $\mathcal{J}(S)$, $\mathcal{D}(S)$ та $\mathcal{H}(S)$. Якщо a – елемент напівгрупи S, то через $\mathcal{L}_a$, $\mathcal{R}_a$, $\mathcal{J}_a$, $\mathcal{D}_a$ та $\mathcal{H}_a$ будемо позначати відповідно $\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{J}$-, $\mathcal{D}$- та $\mathcal{H}$-клас напівгрупи S, що містить елемент a.

Напівгрупа S називається *біпростою*, якщо всі елементи S є $\mathcal{D}$-еквівалентними.

Лема 1.2.4 ([86, лема 1.1]). *Інверсна напівгрупа S є біпростою тоді і лише тоді, коли для довільних ідемпотентів $e, f \in S$ існує такий елемент $a \in S$, що $aa^{-1} = e$ і $a^{-1}a = f$.*

Зауваження 1.2.5 ([77, с. 82]). Якщо S — інверсна напівгрупа, то можна розглянути такі еквівалетні означення відношень $\mathcal{L}$ і $\mathcal{R}$:

$$s\mathcal{L}t \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad s^{-1}s = t^{-1}t;$$
$$s\mathcal{R}t \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad ss^{-1} = tt^{-1}.$$

Твердження 1.2.6 ([77, твердження 3.2.11]). *Нехай S — інверсна піднапівгрупа інверсної напівгрупи T. Тоді виконуються такі властивості:*

(1) $\mathcal{L}(T) \cap (S \times S) = \mathcal{L}(S)$*;*

(2) $\mathcal{R}(T) \cap (S \times S) = \mathcal{R}(S)$*;*

(3) $\mathcal{H}(T) \cap (S \times S) = \mathcal{H}(S)$*.*

Теорема 1.2.7 ([30, теорема 2.3]). *Нехай a і c – довільні $\mathcal{D}$-еквівалентні елементи напівгрупи S. Тоді існує такий елемент $b \in S$, що $a\mathcal{R}b$ і $b\mathcal{L}c$, а отже, $as = b$, $bs' = a$, $tb = c$, $t'c = b$ для деяких елементів $s, s', t, t' \in S^1$. Відображення $x \mapsto txs$ $(x \in \mathcal{H}_a)$ та $z \mapsto t'zs'$ $(z \in \mathcal{H}_c)$ взаємообернені і взаємооднозначно відображають класи $\mathcal{H}_a$ та $\mathcal{H}_c$. Зокрема, два $\mathcal{H}$-класи, що лежать в одному $\mathcal{D}$-класі, мають однаковий порядок.*

Теорема 1.2.8 ([30, теорема 2.20]). *Нехай e та f – деякі $\mathcal{D}$-еквівалентні ідемпотенти напівгрупи S. Нехай a – довільний, але фіксований елемент* *з множини* $\mathcal{R}_e \cap \mathcal{L}_f$, *і нехай* a' *– інверсний елемент до елемента* a *з множини* $\mathcal{R}_f \cap \mathcal{L}_e$. *Тоді відображення* $x \mapsto a'xa$ *та* $y \mapsto aya'$ *є взаємо-оберненими ізоморфізмами відповідно* $\mathcal{H}_e$ *на* $\mathcal{H}_f$ *і* $\mathcal{H}_f$ *на* $\mathcal{H}_e$.

Нехай D — підмножина непорожньої множини X. Відображення α з D в X називається *частковим перетворенням* (або *частковим відображенням*) множини X. У такому випадку використовуватимемо позначення $\alpha\colon X \rightharpoonup X$. Множина D називається *областю визначення* часткового відображення α і позначається $\operatorname{dom}\alpha$. Образ елемента $x \in \operatorname{dom}\alpha$ стосовно відображення α позначатимемо через $(x)\alpha$. Множина $\{x \in X\colon (y)\alpha = x,$ для деякого $y \in D\}$ називається *областю значень* часткового відображення α і позначається $\operatorname{ran}\alpha$.

Композицією часткових перетворень α і β множини X (див. [77, с. 4]) називається часткове перетворення $\alpha\beta$ множини X визначене так:

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(\alpha\beta) &= \{y \in \operatorname{dom}\alpha \mid (y)\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}; \\ (x)(\alpha\beta) &= ((x)\alpha)\beta, \quad x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Через $\mathcal{I}_X$ будемо позначати напівгрупу всіх часткових ін'єктивних перетворень непорожньої множини X стосовно операції композиції часткових відображень. Напівгрупа $\mathcal{I}_X$ називається *симетричною інверсною напівгрупою* над множиною X. Симетрична інверсна напівгрупа була введена Вагнером у [3] і відіграє важливу роль в теорії напівгруп.

Нехай $\{X_i\}_{i\in I}$ – сім'я об'єктів категорії C. Об'єкт X називається *добутком* сім'ї $\{X_i\}_{i\in I}$, якщо існують такі морфізми $\pi_i\colon X \to X_i$, що для довільного об'єкта Y, та для довільної I-індексованої сім'ї морфізмів $f_i\colon Y \to X_i$ існує єдиний морфізм $f\colon Y \to X$ такий, що наступна діаграма є комутативною для всіх $i \in I$:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\pi_i"] \\
Y \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "f_i"'] & X_i
\end{tikzcd}$$

Зауважимо, що добуток об'єктів дуальний їхньому кодобутку, тобто означення кодобутку можна отримати з означення добутку обертанням усіх стрілок. Об'єкт X називається *кодобутком* сім'ї $\{X_j\}_{j \in I}$, якщо існують такі морфізми $i_j \colon X_j \to X$, що для довільного об'єкта Y, та для довільної I-індексованої сім'ї морфізмів $f_j \colon X_j \to Y$ існує єдиний морфізм $f \colon X \to Y$ такий, що така діаграма є комутативною для всіх $j \in I$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
X_j \arrow[u, "i_j"] \arrow[r, "f_j"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Нехай $(S, *)$ — напівгрупа і κ — довільний ненульовий кардинал. *Прямим κ добутком* (або *прямим добутком степеня κ*) напівгрупи S називається напівгрупа $(S^\kappa, *_\kappa)$, визначена як множина S^κ з операцією покоординатного множення $*_\kappa$:

$$(x)(\alpha *_\kappa \beta) = (x)\alpha * (x)\beta,$$

для довільного елемента $x \in \kappa$ і довільних елементів $\alpha, \beta \in S^\kappa$. Часто для спрощення формул, замість позначення $*_\kappa$, використовуватимемо символ $*$. Нехай S — моноїд, $1 \in S$ — одиниця моноїда S і κ — довільний нескінченний кардинал. В S^κ розглянемо таку підмножину:

$${}^{\kappa}S = \{s \in S^\kappa \mid \text{множина } \{x \in \kappa \mid (x)s \neq 1\} - \text{скінченна}\}.$$

Прямим κ кодобутком моноїда S називається напівгрупа $({}^{\kappa}S, *_{\kappa})$, визначена як множина ${}^{\kappa}S$ з операцією покоординатного множення $*_{\kappa}$.

Зауважимо, що вибір назви *"прямий кодобуток"* і позначення ${}^{\kappa}S$ зумовлений тим, що у випадку довільного абелевого моноїда S, так визначений прямий κ добуток ${}^{\kappa}S$ є кодобутком сім'ї що містить κ копій моноїда S в категорії абелевих моноїдів.

Нехай φ — гомоморфізм з напівгрупи S в напівгрупу $\mathrm{End}(T)$ всіх ендоморфізмів напівгрупи T стосовно операції композиції. *Напівпрямим добутком напівгрупи T напівгрупою S над гомоморфізмом φ* називається напівгрупа $S \ltimes_{\varphi} T$, визначена як множина $S \times T$ з такою операцією:

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1 s_2, (t_1)(s_2)\varphi t_2).$$

Через $\mathbb{Z}_+$ позначатимемо адитивну групу цілих чисел. Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ через $\mathbb{Z}_+^n$ позначатимемо прямий добуток степеня n групи $\mathbb{Z}_+$, і для довільного нескінченного кардинала κ через ${}^{\kappa}\mathbb{Z}_+$ позначатимемо прямий κ кодобуток групи $\mathbb{Z}_+$.

Біциклічною напівгрупою (або *біциклічним моноїдом*) $\mathcal{C}(p,q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена елементами p і q та визначальним співвідношенням $pq = 1$ [30]. Елементи напівгрупи $\mathcal{C}(p,q)$ зручно зображати у вигляді нескінченної таблиці

$$\begin{array}{ccccc}
1 & p & p^2 & p^3 & \cdots \\
q & qp & qp^2 & qp^3 & \cdots \\
q^2 & q^2p & q^2p^2 & q^2p^3 & \cdots \\
q^3 & q^3p & q^3p^2 & q^3p^3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Зауваження 1.2.9. У біциклічній напівгрупі $\mathcal{C}(p,q)$ напівгрупова операція визначена так:

$$q^ip^j \cdot q^kp^l = \begin{cases} q^ip^{j-k+l}, & \text{якщо } j > k; \\ q^ip^l, & \text{якщо } j = k; \\ q^{i-j+k}p^l, & \text{якщо } j < k, \end{cases}$$

що еквівалентно:

$$q^ip^j \cdot q^kp^l = q^{i+\max\{j,k\}-j}p^{l+\max\{j,k\}-k}.$$

Також зауважимо, що біциклічна напівгрупа $\mathcal{C}(p,q)$ ізоморфна напівгрупі $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},*)$, яка визначена на декартовому квадраті натуральних чисел $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ з такою напівгруповою операцією:

$$(i,j)*(k,l) = (i+\max\{j,k\}-j, l+\max\{j,k\}-k). \tag{1.2}$$

Це випливає з того, що відображення

$$f : \mathcal{C}\,(p,q) \to \mathbb{N}\times\mathbb{N} : q^ip^j \stackrel{f}{\mapsto} (i+1, j+1)$$

є ізоморфізмом напівгруп $\mathcal{C}\,(p,q)$ і $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},*)$. У дисертаційній роботі використовуватимемо напівгрупу $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},*)$ як ізоморфне зображення біциклічної напівгрупи $\mathcal{C}\,(p,q)$ і позначатимемо її через $\mathbb{B}$.

Зауваження 1.2.10. Біциклічна напівгрупа ізоморфна напівгрупі $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\alpha,\beta)$, яка породжена частковими перетвореннями α і β множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, які визначаються так: $(n)\alpha = n+1$, якщо $n \geqslant 1$ і $(n)\beta = n-1$, якщо $n > 1$ (див. вправа IV.1.11(ii) в [89]).

Лема 1.2.11 ([30, лема 1.31])**.** *Нехай e, a, b – елементи напівгрупи S такі, що $ea = ae = a$, $eb = be = b$, $ab = e$ і $ba \neq e$. Тоді кожен елемент піднапівгрупи $\langle a,b\rangle$ з S, породженої елементами a та b, єдиним чином зображаються у вигляді b^ma^n, де m та n – невід'ємні цілі числа (і $a^0 = b^0 = e$), а отже, напівгрупа $\langle a,b\rangle$ ізоморфна біциклічній напівгрупі $\mathcal{C}(p,q)$.*

Наслідок 1.2.12 ([30, наслідок 1.32]). *Якщо φ – гомоморфізм біциклічної напівгрупи $\mathcal{C}(p,q)$ в напівгрупу S, то або φ є ізоморфізмом напівгрупи $\mathcal{C}(p,q)$ в S, або $(\mathcal{C}(p,q))\varphi$ – циклічна група.*

Покриттям множини X називається сім'я $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ підмножин в X така, що $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = X$. Підсім'я $\mathcal{A}_0$ в $\mathcal{A}$ називається *підпокриттям* множини X, якщо $\mathcal{A}_0$ – покриття множини X. У випадку, коли X – топологічний простір, то сім'ю $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ називають *відритим покриттям* простору X, якщо всі елементи сім'ї $\mathcal{A}$ є відритими підмножинами в X.

Сім'я $\{A_i\}_{i\in I}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для довільної точки $x \in X$ існує відкритий окіл U точки x такий, що множина $\{i \in I\colon U \cap A_i \neq \varnothing\}$ — скінченна.

Якщо X — топологічний простір і $M \subseteq X$, тоді через $\operatorname{cl}_X(M)$ (або $\overline{M}$) та $\operatorname{int}_X(M)$ позначатимемо топологічне замикання та внутрішність множини M в топологічному просторі X, відповідно.

Точка x називається *ізольованою* в топологічному просторі X, якщо одноточкова множина $\{x\}$ є відритою підмножиною в X.

Точка x називається *точкою накопичення* підмножини A в топологічному просторі X, якщо кожен відкритий окіл точки x містить нескінченну кількість елементів множини A.

Підмножина A топологічного простору X називається *щільною* в топологічному просторі X, якщо $\operatorname{cl}_X(A) = X$.

Сім'я $\mathcal{B}$ називається *базою топологічного простору* X, якщо довільну непорожню відкриту множину простору X можна подати у вигляді об'єднання деякої підсім'ї сім'ї $\mathcal{B}$.

Сім'я $\mathcal{B}(x)$ називається *базою топологічного простору X в точці x*, якщо для довільного околу U точки x існує такий елемент $V \in \mathcal{B}(x)$, що $x \in V \subset U$.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X та Y

називається *гомеоморфізмом*, якщо f взаємооднозначно відображає X на Y і обернене відображення $f^{-1}\colon Y \to X$ є неперервним. *Вкладенням* (*зануренням*) топологічного простору X в топологічний простір Y називається гомеоморфізм $f\colon X \to Y$ з простору X у простір Y, тобто на образ $(X)f$.

Топологічний простір X називається:

- *дискретним*, якщо кожна підмножина в X є відкритою;
- T_0-*простором*, якщо для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існує така відкрита підмножина U в X, що містить тільки одну з цих точок;
- T_1-*простором*, якщо для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існує така відкрита підмножина U в X, що $x \in U$ і $y \notin U$;
- T_2-*простором* (*гаусдорфовим простором*), якщо для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існують такі відкриті підмножини U, V в X, що $x \in U$, $y \in V$ і $U \cap V = \varnothing$;
- T_3-*простором* (*регулярним простором*), якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та будь-якої замкненої підмножини F в X такої, що $x \notin F$, існують такі відкриті підмножини U, V в X, що $x \in U$, $F \subset V$ і $U \cap V = \varnothing$;
- $T_{3\frac{1}{2}}$-*простором* (*тихоновським або цілком регулярним простором*), якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та будь-якої замкненої підмножини F в X такої, що $x \notin F$, існує неперервна функція $f\colon X \to [0;1]$ така, що $f(x) = 0$ і $f(y) = 1$, для всіх $y \in F$.
- *компактним*, якщо кожне відкрите покриття простору X містить скінченне підпокриття;
- *зліченно компактним*, якщо з кожного відкритого зліченного покриття простору X можна вибрати скінченне підпокриття;
- *слабко компактним*, якщо кожне локально-скінченне відкрите покриття простору X є скінченним [20];
- *псевдокомпактним*, якщо X — цілком регулярний і кожна непе-

рервна дійснозначна функція на X обмежена;

- *локально компактним*, якщо для кожного елемента x в X існує відкритий окіл $U(x)$ такий, що його замикання $\mathrm{cl}_X(U(x))$ є компактним підпростором в X.

Неперервне відображення $f\colon X \to X$ називається *ретракцією простору* X, якщо $ff = f$; множина всіх значень ретракції простору X називається *ретрактом* простору X.

Твердження 1.2.13 ([34, задача 1.5.C]). *Довільний ретракт гаусдорфового простору є замкненою підмножиною в цьому просторі.*

Теорема 1.2.14 ([34, теорема 3.3.1]). *Кожен локально компактний топологічний простір є тихоновським.*

Теорема 1.2.15 ([34, теорема 3.3.9]). *Кожен локально компактний підпростір M гаусдорфового простору X є відкритою підмножиною в замиканні $\overline{M}$ множини M, тобто він може бути зображений у формі $F \cap V$, де F – замкнена і V – відкрита множини в X*

Топологічний простір (S, τ) разом із заданою на ньому нарізно неперервною напівгруповою операцією називається *напівтопологічною напівгрупою*, а топологія τ називається *трансляційно-неперервною топологією* на S. Якщо напівгрупова операція є неперервною, тоді топологічний простір (S, τ) називається *топологічною напівгрупою*, а топологія τ — *напівгруповою топологією* на S.

Ізоморфізм $\varphi\colon S \to T$ топологічних напівгруп S і T називається *топологічним ізоморфізмом*, якщо φ є гомеоморфізмом топологічних просторів S і T. *Топологічним вкладенням (зануренням)* топологічної напівгрупи S у топологічну напівгрупу T називається топологічний ізоморфізм напівгрупи S у напівгрупу T.

Топологічна напівгрупа S називається Γ-*компактною*, якщо для кожного елемента $x \in S$ замикання множини $\{x, x^2, x^3, \ldots\}$ є компактним в просторі S (див. [62]).

З результатів отриманих в працях [19, 21, 22, 57, 62] випливає наступне твердження.

Твердження 1.2.16 ([19, 21, 22, 57, 62])**.** *Якщо гаусдорфова топологічна напівгрупа S задовільняє одну з таких умов:*

(i) *S є компактом;*

(ii) *S є* Γ-*компактною;*

(iii) *S – зліченно компактна топологічна інверсна напівгрупа;*

(iv) *квадрат $S \times S$ зліченно компактний;   або*

(v) *квадрат $S \times S$ – тихонівський псевдокомпактний простір,*

то S не містить біциклічної напівгрупи.

РОЗДІЛ 2
НАПІВГРУПА $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ ПОРЯДКОВИХ ІЗОМОРФІЗМІВ ГОЛОВНИХ ФІЛЬТРІВ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНОЇ МНОЖИНИ $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$

Надалі вважаємо, що $\leqslant$ – звичайний лінійний порядок на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ розглянемо частково впорядковану множину $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ як n-тий степінь натуральних чисел $\mathbb{N}$ з порядком добутку:

$$(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, \ldots, y_n) \qquad \text{тоді і лише тоді, коли} \qquad x_i \leqslant y_i$$

$$\text{для всіх} \quad i = 1, \ldots, n.$$

У цьому розділі вивчаються алгебричні властивості напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, де n – довільне натуральне число $\geqslant 2$. Отримані результати опубліковані в роботі [50].

2.1. Алгебричні властивості напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$

Нехай n – довільне натуральне число $\geqslant 2$. Через $\mathbb{I}$ позначатимемо тотожне відображення множини $\mathbb{N}^n$. Очевидно, що $\mathbb{I}$ є одиничним елементом напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Також через $H(\mathbb{I})$ позначатимемо групу одиниць напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Легко бачити, що елемент $\alpha \in \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є елементом групи одиниць $H(\mathbb{I})$ тоді і лише тоді, коли α – порядковий ізоморфізм частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$.

Через $\mathcal{P}_{\uparrow}(\mathbb{N}^n)$ позначимо сім'ю всіх головних фільтрів частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, тобто $\mathcal{P}_{\uparrow}(\mathbb{N}^n) = \{{\uparrow}x : x \in \mathbb{N}^n\}$. Очевидно, що сім'я $\mathcal{P}_{\uparrow}(\mathbb{N}^n)$ є замкненою відносно операції перетину, і тому $(\mathcal{P}_{\uparrow}(\mathbb{N}^n), \cap)$ є піднапівґраткою напівґратки $(\mathcal{P}(\mathbb{N}^n), \cap)$. Також зауважимо, що напівґратка $(\mathbb{N}^n, \max)$, яка утворена множиною $\mathbb{N}^n$ з операцією поточкового максимуму:

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n) = (\max\{x_1, y_1\}, \ldots, \max\{x_n, y_n\}),$$

ізоморфна напівґратці $(\mathcal{P}_{\uparrow}(\mathbb{N}^n), \cap)$, і цей ізоморфізм визначається відображенням $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto {\uparrow}(x_1, \ldots, x_n)$.

Твердження 2.1.1. *Нехай n – довільне натуральне число $\geqslant 2$. Тоді:*

(1) *$\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ - інверсна напівгрупа;*

(2) *напівґратка $E(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n))$ ізоморфна напівґратці $(\mathcal{P}_{\uparrow}(\mathbb{N}^n), \cap)$, стосовно відображення $\varepsilon \mapsto \operatorname{dom}\varepsilon$, а тому вона ізоморфна напівґратці $(\mathbb{N}^n, \max)$;*

(3) *$\alpha\mathcal{L}\beta$ в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$;*

(4) *$\alpha\mathcal{R}\beta$ в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$;*

(5) *$\alpha\mathcal{H}\beta$ в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$ і $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$;*

(6) *для довільних ідемпотентів $\varepsilon, \iota \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ існують елементи $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ такі, що $\alpha\beta = \varepsilon$ і $\beta\alpha = \iota$;*

(7) *$\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ – біпроста напівгрупа, а отже проста.*

Доведення. (1) З означення напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ випливає, що $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є інверсним підмоноїдом симетричного інверсного моноїда $\mathcal{I}_{\mathbb{N}^n}$ над множиною $\mathbb{N}^n$.

Властивість (2) випливає з властивості (1).

Властивості (3)–(5) випливають з (1) і з тверджень 1.2.6(1)–(3).

(6) Зафіксуємо довільні ідемпотенти $\varepsilon, \iota \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Оскільки $\operatorname{dom}\varepsilon$ і $\operatorname{dom}\iota$ є головними фільтрами в частково впорядкованій множині $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ ми покладемо, що $\operatorname{dom}\varepsilon$ і $\operatorname{dom}\iota$ породжені елементами $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ і $\left(y_1^0, \ldots, y_n^0\right)$

у $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$. Визначимо часткове відображення $\alpha\colon \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}^n$ так:

$$\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\varepsilon, \qquad \operatorname{ran}\alpha = \operatorname{dom}\iota \qquad \text{і}$$

$$(z_1, \ldots, z_n)\,\alpha = \left(z_1 - x_1^0 + y_1^0, \ldots, z_n - x_n^0 + y_n^0\right),$$

для довільного елемента $(z_1, \ldots, z_n) \in \operatorname{dom}\alpha$. Тоді $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon$ і $\alpha^{-1}\alpha = \iota$, а тому, покладемо $\beta = \alpha^{-1}$.

Властивість (7) випливає з (6) і з леми 1.2.4. $\square$

Доведення наступних двох лем очевидне.

Лема 2.1.2. *Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ і довільного $i = 1, \ldots, n$ проекція на i-ту координату*

$$\pi_i\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n\colon (x_1, \ldots, \underbrace{x_i}_{i}, \ldots, x_n) \longmapsto (1, \ldots, \underbrace{x_i}_{i}, \ldots, 1)$$

є монотонним відображенням, і більше того,

$$(1, \ldots, \underbrace{x_i}_{i}, \ldots, 1) \leqslant (x_1, \ldots, \underbrace{x_i}_{i}, \ldots, x_n) \quad \text{у} \quad (\mathbb{N}^n, \leqslant).$$

Лема 2.1.3. *Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ кожне відображення $\alpha\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$, яке переставляє координати елементів множини $\mathbb{N}^n$ є порядковим ізоморфізмом частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$.*

Лема 2.1.4. *Нехай n – натуральне число $\geqslant 2$ і відображення $\alpha\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$ порядковий ізоморфізм частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ такий, що $\left(x_i^2\right)\alpha = x_i^2$ для кожного $i = 1, \ldots, n$, де $x_i^2 = (1, \ldots, \underbrace{2}_{i}, \ldots, 1)$ – елемент частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ такий, що лише i-та координата елемента x_i^2 дорівнює 2, а всі інші координати дорівнюють 1. Тоді α – тотожне перетворення множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$.*

Доведення. Зауважимо, що елемент $(1, 1, \ldots, 1)$ є найменшим елементом у частково впорядкованій множині $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, і оскільки α – її порядковий ізоморфізм, то $(1, 1, \ldots, 1)\alpha = (1, 1, \ldots, 1)$.

Далі, за індукцією, маємо, що для довільного натурального числа $k \geqslant 2$, для елемента $x_1^k = (k, 1, 1, \ldots, 1)$ множина ${\downarrow} x_1^k$ є k-елементним ланцюгом. Тоді множина $(x_1^k)\alpha$ також є k-елементним ланцюгом, з чого випливає, що лише перша координата елемента $(x_1^k)\alpha$ дорівнює k, а всі його інші координати дорівнюють 1, бо у випадку, коли це не так, то множина ${\downarrow}(x_1^k)\alpha$ не є k-елементним ланцюгом в $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$. Аналогічно, для довільного натурального числа $i = 2, \ldots, n$ за індукцією, маємо, що для кожного натурального $k \geqslant 2$ для елемента x_i^k, в якого лише i-та координата дорівнює k, а всі інші координати дорінюють 1, множина ${\downarrow} x_i^k$ є k-елементним ланцюгом, а тому множина ${\downarrow}(x_i^k)\alpha$ є k-елементним ланцюгом. Звідси випливає, що лише i-та координата елемента $(x_i^k)\alpha$ дорівнює k, а всі інші координати дорінюють 1.

Отже, ми довели, що $(x_i^p)\,\alpha = x_i^p$ для довільного числа $i = 1, \ldots, n$, де $x_i^p = (1, \ldots, \underbrace{p}_{i}, \ldots, 1)$ – елемент частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ такий, що лише i-та координата дорівнює p, а всі інші координати дорівнюють 1.

Зауважимо, що обернене відображення $\alpha^{-1} \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$ до порядкового ізоморфізму α частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ є також її порядковим ізоморфізмом, і воно задовільняє припущення леми. Тому з попередньої частини доведення випливає, що $(x_i^p)\,\alpha^{-1} = x_i^p$ для кожного $i = 1, \ldots, n$, де $x_i^p = (1, \ldots, \underbrace{p}_{i}, \ldots, 1)$ – такий елемент частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, що лише i-та координата елемента x_i^p дорівнює p а всі інші координати дорівнюють 1.

Зафіксуємо довільний елемент $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ і припустимо, що

$$(x_1, \ldots, x_n)\alpha = (y_1, \ldots, y_n).$$

З того, що композиція монотоних відображень є монотоним відображенням, з леми 2.1.2 і з попередньої частини доведення випливає, що для довільного $i = 1, \ldots, n$ маємо, що:

$$\begin{aligned}
(1, \ldots, \underbrace{x_i}_{i}, \ldots, 1) &= (1, \ldots, \underbrace{x_i}_{i}, \ldots, 1)\pi_i = \\
&= ((1, \ldots, \underbrace{x_i}_{i}, \ldots, 1)\alpha)\pi_i \leqslant \\
&\leqslant ((x_1, \ldots, x_n)\alpha)\pi_i = \\
&= (y_1, \ldots, y_n)\pi_i = \\
&= (1, \ldots, \underbrace{y_i}_{i}, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
(1, \ldots, \underbrace{y_i}_{i}, \ldots, 1) &= (1, \ldots, \underbrace{y_i}_{i}, \ldots, 1)\pi_i = \\
&= ((1, \ldots, \underbrace{y_i}_{i}, \ldots, 1)\alpha^{-1})\pi_i \leqslant \\
&\leqslant ((y_1, \ldots, y_n)\alpha^{-1})\pi_i = \\
&= (x_1, \ldots, x_n)\pi_i = \\
&= (1, \ldots, \underbrace{x_i}_{i}, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, і це завершує доведення леми. $\square$

Теорема 2.1.5. *Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ група одиниць $H(\mathbb{I})$ напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна групі $\mathcal{S}_n$. Більше того, кожен елемент групи одиниць переставляє координати елементів множини $\mathbb{N}^n$, і лише такі підстановки є елементами групи одиниць.*

Доведення. Покажемо, що кожен порядковий ізоморфізм частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ переставляє координати елементів множини $\mathbb{N}^n$. Обернене твердження випливає з леми 2.1.3.

Розглянемо елемент $x_1^2 = (2, 1, 1, \ldots, 1)$ частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$. Оскільки ${\downarrow}x_1^2$ – ланцюг, що містить рівно два елементи й α – порядковий ізоморфізм частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, то ${\downarrow}(x_1^2)\alpha$ – також ланцюг, що містить рівно два елементи. Звідси та з означення частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ випливає, що елемент $(x_1^2)\alpha$ має таку властивість: *лише одна координата елемента* $(x_1^2)\alpha$ *дорівнює* 2*, а всі інші координати дорівнюють* 1. Цю координату позначимо через σ_1. Аналогічно, маємо, що для кожного елемента x_i^2 частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ з властивістю, що лише i-та координата елемента x_i^2 дорівнює 2, а всі інші координати дорівнюють 1, лише σ_i-та координата елемента $(x_i^2)\alpha$ дорівнює 2, а всі інші координати дорівнюють 1, для всіх $i = 1, \ldots, n$. Оскільки α – порядковий ізоморфізм частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, то $\sigma_i = \sigma_j$ тоді і лише тоді, коли $i = j$, для всіх $i, j = 1, \ldots, n$.

Отже, ми визначили підстановку $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Тоді композиції $\alpha\sigma^{-1}$ і $\sigma^{-1}\alpha$ є порядковими ізоморфізмами частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$. Більше того, елементи $\alpha\sigma^{-1}$ і $\sigma^{-1}\alpha$ задовільняють припущення леми 2.1.4, звідки випливає, що $\alpha\sigma^{-1}\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$ і $\sigma^{-1}\alpha\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$ є тотожними відображеннями множини $\mathbb{N}^n$. Звідси випливає, що $\alpha = \sigma$, що завершує доведення теореми. $\square$

З теорем 1.2.7 і 1.2.8 та теореми 2.1.5 випливає такий наслідок.

Наслідок 2.1.6. *Для довільного натурального числа* $n \geqslant 2$ *кожна максимальна підгрупа напівгрупи* $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ *ізоморфна групі* $\mathcal{S}_n$*, а отже, кожен* $\mathscr{H}$*-класс у* $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ *містить* $n!$ *елементів.*

Наступні твердження дають достатні умови того, що піднапівгрупа напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$, яка породжена елементом з $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і його інверсним, ізоморфна біциклічному моноїду $\mathscr{C}(p, q)$.

Твердження 2.1.7. *Для довільного натурального числа* $n \geqslant 2$ *і довільного елемента* α *напівгрупи* $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ *такого, що* $\operatorname{ran}\alpha \subsetneqq \operatorname{dom}\alpha$ *піднапівгрупа* $\langle \alpha, \alpha^{-1} \rangle$ *напівгрупи* $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$*, яка породжена елементом* α *і його* *інверсним* α^{-1}*, ізоморфна біциклічному моноїду* $\mathcal{C}(p,q)$.

Доведення. Покладемо ε – тотожне відображення множини $\operatorname{dom}\alpha$. З означення напівгрупової операції в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ випливає, що

$$\varepsilon\alpha=\alpha\varepsilon=\alpha, \qquad \varepsilon\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\varepsilon=\alpha^{-1}, \qquad \alpha\alpha^{-1}=\varepsilon \qquad \text{і} \qquad \alpha^{-1}\alpha\neq\varepsilon$$

Далі використовуємо лему 1.2.11. □

Наслідок 2.1.8. *Нехай* n *– натуральне число* $\geqslant 2$*. Тоді для довільних ідемпотентів* ε *і* ι *напівгрупи* $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ *таких, що* $\varepsilon\preccurlyeq\iota$ *існує піднапівгрупа* $\mathcal{C}$ *напівгрупи* $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$*, яка ізоморфна біциклічному моноїду* $\mathcal{C}(p,q)$ *і містить ідемпотенти* ε *і* ι*.*

Доведення. Припустимо, що $\varepsilon\neq\iota$. Нехай α – довільний порядковий ізоморфізм з $\operatorname{dom}\iota$ в $\operatorname{dom}\varepsilon$. Далі ми застосовуємо твердження 2.1.7.

Якщо $\varepsilon=\iota$, то виберемо довільний ідемпотент $\nu\neq\varepsilon$ такий, що $\nu\preccurlyeq\varepsilon$ і застосуємо попередню частину доведення. □

Лема 2.1.9. *Нехай* n *– натуральне число* $\geqslant 2$ *і* $\mathfrak{C}$ *– конгруенція на моноїді* $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ *така, що* $\varepsilon\mathfrak{C}\iota$ *для деяких двох різних ідемпотентів* $\varepsilon,\iota\in\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$*. Тоді всі ідемпотенти напівгрупи* $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ *є* $\mathfrak{C}$*-еквівалентними.*

Доведення. Зауважимо, що не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\varepsilon\preccurlyeq\iota$, де $\preccurlyeq$ – природний частковий порядок на напівгрупі $E(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n))$. Справді, якщо $\varepsilon,\iota\in E(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n))$, то з того, що $\varepsilon\mathfrak{C}\iota$ випливає, що $\varepsilon=\varepsilon\varepsilon\mathfrak{C}\iota\varepsilon$, і оскільки ідемпотенти ε і ι різні, то отримуємо, що $\iota\varepsilon\preccurlyeq\varepsilon$.

З нерівності $\varepsilon\preccurlyeq\iota$ випливає, що $\operatorname{dom}\varepsilon\subseteq\operatorname{dom}\iota$, а отже,

$$(x_1,\ldots,x_n)\leqslant(y_1,\ldots,y_n)\,,$$

де ${\uparrow}(x_1,\ldots,x_n)$ і ${\uparrow}(y_1,\ldots,y_n)$ – головні фільтри в $(\mathbb{N}^n,\leqslant)$ такі, що

$${\uparrow}(x_1,\ldots,x_n)=\operatorname{dom}\iota \qquad \text{і} \qquad {\uparrow}(y_1,\ldots,y_n)=\operatorname{dom}\varepsilon.$$

Означимо часткові відображення $\alpha,\beta\colon\mathbb{N}^n\rightharpoonup\mathbb{N}^n$ так:

(a) $\operatorname{dom}\alpha = \mathbb{N}^n$, $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{dom}\iota$,
$(z_1, \ldots, z_n)\,\alpha = (z_1 + x_1 - 1, \ldots, z_n + x_n - 1)$,
для всіх $(z_1, \ldots, z_n) \in \operatorname{dom}\alpha$;

(b) $\operatorname{dom}\beta = \operatorname{dom}\iota$, $\operatorname{ran}\beta = \mathbb{N}^n$,
$(z_1, \ldots, z_n)\,\beta = (z_1 - x_1 + 1, \ldots, z_n - x_n + 1)$,
для всіх $(z_1, \ldots, z_n) \in \operatorname{dom}\beta$.

Очевидно, що $\alpha\iota\beta = \mathbb{I}$ і $\beta\alpha = \iota$, і більше того, оскільки $\alpha\beta = \mathbb{I}$, то

$$(\alpha\varepsilon\beta)\,(\alpha\varepsilon\beta) = \alpha\varepsilon\,(\beta\alpha)\,\varepsilon\beta = \alpha\varepsilon\iota\varepsilon\beta = \alpha\varepsilon\varepsilon\beta = \alpha\varepsilon\beta,$$

і з цього випливає, що $\alpha\varepsilon\beta$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ таким, що $\alpha\varepsilon\beta \neq \mathbb{I}$.

Отже, було доведено, що існує неодиничний ідемпотент ε^* в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ такий, що $\varepsilon^*\mathfrak{C}\mathbb{I}$. З цього випливає, що $\varepsilon_0\mathfrak{C}\mathbb{I}$ для довільного ідемпотента ε_0 такого, що $\varepsilon^* \preccurlyeq \varepsilon_0 \preccurlyeq \mathbb{I}$. З означення напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і твердження 2.1.1(ii) випливає, що існує елемент $x_i^2 = (1, \ldots, \underbrace{2}_{i}, \ldots, 1)$ частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ такий, що лише i-та координата елемента x_i^2 дорівнює 2, а всі інші координати дорівнюють 1 та існує ідемпотент ε_i такий, що $\operatorname{dom}\varepsilon_0 \subseteq \operatorname{dom}\varepsilon_i = {\uparrow}x_i^2$.

Зафіксуємо довільне натуральне число $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. Нехай $\sigma_{(i,j)}$ – підстановка координат елементів множини $\mathbb{N}^n$, яка переставляє лише j-ту та i-ту координати, тобто, це цикл (i, j) на координатах. Тоді з означення напівгрупової операції в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ випливає, що

$$\sigma_{(i,j)}\mathbb{I}\sigma_{(i,j)} = \mathbb{I} \quad \text{і} \quad \sigma_{(i,j)}\varepsilon_i\sigma_{(i,j)} = \varepsilon_j,$$

де ε_j - тотожне відображення головного фільтра ${\uparrow}x_j^2$ частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ такого, що $x_j^2 = (1, \ldots, \underbrace{2}_{j}, \ldots, 1)$, тобто лише j-та координата елемента x_j^2 дорівнює 2, а всі інші координати дорівнюють 1.

З наведених вище міркувань випливає, що $\varepsilon_i\mathfrak{C}\mathbb{I}$ для кожного ідемпотента $\varepsilon_i \in \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ такого, що ε_i – тотожне відображення головного фільтра ${\uparrow}x_i^2$ частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, $i = 1, \ldots, n$. З цього випливає, що $\mathbb{I}\mathfrak{C}(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)$. З означення напівгрупової операції в $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ випливає, що ідемпотент $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ є тотожнім відображенням головного фільтра ${\uparrow}(2, \ldots, 2)$ частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$. Визначимо часткове відображення $\gamma\colon \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}^n$ так:

$$\operatorname{dom}\gamma = \mathbb{N}^n, \quad \operatorname{ran}\gamma = {\uparrow}(2, \ldots, 2) \quad \text{і} \quad (z_1, \ldots, z_n)\,\gamma = (z_1 + 1, \ldots, z_n + 1)\,,$$

для $(z_1, \ldots, z_n) \in \operatorname{dom}\gamma$. За твердженням 2.1.7 піднапівгрупа $\langle\gamma, \gamma^{-1}\rangle$ моноїда $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$, яка породжена елементом γ і його інверсним γ^{-1}, ізоморфна біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}(p, q)$. Очевидно, що $\gamma\gamma^{-1} = \mathbb{I}$ і $\gamma^{-1}\gamma = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$. Оскільки $\mathbb{I}\mathfrak{C}(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)$, то за наслідком 1.2.12 всі ідемпотенти піднапівгрупи $\langle\gamma, \gamma^{-1}\rangle$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними в $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Також з означення біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}(p, q)$ і з леми 1.2.11 випливає, що всі ідемпотенти піднапівгрупи $\langle\gamma, \gamma^{-1}\rangle$ напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є елементами вигляду $\left(\gamma^{-1}\right)^k \gamma^k$, де k – деяке невід'ємне ціле число. Тепер за з означенням моноїда $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ маємо, що $\left(\gamma^{-1}\right)^k \gamma^k$ є тотожним відображенням головного фільтра ${\uparrow}(k, \ldots, k)$ частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, для деякого невід'ємного цілого числа k. Більше того, для кожного ідемпотента ζ напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$, який є тотожним відображенням головного фільтра ${\uparrow}(a_1, \ldots, a_n)$ частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ маємо, що

$$\left(\gamma^{-1}\right)^m \gamma^m \preccurlyeq \zeta, \quad \text{де} \quad m = \max\{a_1, \ldots, a_n\}\,,$$

з цього випливає, що $\mathbb{I}\mathfrak{C}\zeta$. □

Лема 2.1.10. *Нехай n – натуральне число $\geqslant 2$ і $\mathfrak{C}$ – конгруенція на моноїді $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ така, що $\alpha\mathfrak{C}\beta$ для деяких не $\mathscr{H}$-еквівалентних елементів $\alpha, \beta \in \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Тоді всі ідемпотенти напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.*

Доведення. Оскільки елементи α і β не є $\mathcal{H}$-еквівалентними в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, то з зауваження 1.2.5 отримуємо, що або $\alpha\alpha^{-1} \neq \beta\beta^{-1}$, або $\alpha^{-1}\alpha \neq \beta^{-1}\beta$. Тоді з твердження 1.2.3 випливає, що $\alpha\alpha^{-1}\mathfrak{C}\beta\beta^{-1}$ і $\alpha^{-1}\alpha\mathfrak{C}\beta^{-1}\beta$, а тому виконується припущення леми 2.1.9. □

Лема 2.1.11. *Нехай n – натуральне число $\geqslant 2$ і $\mathfrak{C}$ – конгруенція на моноїді $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ така, що $\alpha\mathfrak{C}\beta$ для деяких двох різних $\mathcal{H}$-еквівалентних елементів $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Тоді всі ідемпотенти напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.*

Доведення. За твердженням 2.1.1(vii) напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є простою і з теореми 1.2.7 випливає, що існують елементи $\mu, \xi \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ такі, що відображення $f\colon H_\alpha \to H_{\mathbb{I}}\colon \chi \mapsto \mu\chi\xi$ відображає α в $\mathbb{I}$ і β в $\gamma \neq \mathbb{I}$, відповідно, звідси випливає, що $\mathbb{I}\mathfrak{C}\gamma$. Оскільки $\gamma \neq \mathbb{I}$ – елемент групи одиниць напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, то за теоремою 2.1.5 підстановка γ переставляє координати елементів множини $\mathbb{N}^n$, а тому існує натуральне число i_γ таке, що $\left(x_i^2\right)\alpha \neq x_{i_\gamma}^2$, де елемент $x_{i_\gamma}^2 = (1, \ldots, \underbrace{2}_{i_\gamma}, \ldots, 1)$ належить частково впорядкованій множині $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ такий, що лише i_γ-та координата елемента $x_{i_\gamma}^2$ дорівнює 2, а всі інші координати дорівнюють 1. Також за теоремою 2.1.5 існує натуральне число $j_\gamma \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_\gamma\}$ таке, що $\left(x_{i_\gamma}^2\right)\gamma = x_{j_\gamma}^2 = (1, \ldots, \underbrace{2}_{j_\gamma}, \ldots, 1)$ – елемент частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ з властивістю, що його j_γ-та координата дорівнює 2, а всі інші координати дорівнюють 1.

Нехай ε – тотожне відображення головного фільтра ${\uparrow}x_{i_\gamma}^2$. Оскільки $\mathfrak{C}$ конгруенція на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $\gamma \in H_{\mathbb{I}}$, то

$$\varepsilon = \varepsilon\varepsilon = \varepsilon\mathbb{I}\varepsilon\mathfrak{C}\varepsilon\gamma\varepsilon.$$

Оскільки $j_\gamma \neq i_\gamma$, то з означення напівгрупової операції на $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ випливає, що $\operatorname{dom}(\varepsilon\gamma\varepsilon) \subsetneqq \operatorname{dom}\varepsilon$. За твердженням 2.1.1$(v)$ елементи $\varepsilon\gamma\varepsilon$ і ε не є $\mathcal{H}$-еквівалентними в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Далі застосуємо лему 2.1.10. $\square$

Теорема 2.1.12 узагальнює той факт, що на біциклічній напівгрупі усі неодиничні конгруенції є груповими (див. [30, наслідок 1.32])

Теорема 2.1.12. *Нехай n – натуральне число $\geqslant 2$. Тоді кожна нетривіальна конгруенція $\mathfrak{C}$ на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є груповою.*

Доведення. Для довільної нетривіальної конгруенції $\mathfrak{C}$ на $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ існують два різні елементи $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ такі, що $\alpha\mathfrak{C}\beta$. Якщо $\alpha\mathcal{H}\beta$ в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, то за лемою 2.1.11 усі ідемпотенти напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними, а в іншому випадку за лемою 2.1.10 отримуємо аналогічний висновок. Тому за лемою 1.2.2 фактор-напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)/\mathfrak{C}$ містить єдиний ідемпотент, а отже, є групою. $\square$

Для довільних елементів $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ і $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ множини $\mathbb{N}^n$ і для довільної підстановки $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ позначимо

$$(\mathbf{x})\sigma = \left(x_{(1)\sigma^{-1}}, \ldots, x_{(n)\sigma^{-1}}\right);$$
$$\max\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = (\max\{x_1, y_1\}, \ldots, \max\{x_n, y_n\}).$$

Лема 2.1.13. *Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ і для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^n$ виконуються такі рівності:*

(i) $(\mathbf{x} + \mathbf{y})\sigma = (\mathbf{x})\sigma + (\mathbf{y})\sigma$;

(ii) $(\mathbf{x} - \mathbf{y})\sigma = (\mathbf{x})\sigma - (\mathbf{y})\sigma$, *для* $\mathbf{y} \leqslant \mathbf{x}$;

(iii) $(\max\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})\sigma = \max\{(\mathbf{x})\sigma, (\mathbf{y})\sigma\}$.

Доведення. У випадку (i) маємо, що

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})\sigma = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\sigma = (p_1, \ldots, p_n)\sigma$$

для $p_i = x_i + y_i$, $i = 1, \ldots, n$, а тому,

$$(p_1, \ldots, p_n)\sigma = (p_{(1)\sigma^{-1}}, \ldots, p_{(n)\sigma^{-1}}) =$$
$$= (x_{(1)\sigma^{-1}} + y_{(1)\sigma^{-1}}, \ldots, x_{(n)\sigma^{-1}} + y_{(n)\sigma^{-1}}) = (\mathbf{x})\sigma + (\mathbf{y})\sigma.$$

Доведення тверджень (ii) та (iii) є аналогічними. $\square$

Лема 2.1.14 випливає з означення напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$.

Лема 2.1.14. *Для кожного елемента* $\alpha \in \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ *існують єдині*

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^n, \qquad \rho_\alpha, \lambda_\alpha \in \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n) \qquad i \qquad \sigma_\alpha \in \mathscr{S}_n$$

такі, що $\alpha = \rho_\alpha \sigma_\alpha \lambda_\alpha$ *і*

$$\operatorname{dom}\rho_\alpha = \operatorname{dom}\alpha = {\uparrow}\mathbf{x}, \quad \operatorname{ran}\rho_\alpha = \mathbb{N}^n, \quad (\mathbf{z})\rho_\alpha = \mathbf{z} - \mathbf{x} + \mathbf{1}, \quad \mathbf{z} \in \operatorname{dom}\rho_\alpha;$$
$$\operatorname{ran}\lambda_\alpha = \operatorname{ran}\alpha = {\uparrow}\mathbf{y}, \quad \operatorname{dom}\lambda_\alpha = \mathbb{N}^n, \quad (\mathbf{z})\lambda_\alpha = \mathbf{z} + \mathbf{y} - \mathbf{1}, \quad \mathbf{z} \in \operatorname{dom}\lambda_\alpha,$$

де $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ *– найменший елемент частково впорядкованої множини* $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$.

У цьому підрозділі для кожного елемента $\alpha \in \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ через $\rho_\alpha, \lambda_\alpha$ і σ_α будемо позначати елементи $\rho_\alpha, \lambda_\alpha \in \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $\sigma_\alpha \in \mathscr{S}_n$, які визначені в формулюванні леми 2.1.14.

Лема 2.1.15. *Нехай* α *і* β *– елементи напівгрупи* $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ *такі, що* $\operatorname{dom}\alpha = {\uparrow}\mathbf{x}$, $\operatorname{ran}\alpha = {\uparrow}\mathbf{y}$, $\operatorname{dom}\beta = {\uparrow}\mathbf{u}$ *і* $\operatorname{ran}\beta = {\uparrow}\mathbf{v}$. *Тоді*

$$\operatorname{dom}(\alpha\beta) = {\uparrow}[(\max\{\mathbf{y}, \mathbf{u}\} - \mathbf{y})\sigma_\alpha^{-1} + \mathbf{x}];$$
$$\operatorname{ran}(\alpha\beta) = {\uparrow}[(\max\{\mathbf{y}, \mathbf{u}\} - \mathbf{u})\sigma_\beta + \mathbf{v}];$$
$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha\sigma_\beta.$$

Доведення. З означення області визначення композиції часткових відображень випливає, що

$$\operatorname{dom}(\alpha\beta) = [\operatorname{ran}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta]\alpha^{-1} = [{\uparrow}\mathbf{y} \cap {\uparrow}\mathbf{u}]\alpha^{-1} = [{\uparrow}\max\{\mathbf{y}, \mathbf{u}\}]\alpha^{-1}.$$

Оскільки α – монотонне бієктивне відображення між головними фільтрами частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, то

$$[{\uparrow}\max\{\mathbf{y}, \mathbf{u}\}]\alpha^{-1} = {\uparrow}\left([\max\{\mathbf{y}, \mathbf{u}\}]\alpha^{-1}\right),$$

і за лемою 2.1.14 отримуємо, що

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dom}(\alpha\beta) &= {\uparrow}\left([\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\}]\alpha^{-1}\right) = \\
&= {\uparrow}\left([\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\}]\lambda_\alpha^{-1}\sigma_\alpha^{-1}\rho_\alpha^{-1}\right) = \\
&= {\uparrow}\left([\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{y} + \mathbf{1}]\sigma_\alpha^{-1}\rho_\alpha^{-1}\right) = \\
&= {\uparrow}\left([(\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{y})\sigma_\alpha^{-1} + \mathbf{1}]\rho_\alpha^{-1}\right) = \\
&= {\uparrow}[(\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{y})\sigma_\alpha^{-1} + \mathbf{x}].
\end{aligned}
$$

Аналогічно, за означенням області значень композиції часткових відображень, маємо, що

$$\operatorname{ran}(\alpha\beta) = [\operatorname{ran}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta]\beta = [{\uparrow}\mathbf{y} \cap {\uparrow}\mathbf{u}]\beta = [{\uparrow}\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\}]\beta.$$

Оскільки β – монотонне бієктивне відображення між головними фільтрами частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, то

$$[{\uparrow}\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\}]\beta = {\uparrow}\left([\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\}]\beta\right),$$

і за лемою 2.1.14 отримуємо, що

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ran}(\alpha\beta) &= {\uparrow}\left([\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\}]\beta\right) = \\
&= {\uparrow}\left([\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\}]\rho_\beta\sigma_\beta\lambda_\beta\right) = \\
&= {\uparrow}\left([\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{u} + \mathbf{1}]\sigma_\beta\lambda_\beta\right) = \\
&= {\uparrow}\left([(\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{u})\sigma_\beta + \mathbf{1}]\lambda_\beta\right) = \\
&= {\uparrow}[(\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{u})\sigma_\beta + \mathbf{v}].
\end{aligned}
$$

Зауважимо, що з означення відображень σ_α і σ_β випливає, що

$$\operatorname{dom}\sigma_\alpha = \operatorname{ran}\sigma_\alpha = \operatorname{dom}\sigma_\beta = \operatorname{ran}\sigma_\beta = \mathbb{N}^n,$$

а тому $\operatorname{dom}(\sigma_\alpha\sigma_\beta) = \operatorname{ran}(\sigma_\alpha\sigma_\beta) = \mathbb{N}^n$. Оскільки $\rho_\alpha, \lambda_\alpha, \sigma_\alpha, \rho_\beta, \lambda_\beta, \sigma_\beta$ – часткові бієкції множини $\mathbb{N}^n$ і $\operatorname{dom}(\alpha\beta) = \operatorname{dom}(\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta\lambda_{\alpha\beta})$, то з рівності $\alpha\beta = \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta\lambda_{\alpha\beta}$ випливає, що $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha\sigma_\beta$.

Далі доведемо, що виконується рівність $\alpha\beta = \rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta\lambda_{\alpha\beta}$. Зауважимо, що для довільного $\mathbf{z} \in \operatorname{dom}(\alpha\beta)$ існує єдиний елемент

$$\mathbf{p} \in \mathbb{N}^n \cup \{(0,\ldots,0),(1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,1)\}$$

такий, що

$$\mathbf{z} = (\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{y})\sigma_\alpha^{-1} + \mathbf{x} + \mathbf{p}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
(\mathbf{z})\,\alpha\beta &= \big((\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{y})\sigma_\alpha^{-1} + \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\,\alpha\beta = \\
&= \big((\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{y})\sigma_\alpha^{-1} + \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\,\rho_\alpha\sigma_\alpha\lambda_\alpha\beta = \\
&= \big((\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{y})\sigma_\alpha^{-1} + \mathbf{p} + \mathbf{1}\big)\,\sigma_\alpha\lambda_\alpha\beta = \\
&= (\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{y} + (\mathbf{p})\sigma_\alpha + \mathbf{1})\,\lambda_\alpha\beta = \\
&= (\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} + (\mathbf{p})\sigma_\alpha)\,\rho_\beta\sigma_\beta\lambda_\beta = \\
&= (\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{u} + (\mathbf{p})\sigma_\alpha + \mathbf{1})\,\sigma_\beta\lambda_\beta = \\
&= ((\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{u})\sigma_\beta + ((\mathbf{p})\sigma_\alpha)\sigma_\beta + \mathbf{1})\,\lambda_\beta = \\
&= (\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{u})\sigma_\beta + ((\mathbf{p})\sigma_\alpha)\sigma_\beta + \mathbf{v}
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
(\mathbf{z})\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta\lambda_{\alpha\beta} &= \big((\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{y})\sigma_\alpha^{-1} + \mathbf{x} + \mathbf{p}\big)\,\rho_{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta\lambda_{\alpha\beta} = \\
&= (\mathbf{p} + 1)\,\sigma_\alpha\sigma_\beta\lambda_{\alpha\beta} = \\
&= (((\mathbf{p})\sigma_\alpha)\sigma_\beta + \mathbf{1})\,\lambda_{\alpha\beta} = \\
&= (\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{u})\sigma_\beta + \mathbf{v} + ((\mathbf{p})\sigma_\alpha)\sigma_\beta),
\end{aligned}$$

що і завершує доведення леми. $\square$

Твердження 2.1.16. *Нехай n – довільне натуральне число $\geqslant 2$, α і β – елементи напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ такі, що*

$$\operatorname{dom}\alpha = {\uparrow}\mathbf{x}, \quad \operatorname{ran}\alpha = {\uparrow}\mathbf{y}, \quad \operatorname{dom}\beta = {\uparrow}\mathbf{u} \quad \textit{і} \quad \operatorname{ran}\beta = {\uparrow}\mathbf{v}.$$

Тоді:

(*i*) *α є ідемпотентом напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ тоді і лише тоді, коли λ_α є оберненим частковим відображенням до ρ_α, тобто, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, і σ_α – одиничний елемент групи $\mathcal{S}_n$;*

(*ii*) *α інверсний елемент до β в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ тоді і лише тоді, коли $\mathbf{x} = \mathbf{v}$, $\mathbf{y} = \mathbf{u}$ (тобто, λ_α є оберненим частковим відображенням до ρ_β і λ_β є оберненим частковим відображенням до ρ_α) і σ_α – обернений елемент до σ_β в групі $\mathcal{S}_n$.*

Доведення. (*i*) Припустимо, що α – ідемпотент напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Оскільки α – тотожне відображення деякого головного фільтра частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, то $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, а тому λ_α – обернене часткове відображення до ρ_α. Тоді з рівності

$$\rho_\alpha\sigma_\alpha\lambda_\alpha = \alpha = \alpha\alpha = \rho_\alpha\sigma_\alpha\lambda_\alpha\rho_\alpha\sigma_\alpha\lambda_\alpha = \rho_\alpha\sigma_\alpha\sigma_\alpha\lambda_\alpha$$

і з леми 2.1.14 випливає, що $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha\sigma_\alpha$, а тому σ_α – одиничний елемент групи $\mathcal{S}_n$.

Обернене твердження очевидне.

(*ii*) Припустимо, що α і β – інверсні елементи в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Тоді $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{ran}\beta$ і $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{dom}\beta$, а отже, $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ і $\mathbf{y} = \mathbf{u}$. Звідси та з леми 2.1.14 випливає, що λ_α – обернене часткове відображення до ρ_β і λ_β – обернене часткове відображення до ρ_α. Оскільки $\alpha\beta$ ідемпотент моноїда $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, то з вище наведених міркувань випливає, що

$$\alpha\beta = \rho_\alpha\sigma_\alpha\lambda_\alpha\rho_\beta\sigma_\beta\lambda_\beta = \rho_\alpha\sigma_\alpha\sigma_\beta\lambda_\beta,$$

а тому за твердженням (*i*) елемент $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ є одиничним елементом групи $\mathcal{S}_n$. Звідси випливає, що елемент σ_α обенений до σ_β в $\mathcal{S}_n$.

Обернене твердження очевидне. $\square$

Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ через $\mathcal{C}^n(p, q)$ позначатимемо n-ий прямий степінь напівгрупи $\mathbb{B}$, тобто $\mathcal{C}^n(p,q)$ – це n-й степінь $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ з напівгруповою операцією поточкового множення визначеною формулою (1.2). Також через $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ позначатимемо впорядкований набір елементів $((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n))$ напівгрупи $\mathcal{C}^n(p,q)$, де $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ і $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$, і для довільної підстановки $\sigma\colon\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ покладемо

$$(\mathbf{x})\sigma=\left(x_{(1)\sigma^{-1}},\ldots,x_{(n)\sigma^{-1}}\right).$$

Нехай $\mathbf{Aut}(\mathcal{C}^n(p,q))$ – група автоморфізмів напівгрупи $\mathcal{C}^n(p,q)$. Визначимо відображення Φ з групи $\mathcal{S}_n$ в напівгрупу всіх перетворень напівгрупи $\mathcal{C}^n(p,q)$ поклавши $\sigma\mapsto\Phi_\sigma$, де відображення $\Phi_\sigma\colon\mathcal{C}^n(p,q)\to\mathcal{C}^n(p,q)$ визначається за формулою:

$$([\mathbf{x},\mathbf{y}])\Phi_\sigma=[(\mathbf{x})\sigma,(\mathbf{y})\sigma]. \tag{2.1}$$

Очевидно, що відображення Φ_σ є бієкцією і $\Phi_{\sigma_1}\neq\Phi_{\sigma_2}$ для різних $\sigma_1,\sigma_2\in\mathcal{S}_n$.

Оскільки

$$\begin{aligned}
([\mathbf{x},\mathbf{y}]{*}[\mathbf{u},\mathbf{v}])\Phi_\sigma &=\\
&=\left([\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\}-\mathbf{y}+\mathbf{x},\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\}-\mathbf{u}+\mathbf{v}]\right)\Phi_\sigma=\\
&=[(\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\}-\mathbf{y}+\mathbf{x})\sigma,(\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\}-\mathbf{u}+\mathbf{v})\sigma]=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=[\max\{(\mathbf{y})\sigma,(\mathbf{u})\sigma\}-(\mathbf{y})\sigma+(\mathbf{x})\sigma,\max\{(\mathbf{y})\sigma,(\mathbf{u})\sigma\}-(\mathbf{u})\sigma+(\mathbf{v})\sigma]=\\
&=[(\mathbf{x})\sigma,(\mathbf{y})\sigma]*[(\mathbf{u})\sigma,(\mathbf{v})\sigma]=\\
&=[\mathbf{x},\mathbf{y}]\,\Phi_\sigma*[\mathbf{u},\mathbf{v}]\,\Phi_\sigma
\end{aligned}$$

і

$$([\mathbf{x},\mathbf{y}])\Phi_{\sigma_1\sigma_2}=[(\mathbf{x})\sigma_1\sigma_2,(\mathbf{y})\sigma_1\sigma_2]=([(\mathbf{x})\sigma_1,(\mathbf{y})\sigma_1])\Phi_{\sigma_2}=([\mathbf{x},\mathbf{y}])\Phi_{\sigma_1}\Phi_{\sigma_2},$$

для довільних $[\mathbf{x},\mathbf{y}],[\mathbf{u},\mathbf{v}]\in\mathcal{C}^n(p,q)$ і для довільних $\sigma,\sigma_1,\sigma_2\in\mathcal{S}_n$, то виконується таке твердження.

Твердження 2.1.17. *Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ відображення Φ є ін'єктивним гомоморфізмом з групи $\mathcal{S}_n$ в групу $\mathbf{Aut}(\mathcal{C}^n(p,q))$ автоморфізмів напівгрупи $\mathcal{C}^n(p,q)$.*

Теорема 2.1.18. *Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_n \ltimes_\Phi \mathcal{C}^n(p,q)$ напівгрупи $\mathcal{C}^n(p,q)$ групою $\mathcal{S}_n$.*

Доведення. Визначимо відображення $\Psi\colon \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \to \mathcal{S}_n \ltimes_\Phi \mathcal{C}^n(p,q)$ так:

$$(\alpha)\Psi = (\sigma_\alpha, [(\mathbf{x})\sigma_\alpha, \mathbf{y}]),$$

для $\alpha \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, де ${\uparrow}\mathbf{x} = \operatorname{dom}\alpha$ і ${\uparrow}\mathbf{y} = \operatorname{ran}\alpha$. Оскільки σ_α – бієкція, то Ψ є бієкцією також.

Для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з $\operatorname{dom}\alpha = {\uparrow}\mathbf{x}$, $\operatorname{ran}\alpha = {\uparrow}\mathbf{y}$, $\operatorname{dom}\beta = {\uparrow}\mathbf{u}$, $\operatorname{ran}\beta = {\uparrow}\mathbf{v}$ за лемою 2.1.15 маємо, що

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)\Psi &= \big(\sigma_\alpha\sigma_\beta, [((\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{y})\sigma_\alpha^{-1} + \mathbf{x})\sigma_\alpha\sigma_\beta, (\max\{\mathbf{y},\mathbf{u}\} - \mathbf{u})\sigma_\beta + \mathbf{v}]\big) = \\
&= (\sigma_\alpha\sigma_\beta, [\max\{(\mathbf{y})\sigma_\beta,(\mathbf{u})\sigma_\beta\} - (\mathbf{y})\sigma_\beta + (\mathbf{x})\sigma_\alpha\sigma_\beta, \max\{(\mathbf{y})\sigma_\beta,(\mathbf{u})\sigma_\beta\} - (\mathbf{u})\sigma_\beta + \mathbf{v}]) \\
&= (\sigma_\alpha\sigma_\beta, ([(\mathbf{x})\sigma_\alpha, \mathbf{y}])\sigma_\beta * [(\mathbf{u})\sigma_\beta, \mathbf{v}]) = \\
&= (\sigma_\alpha, [(\mathbf{x})\sigma_\alpha, \mathbf{y}])\,(\sigma_\beta, [(\mathbf{u})\sigma_\beta, \mathbf{v}]) = \\
&= (\alpha)\Psi(\beta)\Psi,
\end{aligned}$$

а тому Ψ – ізоморфізм. $\square$

Для довільного елемента $\alpha \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ покладемо $(\sigma_\alpha, [(\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha, \mathbf{y}_\alpha]) = (\alpha)\Psi$ – образ елемента α при ізоморфізмі $\Psi\colon \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \to \mathcal{S}_n \ltimes_\Phi \mathcal{C}^n(p,q)$, який визначений в доведенні теореми 2.1.18.

Теорема 2.1.19 описує мінімальну групову конгруенцію $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$.

Теорема 2.1.19. *Нехай n – довільне натуральне число $\geqslant 2$. Тоді $\alpha\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}\beta$ в* *напівгрупі* $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ *тоді і лише тоді, коли*

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta \qquad \textit{i} \qquad (\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha - \mathbf{y}_\alpha = (\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta - \mathbf{y}_\beta.$$

Доведення. Спочатку зауважимо, якщо ε є ідемпотентом в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, то з твердження 2.1.16$(i)$ та з означення відображення $\Psi\colon \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \to \mathcal{S}_n \ltimes_\Phi \mathcal{C}^n(p,q)$ випливає, що σ_ε є одиничною підстановкою й $\mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{y}_\varepsilon$. Тоді з рівностей

$$\begin{aligned}
&(\sigma_\alpha, [(\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha, \mathbf{y}_\alpha])\,(\sigma_\varepsilon, [(\mathbf{x}_\varepsilon)\sigma_\varepsilon, \mathbf{x}_\varepsilon]) =\\
&= (\sigma_\alpha\sigma_\varepsilon, [\max\{(\mathbf{y}_\alpha)\sigma_\varepsilon, \mathbf{x}_\varepsilon\} - (\mathbf{y}_\alpha)\sigma_\varepsilon + ((\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha)\sigma_\varepsilon, \max\{(\mathbf{y}_\alpha)\sigma_\varepsilon, \mathbf{x}_\varepsilon\} - \mathbf{x}_\varepsilon + \mathbf{x}_\varepsilon]) =\\
&= (\sigma_\alpha, [\max\{\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{x}_\varepsilon\} - \mathbf{y}_\alpha + (\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha, \max\{\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{x}_\varepsilon\}])\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\sigma_\beta, [(\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta, \mathbf{y}_\beta])\,(\sigma_\varepsilon, [(\mathbf{x}_\varepsilon)\sigma_\varepsilon, \mathbf{x}_\varepsilon]) =\\
&= (\sigma_\beta\sigma_\varepsilon, [\max\{(\mathbf{y}_\beta)\sigma_\varepsilon, \mathbf{x}_\varepsilon\} - (\mathbf{y}_\beta)\sigma_\varepsilon + ((\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta)\sigma_\varepsilon, \max\{(\mathbf{y}_\beta)\sigma_\varepsilon, \mathbf{x}_\varepsilon\} - \mathbf{x}_\varepsilon + \mathbf{x}_\varepsilon]) =\\
&= (\sigma_\beta, [\max\{\mathbf{y}_\beta, \mathbf{x}_\varepsilon\} - \mathbf{y}_\beta + (\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta, \max\{\mathbf{y}_\beta, \mathbf{x}_\varepsilon\}])\,,
\end{aligned}$$

випливає, що для ідемпотента $\varepsilon \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ рівність $\alpha\varepsilon = \beta\varepsilon$ виконується тоді і лише тоді, коли

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta \qquad \text{і} \qquad (\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha - \mathbf{y}_\alpha = (\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta - \mathbf{y}_\beta.$$

Це завершує доведення теореми. □

Для кожного натурального числа $n \geqslant 2$, для довільної підстановки $\sigma\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ і для довільного впорядкованого набору $\mathbf{z} = (z_1,\ldots,z_n)$ цілих чисел, покладемо

$$(\mathbf{z})\sigma = \left(z_{(1)\sigma^{-1}}, \ldots, z_{(n)\sigma^{-1}}\right).$$

Нехай n – довільне натуральне число $\geqslant 2$ і $\mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_+^n)$ – група автоморфізмів прямого n-го степеня адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}_+$. Визначимо відображення $\Theta\colon \mathcal{S}_n \to \mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_+^n)$ так: нехай $(\sigma)\Theta = \Theta_\sigma$ – відображення з $\mathbb{Z}^n$ в $\mathbb{Z}^n$, визначене за формулою

$$(\mathbf{z})\Theta_\sigma = (\mathbf{z})\sigma.$$

Очевидно, що відображення Θ і Θ_σ є ін'єктивними. Оскільки

$$(\mathbf{z}+\mathbf{v})\sigma = (\mathbf{z})\sigma + (\mathbf{v})\sigma$$

і

$$(\mathbf{z})\Theta_{\sigma_1\sigma_2} = (\mathbf{z})(\sigma_1\sigma_2) = ((\mathbf{z})\sigma_1)\sigma_2 = ((\mathbf{z})\Theta_{\sigma_1})\Theta_{\sigma_2},$$

для довільних елементів $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ і $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ прямого n-го степеня адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}_+$ і для довільних $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_n$, то маємо, що так визначене відображення $\Theta\colon \mathcal{S}_n \to \mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_+^n)$ є ін'єктивним гомоморфізмом.

Теорема 2.1.20. *Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$, фактор-напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)\,/\mathfrak{C}_{mg}$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_n \ltimes_\Theta \mathbb{Z}_+^n$ прямого n-го степеня адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}_+^n$ групою підстановок $\mathcal{S}_n$.*

Доведення. Визначимо відображення $\Upsilon\colon \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \to \mathcal{S}_n \ltimes_\Theta \mathbb{Z}_+^n$. Якщо $(\sigma_\alpha, [(\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha, \mathbf{y}_\alpha]) = (\alpha)\Psi$ – образ елемента α з $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ при гомоморфізмі $\Psi\colon \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \to \mathcal{S}_n \ltimes_\Phi \mathcal{C}^n(p,q)$, який визначений в доведенні теореми 2.1.18, то покладемо $(\alpha)\Upsilon = (\sigma_\alpha, (\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha - \mathbf{y}_\alpha)$.

Для довільних елементів $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з $\operatorname{dom}\alpha = {\uparrow}\mathbf{x}_\alpha$, $\operatorname{ran}\alpha = {\uparrow}\mathbf{y}_\alpha$, $\operatorname{dom}\beta = {\uparrow}\mathbf{x}_\beta$, $\operatorname{ran}\beta = {\uparrow}\mathbf{y}_\beta$ за лемою 2.1.15 маємо, що

$$\begin{aligned}
&(\alpha\beta)\Upsilon = \\
&= \big(\sigma_\alpha\sigma_\beta, ((\max\{\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{x}_\beta\} - \mathbf{y}_\alpha)\sigma_\alpha^{-1} + \mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha\sigma_\beta - (\max\{\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{x}_\beta\} - \mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta - \mathbf{y}_\beta\big) = \\
&= (\sigma_\alpha\sigma_\beta, \max\{(\mathbf{y}_\alpha)\sigma_\beta, (\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta\} - (\mathbf{y}_\alpha)\sigma_\beta + (\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha\sigma_\beta \\
&\qquad - \max\{(\mathbf{y}_\alpha)\sigma_\beta, (\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta\} + (\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta - \mathbf{y}_\beta) = \\
&= (\sigma_\alpha\sigma_\beta, (\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha\sigma_\beta - (\mathbf{y}_\alpha)\sigma_\beta + (\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta - \mathbf{y}_\beta) = \\
&= (\sigma_\alpha\sigma_\beta, ((\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha - \mathbf{y}_\alpha)\sigma_\beta + ((\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta - \mathbf{y}_\beta)) =
\end{aligned}$$

$= (\sigma_\alpha, (\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha - \mathbf{y}_\alpha) \cdot (\sigma_\beta, (\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta - \mathbf{y}_\beta) = (\alpha)\Upsilon \cdot (\beta)\Upsilon,$

а тому Υ є гомоморфізмом. Очевидно, що відображення Υ сюр'єктивне. Також з теореми 2.1.19 випливає, що $\alpha\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}\beta$ в $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ тоді і лише тоді, коли $(\alpha)\Upsilon = (\beta)\Upsilon$. Звідси випливає, що гомоморфізм Υ породжує мінімальну групову конгруенцію $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ на моноїді $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$. □

Якщо ε – ідемпотент в $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$, то з твердження 2.1.16$(i)$ та означення ізоморфізму $\Psi\colon \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n) \to \mathcal{S}_n \ltimes_\Phi \mathcal{C}^n(p,q)$ випливає, що σ_ε – тотожна підстановка і $\mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{y}_\varepsilon$. Тоді для довільного елемента $\alpha \in \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з рівності $(\sigma_\alpha, [(\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha, \mathbf{y}_\alpha]) = (\alpha)\Psi$ випливає, що

$$\begin{aligned}
&(\sigma_\alpha, [(\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha, \mathbf{y}_\alpha])\,(\sigma_\varepsilon, [\mathbf{x}_\varepsilon,\mathbf{x}_\varepsilon]) = \\
&= (\sigma_\alpha\sigma_\varepsilon, [\max\{(\mathbf{y}_\alpha)\sigma_\varepsilon, \mathbf{x}_\varepsilon\} - (\mathbf{y}_\alpha)\sigma_\varepsilon + ((\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha)\sigma_\varepsilon, \max\{(\mathbf{y}_\alpha)\sigma_\varepsilon, \mathbf{x}_\varepsilon\} - \mathbf{x}_\varepsilon + \mathbf{x}_\varepsilon]) = \\
&= (\sigma_\alpha, [\max\{\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{x}_\varepsilon\} - \mathbf{y}_\alpha + (\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha, \max\{\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{x}_\varepsilon\}])\,.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

З вище наведених міркувань випливає твердження 2.1.21, яке описує природний частковий порядок на напівгрупі $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$.

Твердження 2.1.21. *Нехай n – довільне натуральне число $\geqslant 2$ і $\alpha, \beta \in \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(i) $\alpha \preccurlyeq \beta$;

(ii) $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$, $(\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha - \mathbf{y}_\alpha = (\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta - \mathbf{y}_\beta$ *і* $\mathbf{x}_\beta \leqslant \mathbf{x}_\alpha$ *в частково впорядкованій множині* $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$;

(iii) $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$, $(\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha - \mathbf{y}_\alpha = (\mathbf{x}_\beta)\sigma_\beta - \mathbf{y}_\beta$ *і* $\mathbf{y}_\beta \leqslant \mathbf{y}_\alpha$ *в частково впорядкованій множині* $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$.

З формули (2.2) випливає така властивість: якщо елемент $(\sigma_\alpha, [(\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha, \mathbf{y}_\alpha]) \cdot (\sigma_\varepsilon, [\mathbf{x}_\varepsilon,\mathbf{x}_\varepsilon])$ є ідемпотентом у напівпрямому добутку $\mathcal{S}_n \ltimes_\Phi \mathcal{C}^n(p,q)$, то елемент $(\sigma_\alpha, [(\mathbf{x}_\alpha)\sigma_\alpha, \mathbf{y}_\alpha])$ також є ідемпотентом у напівгрупі $\mathcal{S}_n \ltimes_\Phi \mathcal{C}^n(p,q)$. Отже, отримуємо наслідок 2.1.22

Наслідок 2.1.22. *Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ інверсна на-*

напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ *є* E*-унітарною.*

Твердження 2.1.23. *Для довільного натурального числа* $n \geqslant 2$ *напівгрупа* $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ *є* F*-інверсною напівгрупою.*

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $\beta_0 = (\sigma, [\mathbf{x}, \mathbf{y}])$ напівгрупи $\mathcal{S}_n \ltimes_\Phi \mathcal{C}^n(p, q)$, де $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ і $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Кожному натуральному числу k поставимо у відповідність елемент $\beta_k = (\sigma, [\mathbf{x} - \mathbf{k}, \mathbf{y} - \mathbf{k}])$, де

$$\mathbf{x} - \mathbf{k} = (x_1 - k, \ldots, x_n - k) \quad \text{і} \quad \mathbf{y} - \mathbf{k} = (y_1 - k, \ldots, y_n - k).$$

Очевидно, що існує таке найбільше натуральне число k_0, що

$$(x_1 - k_0, \ldots, x_n - k_0), (y_1 - k_0, \ldots, y_n - k_0) \in \mathbb{N}^n,$$

але

$$(x_1 - k_0 - 1, \ldots, x_n - k_0 - 1) \notin \mathbb{N}^n \qquad \text{або} \qquad (y_1 - k_0, \ldots, y_n - k_0) \notin \mathbb{N}^n.$$

Тоді з теореми 2.1.19 і твердження 2.1.21 випливає, що елемент β_{k_0} – найбільший елемент стосовно природного часткового порядку у $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$-класі елемента β_0 моноїда $\mathcal{S}_n \ltimes_\Phi \mathcal{C}^n(p, q)$. □

Твердження 2.1.24. *Для довільних елементів* $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$*, обидві множини*

$$\{\chi \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) : \alpha \cdot \chi = \beta\} \qquad i \qquad \{\chi \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) : \chi \cdot \alpha = \beta\}$$

скінченні.

Доведення. Покажемо, що множина $A = \{\chi \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) : \chi \cdot \alpha = \beta\}$ скінченна. Доведення того, що множина $\{\chi \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) : \alpha \cdot \chi = \beta\}$ скінченна, аналогічне.

Очевидно, що A є підмножиною в

$$B = \{\chi \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) : \chi \cdot \alpha\alpha^{-1} = \beta\alpha^{-1}\}.$$

Тоді B міститься в

$$C = \{\xi \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) : \xi \preccurlyeq \beta\alpha^{-1}\}.$$

Оскільки кожен головний ідеал в частково впорядкованій множині $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ скінченний, то з твердження 2.1.24 випливає, що множина C скінченна, а тому A – скінченна множина. $\square$

2.2. Висновки до розділу 2

У цьому розділі вивчаються алгебричні властивості моноїда $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$, де n – довільне натуральне число $\geqslant 2$. Зокрема, доведено, що напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є біпростою (твердження 2.1.1), E-унітарною (наслідок 2.1.22) та F-інверсною (наслідок 2.1.23) напівгрупою. Описано відношення Ґріна (твердження 2.1.1), напівґратку ідемпотентів (твердження 2.1.1) і природний частковий порядок на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ (твердження 2.1.21). Доведено, що група одиниць $H(\mathbb{I})$ моноїда $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна групі підстановок $\mathcal{S}_n$ (теорема 2.1.5), а також описано максимальні підгрупи цього моноїда. Доведено, що напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна напівпрямому добутку прямого n-го степеня біциклічного моноїда групою підстановок $\mathcal{S}_n$ (теорема 2.1.18). Показано, що кожна неодинична конгруенція $\mathfrak{C}$ на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є груповою (теорема 2.1.12), описано мінімальну групову конгренцію $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ (теорема 2.1.19) і доведено, що фактор-напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_n \ltimes \mathbb{Z}_+^n$ прямого n-го степеня адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}_+^n$ групою підстановок $\mathcal{S}_n$ (теорема 2.1.20).

РОЗДІЛ 3
НАПІВТОПОЛОГІЧНА НАПІВГРУПА $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$

3.1. Властивості напівтопологічної напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$

Теорема 3.1.1 узагальнює результат Бертман-Веста з [26] (а отже, і результат Ебергарта-Селдена з [33]).

Теорема 3.1.1. *Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ дискретна.*

Доведення. Зафіксуємо довільну трансляційно-неперервну гаусдорфову топологію τ на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Оскільки для кожного ідемпотента $\varepsilon \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ лівий і правий зсуви $\mathfrak{l}_\varepsilon \colon \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \to \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \colon x \mapsto \varepsilon \cdot x$ і $\mathfrak{r}_\varepsilon \colon \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \to \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \colon x \mapsto x \cdot \varepsilon$ є неперервними відображеннями, то з гаусдорфовості простору $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n), \tau)$ і з твердження 1.2.13 випливає, що головні ідеали $\varepsilon\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)\varepsilon$ є замкненими підмножинами в $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n), \tau)$.

Кожному натуральному числу $i = 1, \ldots, n$ поставимо у відповідність тотожне відображення ε_i підмножини $\uparrow(1, \ldots, \underbrace{2}_{i}, \ldots, 1)$ частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$. Очевидно, що

$$H(\mathbb{I}) = \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \setminus (\varepsilon_1\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \cup \cdots \varepsilon_n\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \cup \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)\varepsilon_1 \cup \cdots \cup \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)\varepsilon_n).$$

Тоді з вище наведеного доведення випливає, що $H(\mathbb{I})$ – відкрита підмножина в топологічному просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n), \tau)$, і за теоремою 2.1.5, $H(\mathbb{I})$ – скінченний дискретний відкритий підпростір в $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n), \tau)$.

Оскільки за твердженням 2.1.1(vii) напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є простою, то для довільного елемента $\alpha \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ існують елементи $\beta, \gamma \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$

такі, що $\beta\alpha\gamma = \mathbb{I}$. З твердження 2.1.24 випливає, що точка α має скінченний відкритий окіл в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n), \tau)$, а тому α – ізольована точка в топологічному просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n), \tau)$. $\square$

Теорема 3.1.2 узагальнює теорему I.3 з [33].

Теорема 3.1.2. *Якщо для деякого натурального числа $n \geqslant 2$ напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є щільною підмножиною гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $(S, \cdot)$ і $I = S \setminus \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \neq \varnothing$, то I – двобічний ідеал в S.*

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $y \in I$. Якщо $x \cdot y = z \notin I$ для деякого елемента $x \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, то існує відкритий окіл $U(y)$ точки y в просторі S такий, що $\{x\} \cdot U(y) = \{z\} \subset \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Тоді відкритий окіл $U(y)$ містить нескінченну кількість елементів напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, що суперечить твердженю 2.1.24. З отриманої суперечності випливає, що $x \cdot y \in I$ для всіх $x \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $y \in I$. Доведення того, що $y \cdot x \in I$ для всіх $x \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ і $y \in I$ аналогічне.

Припустимо протилежне: $x \cdot y = w \notin I$ для деяких елементів $x, y \in I$. Тоді $w \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, а тому з нарізної неперервності напівгрупової операції в S випливає, що існують відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x і y в S, відповідно, такі, що $\{x\} \cdot U(y) = \{w\}$ і $U(x) \cdot \{y\} = \{w\}$. Оскільки за твердженням 2.1.24 обидва околи $U(x)$ і $U(y)$ містять нескінченну кількість елементів напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, то обидві рівності $\{x\} \cdot U(y) = \{w\}$ і $U(x) \cdot \{y\} = \{w\}$ суперечать наведеній вище частині доведення, а тому $\{x\} \cdot (U(y) \cap \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)) \subseteq I$. З отриманої суперечності випливає, що $x \cdot y \in I$. $\square$

Оскільки за твердженням 2.1.7 для кожного натурального числа $n \geqslant 2$ напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ містить біциклічну напівгрупу як піднапівгрупу, то з твердження 1.2.16 випливає такий наслідок.

Наслідок 3.1.3. *Нехай n – довільне натуральне число $\geqslant 2$. Якщо гаусдорфова топологічна напівгрупа S задовільняє одну з таких умов:*

(i) S є компактом;

(*ii*) *S є Γ-компактною;*

(*iii*) *S – зліченно компактна топологічна інверсна напівгрупа;*

(*iv*) *квадрат $S \times S$ зліченно компактний; або*

(*v*) *квадрат $S \times S$ – тихонівський псевдокомпактний простір,*

то S не містить напівгрупу $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$.

Також з теорем 2.1.12, 2.1.20 і наслідку 3.1.3 випливає такий наслідок.

Наслідок 3.1.4. *Нехай n – довільне натуральне число $\geqslant 2$. Якщо гаусдорфова топологічна напівгрупа S задовільняє одну з таких умов:*

(*i*) *S є компактом;*

(*ii*) *S є Γ-компактною;*

(*iii*) *S – зліченно компактна топологічна інверсна напівгрупа;*

(*iv*) *квадрат $S \times S$ зліченно компактний; або*

(*v*) *квадрат $S \times S$ – тихонівський псевдокомпактний простір,*

то для кожного гомоморфізму $\mathfrak{h}\colon \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n) \to S$ образ $(\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n))\mathfrak{h}$ є підгрупою в S. Більше того, для довільного гомоморфізму $\mathfrak{h}\colon \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n) \to S$ існує єдиний гомоморфізм $\mathfrak{u}_{\mathfrak{h}}\colon \mathscr{S}_n \ltimes_\Theta \mathbb{Z}^n_+ \to S$ такий, що така діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n) \arrow[r, "\mathfrak{h}"] \arrow[d, "\Upsilon"'] & S \\
\mathscr{S}_n \ltimes_\Theta \mathbb{Z}^n_+ \arrow[ru, "\mathfrak{u}_{\mathfrak{h}}"'] &
\end{tikzcd}$$

комутативна.

Твердження 3.1.5. *Нехай n – довільне натуральне число $\geqslant 2$ і S – гаусдорфова топологічна напівгрупа, яка містить щільну піднапівгрупу $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Тоді для кожного елемента $c \in \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ множина*

$$D_c = \{(x, y) \in \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n) \times \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)\colon x \cdot y = c\}$$

є відкрито-замкненою підмножиною в просторі $S \times S$.

Доведення. За теоремою 3.1.1 $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ – дискретний підпростір в S і тому з теореми 1.2.15 випливає, що $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ – відкритий підпростір в S. З неперервності напівгрупової операції в S випливає, що D_c – відкритий підпростір в $S \times S$ для довільного елемента $c \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$.

Припустимо, що існує елемент $c \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ такий, що підмножина D_c – не є замкнена в просторі $S \times S$. Тоді існує точка накопичення $(a, b) \in S \times S$ множини D_c. З неперервності напівгрупової операції в S випливає, що $a \cdot b = c$. Проте $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \times \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ – дискретний підпростір в $S \times S$, і тоді за теоремою 3.1.2 точки a і b містяться в двобічному ідеалі $I = S \setminus \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Звідси випливає, що добуток $a \cdot b \in S \setminus \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ відмінний від елемента c. □

Теорема 3.1.6. *Нехай n – довільне натуральне число $\geqslant 2$. Якщо гаусдорфова топологічна напівгрупа S містить напівгрупу $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ як щільну піднапівгрупу, то квадрат $S \times S$ не є слабко компактним простором.*

Доведення. За твердженням 3.1.5 для кожного елемента $c \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ квадрат $S \times S$ містить відкрито-замкнений підпростір D_c. У випадку коли c – одиниця $\mathbb{I}$ напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, то за наслідком 2.1.8 існує піднапівгрупа $\mathcal{C}$ в $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі $\mathcal{C}(p, q)$ і містить $\mathbb{I}$. Якщо ототожнити елементи піднапівгрупи $\mathcal{C}$ з елементами біциклічного моноїда $\mathcal{C}(p, q)$ ізоморфізмом $\mathfrak{h} \colon \mathcal{C}(p, q) \to \mathcal{C}$, то підпростір D_c містить нескінченну множину $\left\{\left((q^i)\mathfrak{h}, (p^i)\mathfrak{h}\right) : i \in \mathbb{N}_0\right\}$, а тому D_c – нескінченна множина. Звідси випливає, що квадрат $S \times S$ не є слабко компактним топологічним простором. □

3.2. Дихотомія локально компактної напівтопологічної напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем

Надалі через $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0$ позначатимемо моноїд $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем.

Лема 3.2.1. *Нехай $n \geqslant 2$ і $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ – гаусдорфова локально компактна недискретна напівтопологічна напівгрупа. Тоді:*

(1) *для кожного відкритого околу нуля $U(0)$ в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ існує відкритий компактний окіл нуля $V(0)$ в $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ такий, що $V(0) \subset U(0)$;*

(2) *для кожного відкритого околу нуля $U(0)$ в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ і кожного відкритого компактного околу нуля $V(0)$ в $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ множина $V(0) \cap U(0)$ є компактною та відкритою, і множина $V(0) \setminus U(0)$ скінченна.*

Доведення. (1) Нехай $U(0)$ – довільний відкритий окіл нуля в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$. За теоремою 1.2.14 простір $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ є регулярним. Оскільки він локально компактний, то існує відкритий окіл нуля $V(0) \subseteq U(0)$ в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ такий, що $cl_{\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0}(V(0)) \subseteq U(0)$. Оскільки за теоремою 3.1.1 всі ненульові елементи напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0$ є ізольованими точками в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$, то $\operatorname{cl}_{\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0}(V(0)) = V(0)$, а тому твердження (1) виконується.

(2) Нехай $V(0)$ – довільний компактний відкритий окіл нуля в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$. Тоді для довільного відкритого околу нуля $U(0)$ в $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ сім'я

$$\mathcal{U} = \{U(0)\} \cup \{\{x\} \colon x \in V(0) \setminus U(0)\}$$

є відкритим покриттям околу $V(0)$. Оскільки сім'я $\mathcal{U}$ є диз'юнктною, то вона скінченна. Тоді множина $V(0) \setminus U(0)$ скінченна, а отже, множина $V(0) \cap U(0)$ є компактною. $\square$

Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ через $\mathcal{C}(p,q)^n$ позначимо n-тий прямий степінь $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},*)$, тобто $\mathcal{C}(p,q)^n$ є n-им степенем множини $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ з напівгруповою операцією поточкового множення, визначеною за формулою (1.2):

$$(i,j)*(k,l) = (i+\max\{j,k\}-j, l+\max\{j,k\}-k).$$

Також через $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ позначатимемо впорядкований набір $((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n))$ з $\mathcal{C}(p,q)^n$, де $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ та $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$, і для довільної підстановки $\sigma\colon \{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ покладемо

$$(\mathbf{x})\sigma = \left(x_{(1)\sigma^{-1}},\ldots,x_{(n)\sigma^{-1}}\right).$$

За теоремою 2.1.18 напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_n \ltimes \mathcal{C}(p,q)^n$, а тому можемо розглядати напівгрупу $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ як множину $\mathcal{S}_n\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})^n$ з такою напівгруповою операцією:

$$\begin{aligned}(\alpha,[\mathbf{x},\mathbf{y}])\cdot(\beta,[\mathbf{u},\mathbf{v}]) &= (\alpha\circ\beta,[(\mathbf{x})\beta,(\mathbf{y})\beta]*[\mathbf{u},\mathbf{v}]) = \\ &= (\alpha\circ\beta,[(\mathbf{x})\beta+\max\{(\mathbf{y})\beta,\mathbf{u}\}-(\mathbf{y})\beta,\mathbf{v}+\max\{(\mathbf{y})\beta,\mathbf{u}\}-\mathbf{u}]).\end{aligned}$$

Для довільної підстановки $\sigma\in\mathcal{S}_n$ n-елеменої множини та для довільної впорядкованого набору $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}^n$ позначимо

$$L_\sigma^{\mathbf{a}} = \{(\sigma,[\mathbf{a},\mathbf{x}])\in\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)\colon \mathbf{x}\in\mathbb{N}^n\}.$$

Для довільного $i\in\{1,\ldots,n\}$ через $\mathbf{2}_i$ позначимо елемент $\mathbb{N}^n$ з властивістю, що лише i-та координата елемента $\mathbf{2}_i$ дорівнює 2, а всі інші координати дорівнюють 1, тобто $\mathbf{2}_i=(1,\ldots,\underbrace{2}_{i},\ldots,1)$.

Лема 3.2.2. *Нехай $n\geqslant 2$ і $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0,\tau)$ – гаусдорфова локально компактна недискретна напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільного околу нуля $U(0)$ і для довільної підстановки $\sigma\in\mathcal{S}_n$ існує елемент $\boldsymbol{a}\in\mathbb{N}^n$ такий, що множина $L_\sigma^{\boldsymbol{a}}\cap U(0)$ скінченна.*

Доведення. Припустимо, що існує відкритий окіл нуля $U(0)$ і підстановка $\sigma \in \mathcal{S}_n$ такі, що для довільного елемента $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ множина $L_\sigma^{\mathbf{a}} \cap U(0)$ скінченна. Тоді з леми 3.2.1(1) і з нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ випливає, що існує відкритий компактний окіл нуля $V(0)$ в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ такий, що $V(0) \cdot (1, [\mathbf{1}, \mathbf{2}_1]) \subset U(0)$.

Оскільки для кожного фіксованого елемента $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ множина $L_\sigma^{\mathbf{a}} \cap U(0)$ скінченна, то існує елемент

$$m_{\mathbf{a}} = (\sigma, [\mathbf{a}, (x_1, \ldots, x_n)]) \in L_\sigma^{\mathbf{a}} \cap U(0) \tag{3.1}$$

такий, що

$$U(0) \not\ni (\sigma, [\mathbf{a}, (x_1 + 1, \ldots, x_n)]) = m_{\mathbf{a}} \cdot (1, [\mathbf{1}, \mathbf{2}_1]). \tag{3.2}$$

Розглянемо множину $M = \{m_{\mathbf{a}} \colon \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n\}$. З умови (3.2) випливає, що $M \cap V(0) = \varnothing$. Тому $U(0) \setminus V(0) \supset M$, а це суперечить лемі 3.2.1(2), оскільки множина M скінченна. $\square$

Лема 3.2.3. *Нехай n – натуральне число, A та B – нескінченні підмножини множини в $\mathbb{N}^n$ такі, що $A \sqcup B = \mathbb{N}^n$ і $A \cap B = \varnothing$. Тоді існують нескінченна підмножина $C \subset A$ і натуральне число $k \in \{1, \ldots, n\}$ такі, що принаймні одна з двох множин $(C)g_k$ або $(C)g_k^{-1}$ є підмножиною множини B, де g_k відображення з $\mathbb{N}^n$ в $\mathbb{N}^n$, визначене за формулою:*

$$(x_1, \ldots, x_n)g_k = (x_1, \ldots, x_k + 1, \ldots, x_n).$$

Доведення. Для $n = 1$ розглянемо множину $C = \{a \in A \colon a + 1 \in B\}$, яка нескінченна і $(C)g_1 \subset B$.

Нехай $n \geqslant 2$. Для натурального числа $r \geqslant 2$, впорядкований набір $p = \left(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \ldots, \mathbf{p}^{r-1}, \mathbf{p}^r\right)$ елементів з $\mathbb{N}^n$ називатимемо *шляхом з точки $\boldsymbol{a}$ в точку $\boldsymbol{b}$*, якщо $\mathbf{p}^1 = \mathbf{a}$, $\mathbf{p}^r = \mathbf{b}$ і для кожного індекса $i \in \{2, \ldots, r\}$ існує число $m_i \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $(\mathbf{p}^{i-1})g_{m_i} = \mathbf{p}^i$ або $(\mathbf{p}^{i-1})g_{m_i}^{-1} = \mathbf{p}^i$.

Для довільної підмножини $X \subset \mathbb{N}^n$ позначимо

$$\downarrow X = \{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n \colon \text{існує елемент } \mathbf{x} \in X \text{ такий, що } \mathbf{a} \leqslant \mathbf{x}\}.$$

Приймемо $A_0 = B_0 = \varnothing$. Для кожного натурального числа i виберемо елементи $\mathbf{a}^i \in A \setminus \downarrow (A_{i-1} \cup B_{i-1})$ і $\mathbf{b}^i \in B \setminus \downarrow (A_{i-1} \cup B_{i-1})$ та шлях $p_i = (\mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^r)$ з точки $\mathbf{a}^i$ в точку $\mathbf{b}^i$ з властивістю: $\mathbf{p}^j \notin A_{i-1} \cup B_{i-1}$. Існує точка $\mathbf{p}^j$ шляху p_i така, що $\mathbf{p}^j \in A$ і $\mathbf{p}^{j+1} \in B$. Приймемо $A_i = A_{i-1} \cup \{\mathbf{p}^j\}$ і $B_i = B_{i-1} \cup \{\mathbf{p}^{j+1}\}$.

Тепер визначимо множину $\widetilde{C} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Зауважимо, що для довільного елемента $\mathbf{a} \in \widetilde{C}$ існують числа $k \in \{1, \ldots, n\}$ і $s \in \{1, -1\}$ такі, що $(\mathbf{a})g_k^s \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \subset B$ і позначимо ці числа через $k_{\mathbf{a}}$ і $s_{\mathbf{a}}$. Оскільки множина $\widetilde{C}$ нескінченна, то існує така нескінченна підмножина $C \subset \widetilde{C}$, що для кожного $\mathbf{c} \in C$, числа $k_{\mathbf{c}}$ і $s_{\mathbf{c}}$ рівні. $\square$

Лема 3.2.4. *Нехай $n \geqslant 2$ і $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ – гаусдорфова локально компактна недискретна напівтопологічна напівгрупа. Тодi для довільного околу нуля $U(0)$ і для кожної підстановки $\sigma \in \mathcal{S}_n$ існує елемент $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^n$ такий, що множина $L_\sigma^{\boldsymbol{a}} \setminus U(0)$ скінченна.*

Доведення. Зафіксуємо довільний окіл нуля $U(0)$ в топологічному просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ і довільну підстановку $\sigma \in \mathcal{S}_n$. З леми 3.2.2 випливає існування елемента $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ такого, що множина $L_\sigma^{\mathbf{a}} \cap U(0)$ скінченна.

Множина $L_\sigma^{\mathbf{a}}$ є диз'юнктним об'єднанням:

$$L_\sigma^{\mathbf{a}} = (L_\sigma^{\mathbf{a}} \cap U(0)) \sqcup (L_\sigma^{\mathbf{a}} \setminus U(0)).$$

Твердження леми буде деведенно, що множина $L_\sigma^{\mathbf{a}} \setminus U(0)$ скінченна. Припустимо, що множина $L_\sigma^{\mathbf{a}} \setminus U(0)$ нескінченна.

Розглянемо бієкцію $f^a_\sigma\colon L^{\mathbf{a}}_\sigma \to \mathbb{N}^n$, визначену за формулою:

$$(\sigma, [\mathbf{a}, \mathbf{x}])f^a_\sigma = \mathbf{x}.$$

З леми 3.2.3 випливає, що існують нескінченна підмножина C в $L^{\mathbf{a}}_\sigma \cap U(0)$ і число $k \in \{1, \ldots, n\}$ такі, що принаймні одна з двох множин $(C)(f^a_\sigma \circ g_k)$ або $(C)(f^a_\sigma \circ g_k^{-1})$ міститься в $(L^{\mathbf{a}}_\sigma \setminus U(0))f^a_\sigma$.

Зауважимо, що композиція $f^a_\sigma \circ g_k \circ (f^a_\sigma)^{-1}$ збігається зі звуженням правого зсуву $\rho_{(1,[\mathbf{0},\mathbf{1}_k])}$ на множину $L^{\mathbf{a}}_\sigma$, тобто

$$f^a_\sigma \circ g_k \circ (f^a_\sigma)^{-1} = \rho_{(1,[\mathbf{1},\mathbf{2}_k])}\big|_{L^{\mathbf{a}}_\sigma}$$

і, аналогічно,

$$f^a_\sigma \circ g_k^{-1} \circ (f^a_\sigma)^{-1} = \rho_{(1,[\mathbf{2}_k,\mathbf{1}])}\big|_{L^{\mathbf{a}}_\sigma \setminus \{(\sigma,[\mathbf{a},\mathbf{x}])\colon \mathbf{x}\in\mathbb{N}^n,\ x_k=2\}}$$

З леми 3.2.1 і нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ випливає, що існує відкритий компактний окіл нуля $V(0)$ в $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ такий, що

$$V \cdot (1, [\mathbf{1}, \mathbf{2}_k]) \subset U(0) \quad \text{і} \quad V \cdot (1, [\mathbf{2}_k, \mathbf{1}]) \subset U(0).$$

У кожному з випадків множина C міститься в $U(0) \setminus V(0)$. Справді:

(i) якщо $(C)(f^a_\sigma \circ g_k)$ підмножина множини $(L^{\mathbf{a}}_\sigma \setminus U(0))f^a_\sigma$, то

$$\begin{aligned} C \cdot (1, [\mathbf{1}, \mathbf{2}_k]) &= (C)\rho_{(1,[\mathbf{1},\mathbf{2}_k])} = \\ &= (C)\rho_{(1,[\mathbf{1},\mathbf{2}_k])}\big|_{L^{\mathbf{a}}_\sigma} = \\ &= (C)(f^a_\sigma \circ g_k \circ (f^a_\sigma)^{-1}) \subset \\ &\subset L^{\mathbf{a}}_\sigma \setminus U(0); \end{aligned}$$

(ii) якщо $(C)(f^a_\sigma \circ g_k^{-1})$ підмножина множини $(L^{\mathbf{a}}_\sigma \setminus U(0))f$, то

$$
\begin{aligned}
C \cdot (1,[\mathbf{2}_k,\mathbf{1}]) &= (C)\rho_{(1,[\mathbf{2}_k,\mathbf{1}])} = \\
&= (C)\rho_{(1,[\mathbf{2}_k,\mathbf{1}])}\big|_{L^{\mathbf{a}}_\sigma\setminus\{(\sigma,[\mathbf{a},\mathbf{x}])\ \mid\ \mathbf{x}\in\mathbb{N}^n,\ x_k=2\}} = \\
&= (C)(f^a_\sigma\circ g_k^{-1}\circ(f^a_\sigma)^{-1}) \subset \\
&\subset L^{\mathbf{a}}_\sigma \setminus U(0).
\end{aligned}
$$

Оскільки множина C нескінченна, то це суперечить лемі 3.2.1(2). □

Лема 3.2.5. *Нехай $n \geqslant 2$ і $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0,\tau)$ – гаусдорфова локально компактна недискретна напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільного околу нуля $U(0)$ в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0,\tau)$, для довільної підстановки $\sigma\in\mathcal{S}_n$ і для довільного елемента $\boldsymbol{a}\in\mathbb{N}^n$ множина $L^{\boldsymbol{a}}_\sigma\setminus U(0)$ є скінченною.*

Доведення. Розглянемо довільний окіл нуля $U(0)$ в топологічному просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0,\tau)$ і довільну підстановку $\sigma\in\mathcal{S}_n$. З леми 3.2.4 випливає існування елемента $\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n$ такого, що множина $L^{\mathbf{b}}_\sigma\setminus U(0)$ скінченна. Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n\setminus\{\mathbf{b}\}$. Визначимо елементи $\mathbf{q},\mathbf{p}\in\mathbb{N}^n$ так: для довільного числа $i\in\{1,.,n\}$ покладемо

$$
q_i = 1,\quad p_i = b_i - a_i,\qquad \text{якщо}\quad b_i\geqslant a_i;
$$

$$
p_i = 1,\quad q_i = a_i - b_i,\qquad \text{якщо}\quad b_i < a_i.
$$

Зауважимо, що $\mathbf{q}-\mathbf{p} = \mathbf{a}-\mathbf{b}$ і $\max\{\mathbf{p},\mathbf{b}\} = \mathbf{b}$. Тоді звуження лівого зсуву $\lambda_{(1,[(\mathbf{q})\sigma^{-1},(\mathbf{p})\sigma^{-1}])}$ на множину $L^{\mathbf{b}}_\sigma$ є біекцією з $L^{\mathbf{b}}_\sigma$ на $L^{\mathbf{a}}_\sigma$: для довільного елемента $(\sigma,[\mathbf{b},\mathbf{x}])\in L^{\mathbf{b}}_\sigma$ маємо, що

$$
\begin{aligned}
(\sigma,[\mathbf{b},\mathbf{x}])\lambda_{(1,[(\mathbf{q})\sigma^{-1},(\mathbf{p})\sigma^{-1}])} &= (1,[(\mathbf{q})\sigma^{-1},(\mathbf{p})\sigma^{-1}])\cdot(\sigma,[\mathbf{b},\mathbf{x}]) = \\
&= (\sigma,[\mathbf{q},\mathbf{p}]*[\mathbf{b},\mathbf{x}]) = \\
&= (\sigma,[\max\{\mathbf{p},\mathbf{b}\}-\mathbf{p}+\mathbf{q},\max\{\mathbf{p},\mathbf{b}\}-\mathbf{b}+\mathbf{x}]) = \\
&= (\sigma,[\mathbf{b}-\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{x}]) = (\sigma,[\mathbf{a},\mathbf{x}]).
\end{aligned}
$$

З леми 3.2.1 і нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0,\tau)$ випливає, що в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0,\tau)$ існує відкритий компактний окіл нуля $V(0)$ такий, що

$$(1,[(\mathbf{q})\sigma^{-1},(\mathbf{p})\sigma^{-1}]) \ \cdot \ V(0) \ \subset \ U(0).$$

Оскільки

$$\begin{aligned} L_\sigma^{\mathbf{a}} \setminus U(0) \subseteq L_\sigma^{\mathbf{a}} \setminus (1,[(\mathbf{q})\sigma^{-1},(\mathbf{p})\sigma^{-1}]) \ \cdot \ V(0) = \\ = L_\sigma^{\mathbf{a}} \setminus (V(0))\lambda_{(1,[(\mathbf{q})\sigma^{-1},(\mathbf{p})\sigma^{-1}])} = \\ = (L_\sigma^{\mathbf{b}} \setminus V(0))\lambda_{(1,[(\mathbf{q})\sigma^{-1},(\mathbf{p})\sigma^{-1}])}, \end{aligned}$$

і множина $L_\sigma^{\mathbf{b}} \setminus V(0)$ скінченна, то множина $L_\sigma^{\mathbf{a}} \setminus U(0)$ також є скінченною. □

Лема 3.2.6. *Нехай $n \geqslant 2$ і $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ – гаусдорфова локально компактна недискретна напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільного відкритого околу нуля $U(0)$ в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ і для довільної підстановки $\sigma \in \mathcal{S}_n$ існує лише скінченна кількість елементів $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^n$ таких, що множина $L_\sigma^{\boldsymbol{a}} \setminus U(0)$ непорожня, тобто множина*

$$\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^n \colon L_\sigma^{\boldsymbol{a}} \setminus U(0) \neq \varnothing\}$$

скінченна.

Доведення. Припустимо протилежне: існують відкритий окіл нуля $U(0)$ в топологічному просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ і підстановка $\sigma \in \mathcal{S}_n$ такі, що множина $M = \left\{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n \colon L_\sigma^{\mathbf{b}} \setminus U(0) \neq \varnothing\right\}$ нескінченна. Для довільного елемента $\mathbf{b} \in M$ за лемою 3.2.5 множина $L_\sigma^{\mathbf{b}} \setminus U(0)$ скінченна, а отже, існують елемент $\mathbf{x_b} \in \mathbb{N}^n$ і натуральне число $k_{\mathbf{b}} \in \{1,\ldots,n\}$ такі, що

$$(\sigma,[\mathbf{b},\mathbf{x_b}]) \notin L_\sigma^{\mathbf{b}} \setminus U(0) \quad \text{і} \quad (\sigma,[\mathbf{b},\mathbf{x_b} - (0,\ldots,\underbrace{1}_{k_{\mathbf{b}}},\ldots,0)]) \in L_\sigma^{\mathbf{b}} \setminus U(0).$$

Визначимо відображення:

$$\gamma \colon M \to \mathbb{N}^n, \ \mathbf{b} \mapsto \mathbf{x_b},$$

$$\phi\colon M \to \{1,\ldots,n\},\ \mathbf{b} \mapsto k_{\mathbf{b}}.$$

Оскільки множина M нескінченна й образ $(M)\phi$ скінченний, то існують нескінченна підмножина $M' \subset M$ і натуральне число $k_{M'} \in \{1,\ldots,n\}$ такі, що для довільних двох елементів $\mathbf{u},\mathbf{v} \in M'$ виконується рівність

$$(\mathbf{u})\phi = (\mathbf{v})\phi = k_{M'}.$$

З леми 3.2.1 і нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0,\tau)$ випливає, що в топологічному просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0,\tau)$ існує відкритий компактний окіл нуля $V(0)$ такий, що $V(0)\cdot(1,[\mathbf{2}_{k_{M'}},1]) \subset U(0)$.

Покладемо

$$P = \{(\sigma,[\mathbf{b},(\mathbf{b})\gamma])\colon \mathbf{b} \in M'\}.$$

З вибору множини M' випливає, що $P \subset U(0)\setminus V(0)$, а це суперечить лемі 3.2.1(2), оскільки множина M' нескінченна. □

Наслідок 3.2.7. *Нехай $n \geqslant 2$ і $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0,\tau)$ – гаусдорфова локально компактна недискретна напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільного відкритого околу нуля $U(0)$ в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0,\tau)$ множина $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0\setminus U(0)$ скінченна.*

Доведення. Оскільки

$$\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) = \bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\{\sigma\}\times\Big(\bigsqcup_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} L_\sigma^{\mathbf{a}}\Big),$$

то з леми 3.2.6 випливає, що множина

$$\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)\setminus U(0) = \bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\{\sigma\}\times\bigsqcup_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} L_\sigma^{\mathbf{a}}\setminus U(0) = \bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\{\sigma\}\times\bigsqcup_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} L_\sigma^{\mathbf{a}}\setminus U(0)$$

скінченна. □

Приклад 3.2.8. Означимо топологію τ_{Ac} на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0$ так:

- (i) усі елементи напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є ізольованими точками в просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0,\tau_{Ac})$;

(ii) сім'я

$$\mathcal{B}_{Ac}(0) = \left\{ U \subset \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0 : U \ni 0 \text{ і } |\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n) \setminus U| < \infty \right\}$$

визначає базу топології τ_{Ac} в точці $0 \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0$.

Очевидно, що простір $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau_{Ac})$ гомеоморфний одноточковій компактифікації Алєксандрова дискретного простору $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з наростом $\{0\}$. Напівгрупова операція в $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ є нарізно неперервною оскільки всі елементи напівгрупи $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є ізольованими точками в топологічному просторі $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau)$ і за твердженням 2.1.24, для довільних елементів $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ рівняння $\alpha \cdot \chi = \beta$ і $\chi \cdot \alpha = \beta$ мають скінченну кількість розв'язків в моноїді $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$.

Зауваження 3.2.9. У попередньому підрозділі (див. теорема 3.1.1) доведено, що дискретна топологія τ_d – єдина гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$. Тому τ_{Ac} – єдина гаусдорфова компактна трансляційно-неперервна топологія на $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0$.

З леми 3.2.7 і зауваження 3.2.9, випливає така теорема.

Теорема 3.2.10. *Нехай $n \geqslant 2$ і $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0$ – гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа. Тоді простір $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0$ або дискретний або топологічно ізоморфний простору $(\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0, \tau_{Ac})$.*

За наслідком 3.1.4 напівгрупа $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)$ не вкладається топологічно ізоморфно в компактну гаусдорфову топологічну напівгрупу. Тому з теореми 3.2.10 випливає наслідок 3.2.11.

Наслідок 3.2.11. *Нехай $n \geqslant 2$ і $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0$ – гаусдорфова локально компактна топологічна напівгрупа. Тоді простір $\mathcal{IPF}(\mathbb{N}^n)^0$ дискретний.*

3.3. Висновки до розділу 3

Цей розділ складається з двох підрозіділів, які присвячені дослідженням топологізації напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$. У першому підрозділі доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є дискретною (теорема 3.1.1). Цей результат узагальнює результат Бертман-Веста з [26] (а отже, і результат Ебергарта-Селдена з [33]). Також доведено теорему 3.1.2, яка узагальнює ще один результат Ебергарта-Селдена, теорему I.3 з [33]: якщо для деякого натурального числа $n \geqslant 2$ напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є щільною підмножиною гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $(S, \cdot)$ й $I = S \setminus \mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n) \neq \varnothing$, то I – двобічний ідеал в S. В теоремі 3.1.6 доведено, що якщо для деякого натурального числа $n \geqslant 2$, гаусдорфова топологічна напівгрупа S містить напівгрупу $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ як щільну піднапівгрупу, то квадрат $S \times S$ не є слабко компактним простором.

У другому підрозділі наведено приклад недискретної гаусдорфової компактної трансляційно-неперервної топології τ_{Ac} на напівгрупі $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем (приклад 3.2.8). Доведено, що гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною (теорема 3.2.10). Ця теорема узагальнює результат Гутіка [61], що кожний гаусдорфовий локально компактний напівтопологічний біциклічний моноїд $\mathcal{C}^0$ з приєднаним нулем є або компактним, або дискретним простором.

РОЗДІЛ 4
НАПІВГРУПА $\mathscr{IPF}\,({}^{\kappa}\mathbb{N})$ ПОРЯДКОВИХ ІЗОМОРФІЗМІВ ГОЛОВНИХ ФІЛЬТРІВ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНОЇ МНОЖИНИ $({}^{\kappa}\mathbb{N},\leqslant)$

Для довільного нескінченного кардинала κ означимо

$$ {}^{\kappa}\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{N}^{\kappa} \mid \text{множина } \{x \in \kappa \mid (x)\,a \neq 1\} \text{ – скінченна }\}. $$

Аналогічно визначимо ${}^{\kappa}\mathbb{Z}$ як підмножину в $\mathbb{Z}^{\kappa}$, яка містить усі відображення a такі, що множина $\{x \in \kappa \mid (x)\,a \neq 0\}$ скінченна.

Через $\mathbf{1}$ позначимо елемент з $\mathbb{N}^{\kappa}$ такий, що $(x)\,\mathbf{1} = 1$ для кожного $x \in \kappa$.

На множині $\mathbb{Z}^{\kappa}$ розглянемо частковий порядок добутку $\leqslant$:

$$ a \leqslant b \qquad \text{тоді і лише тоді, коли} \qquad (x)\,a \leqslant (x)\,b \quad \text{для всіх} \quad x \in \kappa. $$

Також на $\mathbb{Z}^{\kappa}$ розглянемо поточкові операції “$+$”, “$-$”, “max” і “min”. Для довільних елементів $a, b \in \mathbb{Z}^{\kappa}$ визначимо:

$$ \begin{aligned} &(x)\,(a+b) = (x)\,a + (x)\,b,\\ &(x)\,(a-b) = (x)\,a - (x)\,b,\\ &(x)\,(\max\{a,b\}) = \max\{(x)\,a, (x)\,b\},\\ &(x)\,(\min\{a,b\}) = \min\{(x)\,a, (x)\,b\}, \end{aligned} $$

для кожного елемента $x \in \kappa$. Очевидно, що множина ${}^{\kappa}\mathbb{Z}$ замкнена стосовно вище означених операцій. Множина ${}^{\kappa}\mathbb{N}$ також замкнена стосовно операцій “max” і “min”, але це не так у випадку операцій “$+$” і “$-$”. Більше того,

$$ a+b, a-b \notin {}^{\kappa}\mathbb{N} \qquad \text{для довільних} \qquad a, b \in {}^{\kappa}\mathbb{N}. $$

Однак
$$a+b-\mathbf{1}\in {}^{\kappa}\mathbb{N} \qquad \text{для довільних} \qquad a,b\in {}^{\kappa}\mathbb{N},$$
і
$$a-b+\mathbf{1}\in {}^{\kappa}\mathbb{N} \qquad \text{для довільних} \qquad a\in {}^{\kappa}\mathbb{N} \qquad \text{і} \qquad b\in {\downarrow}a.$$

Нехай κ – довільний нескінченний кардинал. Визначимо напівгрупу $\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ як множину всіх порядкових ізоморфізмів між головними фільтрами частково впорядкованої множини $({}^{\kappa}\mathbb{N},\leqslant)$ з операцією композиції часткових відображень.

Введемо такі позначення: для довільного елемента $\alpha\in\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ через d_α і r_α позначатимемо такі елементи з ${}^{\kappa}\mathbb{N}$, що $\operatorname{dom}\alpha={\uparrow}d_\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha={\uparrow}r_\alpha$.

Також визначимо часткові перетворення $\lambda_\alpha,\rho_\alpha\in\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ так:

$$\operatorname{dom}\rho_\alpha=\operatorname{dom}\alpha={\uparrow}d_\alpha,\ \operatorname{ran}\rho_\alpha={}^{\kappa}\mathbb{N},\ \ (a)\,\rho_\alpha=a-d_\alpha+\mathbf{1} \text{ для } a\in\operatorname{dom}\rho_\alpha;$$
$$\operatorname{ran}\lambda_\alpha=\operatorname{ran}\alpha={\uparrow}r_\alpha,\ \operatorname{dom}\lambda_\alpha={}^{\kappa}\mathbb{N},\ \ (a)\,\lambda_\alpha=a+r_\alpha-\mathbf{1} \text{ для } a\in\operatorname{dom}\lambda_\alpha.$$

Оскільки $a+r_\alpha-\mathbf{1}\in{}^{\kappa}\mathbb{N}$ для довільного елемента $a\in\operatorname{dom}\lambda_\alpha$, то часткове відображення λ_α визначено коректно. Аналогічно, $a-d_\alpha+\mathbf{1}\in{}^{\kappa}\mathbb{N}$ для довільного елемента $a\in\operatorname{dom}\rho_\alpha$, а тому часткове відображення ρ_α також визнечено коректно.

Для довільного нескінченного кардинала κ і для довільної бієкції $g\in\mathcal{S}_\kappa$ визначимо відображення $\mathcal{F}_g\colon\mathbb{Z}^\kappa\to\mathbb{Z}^\kappa$ за формулою:
$$(x)\,(a)\,\mathcal{F}_g=\left((x)\,g^{-1}\right)a,\ a\in\mathbb{Z}^\kappa,\ x\in\kappa.$$

4.1. Алгебричні властивості напівгрупи $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$

Твердження 4.1.1. *Нехай κ – довільний нескінченний кардинал. Тоді:*

(*i*) $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ *– інверсна напівгрупа;*

(*ii*) *напівґратка ідемпотентів $E(\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N}))$ ізоморфна напівґратці $({}^{\kappa}\mathbb{N}, \max)$ стосовно відображення $\varepsilon \mapsto d_\varepsilon$;*

(*iii*) *$\alpha\mathcal{L}\beta$ в $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$;*

(*iv*) *$\alpha\mathcal{R}\beta$ в $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$;*

(*v*) *$\alpha\mathcal{H}\beta$ в $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$ і $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$;*

(*vi*) *для довільних ідемпотентів $\varepsilon, \iota \in \mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ існують елементи $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ такі, що $\alpha\beta = \varepsilon$ і $\beta\alpha = \iota$, а тому напівгрупа $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ біпроста, а отже, проста.*

Доведення. (*i*) З означення напівгрупи $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ випливає, що моноїд $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ є інверсним підмоноїдом симетричного інверсного моноїду $\mathcal{I}_{{}^{\kappa}\mathbb{N}}$ над множиною ${}^{\kappa}\mathbb{N}$.

Твердження (*ii*) випливає з властивості (*i*).

Твердження (*iii*)–(*v*) випливають з властивості (*i*) і з тверджень 1.2.6(1)–(3).

(*vi*) Зафіксуємо довільні ідемпотенти $\varepsilon, \iota \in \mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. Визначимо часткове відображення $\alpha\colon {}^{\kappa}\mathbb{N} \rightharpoonup {}^{\kappa}\mathbb{N}$ так:

$$\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\varepsilon, \quad \operatorname{ran}\alpha = \operatorname{dom}\iota \quad \text{і} \quad (z)\alpha = z - d_\varepsilon + d_\iota, \quad \text{для} \quad z \in \operatorname{dom}\alpha.$$

Оскільки $\varepsilon, \iota \in \mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$, то часткове відображення α визначене коректно й $\alpha \in \mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. Тоді $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon$ і $\alpha^{-1}\alpha = \iota$, а тому покладемо $\beta = \alpha^{-1}$. З леми 1.2.4 випливає, що напівгрупа $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ біпроста, а отже, проста. $\square$

Для довільного натурального числа $k \geqslant 2$ і для довільного $x \in \kappa$ визначимо відображення $k_x\colon \kappa \to \mathbb{N}$ так:

$$(t)\, k_x = \begin{cases} k, & \text{якщо } t = x; \\ 1, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Лема 4.1.2. *Для довільного нескінченного кардинала κ і для довільної бієкції $g \in \mathcal{S}_\kappa$ виконуються такі властивості.*

(i) *Відображення $\mathcal{F}_g$ є порядковим ізоморфізмом частково впорядкованої множини $(\mathbb{Z}^\kappa, \leqslant)$ і $(\mathcal{F}_g)^{-1} = \mathcal{F}_{g^{-1}}$.*

(ii) $({}^\kappa\mathbb{N})\,\mathcal{F}_g = {}^\kappa\mathbb{N}$.

(iii) $({}^\kappa\mathbb{Z})\,\mathcal{F}_g = {}^\kappa\mathbb{Z}$.

(iv) $\mathcal{F}_{gh} = \mathcal{F}_g\mathcal{F}_h$ *для довільної бієкції $h \in \mathcal{S}_\kappa$.*

(v) $(k_x)\,\mathcal{F}_g = k_{(x)g}$ *для довільного числа $k \in \mathbb{N}$ і для довільного елемента $x \in \kappa$.*

(vi) $(\mathbf{1})\,\mathcal{F}_g = \mathbf{1}$.

(vii) *Для довільної бієкції $h \in \mathcal{S}_\kappa$ виконується умова: $g \neq h \Longrightarrow \mathcal{F}_g \neq \mathcal{F}_h$.*

$(viii)$ *Для довільних елементів $a, b \in \mathbb{Z}^\kappa$ виконується умова:*

$$(a+b)\mathcal{F}_g = (a)\mathcal{F}_g + (b)\mathcal{F}_g.$$

(ix) *Для довільних елементів $a, b \in \mathbb{Z}^\kappa$ виконується умова:*

$$(a-b)\mathcal{F}_g = (a)\mathcal{F}_g - (b)\mathcal{F}_g.$$

(x) *Для довільних елементів $a, b \in \mathbb{Z}^\kappa$ виконується умова:*

$$(\max\{a, b\})\,\mathcal{F}_g = \max\{(a)\,\mathcal{F}_g, (b)\,\mathcal{F}_g\}.$$

(xi) *Для довільних елементів $a, b \in \mathbb{Z}^\kappa$ виконується умова:*

$$(\min\{a, b\})\,\mathcal{F}_g = \min\{(a)\,\mathcal{F}_g, (b)\,\mathcal{F}_g\}.$$

Доведення. (i) Покажемо, що відображення $\mathcal{F}_g$ є порядковим ізоморфізмом. Зафіксуємо різні елементи $a, b \in \mathbb{Z}^\kappa$. Існує така координата $x \in \kappa$, що $(x)\,a \neq (x)\,b$. Для координати $y = (x)\,g$ маємо, що $x = (y)\,g^{-1}$, а тому з нерівності $\big((y)\,g^{-1}\big)\,a \neq \big((y)\,g^{-1}\big)\,b$ отримуємо, що $(a)\,\mathcal{F}_g \neq (b)\,\mathcal{F}_g$, а отже, відображення $\mathcal{F}_g$ ін'єктивне.

Для довільного елемента $a \in \mathbb{Z}^\kappa$ визначимо елемент b так:

$$(x)\,b = ((x)\,g)\,a, \quad \text{для довільного} \quad x \in \kappa,$$

тоді

$$(x)\,(b)\,\mathcal{F}_g = \big((x)\,g^{-1}\big)\,b = \Big(\big((x)\,g^{-1}\big)\,g\Big)\,a = (x)\,a, \quad \text{для} \quad x \in \kappa,$$

а отже, відображення $\mathcal{F}_g$ сюр'єктивне і, більше того, його обернення відображення $(\mathcal{F}_g)^{-1}$ збігається з $\mathcal{F}_{g^{-1}}$.

Нехай $a, b \in \mathbb{Z}^\kappa$ і $a \leqslant b$. Для довільної координати $x \in \kappa$ маємо, що

$$\big((x)\,g^{-1}\big)\,a \leqslant \big((x)\,g^{-1}\big)\,b,$$

а отже,

$$(x)\,(a)\,\mathcal{F}_g \leqslant (x)\,(b)\,\mathcal{F}_g,$$

тобто

$$(a)\,\mathcal{F}_g \leqslant (b)\,\mathcal{F}_g.$$

Тому відображення $\mathcal{F}_g$ є монотонним, а отже, і відображення $\mathcal{F}_g^{-1}$ також є монотонним, звідки випливає, що відображення $\mathcal{F}_g$ – порядковий ізоморфізм.

(ii) Зафіксуємо елемент $a \in {}^\kappa\mathbb{N}$. Оскільки

$$(x)\,(a)\,\mathcal{F}_g = \big((x)\,g^{-1}\big)\,a \in \mathbb{N} \text{ для кожного } x \in \kappa,$$

то $(a)\,\mathcal{F}_g \in \mathbb{N}^\kappa$. Визначимо множину $A=\{x \in \kappa \mid (x)\,a \neq 1\}$ і припустимо, що для деякої координати $x \in \kappa$ виконується нерівність $(x)\,(a)\,\mathcal{F}_g \neq 1$. Тоді $\big((x)\,g^{-1}\big)\,a \neq 1$, а отже, $(x)\,g^{-1} \in A$, а тому $x \in (A)\,g$. Оскільки множина A скінченна а g – бієкція, то множина $(A)\,g$ також скінченна. Отже, $(a)\,\mathcal{F}_g \in {}^{\kappa}\mathbb{N}$, а тому $({}^{\kappa}\mathbb{N})\,\mathcal{F}_g \subset {}^{\kappa}\mathbb{N}$. З отриманого вище випливає, що $(a)\,\mathcal{F}_{g^{-1}} \in {}^{\kappa}\mathbb{N}$, і використавши рівність $((a)\,\mathcal{F}_{g^{-1}})\,\mathcal{F}_g = a$, отримуємо, що ${}^{\kappa}\mathbb{N} \subset ({}^{\kappa}\mathbb{N})\,\mathcal{F}_g$.

(iii) Доведення твердження (iii) є аналогічним до доведення твердження (ii)

(iv) Для довільних бієкції $h \in \mathcal{S}_\kappa$, елемента $a \in \mathbb{Z}^\kappa$ і координати $x \in \kappa$ маємо, що

$$\begin{aligned}
(x)\,(a)\,\mathcal{F}_{gh} = \Big((x)\,(gh)^{-1}\Big)\,a &= \big((x)\,\big(h^{-1}g^{-1}\big)\big)\,a = \\
&= \big(\big((x)\,h^{-1}\big)\,g^{-1}\big)\,a = \\
&= \big((x)\,h^{-1}\big)\,(a)\,\mathcal{F}_g = \\
&= (x)\,((a)\,\mathcal{F}_g)\,\mathcal{F}_h = \\
&= (x)\,(a)\,(\mathcal{F}_g\mathcal{F}_h)\,.
\end{aligned}$$

(v) Нехай $k \in \mathbb{N}$ і $x \in \kappa$. Тоді для довільної координати $t \in \kappa$ маємо, що

$$\begin{aligned}
(t)\,(k_x)\,\mathcal{F}_g = \big((t)\,g^{-1}\big)\,k_x &= \begin{cases} k, & \text{якщо } (t)\,g^{-1} = x; \\ 1, & \text{в іншому випадку;} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} k, & \text{якщо } t = (x)\,g; \\ 1, & \text{в іншому випадку;} \end{cases} = \\
&= (t)\,k_{(x)g}.
\end{aligned}$$

(vi) Для довільної координати $t \in \kappa$ маємо, що

$$(t)\,(\mathbf{1})\,\mathcal{F}_g = \big((t)\,g^{-1}\big)\,\mathbf{1} = 1.$$

(vii) Нехай $h \in \mathcal{S}_\kappa$ і $g \neq h$. Тоді існує така координата $x \in \kappa$, що $(x)\,g^{-1} \neq (x)\,h^{-1}$. Розглянемо образ елемента $2_{(x)g^{-1}}$ стосовно відображень

$\mathcal{F}_g$ і $\mathcal{F}_h$. З властивості (v) і нерівності $(x)\,g^{-1} \neq (x)\,h^{-1}$ випливає, що

$$\left(2_{(x)g^{-1}}\right)\mathcal{F}_g = 2_x \neq 2_{((x)g^{-1})h} = \left(2_{(x)g^{-1}}\right)\mathcal{F}_h.$$

$(viii)$ Для довільних елементів $a, b \in \mathbb{Z}^\kappa$ і довільної координати $x \in \kappa$ маємо, що

$$\begin{aligned}(x)\,(a+b)\,\mathcal{F}_g &= \left((x)\,g^{-1}\right)(a+b) = \\ &= \left((x)\,g^{-1}\right)a + \left((x)\,g^{-1}\right)b = \\ &= (x)\,(a)\,\mathcal{F}_g + (x)\,(b)\,\mathcal{F}_g.\end{aligned}$$

Доведення тверджень (ix), (x) і (xi) аналогічне доведенню твердження $(viii)$. □

Для довільного нескінченного кардинала κ і для довільної бієкції $g \in \mathcal{S}_\kappa$ визначимо відображення $\mathcal{F}_g^\circ \colon {}^\kappa\mathbb{N} \to {}^\kappa\mathbb{N}$ як звуження відображення $\mathcal{F}_g$ на множину ${}^\kappa\mathbb{N}$. З леми 4.1.2(ii) випливає, що відображення $\mathcal{F}_g^\circ$ визначене коректно та $\mathcal{F}_g^\circ$ – бієкція. Звідси та з леми 4.1.2(i) отримуємо, що відображення $\mathcal{F}_g^\circ$ є порядковим ізоморфізмом частково впорядкованої множини $({}^\kappa\mathbb{N}, \leqslant)$. Аналогічно визначимо відображення $\mathcal{F}_g^\diamond \colon {}^\kappa\mathbb{Z} \to {}^\kappa\mathbb{Z}$ як звуження відображення $\mathcal{F}_g$ на множину ${}^\kappa\mathbb{Z}$. Далі, аналогічно, з леми 4.1.2(iii) отримуємо, що відображення $\mathcal{F}_g^\diamond$ визначене коректно і $\mathcal{F}_g^\diamond$ – бієкція.

Доведення леми 4.1.3 аналогічне доведенню леми 4.1.2.

Лема 4.1.3. *Для довільного нескінченного кардинала κ та для довільної бієкції $g \in \mathcal{S}_\kappa$ властивості $(iv) - (xi)$ леми 4.1.2 виконуються також для відображень $\mathcal{F}_g^\circ$ та $\mathcal{F}_g^\diamond$.*

Через $\mathbb{I}$ позначимо тотожне відображення множини ${}^\kappa\mathbb{N}$. Очевидно, що $\mathbb{I}$ – одиниця моноїда $\mathcal{IPF}\left({}^\kappa\mathbb{N}\right)$. Також через $H(\mathbb{I})$ позначимо групу одиниць напівгрупи $\mathcal{IPF}\left({}^\kappa\mathbb{N}\right)$. Легко бачити, що відображення $\alpha \in \mathcal{IPF}\left({}^\kappa\mathbb{N}\right)$ є елементом групи одиниць $H(\mathbb{I})$ тоді і лише тоді, коли α – порядковий ізоморфізм частково впорядкованої множини $({}^\kappa\mathbb{N}, \leqslant)$.

Лема 4.1.4. *Нехай κ – довільний нескінченний кардинал і $\alpha \in H(\mathbb{I})$. Тоді $(\mathbf{1})\,\alpha = \mathbf{1}$ і для довільної координати $x \in \kappa$ існує така координата $y \in \kappa$, що $(k_x)\,\alpha = k_y$, для кожного натурального числа $k \geqslant 2$.*

Доведення. З нерівності $\mathbf{1} \leqslant (\mathbf{1})\,\alpha$ випливає, що

$$(\mathbf{1})\,\alpha^{-1} \leqslant ((\mathbf{1})\,\alpha)\,\alpha^{-1} = \mathbf{1},$$

а тому $(\mathbf{1})\,\alpha = \mathbf{1}$.

Тепер зафіксуємо довільну координату $x \in \kappa$ і розглянемо елемент $(2_x)\,\alpha$. Оскільки $\mathbf{1} = (\mathbf{1})\,\alpha \neq (2_x)\,\alpha$, то існує така координата $y \in \kappa$, що $2_y \leqslant (2_x)\,\alpha$, а тому з нерівності $(2_y)\,\alpha^{-1} \leqslant 2_x$ отримуємо, що $(2_x)\,\alpha = 2_y$.

Нехай k – довільне натуральне число $\geqslant 2$, і припустимо, що для довільного натурального числа $n \leqslant k$ виконуються твердження леми.

Для довільної координати $x \in \kappa$ розглянемо образ $((k+1)_x)\,\alpha$. Існує така координата $z \in \kappa$, що $(k+1)_z \leqslant ((k+1)_x)\,\alpha$. Припустимо протилежне: $(k+1)_z \nleqslant ((k+1)_x)\,\alpha$ для всіх $z \in \kappa$. Оскільки

$$((k+1)_x)\,\alpha \notin \{\mathbf{1}, 2_z, 3_z, \ldots, k_z \mid z \in \kappa\},$$

то існують дві різні координати $z_1, z_2 \in \kappa$ такі, що

$$1 < (z_1)\,((k+1)_x)\,\alpha < k+1 \quad \text{i} \quad 1 < (z_2)\,((k+1)_x)\,\alpha < k+1.$$

Отже,

$$2_{z_1} \leqslant ((k+1)_x)\,\alpha \quad \text{i} \quad 2_{z_2} \leqslant ((k+1)_x)\,\alpha,$$

а тому

$$(2_{z_1})\,\alpha^{-1} \leqslant (k+1)_x \quad \text{i} \quad (2_{z_2})\,\alpha^{-1} \leqslant (k+1)_x\,.$$

Оскільки

$$(2_{z_1})\,\alpha^{-1} = 2_{z_1'} \quad \text{i} \quad (2_{z_2})\,\alpha^{-1} = 2_{z_2'}$$

для деяких z_1', z_2', то $z_1' = z_2'$. Тоді $2_{z_1} = 2_{z_2}$, а отже, $z_1 = z_2$, що суперечить умові $z_1 \neq z_2$. Тому

$$((k+1)_z)\,\alpha^{-1} \leqslant (k+1)_x\,.$$

Оскільки

$$((k+1)_z)\,\alpha^{-1} \notin \{\mathbf{1}, 2_x, 3_x, \ldots, k_x\},$$

то $((k+1)_z)\,\alpha^{-1} = (k+1)_x$, а отже, $((k+1)_x)\,\alpha = (k+1)_z$. Перевіримо, що $x = y$. З нерівності $2_x < (k+1)_x$ отримуємо, що $(2_x)\,\alpha < ((k+1)_x)\,\alpha$. Оскільки $(2_x)\,\alpha = 2_y$ і $((k+1)_x)\,\alpha = (k+1)_z$, то $2_y < (k+1)_z$, а тому $z{=}y$. $\square$

Для довільної координати $x \in \kappa$ визначимо відображення $\pi_x\colon {}^\kappa\mathbb{N}\to{}^\kappa\mathbb{N}$ за формулою:

$$(t)\,(a)\,\pi_x = \begin{cases} (t)\,a, & \text{якщо } t = x; \\ 1, & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \qquad a \in {}^\kappa\mathbb{N},\ t \in \kappa.$$

Лема 4.1.5. *Нехай κ – довільний нескінченний кардинал. Якщо $\alpha \in H(\mathbb{I})$ задовільняє властивіть $(2_x)\,\alpha = 2_x$ для всіх координат $x \in \kappa$, то α – тотожне відображення.*

Доведення. Нехай $a \in {}^\kappa\mathbb{N}$. Оскільки нерівність $(a)\,\pi_x \leqslant a$ виконується для всіх координат $x \in \kappa$ й α – порядковий ізоморфізм, то $((a)\,\pi_x)\,\alpha \leqslant (a)\,\alpha$. З леми 4.1.4 і з припущення маємо, що $((a)\,\pi_x)\,\alpha = (a)\,\pi_x$, а тому $(a)\,\pi_x \leqslant (a)\,\alpha$ для всіх $x \in \kappa$, а отже, $a \leqslant (a)\,\alpha$.

Ми показали, що нерівність $a \leqslant (a)\,\alpha$ виконується для всіх елементів $a \in {}^\kappa\mathbb{N}$ і всіх відображень α, які задовільняють припущення леми. Застосувавши цей результат до елемента $(a)\,\alpha$ і відображення α^{-1}, отримуємо, що $(a)\,\alpha \leqslant ((a)\,\alpha)\,\alpha^{-1} = a$.

З нерівностей $a \leqslant (a)\,\alpha$ і $(a)\,\alpha \leqslant a$ отримуємо, що $(a)\,\alpha = a$. $\square$

Теорема 4.1.6. *Для довільного нескінченного кардинала κ група одиниць $H(\mathbb{I})$ напівгрупи $\mathcal{IPF}({}^\kappa\mathbb{N})$ ізоморфна групі $\mathcal{S}_\kappa$ бієктивних перетворень* *кардинала κ. Більше того, $\alpha \in H(\mathbb{I})$ тоді і лише тоді, коли $\alpha = \mathcal{F}_g^\circ$ для деякої бієкції $g \in \mathcal{S}_\kappa$.*

Доведення. Визначимо відображення $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}_\kappa \to H(\mathbb{I})$ так:

$$(g)\,\mathcal{F} = \mathcal{F}_g^\circ, \quad \text{для довільної бієкції} \quad g \in \mathcal{S}_\kappa.$$

Оскільки $\mathcal{F}_g^\circ$ – порядковий ізоморфізм частково впорядкованої множини $({}^\kappa\mathbb{N}, \leqslant)$, то відображення $\mathcal{F}_g^\circ$ є елементом групи одиниць $H(\mathbb{I})$, а отже, відображення $\mathcal{F}$ визначене коректно. Далі доведемо, що $\mathcal{F}$ – ізоморфізм.

З леми 4.1.2(iv) випливає, що відображення $\mathcal{F}$ є гомоморфізмом і з леми 4.1.2(vii) випливає, що $\mathcal{F}$ – ін'єктивне.

Покажемо, що відображення $\mathcal{F}$ – сюр'єктивне. Нехай $\alpha \in H(\mathbb{I})$. З леми 4.1.4 випливає, що для довільної координати $x \in \kappa$ існує така координата $y \in \kappa$, що $(2_x)\,\alpha = 2_y$. Визначимо відображення $g\colon \kappa \to \kappa$ так: $(x)\,g = y$. Оскільки α бієкція, то g також бієкція.

Тепер розглянемо композицію $\alpha \circ \mathcal{F}_{g^{-1}}^\circ$. Нехай $x \in \kappa$. З означення відображення g випливає, що

$$(2_x)\left(\alpha \circ \mathcal{F}_{g^{-1}}^\circ\right) = \left(2_{(x)g}\right)\mathcal{F}_{g^{-1}}^\circ$$

і з леми 4.1.2(v) випливає, що $\left(2_{(x)g}\right)\mathcal{F}_{g^{-1}}^\circ = 2_x$, а тому $(2_x)\left(\alpha \circ \mathcal{F}_{g^{-1}}^\circ\right) = 2_x$. За лемою 4.1.5 $\alpha \circ \mathcal{F}_{g^{-1}}^\circ$ – тотожне відображення, а отже,

$$\alpha = \left(\mathcal{F}_{g^{-1}}^\circ\right)^{-1} = \mathcal{F}_g^\circ.$$

□

Наслідок 4.1.7 випливає з теорем 1.2.7, 1.2.8 і 4.1.6.

Наслідок 4.1.7. *Для довільного нескінченного кардинала κ кожна максимальна підгрупа напівгрупи $\mathcal{IPF}({}^\kappa\mathbb{N})$ ізоморфна групі $\mathcal{S}_\kappa$ бієкцій кардинала κ.*

Твердження 4.1.8. *Нехай κ – довільний нескінченний кардинал і*

$\alpha \in \mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. *Тоді існує єдина біекція* $g_\alpha \in \mathcal{S}_\kappa$ *така, що* $\alpha = \rho_\alpha \mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha} \lambda_\alpha$.

Доведення. Для елемента $\rho_\alpha^{-1}\alpha\lambda_\alpha^{-1}$ виконується рівність

$$\rho_\alpha\rho_\alpha^{-1}\alpha\lambda_\alpha^{-1}\lambda_\alpha = \varepsilon\alpha\iota,$$

де ε і ι – ідемпотенти з $\operatorname{dom}\varepsilon = \operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{dom}\iota = \operatorname{ran}\alpha$, а отже, $\varepsilon\alpha\iota = \alpha$. Оскільки

$$\operatorname{dom}\left(\rho_\alpha^{-1}\alpha\lambda_\alpha^{-1}\right) = \operatorname{ran}\left(\rho_\alpha^{-1}\alpha\lambda_\alpha^{-1}\right) = {}^{\kappa}\mathbb{N},$$

то $\rho_\alpha^{-1}\alpha\lambda_\alpha^{-1} \in H(\mathbb{I})$. За теоремою 4.1.6 для елемента $\rho_\alpha^{-1}\alpha\lambda_\alpha^{-1}$ існує така біекція $g_\alpha \in \mathcal{S}_\kappa$, що $\rho_\alpha^{-1}\alpha\lambda_\alpha^{-1} = \mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}$.

Припустимо, що існує біекція $h \in \mathcal{S}_\kappa$, така, що $\alpha = \rho_\alpha\mathcal{F}^{\circ}_h\lambda_\alpha$. Тоді з рівності $\rho_\alpha\mathcal{F}^{\circ}_h\lambda_\alpha = \rho_\alpha\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\lambda_\alpha$ випливає, що

$$\left(\rho_\alpha^{-1}\rho_\alpha\right)\mathcal{F}^{\circ}_h\left(\lambda_\alpha\lambda_\alpha^{-1}\right) = \left(\rho_\alpha^{-1}\rho_\alpha\right)\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\left(\lambda_\alpha\lambda_\alpha^{-1}\right).$$

З означень часткових відобрежень λ_α і ρ_α випливає, що

$$\rho_\alpha^{-1}\rho_\alpha = \lambda_\alpha\lambda_\alpha^{-1} = \mathbb{I},$$

а отже, $\mathcal{F}^{\circ}_h = \mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}$. З леми 4.1.2$(v)$ випливає, що $h = g_\alpha$. $\square$

Наслідок 4.1.9 стверджує, що кожен елемент α напівгрупи $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ єдиним чином зображається як композиція трьох базових перетворень: зсув в початок координат, порядковий ізоморфізм всієї множини ${}^{\kappa}\mathbb{N}$ і зсув в область визначення часткового відображення α.

Наслідок 4.1.9. *Нехай* κ *– довільний нескінченний кардинал і* α *довільний елемент напівгрупи* $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. *Зображення* $\alpha = \rho_\alpha\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\lambda_\alpha$ *єдине.*

Для довільного елемента $\alpha \in \mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ через g_α позначатимемо елемент групи S_κ, який реалізує зображення $\alpha = \rho_\alpha\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\lambda_\alpha$.

Лема 4.1.10. *Нехай* κ *– довільний нескінченний кардинал і* α, β *елементи* *напівгрупи* $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. *Тоді*

$$\begin{aligned}
&d_{\alpha\beta} = (\max\{r_\alpha, d_\beta\} - r_\alpha)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}^{-1} + d_\alpha;\\
&r_{\alpha\beta} = (\max\{r_\alpha, d_\beta\} - d_\beta)\,\mathcal{F}_{g_\beta} + r_\beta;\\
&\mathcal{F}_{g_{\alpha\beta}}^{\circ} = \mathcal{F}_{g_\alpha}^{\circ}\mathcal{F}_{g_\beta}^{\circ}.
\end{aligned}$$

Доведення. З означення області визначення композиції часткових відображень випливає, що

$$\operatorname{dom}(\alpha\beta) = (\operatorname{ran}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta)\,\alpha^{-1} = ({\uparrow}r_\alpha \cap {\uparrow}d_\beta)\alpha^{-1} = ({\uparrow}\max\{r_\alpha, d_\beta\})\,\alpha^{-1}.$$

Оскільки α – порядковий ізоморфізм, то

$$({\uparrow}\max\{r_\alpha, d_\beta\})\alpha^{-1} = {\uparrow}\left[(\max\{r_\alpha, d_\beta\})\alpha^{-1}\right].$$

З наслідку 4.1.9 та тверджень (vi), $(viii)$ леми 4.1.2 випливає, що

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom}(\alpha\beta) &= {\uparrow}\left[(\max\{r_\alpha, d_\beta\})\alpha^{-1}\right] =\\
&= {\uparrow}\Big([\max\{r_\alpha, d_\beta\}]\,\lambda_\alpha^{-1}\left(\mathcal{F}_{g_\alpha}^{\circ}\right)^{-1}\rho_\alpha^{-1}\Big) =\\
&= {\uparrow}\Big([\max\{r_\alpha, d_\beta\} - r_\alpha + \mathbf{1}]\left(\mathcal{F}_{g_\alpha}^{\circ}\right)^{-1}\rho_\alpha^{-1}\Big) =\\
&= {\uparrow}\left(\left[(\max\{r_\alpha, d_\beta\} - r_\alpha)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}^{-1} + \mathbf{1}\right]\rho_\alpha^{-1}\right) =\\
&= {\uparrow}\left[(\max\{r_\alpha, d_\beta\} - r_\alpha)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}^{-1} + d_\alpha\right].
\end{aligned}$$

Аналогічно, за означенням області значень композиції часткових відображень, маємо, що

$$\operatorname{ran}(\alpha\beta) = (\operatorname{ran}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta)\,\beta = ({\uparrow}r_\alpha \cap {\uparrow}d_\beta)\beta = ({\uparrow}\max\{r_\alpha, d_\beta\})\,\beta.$$

Оскільки β – порядковий ізоморфізм, то

$$({\uparrow}\max\{r_\alpha, d_\beta\})\beta = {\uparrow}\left[(\max\{r_\alpha, d_\beta\})\beta\right].$$

З наслідку 4.1.9 та тверджень (vi), $(viii)$ леми 4.1.2 випливає, що

$$\begin{aligned}\operatorname{ran}(\alpha\beta) &= \uparrow[(\max\{r_\alpha, d_\beta\})\beta] = \\ &= \uparrow\left([\max\{r_\alpha, d_\beta\}]\,\lambda_\beta\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta}\rho_\beta\right) = \\ &= \uparrow\left([\max\{r_\alpha, d_\beta\} - d_\beta + \mathbf{1}]\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta}\rho_\beta\right) = \\ &= \uparrow\left(\left[(\max\{r_\alpha, d_\beta\} - d_\beta)\,\mathcal{F}_{g_\beta} + \mathbf{1}\right]\rho_\beta\right) = \\ &= \uparrow\left[(\max\{r_\alpha, d_\beta\} - d_\beta)\,\mathcal{F}_{g_\beta} + r_\beta\right].\end{aligned}$$

Доведемо, що $\alpha\beta = \rho_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta}\lambda_{\alpha\beta}$. З означень відображень $\rho_{\alpha\beta}$, $\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}$, $\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta}$, $\lambda_{\alpha\beta}$ і з означення композиції часткових відображень випливає, що

$$\operatorname{dom}\left(\rho_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta}\lambda_{\alpha\beta}\right) = \operatorname{dom}(\alpha\beta)$$

і

$$\operatorname{ran}\left(\rho_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta}\lambda_{\alpha\beta}\right) = \operatorname{ran}(\alpha\beta).$$

Розглянемо довільний елемент $a \in \operatorname{dom}(\alpha\beta)$ і його зображення

$$a = d_{\alpha\beta} + a - d_{\alpha\beta}.$$

Позначимо $a - d_{\alpha\beta}$ через b. Тоді елемент a має таке зображення: $a = d_{\alpha\beta} + b$. Тепер розглянемо образ елемента a стосовно відображень $\rho_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta}\lambda_{\alpha\beta}$ і $\alpha\beta$:

$$\begin{aligned}(a)\,\rho_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta}\lambda_{\alpha\beta} &= (d_{\alpha\beta} + b)\,\rho_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta}\lambda_{\alpha\beta} = \\ &= (b + \mathbf{1})\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta}\lambda_{\alpha\beta} = \\ &= \left((b)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}\mathcal{F}_{g_\beta} + \mathbf{1}\right)\lambda_{\alpha\beta} = \\ &= (b)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}\mathcal{F}_{g_\beta} + r_{\alpha\beta};\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(a)\,\alpha\beta &= (d_{\alpha\beta}+b)\,\alpha\beta = \\
&= \left([\max\{r_\alpha, d_\beta\}-r_\alpha]\,\mathcal{F}_{g_\alpha}^{-1}+d_\alpha+b\right)\alpha\beta = \\
&= \left([\max\{r_\alpha, d_\beta\}-r_\alpha]\,\mathcal{F}_{g_\alpha}^{-1}+d_\alpha+b\right)\rho_\alpha\mathcal{F}_{g_\alpha}^{\circ}\lambda_\alpha\rho_\beta\mathcal{F}_{g_\beta}^{\circ}\lambda_\beta = \\
&= \left([\max\{r_\alpha, d_\beta\}-r_\alpha]\,\mathcal{F}_{g_\alpha}^{-1}+\mathbf{1}+b\right)\mathcal{F}_{g_\alpha}^{\circ}\lambda_\alpha\rho_\beta\mathcal{F}_{g_\beta}^{\circ}\lambda_\beta = \\
&= (\max\{r_\alpha, d_\beta\}-r_\alpha+\mathbf{1}+(b)\,\mathcal{F}_{g_\alpha})\,\lambda_\alpha\rho_\beta\mathcal{F}_{g_\beta}^{\circ}\lambda_\beta = \\
&= (\max\{r_\alpha, d_\beta\}+(b)\,\mathcal{F}_{g_\alpha})\,\rho_\beta\mathcal{F}_{g_\beta}^{\circ}\lambda_\beta = \\
&= (\max\{r_\alpha, d_\beta\}-d_\beta+\mathbf{1}+(b)\,\mathcal{F}_{g_\alpha})\,\mathcal{F}_{g_\beta}^{\circ}\lambda_\beta = \\
&= \left([\max\{r_\alpha, d_\beta\}-d_\beta]\,\mathcal{F}_{g_\beta}+\mathbf{1}+(b)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}\mathcal{F}_{g_\beta}\right)\lambda_\beta = \\
&= [\max\{r_\alpha, d_\beta\}-d_\beta]\,\mathcal{F}_{g_\beta}+(b)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}\mathcal{F}_{g_\beta}+r_\beta = \\
&= r_{\alpha\beta}+(b)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}\mathcal{F}_{g_\beta}.
\end{aligned}
$$

Отже, $\alpha\beta = \rho_{\alpha\beta}\mathcal{F}_{g_\alpha}^{\circ}\mathcal{F}_{g_\beta}^{\circ}\lambda_{\alpha\beta}$, а тому за наслідком 4.1.9 отримуємо, що $\mathcal{F}_{g_{\alpha\beta}}^{\circ} = \mathcal{F}_{g_\alpha}^{\circ}\mathcal{F}_{g_\beta}^{\circ}$. □

З леми 4.1.10 випливають такі наслідки.

Наслідок 4.1.11. *Для довільного нескінченного кардинала κ і для довільних елементів $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ бієкція $g_{\alpha\beta}$ збігається з $g_\alpha g_\beta$.*

Наслідок 4.1.12. *Нехай κ – довільний нескінченний кардинал і ε – ідемпотент напівгрупи $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. Тоді $g_\varepsilon = \mathrm{id}_\kappa$ і $\mathcal{F}_{g_\varepsilon}^{\circ} = \mathbb{I}$.*

Для довільного нескінченного кардинала κ, розглянемо напівгрупу ${}^{\kappa}\mathbb{B}$, як множину ${}^{\kappa}\mathbb{N} \times {}^{\kappa}\mathbb{N}$ з операцією множення $*_\kappa$, яка є аналогічною до операції множення (1.2) в напівгрупі $\mathbb{B}$:

$$
(a, b) *_\kappa (c, d) = (a + \max\{b, c\} - b, d + \max\{b, c\} - c)\,, \tag{4.1}
$$

де $a, b, c, d \in {}^{\kappa}\mathbb{N}$.

Зауважимо, що напівгрупа ${}^{\kappa}\mathbb{B}$ ізоморфна прямому κ кодобутку біциклічної напівгрупи.

Для довільної бієкції $g \in \mathcal{S}_\kappa$ визначимо відображення $\Phi_g \colon {}^{\kappa}\mathbb{B} \to {}^{\kappa}\mathbb{B}$ так: для довільної впорядкованої пари $(a, b) \in {}^{\kappa}\mathbb{B}$ визначимо $((a, b))\,\Phi_g =$

$\left((a)\,\mathcal{F}_g^\circ,(b)\,\mathcal{F}_g^\circ\right)$. З тверджень $(i)\,,(ii)$ леми 4.1.2 випливає, що відображення Φ_g визначене коректно та Φ_g – бієкція. Перевіримо, що відображення Φ_g є автоморфізмом напівгрупи ${}^\kappa\mathbb{B}$. Для довільних впорядкованих пар $(a,b)\,,(c,d)\in{}^\kappa\mathbb{B}$ за твердженнями $(xiii)-(x)$ леми 4.1.2 маємо, що

$$\begin{aligned}
&((a,b)*_\kappa(c,d))\,\Phi_g=((a+\max\{b,c\}-b,d+\max\{b,c\}-c))\,\Phi_g=\\
&=\left((a+\max\{b,c\}-b)\,\mathcal{F}_g^\circ,(d+\max\{b,c\}-c)\,\mathcal{F}_g^\circ\right)=\\
&=((a)\,\mathcal{F}_g+\max\{(b)\,\mathcal{F}_g,(c)\,\mathcal{F}_g\}-(b)\,\mathcal{F}_g,(d)\,\mathcal{F}_g+\max\{(b)\,\mathcal{F}_g,(c)\,\mathcal{F}_g\}-(c)\,\mathcal{F}_g)\\
&=((a)\,\mathcal{F}_g,(b)\,\mathcal{F}_g)*_\kappa((c)\,\mathcal{F}_g,(d)\,\mathcal{F}_g)=\left((a)\,\mathcal{F}_g^\circ,(b)\,\mathcal{F}_g^\circ\right)*_\kappa\left((c)\,\mathcal{F}_g^\circ,(d)\,\mathcal{F}_g^\circ\right)=\\
&=(a,b)\,\Phi_g*_\kappa(c,d)\,\Phi_g.
\end{aligned}$$

Нехай κ – довільний нескінченний кардинал і $\mathbf{Aut}({}^\kappa\mathbb{B})$ – група автоморфізмів напівгрупи ${}^\kappa\mathbb{B}$. Визначимо відображення $\Phi\colon\mathcal{S}_\kappa\to\mathbf{Aut}\,({}^\kappa\mathbb{B})$ так: для довільної бієкції $g\in\mathcal{S}_\kappa$ покладемо $(g)\,\Phi=\Phi_g$. З леми 4.1.2(vii) випливає, що Φ – ін'єктивне відображення. Доведемо, що відображення Φ є гомоморфізмом. Нехай $g,h\in\mathcal{S}_\kappa$, тоді для довільного елемента $[a,b]\in{}^\kappa\mathbb{B}$ маємо, що

$$([a,b])\,(gh)\,\Phi=([a,b])\,\Phi_{gh}=\left[(a)\,\mathcal{F}_{gh}^\circ,(b)\,\mathcal{F}_{gh}^\circ\right].$$

З леми 4.1.2(iv) випливає, що

$$\left[(a)\,\mathcal{F}_{gh}^\circ,(b)\,\mathcal{F}_{gh}^\circ\right]=\left[(a)\,\mathcal{F}_g^\circ\mathcal{F}_h^\circ,(b)\,\mathcal{F}_g^\circ\mathcal{F}_h^\circ\right],$$

і оскільки

$$\begin{aligned}
\left[(a)\,\mathcal{F}_g^\circ\mathcal{F}_h^\circ,(b)\,\mathcal{F}_g^\circ\mathcal{F}_h^\circ\right]&=\left(\left[(a)\,\mathcal{F}_g^\circ,(b)\,\mathcal{F}_g^\circ\right]\right)\Phi_h=\\
&=([a,b])\,\Phi_g\Phi_h=\\
&=([a,b])\,(g)\,\Phi\,(h)\,\Phi,
\end{aligned}$$

то

$$([a,b])\,(gh)\,\Phi=([a,b])\,(g)\,\Phi\,(h)\,\Phi,$$

тобто Φ – гомоморфізм.

Для довільного нескінченного кардинала κ розглянемо напівпрямий добуток $\mathcal{S}_\kappa \ltimes_\Phi {}^\kappa\mathbb{B}$ напівгрупи ${}^\kappa\mathbb{B}$ групою $\mathcal{S}_\kappa$ як множину $\mathcal{S}_\kappa \times {}^\kappa\mathbb{B}$ з такою операцією:

$$(g, [a, b])\,(h, [c, d]) = (gh, ([a, b])\,\Phi_h *_\kappa [c, d])\,,$$

де $(g, [a, b])\,, (h, [c, d]) \in \mathcal{S}_\kappa \times {}^\kappa\mathbb{B}$.

Визначимо відображення $\Psi\colon \mathcal{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N}) \to \mathcal{S}_\kappa \ltimes_\Phi {}^\kappa\mathbb{B}$ так:

$$(\alpha)\,\Psi = \left(g_\alpha, \left[(d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}, r_\alpha\right]\right).$$

З означення елементів $d_\alpha, r_\alpha, g_\alpha$ і $\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}$ випливає, що відображення Ψ визначене коректно.

Теорема 4.1.13. *Для довільного нескінченного кардинала κ напівгрупа $\mathcal{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N})$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_\kappa \ltimes_\Phi {}^\kappa\mathbb{B}$ напівгрупи ${}^\kappa\mathbb{B}$ групою $\mathcal{S}_\kappa$.*

Доведення. Розглянемо відображення Ψ. За наслідком 4.1.9 відображення Ψ бієктивне. Доведемо, що Ψ також є гомоморфізмом.

Для довільних елементів $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N})$ маємо, що

$$(\alpha\beta)\,\Psi = \Big(g_{\alpha\beta}, \Big[(d_{\alpha\beta})\,\mathcal{F}^\circ_{g_{\alpha\beta}}, r_{\alpha\beta}\Big]\Big)\,.$$

З наслідку 4.1.11 і леми 4.1.10 випливає, що

$$\Big(g_{\alpha\beta}, \Big[(d_{\alpha\beta})\,\mathcal{F}^\circ_{g_{\alpha\beta}}, r_{\alpha\beta}\Big]\Big) =$$
$$= \Big(g_\alpha g_\beta, \Big[\big((\max\{r_\alpha, d_\beta\} - r_\alpha)\,\mathcal{F}^{-1}_{g_\alpha} + d_\alpha\big)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}\mathcal{F}^\circ_{g_\beta}, (\max\{r_\alpha, d_\beta\} - d_\beta)\,\mathcal{F}_{g_\beta} + r_\beta\Big]\Big).$$

З леми 4.1.2, означення операції $*_\kappa$ і означення відображення Φ випливає, що

$$\Big(g_\alpha g_\beta, \Big[\big((\max\{r_\alpha, d_\beta\} - r_\alpha)\,\mathcal{F}^{-1}_{g_\alpha} + d_\alpha\big)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}\mathcal{F}^\circ_{g_\beta}, (\max\{r_\alpha, d_\beta\} - d_\beta)\,\mathcal{F}_{g_\beta} + r_\beta\Big]\Big) =$$
$$= (g_\alpha g_\beta, [\max\{(r_\alpha)\,\mathcal{F}_{g_\beta}, (d_\beta)\,\mathcal{F}_{g_\beta}\} - (r_\alpha)\,\mathcal{F}_{g_\beta} + (d_\alpha)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}\mathcal{F}_{g_\beta},$$
$$\max\{(r_\alpha)\,\mathcal{F}_{g_\beta}, (d_\beta)\,\mathcal{F}_{g_\beta}\} - (d_\beta)\,\mathcal{F}_{g_\beta} + r_\beta]) =$$
$$= \big(g_\alpha g_\beta, \big[(d_\alpha)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}\mathcal{F}_{g_\beta}, (r_\alpha)\,\mathcal{F}_{g_\beta}\big] *_\kappa \big[(d_\beta)\,\mathcal{F}_{g_\beta}, r_\beta\big]\big) =$$

$$= \left(g_\alpha g_\beta, \left[(d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}\mathcal{F}^\circ_{g_\beta}, (r_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\beta}\right] *_\kappa \left[(d_\beta)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\beta}, r_\beta\right]\right) =$$
$$= \left(g_\alpha g_\beta, \left(\left[(d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}, r_\alpha\right]\right)\Phi_{g_\beta} *_\kappa \left[(d_\beta)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\beta}, r_\beta\right]\right) =$$
$$= \left(g_\alpha, \left[(d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}, r_\alpha\right]\right)\left(g_\beta, \left[(d_\beta)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\beta}, r_\beta\right]\right) = (\alpha)\,\Psi\,(\beta)\,\Psi.$$

□

Для елемента $\alpha \in \mathscr{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N})$ через $\left(g_\alpha, \left[(d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}, r_\alpha\right]\right) = (\alpha)\Psi$ позначатимемо образ елемента α при ізоморфізмі $\Psi\colon \mathscr{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N}) \to \mathcal{S}_\kappa \ltimes_\Phi {}^\kappa\mathbb{B}$.

Твердження 4.1.14. *Нехай κ – довільний нескінченний кардинал, α – довільний елемент напівгрупи $\mathscr{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N})$ і ε – довільний ідемпотент в напівгрупі $\mathscr{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N})$. Тоді виконуються такі рівності:*

$$(\alpha\varepsilon)\,\Psi = \left(g_\alpha, \left[(d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}, r_\alpha\right]\right)(\mathrm{id}_\kappa, [d_\varepsilon, d_\varepsilon]) =$$
$$= \left(g_\alpha, \left[\max\{r_\alpha, d_\varepsilon\} - r_\alpha + (d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}, \max\{r_\alpha, d_\varepsilon\}\right]\right);$$
$$(\varepsilon\alpha)\,\Psi = (\mathrm{id}_\kappa, [d_\varepsilon, d_\varepsilon])\left(g_\alpha, \left[(d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}, r_\alpha\right]\right) =$$
$$= \left(g_\alpha, \left[(\max\{d_\varepsilon, d_\alpha\})\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}, (\max\{d_\varepsilon, d_\alpha\})\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha} - (d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha} + r_\alpha\right]\right).$$

Доведення. За наслідком 4.1.12 g_ε – тотожне відображення, тобто $g_\varepsilon = \mathrm{id}_\kappa$ і $\mathcal{F}^\circ_{g_\varepsilon} = \mathbb{I}$. Оскільки $\operatorname{dom}\varepsilon = \operatorname{ran}\varepsilon$, то $d_\varepsilon = r_\varepsilon$, а отже, $(d_\varepsilon)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\varepsilon} = d_\varepsilon = r_\varepsilon$. Тому

$$\left(g_\varepsilon, \left[(d_\varepsilon)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\varepsilon}, r_\varepsilon\right]\right) = (\mathrm{id}_\kappa, [d_\varepsilon, d_\varepsilon]).$$

Далі, використавши означення операції множення на напівгрупі $\mathcal{S}_\kappa \ltimes_\Phi {}^\kappa\mathbb{B}$, отримуємо необхідні рівності. □

Теорема 4.1.15 описує мінімальну групову конгруенцію на напівгрупі $\mathscr{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N})$.

Теорема 4.1.15. *Нехай κ – довільний нескінченний кардинал. Тоді $\alpha\mathfrak{C}_{mg}\beta$ в напівгрупі $\mathscr{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N})$ тоді і лише тоді, коли*

$$g_\alpha = g_\beta \qquad i \qquad (d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha} - r_\alpha = (d_\beta)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\beta} - r_\beta.$$

Доведення. Зафіксуємо довільний ідемпотент ε напівгрупи $\mathscr{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N})$.

За твердженням 4.1.14

$$
\begin{aligned}
&\left(g_\alpha, \left[(d_\alpha)\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}, r_\alpha\right]\right)(\mathrm{id}_\kappa, [d_\varepsilon, d_\varepsilon]) = \\
&\qquad\qquad = \left(g_\alpha, \left[\max\{r_\alpha, d_\varepsilon\} - r_\alpha + (d_\alpha)\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}, \max\{r_\alpha, d_\varepsilon\}\right]\right), \\
&\Big(g_\beta, \Big[(d_\beta)\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta}, r_\beta\Big]\Big)(\mathrm{id}_\kappa, [d_\varepsilon, d_\varepsilon]) = \\
&\qquad\qquad = \Big(g_\beta, \Big[\max\{r_\beta, d_\varepsilon\} - r_\beta + (d_\beta)\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta}, \max\{r_\beta, d_\varepsilon\}\Big]\Big),
\end{aligned}
$$

а отже, рівність $\alpha\varepsilon = \beta\varepsilon$ виконується тоді і лише тоді, коли

$$
g_\alpha = g_\beta \qquad \text{і} \qquad (d_\alpha)\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha} - r_\alpha = (d_\beta)\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta} - r_\beta.
$$

□

Нехай $\mathbf{Aut}({}^{\kappa}\mathbb{Z}_+)$ – група автоморфізмів групи ${}^{\kappa}\mathbb{Z}_+$. Визначимо відображення $\Theta\colon \mathcal{S}_\kappa \to \mathbf{Aut}\,({}^{\kappa}\mathbb{Z}_+)$ так: для довільної бієкції $g \in \mathcal{S}_\kappa$ покладемо $(g)\,\Theta = \mathcal{F}^{\diamond}_{g}$.

З тверджень $(i)\,, (iii)$ і $(viii)$ леми 4.1.2 випливає, що для довільної бієкції $g \in \mathcal{S}_\kappa$ відображення $\mathcal{F}^{\diamond}_{g}$ є автоморфізмом групи ${}^{\kappa}\mathbb{Z}_+$, а отже, відображення Θ визначене коректно. З тверджень (iv) і (vii) леми 4.1.2 випливає, що відображення Θ – ін'єктивний гомоморфізм.

Розглянемо напівпрямий добуток $\mathcal{S}_\kappa \ltimes_\Theta {}^{\kappa}\mathbb{Z}_+$ як множину $\mathcal{S}_\kappa \times {}^{\kappa}\mathbb{Z}$ з напівгруповою операцією

$$
(g, m)\,(h, n) = (gh, (m)\,\mathcal{F}^{\diamond}_{h} + n)\,.
$$

Теорема 4.1.16. *Для довільного нескінченного кардинала κ – фактор-напівгрупа $\mathcal{IPF}\,({}^{\kappa}\mathbb{N})\,/\mathfrak{C}_{mg}$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_\kappa \ltimes_\Theta {}^{\kappa}\mathbb{Z}_+$ групи ${}^{\kappa}\mathbb{Z}_+$ групою $\mathcal{S}_\kappa$.*

Доведення. Визначимо відображення $\Upsilon\colon \mathcal{IPF}\,({}^{\kappa}\mathbb{N}) \to \mathcal{S}_\kappa \ltimes_\Theta {}^{\kappa}\mathbb{Z}_+$ так: для довліьного $\alpha \in \mathcal{IPF}\,({}^{\kappa}\mathbb{N})$ покладемо

$$
(\alpha)\,\Upsilon = \left(g_\alpha, (d_\alpha)\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha} - r_\alpha\right).
$$

Оскільки $a-b \in {}^{\kappa}\mathbb{Z}$ для довільних $a,b \in {}^{\kappa}\mathbb{N}$, то відображення Υ визначене коректно.

Для довільних елементів $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$, за означенням відображення Υ, маємо, що:

$$(\alpha\beta)\Upsilon = \left(g_{\alpha\beta}, (d_{\alpha\beta})\mathcal{F}^{\circ}_{g_{\alpha\beta}} - r_{\alpha\beta}\right),$$

і за лемою 4.1.10 отримуємо:

$$(\alpha\beta)\Upsilon =$$
$$= \Big(g_\alpha g_\beta, \left((\max\{r_\alpha, d_\beta\} - r_\alpha)\mathcal{F}^{-1}_{g_\alpha} + d_\alpha\right)\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta} - (\max\{r_\alpha, d_\beta\} - d_\beta)\mathcal{F}_{g_\beta} - r_\beta\Big),$$

а отже, за твердженнями $(viii)$, (ix) леми 4.1.2 маємо, що

$$(\alpha\beta)\Upsilon =$$
$$= (g_\alpha g_\beta, (\max\{r_\alpha, d_\beta\})\mathcal{F}_{g_\beta} - (r_\alpha)\mathcal{F}_{g_\beta} + (d_\alpha)\mathcal{F}_{g_\alpha}\mathcal{F}_{g_\beta} - (\max\{r_\alpha, d_\beta\})\mathcal{F}_{g_\beta} + (d_\beta)\mathcal{F}_{g_\beta} - r_\beta)$$
$$= \left(g_\alpha g_\beta, (d_\alpha)\mathcal{F}_{g_\alpha}\mathcal{F}_{g_\beta} - (r_\alpha)\mathcal{F}_{g_\beta} + (d_\beta)\mathcal{F}_{g_\beta} - r_\beta\right) =$$
$$= \left(g_\alpha, (d_\alpha)\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha} - r_\alpha\right)\left(g_\beta, (d_\beta)\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta} - r_\beta\right) =$$
$$= (\alpha)\Upsilon(\beta)\Upsilon,$$

а отже, відображення Υ – гомоморфізм.

Доведемо, що відображення Υ – ін'єктивне. Для довільної впорядкованої пари $(g,z) \in \mathcal{S}_\kappa \times {}^{\kappa}\mathbb{Z}$ розглянемо відображення $a,b\colon \kappa \to \mathbb{N}$. Для довільної координати $x \in \kappa$ приймемо:

$$(x)a = \begin{cases} (x)z, & \text{якщо } (x)z > 0; \\ 1, & \text{якщо } (x)z = 0; \\ 0, & \text{якщо } (x)z < 0; \end{cases}$$

і

$$(x)\,b = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (x)\,z > 0; \\ 1, & \text{якщо } (x)\,z = 0; \\ -(x)\,z, & \text{якщо } (x)\,z < 0. \end{cases}$$

Маємо, що $a, b \in {}^{\kappa}\mathbb{N}$ і $z = a - b$. Тепер розглянемо елемент $\alpha \in \mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ такий, що

$$\begin{aligned} g_\alpha &= g, \\ d_\alpha &= (a)\left(\mathcal{F}_g^\circ\right)^{-1}, \\ r_\alpha &= b. \end{aligned}$$

Тоді

$$(\alpha)\,\Upsilon = \left(g_\alpha, (d_\alpha)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}^\circ - r_\alpha\right) = \Big(g, \Big((a)\left(\mathcal{F}_g^\circ\right)^{-1}\Big)\,\mathcal{F}_g^\circ - b\Big) = (g, a-b) = (g, z)\,,$$

а отже, Υ – сюр'єктивне відображення.

Також з теореми 4.1.15 випливає, що $\alpha\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}\beta$ в $\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ тоді і лише тоді, коли $(\alpha)\,\Upsilon = (\beta)\,\Upsilon$. Звідси випливає, що гомоморфізм Υ породжує мінімальну групову конгруенцію $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ на напівгрупі $\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$. □

З леми 1.2.1 і твердження 4.1.14 випливає твердження 4.1.17, яке описує природний частковий порядок на напівгрупі $\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$.

Твердження 4.1.17. *Нехай κ – довільний нескінченний кардинал і α, β – довільні елементи напівгрупи $\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(i) $\alpha \preccurlyeq \beta$*;*

(ii) $g_\alpha = g_\beta$, $(d_\alpha)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}^\circ - r_\alpha = (d_\beta)\,\mathcal{F}_{g_\beta}^\circ - r_\beta$ *і* $d_\beta \leqslant d_\alpha$ *у частково впорядкованій множині* $\left({}^{\kappa}\mathbb{N}, \leqslant\right)$*;*

(iii) $g_\alpha = g_\beta$, $(d_\alpha)\,\mathcal{F}_{g_\alpha}^\circ - r_\alpha = (d_\beta)\,\mathcal{F}_{g_\beta}^\circ - r_\beta$ *і* $r_\beta \leqslant r_\alpha$ *у частково впорядкованій множині* $\left({}^{\kappa}\mathbb{N}, \leqslant\right)$*.*

Твердження 4.1.18. *Для довільного нескінченного кардинала κ інверсна напівгрупа $\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ є E-унітарною.*

Доведення. Нехай $\alpha \in \mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. Припустимо, що $\alpha\varepsilon$ – ідемпотент для деякого ідемпотента $\varepsilon \in \mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. З твердження 4.1.14 і властивості $d_{\alpha\varepsilon} = r_{\alpha\varepsilon}$ випливає, що $g_\alpha = \mathrm{id}_\kappa$ і $d_\alpha = (d_\alpha)\mathcal{F}_{g_\alpha} = r_\alpha$, а отже, α – ідемпотент. □

Твердження 4.1.19. *Для довільного нескінченного кардинала κ напівгрупа $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ є F-інверсною.*

Доведення. Нехай $\alpha \in \mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. Розглянемо елемент β в напівгрупі $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ такий, що

$$
\begin{aligned}
g_\beta =& g_\alpha,\\
d_\beta =& d_\alpha - \min\{d_\alpha, (r_\alpha)\left(\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\right)^{-1}\} + \mathbf{1},\\
r_\beta =& r_\alpha - \min\{(d_\alpha)\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}, r_\alpha\} + \mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

Отже,

$$
\min\{d_\alpha, (r_\alpha)\left(\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\right)^{-1}\} \in {}^{\kappa}\mathbb{N} \quad \text{і} \quad \min\{d_\alpha, (r_\alpha)\left(\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\right)^{-1}\} \leqslant d_\alpha,
$$

а тому $d_\beta \in {}^{\kappa}\mathbb{N}$. Аналогічно, $r_\beta \in {}^{\kappa}\mathbb{N}$, а отже, елемент β визначений коректно. Також маємо, що $g_\beta = g_\alpha$ і

$$
\begin{aligned}
&(d_\beta)\mathcal{F}^{\circ}_{g_\beta} - r_\beta =\\
&= \Big(d_\alpha - \min\{d_\alpha, (r_\alpha)\left(\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}\right)^{-1}\} + \mathbf{1}\Big)\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha} - \left(r_\alpha - \min\{(d_\alpha)\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}, r_\alpha\} + \mathbf{1}\right) =\\
&= (d_\alpha)\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha} - \min\{(d_\alpha)\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}, r_\alpha\} + \mathbf{1} - r_\alpha + \min\{(d_\alpha)\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha}, r_\alpha\} - \mathbf{1} =\\
&= (d_\alpha)\mathcal{F}^{\circ}_{g_\alpha} - r_\alpha,
\end{aligned}
$$

і тоді з теореми 4.1.15 випливає, що $\beta\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}\alpha$.

Тепер для довільного елемента $\gamma \in \mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ такого, що $\gamma\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}\alpha$ розглянемо ідемпотент ε з $d_\varepsilon = r_\gamma$ і розглянемо добуток $(\beta)\Psi(\varepsilon)\Psi$. За твердженняням 4.1.14 маємо, що

$$(\beta)\,\Psi\,(\varepsilon)\,\Psi = \left(g_\beta, \left[(d_\beta)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\beta}, r_\beta\right]\right)(\mathrm{id}_\kappa, [d_\varepsilon, d_\varepsilon]) = \\ = \left(g_\beta, \left[\max\{r_\beta, d_\varepsilon\} - r_\beta + (d_\beta)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\beta}, \max\{r_\beta, d_\varepsilon\}\right]\right) = \\ = \left(g_\beta, \left[\max\{r_\beta, r_\gamma\} - r_\beta + (d_\beta)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\beta}, \max\{r_\beta, r_\gamma\}\right]\right).$$

Оскільки $\gamma\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}\alpha$, то за теоремою 4.1.15 отримуємо, що $g_\gamma = g_\alpha$ і

$$r_\gamma - (d_\gamma)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\gamma} = r_\alpha - (d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}.$$

Тоді для довільної координати $x \in \kappa$ маємо, що

$$(x)\,(\max\{r_\beta, r_\gamma\}) = (x)\left(\max\{r_\alpha - \min\{(d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha}, r_\alpha\} + \mathbf{1}, r_\gamma\}\right) = \\ = \begin{cases} \max\{(x)\,r_\alpha - (x)\,r_\alpha + (x)\,\mathbf{1}, (x)\,r_\gamma\}, & \text{якщо } (x)\,(d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha} > (x) r_\alpha; \\ \max\{(x)\,r_\alpha - (x)\,(d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha} + (x)\,\mathbf{1}, (x)\,r_\gamma\}, & \text{в іншому випадку;} \end{cases} = \\ = \begin{cases} \max\{1, (x)\,r_\gamma\}, & \text{якщо } (x)\,(d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha} > (x)\,r_\alpha; \\ \max\{(x)\,r_\gamma - (x)\,(d_\gamma)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\gamma} + 1, (x)\,r_\gamma\}, & \text{в іншому випадку;} \end{cases} = \\ = (x)\,r_\gamma,$$

а тому $\max\{r_\beta, r_\gamma\} = r_\gamma$. Також

$$\max\{r_\beta, r_\gamma\} - r_\beta + (d_\beta)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\beta} = r_\gamma - r_\beta + (d_\beta)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\beta} = \\ = r_\gamma - r_\alpha + (d_\alpha)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\alpha} = \\ = (d_\gamma)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\gamma},$$

а отже,

$$\left(g_\beta, \left[\max\{r_\beta, r_\gamma\} - r_\beta + (d_\beta)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\beta}, \max\{r_\beta, r_\gamma\}\right]\right) = \left(g_\gamma, \left[(d_\gamma)\,\mathcal{F}^\circ_{g_\gamma}, r_\gamma\right]\right) = (\gamma)\,\Psi.$$

З рівності $(\beta)\,\Psi\,(\varepsilon)\,\Psi = (\gamma)\,\Psi$ випливає, що $\gamma = \beta\varepsilon$, а отже, $\gamma \preccurlyeq \beta$. Це означає, що елемент β є найбільшим елементом в $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$-класі елемента α в напівгрупі $\mathcal{IPF}\,({}^\kappa\mathbb{N})$. $\square$

Лема 4.1.20. *Нехай κ – довільний нескінченний кардинал і $\mathfrak{C}$ – конгруенція на напівгрупі $\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ така, що $\varepsilon\mathfrak{C}\iota$ для деяких двох різних ідемпотентів $\varepsilon,\iota\in\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$. Тоді всі ідемпотенти в напівгрупі $\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.*

Доведення. Зауважимо, що не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\varepsilon\preccurlyeq\iota$, де $\preccurlyeq$ – природний частковий порядок на напівґратці $E(\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right))$. Справді, якщо $\varepsilon,\iota\in E(\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right))$, то з відношення $\varepsilon\mathfrak{C}\iota$ випливає, що $\varepsilon=\varepsilon\varepsilon\mathfrak{C}\iota\varepsilon$, і оскільки ідемпотенти ε і ι є різними в напівгрупі $\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$, то $\iota\varepsilon\preccurlyeq\varepsilon$.

З відношення $\varepsilon\preccurlyeq\iota$ випливає, що $\operatorname{dom}\varepsilon\subseteq\operatorname{dom}\iota$. Визначимо часткове відображення $\alpha\colon{}^{\kappa}\mathbb{N}\rightharpoonup{}^{\kappa}\mathbb{N}$ так:

$$\operatorname{dom}\alpha={}^{\kappa}\mathbb{N},\quad \operatorname{ran}\alpha=\operatorname{dom}\iota\quad \text{і}\quad (z)\,\alpha=z+d_{\iota}-\mathbf{1},\quad \text{для}\quad z\in\operatorname{dom}\alpha.$$

З означення часткового відображення α випливає, що $\alpha\iota\alpha^{-1}=\alpha\alpha^{-1}=\mathbb{I}$ і $\alpha^{-1}\alpha=\iota$. Більше того, маємо, що

$$\left(\alpha\varepsilon\alpha^{-1}\right)\left(\alpha\varepsilon\alpha^{-1}\right)=\alpha\varepsilon\left(\alpha^{-1}\alpha\right)\varepsilon\alpha^{-1}=\alpha\varepsilon\iota\varepsilon\alpha^{-1}=\alpha\varepsilon\varepsilon\alpha^{-1}=\alpha\varepsilon\alpha^{-1},$$

звідки випливає, що $\alpha\varepsilon\alpha^{-1}$ – ідемпотент в напівгрупі $\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ такий, що $\alpha\varepsilon\alpha^{-1}\neq\mathbb{I}$.

Отже, ми довели, що в напівгрупі $\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ існує неодиничний ідемпотент ε^* такий, що $\varepsilon^*\mathfrak{C}\mathbb{I}$. Звідси випливає, що $\varepsilon_0\mathfrak{C}\mathbb{I}$ для довільного ідемпотента ε_0 з напівгрупи $\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ такого, що $\varepsilon^*\preccurlyeq\varepsilon_0\preccurlyeq\mathbb{I}$. Оскільки $\varepsilon^*\neq\mathbb{I}$, то $d_{\varepsilon^*}\neq\mathbf{1}$, а отже, існує така координата $x\in\kappa$, що $(x)\,d_{\varepsilon^*}\neq 1$, тому $2_x\leqslant d_{\varepsilon^*}$. Розглянемо ідемпотент ε_x в напівгрупі $\mathscr{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ такий, що $d_{\varepsilon_x}=2_x$. Тоді з рівності $d_{\varepsilon_x}=2_x\leqslant d_{\varepsilon^*}$ випливає, що $\varepsilon^*\preccurlyeq\varepsilon_x$, отже, $\varepsilon_x\mathfrak{C}\mathbb{I}$.

Зафіксуємо довільну координату $y\in\kappa\setminus\{x\}$. Визначимо бієкцію множини κ:

$$(x)\,g=y,\quad (y)\,g=x\quad \text{і}\quad (t)\,g=t,\quad \text{для}\quad t\in\kappa\setminus\{x,y\}.$$

Далі розглянемо відображення $\mathcal{F}_g^\circ$ як елемент напівгрупи $\mathcal{IPF}\left({}^\kappa\mathbb{N}\right)$. З означення бієкції g випливає, що $g^{-1}=g$, а тоді за лемою 4.1.2(i) отримуємо, що

$$\left(\mathcal{F}_g^\circ\right)^{-1}=\mathcal{F}_{g^{-1}}^\circ=\mathcal{F}_g^\circ,$$

а отже,

$$\mathcal{F}_g^\circ\mathbb{I}\mathcal{F}_g^\circ=\mathcal{F}_g^\circ\mathcal{F}_g^\circ=\mathcal{F}_g^\circ\left(\mathcal{F}_g^\circ\right)^{-1}=\mathbb{I}.$$

З обчислень

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{F}_g^\circ\varepsilon_x\mathcal{F}_g^\circ\right)\Psi &= \left(\mathcal{F}_g^\circ\right)\Psi\left(\varepsilon_{d_x}\right)\Psi\left(\mathcal{F}_g^\circ\right)\Psi=\\ &=\left(g,[\mathbf{1},\mathbf{1}]\right)\left(\mathrm{id}_\kappa,[2_x,2_x]\right)\left(g,[\mathbf{1},\mathbf{1}]\right)=\\ &=\left(g,[2_x,2_x]\right)\left(g,[\mathbf{1},\mathbf{1}]\right)=\\ &=\left(gg,\left[(2_x)\,\mathcal{F}_g^\circ,(2_x)\,\mathcal{F}_g^\circ\right]\right)=\\ &=\left(\mathrm{id}_\kappa,\left[2_{(x)g},2_{(x)g}\right]\right)=\\ &=\left(\mathrm{id}_\kappa,[2_y,2_y]\right)=\left(\varepsilon_y\right)\Psi\end{aligned}$$

випливає, що $\mathcal{F}_g^\circ\varepsilon_x\mathcal{F}_g^\circ=\varepsilon_y$, де ε_y – такий ідемпотент в напівгрупі $\mathcal{IPF}\left({}^\kappa\mathbb{N}\right)$, що $d_{\varepsilon_y}=2_y$. Тоді з відношень

$$\varepsilon_y=\left(\mathcal{F}_g^\circ\varepsilon_x\mathcal{F}_g^\circ\right)\mathfrak{C}\left(\mathcal{F}_g^\circ\mathbb{I}\mathcal{F}_g^\circ\right)=\mathbb{I}$$

випливає, що $\varepsilon_y\mathfrak{C}\mathbb{I}$.

Звідси випливає, що $\varepsilon_x\mathfrak{C}\mathbb{I}$ для кожного ідемпотента $\varepsilon_x\in\mathcal{IPF}\left({}^\kappa\mathbb{N}\right)$ такого, що ε_x – тотожне відображення головного фільтра ${\uparrow}2_x$ частково впорядкованої множини $({}^\kappa\mathbb{N},\leqslant)$, $x\in\kappa$. Тепер зафіксуємо ідемпотент ζ в напівгрупі $\mathcal{IPF}\left({}^\kappa\mathbb{N}\right)$ і розглянемо множину

$$A=\{x\in\kappa\mid (x)\,d_\zeta\neq 1\}.$$

Оскільки $d_\zeta\in{}^\kappa\mathbb{N}$, то множина A – скінченна, тобто існує таке натуральне число $k\in\mathbb{N}$, що $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ для деяких $x_1,x_2,\ldots,x_k\in\kappa$. Розглянемо ідемпотент $\varepsilon_A=\varepsilon_{x_1}\ldots\varepsilon_{x_k}$. Оскільки $\mathfrak{C}$ – конгруенція, то $\varepsilon_{x_i}\mathfrak{C}\mathbb{I}$ для всіх

$x_i \in A$ і оскільки A – скінченна, то $(\varepsilon_{x_1} \ldots \varepsilon_{x_k}) \mathfrak{C} \mathbb{I}$. З означення множини ε_A і з означення напівгрупової операції в $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ випливає, що $d_{\varepsilon_A} = 2_A$, де

$$(t)\, 2_A = \begin{cases} 2, & \text{якщо } t \in A; \\ 1, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Визначимо часткове відображення $\gamma \colon {}^{\kappa}\mathbb{N} \rightharpoonup {}^{\kappa}\mathbb{N}$ так:

$$\operatorname{dom} \gamma = {}^{\kappa}\mathbb{N}, \quad \operatorname{ran} \gamma = {\uparrow} 2_A \text{ і } (z)\, \gamma = z + 2_A - \mathbf{1}, \text{ для всіх } z \in \operatorname{dom} \gamma.$$

З означення часткового відображення γ випливає, що $\gamma\gamma^{-1} = \mathbb{I}$ і $\gamma^{-1}\gamma = \varepsilon_A$. Для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ розглянемо ідемпотент

$$\left(\gamma^{-1}\right)^n \gamma^n = \underbrace{\gamma^{-1} \ldots \gamma^{-1}}_{n\text{-разів}} \underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{n\text{-разів}}.$$

Оскільки $\varepsilon_A = \gamma^{-1}\gamma \mathfrak{C} \mathbb{I}$, то

$$\gamma^{-1}\gamma^{-1}\gamma\gamma \mathfrak{C} \gamma^{-1}\gamma = \varepsilon_A \text{ і } \gamma^{-1}\gamma^{-1}\gamma\gamma \mathfrak{C} \mathbb{I},$$

а отже, за індукцією маємо, що $\left(\gamma^{-1}\right)^n \gamma^n \mathfrak{C} \mathbb{I}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Також за індукцією маємо, що $d_{(\gamma^{-1})^n \gamma^n} = (n+1)_A$, де

$$(t)\, (n+1)_A = \begin{cases} n+1, & \text{якщо } t \in A; \\ 1, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тому з обчислень

$$d_\zeta \leqslant d_{(\gamma^{-1})^m \gamma^m} = (m+1)_A, \quad \text{ де } \quad m = \max\{(x)\, d_\zeta \mid x \in \kappa\},$$

випливає, що $\left(\gamma^{-1}\right)^m \gamma^m \preccurlyeq \zeta$, а отже, $\zeta \mathfrak{C} \mathbb{I}$. □

Лема 4.1.21. *Нехай κ – довільний нескінченний кардинал і $\mathfrak{C}$ – конгруенція на напівгрупі $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ така, що $\alpha \mathfrak{C} \beta$ для деяких не $\mathcal{H}$-еквівалентних елементів $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. Тоді всі ідемпотенти в напівгрупі $\mathcal{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$*

є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.

Доведення. Оскільки α і β не є $\mathcal{H}$-еквівалентними елементами в напівгрупі $\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$, то із зауваження 1.2.5 отримуємо, що або $\alpha\alpha^{-1} \neq \beta\beta^{-1}$, або $\alpha^{-1}\alpha \neq \beta^{-1}\beta$. Тоді за твердженням 1.2.3 маємо, що $\alpha\alpha^{-1}\mathfrak{C}\beta\beta^{-1}$ і $\alpha^{-1}\alpha\mathfrak{C}\beta^{-1}\beta$, а отже, виконується припущення леми 4.1.20. □

Лема 4.1.22. *Нехай κ – довільний нескінченний кардинал і $\mathfrak{C}$ – конгруенція на напівгрупі $\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ така, що $\alpha\mathfrak{C}\beta$ для деяких двох різних $\mathcal{H}$-еквівалентних елементів $\alpha, \beta \in \mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$. Тоді всі ідемпотенти в напівгрупі $\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.*

Доведення. За твердженням 4.1.1(vi) напівгрупа $\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ біпроста. Тоді за теоремою 1.2.7 існують такі елементи $\mu, \xi \in \mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$, що відображення $f\colon H_\alpha \to H_{\mathbb{I}}\colon \chi \mapsto \mu\chi\xi$ відображає α в $\mathbb{I}$ і β в $\gamma \neq \mathbb{I}$, відповідно, звідки випливає, що $\mathbb{I}\mathfrak{C}\gamma$. Оскільки γ – елемент групи одиниць напівгрупи $\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$, то за теоремою 4.1.6 $\gamma = \mathcal{F}^{\circ}_{g_\gamma}$, і оскільки $\gamma \neq \mathbb{I}$, то $g_\gamma \neq \mathrm{id}_\kappa$, а отже, існує така координата $x \in \kappa$, що $(x)\, g_\gamma \neq x$. Розглянемо ε як тотожне відображення з $d_\varepsilon = 2_x$. Оскільки $\mathfrak{C}$ – конгруенція на напівгрупі $\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$ і $\gamma \in H_{\mathbb{I}}$, то

$$\varepsilon = \varepsilon\varepsilon = \varepsilon\mathbb{I}\varepsilon\mathfrak{C}\varepsilon\gamma\varepsilon.$$

З твердження 4.1.14 випливає, що

$$(\varepsilon\gamma\varepsilon)\,\Psi = \left(g_\gamma, \left[\max\{(2_x)\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\gamma}, 2_x\}, \max\{(2_x)\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\gamma}, 2_x\}\right]\right).$$

За лемою 4.1.2(v) маємо, що $(2_x)\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\gamma} = 2_{(x)g_\gamma} \neq 2_x$. Звідси та з означення елементів 2_x і $2_{(x)g_\gamma}$ випливає, що $\max\{(2_x)\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\gamma}, 2_x\} \neq 2_x$, отже,

$$r_{\varepsilon\gamma\varepsilon} = \max\{(2_x)\,\mathcal{F}^{\circ}_{g_\gamma}, 2_x\} \neq 2_x = r_\varepsilon.$$

За твердженням 4.1.1(v) елементи $\varepsilon\gamma\varepsilon$ і ε не є $\mathcal{H}$-еквівалентними в напівгрупі $\mathcal{IPF}\left({}^{\kappa}\mathbb{N}\right)$. Далі скористаємося лемою 4.1.21. □

Теорема 4.1.23. *Для довільного нескінченного кардинала* κ *кожна нетотожна конгруенція* $\mathfrak{C}$ *на напівгрупі* $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ *є груповою.*

Доведення. Для довільної нетотожної конгруенції $\mathfrak{C}$ на напівгрупі $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ існують два різні елементи $\alpha, \beta \in \mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ такі, що $\alpha\mathfrak{C}\beta$. Якщо елементи α і β є $\mathscr{H}$-еквівалентними в $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$, то за лемою 4.1.21 усі ідемпотенти моноїда $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. Якщо ж елементи α і β не є $\mathscr{H}$-еквівалентними в $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$, то за лемою 4.1.22 всі ідемпотенти моноїда $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ також є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. За лемою 1.2.2 фактор-напівгрупа $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})/\mathfrak{C}$ має єдиний ідемпотент, а отже, є групою. $\square$

4.2. Висновки до розділу 4

У розділі 4 вивчаються алгебричні властивості моноїда $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини ${}^{\kappa}\mathbb{N}$ з порядком добутку, де κ – довільний нескінченний кардинал. Зокрема, доведено, що напівгрупа $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ є біпростою (твердження 4.1.1), E-унітарною (твердження 4.1.18) та F-інверсною (твердження 4.1.19) напівгрупою. Описано її напівґратку ідемпотентів (твердження 4.1.1), природний частковий порядок (твердження 4.1.17) і відношення Ґріна (твердження 4.1.1) на напівгрупі $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$. Доведено, що група одиниць $H(\mathbb{I})$ моноїда $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ ізоморфна групі бієкцій $\mathcal{S}_{\kappa}$ кардинала κ (теорема 4.1.6), а також описано максимальні підгрупи цього моноїда. Доведено, що напівгрупа $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_{\kappa} \ltimes {}^{\kappa}\mathbb{B}$ напівгрупи ${}^{\kappa}\mathbb{B}$ групою $\mathcal{S}_{\kappa}$ (теорема 4.1.13). Доведено, що кожна неодинична конгренція $\mathfrak{C}$ на моноїді $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ є груповою (теорема 4.1.23), описано мінімальну групову конгруенцію $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ на цій напівгрупі (теорема 4.1.15) і доведено, що фактор-напівгрупа $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ по мінімальній груповій конгруенції $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathcal{S}_{\kappa} \ltimes {}^{\kappa}\mathbb{Z}_{+}$ групи ${}^{\kappa}\mathbb{Z}_{+}$ групою $\mathcal{S}_{\kappa}$ (теорема 4.1.16).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано такі результати:

1. Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ описано алгебричні властивості моноїда $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^n, \leqslant)$ з порядком добутку.
2. Доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ є дискретною і описано наріст при замиканні напівгрупи $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ в напівтопологічних напівгрупах.
3. Доведено, що гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа $\mathscr{IPF}(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною.
4. Для довільного нескінченного кардинала κ описано алгебричні властивості моноїда $\mathscr{IPF}({}^{\kappa}\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів частково впорядкованої множини $({}^{\kappa}\mathbb{N}, \leqslant)$ з порядком добутку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айзенштат, А.: Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейно упорядоченного множества. Сиб. матем. журн. **3**(2), 161–169 (1962).
2. Айзенштат, А.: Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств. Уч. зап. Ленинградского гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена **387**, 3–11 (1968).
3. Вагнер, В.: Обобщённые группы. ДАН СССР. **84**, 1119–1122 (1952).
4. Глускин, Л.: Полугруппы изотонных преобразований. УМН. **16**(5), 157–162 (1961).
5. Дорошенко, В.: Большинство полугрупп преобразований свободны. Матем. заметки. **87**(3), 464–467 (2010).
6. Дорошенко, В.: Про напівгрупи перетворень зліченних лінійно упорядкованих множин, які зберігають порядок. Укр. мат. журн. **61**(6), 723–732 (2009).
7. Ким, В.: О полугруппах изотонных преобразований частично упорядоченных множеств. УМН. **62**(5), 155–156 (2007).
8. Ким, В., Кожухов И.: Условия регулярности полугрупп изотонных преобразований счетных цепей. Фунд. и прикл. матем. **12**(8), 97–104 (2006).
9. Мальцев, А.: О включении ассоциативных систем в группы. Матем. сб. **31**, 136–151 (1939).
10. Скорняков, Л.: О моноидах изотонных отображений. Мат. сб. **165**(1), 50–68 (1984).
11. Сушкевич, А.: Теория действия как общая теория групп. Диссертация, Воронеж (1922).

12. Сушкевич, А.: Теория обобщенных групп. ГНТИ, Харьков-Киев (1937).
13. Тайманов, А.: О топологизации коммутативных полугрупп. Матем. заметки. **17**(5), 745–748 (1975).
14. Тайманов, А.: Пример полугруппы допускающей только дискретную топологию. Алгебра и логика. **12**(1), 114–116 (1973).
15. Шварц, Ш.: Характеры бикомпактных полугрупп. Czechosl. Math. J. **5**, 24–28 (1955).
16. Шварц, Ш.: К теории хаусдорфовых бикомпактных полугрупп. Czechosl. Math. J. **5**, l–23 (1995).
17. Abel, N. H.: Untersuchung der Funktionen zweier unabhängigen veränderlichen Größen x und y, wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f[z, f(x, y)]$ eine symmetrische Funktion von x, y und z ist. J. Reine Angew. Math. **1**, 11–15 (1826).
18. Andersen, O.: Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen. PhD Thesis, Hamburg, (1952).
19. Anderson, L., Hunter, R., Koch, R.: Some results on stability in semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. **117**, 521–529 (1965). doi: 10.2307/1994222
20. Bagley, R., Connell, E., McKnight, J.: On properties characterizing pseudo-compact spaces. Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 500–506 (1958). doi: 10.1090/S0002-9939-1958-0097043-2
21. Banakh, T., Dimitrova, S., Gutik, O.: The Rees-Suschkewitsch Theorem for simple topological semigroups. Мат. Студії. **31**(2), 211–218 (2009).
22. Banakh, T., Dimitrova, S., Gutik, O.: Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups. Topology Appl. **157**(18), 2803–2814 (2010). doi: 10.1016/j.topol.2010.08.020
23. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological polycyclic monoid. Algebra Discrete Math. **21**(2), 163–183 (2016).

24. Bardyla, S.: Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids. Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **13**, 21–28 (2016).
25. Bardyla, S.: On a semitopological α-bicyclic monoid. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **81**, 9–22 (2016).
26. Bertman, M., West, T.: Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups. Proc. Roy. Irish Acad. Sec. A. **76**,219–226 (1976).
27. Carruth, J., Hildebrant, J., Koch, R.: The Theory of Topological Semigroups. Marcel Dekker Inc., New York and Basel: Vol. I, pp. 224 (1983); Vol. II, pp. 196 (1986).
28. Catarino, P., Higgins, P.: The monoid of orientation-preserving mapping on a chain. Semigroup Forum. **58**, 190–206 (1999).
29. Chuchman, I., Gutik, O.: Topological monoids of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of the set of positive integers. Карпатські математичні публікації. **2**(1), 119–132 (2010).
30. Clifford, A., Preston, G.: The Algebraic Theory of Semigroups. Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I. Vol. I, 244 pp. (1963); Vol. II, 350 pp. (1967).
31. Dickson, L. E.: On semi-groups and the general isomorphism between infinite groups. Trans. Amer. Math. Soc. **6**, 205–208 (1905).
32. Doroshenko, V.: Generators and relations for the semigroups of increasing functions on $\mathbb{N}$ and $\mathbb{Z}$. Algebra Discr. Math. **4**, 1–15 (2005).
33. Eberhart, C., Selden, J.: On the closure of the bicyclic semigroup. Trans. Amer. Math. Soc. **144**, 115–126 (1969).
34. Engelking, R.: General Topology. 2nd ed. Heldermann, Berlin, (1989).
35. Faucett, W.: Topological semigroups and continua with cut points. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 748–756 (1955).
36. Faucett, W.: Compact semigroups irreducibly connected between two idempotents. Proc Amer. Math. Soc. **6**, 741–747 (1955).

37. Fernandes, V., Gomes, G., Jesus, M.: The cardinal and the idempotent number of various monoids of transformations on a finite chain. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **34**, 79–85 (2011).
38. Fernandes, V., Gomes, G., Jesus, M.: Congruences on monoids of transformations preserving the orientation on a finite chain. J. Algebra. **321**(3), 743–757 (2009).
39. Fernandes, V., Gomes, G., Jesus, M.: Congruences on monoids of order-preserving or order-reversing transformations on a finite chain. Glasgow Mathematical Journal. **47**, 413–424 (2005).
40. Fernandes, V., Gomes, G., Jesus, M.: Presentations for some monoids of injective partial transformations on a finite chain. Southeast Asian Bull. Math. **28**(5), 903–918 (2004).
41. Fernandes, V.: The monoid of all injective orientation preserving partial transformations on a finite chain. Comm. Alg. **28**, 3401–3426 (2000).
42. Fernandes, V.: Semigroups of order-preserving mappings on a finite chain: a new class of divisors. Semigroup Forum. **54**, 230–236 (1997).
43. Fihel, I., Gutik, O.: On the closure of the extended bicyclic semigroup. Карпатські математичні публікації. **3**:(2), 131–157 (2011).
44. Frobenius, G., Schur, I.: Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 209–217 (1906).
45. Garba, G.: On the idempotent ranks of certain semigroups of order preserving transformations. Port. Math. **51**, 185–204 (1994).
46. Gluskin, L., Schein, B., Šneperman, L., Yaroker, I.: Addendum to a survey of semigroups of continuous selfmaps Semigroup Forum **14**, 95–125 (1977).
47. Gomes, G., Howie, J.: On the ranks of certain semigroups of order-preserving transformations. Semigroup Forum. **45**, 272–282 (1992).
48. Green, J.: On the structure of semigroups. Ann. Math. **54**(2), 163–172 (1951).

49. Gutik, O., Maksymyk, K.: On semitopological interassociates of the bicyclic monoid. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **82**, 98–108 (2016).
50. Gutik, O., Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$. Eur. J. Math. **6**(1), 14–36 (2020).
51. Gutik, O., Mokrytskyi, T.: On the semigroup of order isomorphisms of principal filters of a power of the integers. In: Abstracts of the International Conference in Functional Analysys dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, p. 74. University of Lviv, Lviv, Ukraine, 18–23 September 2017.
52. Gutik, O., Pozdniakova, I.: On the monoid of monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ with cofinite domains and images, II. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **82**, 109–127 (2016).
53. Gutik, O., Pozdniakova, I.: On the monoid of monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ with cofinite domains and images. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **81**, 101–116 (2016).
54. Gutik, O., Pozdniakova, I.: Congruences on the monoid of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ with co-finite domains and images. Math. Methods and Phys.-Mech. Fields. **57**(2), 7–15 (2014); reprinted version: J. Math. Sci. **217**(2), 139–148 (2016).
55. Gutik, O., Pozdnyakova, I.: On monoids of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ with co-finite domains and images. Algebra Discr. Math. **17**(2), 256–279 (2014).
56. Gutik, O., Repovš, D.: Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ having cofinite domain and image. Stud. Sci. Math. Hungar. **48**(3), 342–353 (2011).
57. Gutik, O., Repovš, D.: On countably compact 0-simple topological inverse semigroups. Semigroup Forum. **75**(2), 464–469 (2007).

58. Gutik, O., Repovš, D.: On monoids of injective partial cofinite selfmaps. Math. Slovaca. **65**(5), 981–992 (2015).
59. Gutik, O., Repovš, D.: On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images. Georgian Math. J. **19**(3), 511–532 (2012).
60. Gutik, O.: Topological properties of Taimanov semigroups. Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **13**, 29–34 (2016).
61. Gutik, O.: On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **80**, 33–41 (2015).
62. Hildebrant, J., Koch, R.: Swelling actions of Γ-compact semigroups. Semigroup Forum. **33**(1), 65–85 (1986). doi: 10.1007/BF02573183
63. Hofmann, K. H.: Topological semigroups history, theory, applications. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver **78**, 9–59 (1976).
64. Hofmann, K. H.: Semigroups in the 19th century? A historical note. Theory of semigroups, Proc. Conf., Geifswald/GDR 1984, 44–55 (1984).
65. Hofmann, K. H.: Zur Geschichte des Halbgruppenbegriffs. Hist. Math. **19**(1), 40–59 (1992).
66. Hofmann, K. H.: A history of topological and analytical semigroups. A personal view. Semigroup Forum **61**(1), 1–25 (2000).
67. Hogan, J.: The α-bicyclic semigroup as a topological semigroup. Semigroup Forum. **28**(1–3), 265–271 (1984); New Ser. 12, Clarendon Press, Oxford, (1995).
68. Howie, J: Product of idempotents in certain semigroups of transformations. Proc. Edinburgh Math. Soc. **17**, 223–236 (1971).
69. Iseki, K.: On compact abelian semigroups. Michigan Math. J. **2**, 59–60 (1953–1954).
70. Klein, F.: Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen. Erlang. Ber. 1874 (1874).

71. Koch, R.: Remarks on primitive idempotents in compact semigroups with zero. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 828–833 (1954).
72. Laradji, A., Umar, A.: Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations. J. Algebra. **278**, 342–359 (2004).
73. Laradji, A., Umar, A.: Combinatorial results for semigroups of order-preserving full transformations. Semigroup Forum. **72**, 51–62 (2006).
74. Lawson, J. D.: Historical links to a Lie theory of semigroups. Seminar Sophie Lie **2**, 263–278 (1992).
75. Lawson, J. D.: The earliest semigroup paper? Semigroup Forum **52**(1), 55–60 (1996).
76. Lawson, J. D.: A tribute to Karl H. Hofmann on the occasion of his 75th birthday. Semigroup Forum **77**(1), 2–4 (2008).
77. Lawson, M.: Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries. World Scientific, Singapore, (1998).
78. Magill, K.:A survey of semigroups of continuous selfmaps. Semigroup Forum **11**, 189–282 (1975–1976).
79. McFadden, R., O'Carroll, L.: F-inverse semigroups. Proc. Lond. Math. Soc., III Ser. **22**, 652–666 (1971).
80. Mesyan, Z., Mitchell, J., Morayne, M., Péresse, Y.: Topological graph inverse semigroups. Topology Appl. **208**, 106–126 (2016).
81. Mokrytskyi, T.: On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$ with adjoined zero. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **87**, 37–45 (2019).
82. Mokrytskyi, T.: On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms of principal filters of a power of the positive integers with adjoined zero. In: Abstracts of the International Conference dedicated to 70th anniversary of Professor A. M. Plichko "Banach Spaces and their Applications", p. 85–86. Lviv, Ukraine, 26–29 June 2019.

83. Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\sigma(\mathbb{N}^\kappa)$. In: Abstracts of the International Algebraic Conference "At the End of the Year", p. 19. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 27–28 December, 2021.
84. Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\sigma\mathbb{N}^\kappa$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **93**, 14–33 (2022).
85. Molchanov, V.: Semigroups of mappings on graphs. Semigroup Forum. **27**(1), 155–199 (1983).
86. Munn, W.: Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups. Q. J. Math., Oxf. II. Ser. **17**, 151–159 (1966).
87. Numakura, K.: On bicompact semigroups. Math. J. Okayama Univ. **1**, 99–108 (1952).
88. Numakura, K.: On bicompact semigroups with zero. Bull. Yamagata Univ. (Natural Sc). **4**, 405–412 (1951).
89. Petrich, M.: Inverse semigroups. John Wiley & Sons, New York, (1984).
90. Rees, D.: On semi-groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. **36**, 387–400 (1940).
91. Ruppert, W.: Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory. Lect. Notes Math., **1079**, Springer, Berlin, (1984).
92. Saitô, T.: Proper ordered inverse semigroups. Pacif. J. Math. **15**(2), 649–666 (1965).
93. Schwarz, St.: Poznamka k teorii bikompaktnyh pologrup. Mat.-fiz. časop. **5**, 88–89 (1955).
94. de Séguier, J. A.: Théorie des groupes finis. Eléments de la théorie des groupes abstraits. Paris, Gauthier-Villars (1904).
95. Selden, A.: A nonlocally compact nondiscrete topology for the α-bicyclic semigroup. Semigroup Forum. **31**(3), 372–374 (1985).
96. Solomon, A.: Monoids of order preserving transformations of a finite chain. School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, Research

Report. 94–98 (1994).

97. Suschkewitsch, A.: Über die Matrizendarstellung der verallgemeinerte Gruppen. Зап. матем. т-ва, Харків, **6**, 27–38 (1933).
98. Suschkewitsch, A.: Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit. Math. Ann. **99**, 30–50 (1928).
99. Tamura, T.: On compact one-idempotent semigroups. Kodai Math. Sem. Repts. **1**, 17–21 (1954).
100. Wallace, A.: Cohomology, dimension and mobs. Summa Brasil. Math. **3**, 43–54 (1953).
101. Wallace, A.: The structure of topological semigroups. Bull. Amer. Math. Soc. **61**, 95–112 (1955).
102. Wallace, A.: The position of C-sets in semigroups. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 639–642 (1955).
103. Wallace, A.: One-dimensional homogeneous clans are group. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. **58**, 578–580 (1955).
104. Wallace, A.: Inverses in euclidean mobs. Math. J. Okayama Univ. **3**, 23–28 (1953).
105. Wallace, A.: A note on mobs, I. Anais. Acad. Brasil. Ci. **24**, 329–334 (1952).
106. Wallace, A.: A note on mobs, II. Anais. Acad. Brasil. Ci. **25**, 335–336 (1953).
107. Wallace, A.: Indecomposable semigroups. Math. J. Okayama Univ. **3**, l–3 (1953).

Додаток А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Список публікацій, в яких опубліковано основні результати дисертації:

(1) Mokrytskyi, T.: On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$ with adjoined zero. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **87**, 37–45 (2019).

(2) Gutik, O., Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^\kappa$. European Journal of Mathematics. **6**, 14–36 (2020). (Scopus, Q2)

(3) Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\sigma\mathbb{N}^\kappa$. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **93**, 14–33 (2022).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

(1) Gutik, O., Mokrytskyi, T.: On the semigroup of order isomorphisms of principal filters of a power of the integers. In: Abstracts of the International Conference in Functional Analysys dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, p. 74. University of Lviv, Lviv, Ukraine, 18–23 September 2017.

(2) Mokrytskyi, T.: On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms of principal filters of a power of the positive integers with adjoined zero. In: Abstracts of the International Conference dedicated to 70th anniversary of Professor A. M. Plichko

"Banach Spaces and their Applications", p. 85–86. Lviv, Ukraine, 26–29 June 2019.

(3) Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\sigma(\mathbb{N}^{\kappa})$. In: Abstracts of the International Algebraic Conference "At the End of the Year", p. 19. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 27–28 December, 2021.

Відомості про апробацію матеріалів дисертації:

(1) Міжнародна конференція з функціонального аналізу присвячена 125-річчю Стефана Банаха, м. Львів, 18–23 вересня 2017 року, форма участі — очна, усна доповідь.

(2) Всеукраїнський конкурс студентських наукових робіт із галузі знань "Математика та статистика. Прикладна математика (механіка)", м. Львів, 25 квітня 2018 року, форма участі — очна, усна доповідь.

(3) Міжнародна конференція "Банахові простори та їх застосування" присвячена 70-річчю А. М. Плічка, м. Львів, 26–29 червня 2019 року, форма участі — очна, усна доповідь.

(4) Міжнародна конференція "At the End of the Year", м. Київ, 27–28 грудня 2021 року, форма участі — дистанційна, усна доповідь.

(5) Семінар "Теорія полігонів і спектральні простори" у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2021, 2022, форми участі — очна/дистанційна, усні доповіді.

(6) Семінар "Топологічна алгебра" у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2017, 2019, 2021, форми участі — очна/дистанційна, усні доповіді.