

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ВАСИЛИШИН АНДРІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

**ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНІСТЬ НЕІДЕАЛЬНО
ПОЄДНАНИХ СТРУКТУР З ВНУТРІШНІМИ ТОНКИМИ
ВКЛЮЧЕННЯМИ**

113 «Прикладна математика»

11 «Математика та статистика»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ А.В. ВАСИЛИШИН

Науковий керівник: Звізло Іван Степанович, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Львів – 2023

АНОТАЦІЯ

Василишин А.В. Термомагнітоелектропружність неідеально поєднаних структур з внутрішніми тонкими включеннями. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 “Прикладна математика” (11 – Математика та статистика). – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2023.

Дисертація стосується дослідження термо-, магніто-, електронапружено-деформованого стану неідеально поєднаних кусково-однорідних термомагнітоелектропружних твердих тіл із внутрішніми тонкими стрічковими включеннями та тунельними отворами. Метою дисертаційної роботи є розробка математичних моделей та високопродуктивних аналітичних і аналітично-числових методів аналізу плоских фізико-механічних полів у кусково-однорідних (півпростори, біматеріали та їхні фрагменти) тілах зі змішаними термомеханічними крайовими умовами на їхніх поверхнях (зокрема й контактних) з урахуванням наявності тонких стрічкових включень (у т.ч. тріщин).

Об’єктом дослідження є кусково-однорідні ізотропні, анізотропні, п’єзоелектричні, термо- та магнітоелектропружні безмежні (півбезмежні) біматеріальні структури та тіла скінченних розмірів з неідеальним температурним контактом їхніх компонент, а також півпростори зі змішаними крайовими умовами на межі, що містять тунельні отвори та тонкі стрічкові включення (як частковий випадок тріщини). Предметом дослідження є двовимірний плоский (плоска деформація) термо-, магніто- електронапружено-деформований стани, розподіл та концентрація фізико-механічних полів у матеріальних півпросторах та біматеріальних тілах з тонкими стрічковими неоднорідностями за врахування змішаних термомеханічних крайових умов на внутрішніх межах та інтерфейсу високої теплопровідності у біматеріалі.

Необхідність створення нових методів аналізу термомагнітоелектропружних матеріалів зумовлена їх широким застосуванням у галузях мікроелектроніки, біотехнологій, енергетики, авіаційній та космічній техніці тощо. Важливі для практичного використання властивості цих матеріалів обумовлені здатністю внутрішньо поєднувати та перерозподіляти енергію декількох полів різної фізичної природи, що відіграє істотну роль у сучасному інженерному проєктуванні і на високотехнологічних виробництвах. З метою отримання унікальних властивостей термомагнітоелектричні матеріали виготовляють шляхом механічного поєднання піроелектричної та піромагнітної фаз, яке, зазвичай, виконується за допомогою зв'язуючого прошарку, що додатково впливає на термомагнітоелектропружні властивості такої мультиматеріальної композиції.

Крім цього, як і будь-які інші, термомагнітоелектропружні матеріали можуть містити різного роду неоднорідності (включення), зокрема, й тонкі. Останні можуть бути природними, цілеспрямовано впровадженими з метою зміни функціональних макро- та мікровластивостей, або ж виникати у процесі виробництва, обробки чи експлуатації. Також в елементах конструкцій чи деталях приладів можуть виникати різного роду структурні зміни, що в свою чергу у більшості випадків спричиняють появу тріщин. Наявність таких неоднорідностей нерідко призводить до виникнення концентрацій напружень та інших фізико-механічних полів і, відповідно, зниження надійності та експлуатаційних характеристик виробів.

У зв'язку з цим виникає необхідність розробки нових високопродуктивних аналітичних та аналітично-числових методів, що дали б можливість здійснити кількісну оцінку інтенсивності та розподілу фізико-механічних полів, що можуть взаємодіяти у кусково-однорідних мультиматеріальних тілах складної геометричної конфігурації із тріщинами, включеннями та іншими тонкими неоднорідностями. Крім цього, розрахункові моделі термомагнітоелектропружних середовищ повинні враховувати велике

різноманіття фізичних властивостей полів, що діють у них. Внаслідок цього постає необхідність розробки нових щораз складніших математичних моделей.

Дисертаційна робота складається із чотирьох розділів. У першому розділі здійснено огляд літературних джерел, у яких вивчаються питання теорії тонких неоднорідностей, а також висвітлюються основні методи дослідження тіл (анізотропних п'єзоелектричних, п'єземагнітних, термомагнітоелектропружних) із тонкими неоднорідностями. У результаті аналізу літературних джерел з'ясовано, що на даний час мало дослідженими є інтегральні формули та сингулярні інтегральні рівняння для математичного моделювання анізотропного термомагнітоелектропружного півпростору з включеннями, отворами, і тріщинами. До цього часу не було створено математичного апарату для розв'язування відповідної плоскої задачі тонкостінних включень з урахуванням усіх можливих змішаних механічних і теплових крайових умов на межі півпростору чи його фрагменту. Також не було створено вискоєфективних модифікацій числових методів типу граничних елементів для розв'язування відповідної задачі. На даний час не сформульовано підходу, який дав би можливість ефективно аналізувати розподіл фізико-механічних полів у наділених тонкостінними включеннями скінченних двокомпонентних тілах із інтерфейсом високої теплопровідності. Відтак існує необхідність у розробці цілісних математичних моделей і методів аналізу біматеріальних термомагнітоелектропружних тіл, які можуть містити як дефекти структури, так і цілеспрямовано введені тонкі прошарки, які змінюють властивості цих тіл. Досі не було побудовано схеми прямого методу граничних елементів для відповідних задач. Дуже мало досліджень стосується нескінченних та обмежених термомагнітоелектропружних біматеріальних тіл із тонкими неоднорідностями за наявності інтерфейсу високої теплопровідності.

У другому розділі дисертації містяться основні співвідношення термомагнітоелектропружності для анізотропних тіл, а також формули розширеного формалізму Стро, на основі якого у роботі побудовано інтегральні рівняння сформульованих задач. Також тут описано принцип спряження континуумів

різної вимірності та концепцію методу функцій стрибка, які застосовуються для моделювання тіл із тонкими неоднорідностями; наведені моделі тонкого магнітоелектропружного та термомагнітоелектропружного включень. Крім цього, описана схема модифікованого методу граничних елементів для розв'язування систем сингулярних інтегральних рівнянь плоских задач теорії тонкостінних включень.

У третьому розділі на основі концепції граничноелементного методу функцій стрибка створено підхід для дослідження задач термопружності неоднорідного анізотропного півпростору зі змішаними крайовими умовами на його межі. Для цього із використанням розширеного формалізму Стро та теорії функції комплексної змінної побудовано інтегральні формули типу Сомільяни та відповідні сингулярні інтегральні рівняння, ядра яких записано у явному вигляді і які не містять інтегрування по об'єму чи межі півпростору. За допомогою принципу спряження континуумів різної вимірності побудовано математичну модель анізотропного термомагнітоелектропружного півпростору зі змішаними крайовими умовами на його межі та системами внутрішніх тонких деформівних включень, отворів та тріщин. Отримані системи рівнянь розв'язувалися за допомогою модифікованого методу граничних елементів, завдяки чому отримано розв'язки нових задач для анізотропного півпростору зі змішаними крайовими умовами на його межі у разі, коли тіло також містить тонке прямолінійне включення, нахилене під кутом до поверхні матеріалу. Побудовано графічні залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень від відносної жорсткості та кутів нахилу тонкої неоднорідності. Здійснено числовий аналіз впливу крайових умов на межі півпростору на узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах включення. Також досліджено дію ефекту згину включення на значення цих коефіцієнтів.

У четвертому розділі розглянуто крайові задачі для термомагнітоелектропружного біматеріального простору чи його фрагменту з неідеальним тепловим та ідеальним магнітоелектромеханічним контактом складових, котрі, у свою чергу, можуть містити тунельні отвори, тріщини та

внутрішні тонкі стрічкові неоднорідності. На основі теорії функції комплексної змінної та розширеного формалізму Стро у замкнутій формі побудовано суто крайові інтегральні рівняння сформульованої задачі для відповідних задач теорії тонкостінних включень, у яких неідеальна термомагнітоелектромеханічна взаємодія компонент кусково-однорідного тіла врахована у ядрах цих рівнянь. В останні входять лише інтеграли уздовж ліній стрибків фізико-механічних полів (для тріщин чи тонких включень) та інтеграли уздовж можливої зовнішньої межі, яка виходить на межу півпростору, та берегів внутрішніх отворів. Розв'язування за допомогою модифікованого методу граничних елементів отриманих інтегральних рівнянь дало можливість побудувати числові розв'язки декількох нових задач для скінченних та безмежних біматеріальних тіл, що складаються з однакових та різних анізотропних термомагнітоелектропружних матеріалів, а також містять тонкі деформівні стрічкові включення. Побудовано графічні залежності узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень, електричних зміщень та магнітної індукції від параметра теплопровідності внутрішньої межі поділу матеріалів. Отримані результати показують, що інтерфейс високої теплопровідності істотно впливає на поля напружень у вершинах тонких включень. У тому числі він здійснює значний вплив на значення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності електричних зміщень.

На основі застосування розвинень комплексних потенціалів Стро у степеневі ряди, з подальшим задоволенням крайових умов на основі підходу найменших квадратів побудовано напіваналітичний обчислювальний метод аналізу фізико-механічних полів у біматеріальних структурах із неідеальним контактом складових.

Ключові слова: термомагнітоелектропружність, плоска задача, півпростір, біматеріал, інтерфейс високої теплопровідності, неідеальний тепловий контакт, тонке включення, тріщина, формалізм Стро, міжфазний прошарок, метод граничних елементів.

ABSTRACT

Vasylyshyn A.V. Thermomagnetoelasticity of imperfectly bonded structures with internal thin inclusions. – Manuscript copyright.

Thesis for the Doctor of Philosophy, speciality 113 “Applied Mathematics” (11 – Mathematics and statistics). – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2023.

The dissertation concerns the study of the thermo-, magnetic-, electro-elastic-deformed state of imperfectly connected piecewise homogeneous thermo-magneto-electroelastic solids with internal thin ribbon inclusions and tunnel holes. The purpose of the dissertation is the development of mathematical models and high-performance analytical and analytical-numerical methods for the analysis of flat physicomaterial fields in piecewise homogeneous (half-spaces, bimetals and their fragments) solids with mixed thermomechanical boundary conditions on their surfaces (in particular, contact ones) taking into account the presence thin ribbon inclusions (including cracks).

The need to develop new methods for analyzing thermomagnetoelastic materials arises from their widespread applications in fields such as microelectronics, biotechnology, energy, aviation, aerospace, and more. The practical utility of these materials is driven by their ability to internally combine and redistribute the energy of multiple fields of different physical natures, which plays a significant role in modern engineering design and high-tech manufacturing. To achieve unique properties, thermomagnetoelastic materials are fabricated by mechanically combining piezoelectric and piezomagnetic phases, typically through the use of a bonding layer, which, in turn, affects the thermomagnetoelastic properties of such multi-material compositions.

Furthermore, like any other materials, thermomagnetoelastic materials can contain various types of heterogeneities and inclusions, including thin ones. These inclusions can be either natural or intentionally introduced to alter the functional macro- and micro-properties, or they may arise during the manufacturing, processing,

and usage of the materials. Additionally, structural changes can occur in components of structures or device parts, which, in most cases, lead to the formation of cracks. The presence of such heterogeneities often results in the generation of stress concentrations and other physicomaterial fields, thereby reducing the reliability and operational characteristics of products.

Therefore, there is a need to develop new high-performance analytical and analytical-numerical methods that would allow for a quantitative assessment of the intensity and distribution of physicomaterial fields interacting within complexly shaped, piecewise-homogeneous multi-material solids with cracks, inclusions, and other thin heterogeneities. Additionally, computational models for thermomagneto-electroelastic materials must account for a wide range of physical properties of the fields acting within them, necessitating the development of more complex mathematical models.

The dissertation consists of four chapters. The first chapter provides a literature review focusing on the theory of thin inhomogeneities and highlights the main research methods for solids (including anisotropic piezoelectric, piezomagnetic, thermomagnetoelastic) with thin inhomogeneities. The analysis of the literature reveals that there is currently limited research on integral formulas and singular integral equations for modeling anisotropic thermomagnetoelastic half-spaces with inclusions, voids, and cracks. Up to this point, no solution has been developed for this problem that accounts for all possible mixed mechanical and thermal boundary conditions on the half-space boundary. Moreover, numerical methods such as the boundary element method have not been devised for solving this particular problem.

Currently, there is no formulated approach that would enable the analysis of the distribution of physicomaterial fields in finite two-component solids with a high thermal conductivity interface. There is also a need to develop comprehensive mathematical models and analysis methods for bimaterial thermomagnetoelastic solids, which can include structural defects and intentionally introduced thin layers altering the properties of these solids. A direct boundary element method scheme for these tasks has not been constructed to date. Additionally, there is very limited research

on infinite and bounded bimaterial thermomagnetoelastic solids with thin inhomogeneities in the presence of a high thermal conductivity interface.

The second chapter of the dissertation contains the fundamental relations of thermomagnetoelasticity for anisotropic materials, as well as formulas of the extended Stroh formalism, which are used to formulate integral equations in this work. Additionally, this chapter describes the principle of coupling continua of different dimensions and the concept of the jump function method, which are applied for modeling solids with thin inhomogeneities. Models for thin magnetoelastic and thermomagnetoelastic inclusions are presented. Furthermore, the chapter outlines the scheme of the boundary element method for solving systems of singular integral equations in two-dimensional problems.

In the third chapter, based on the concept of the boundary element method with the jump function approach, an approach is developed to investigate the problems of thermoelasticity in an inhomogeneous anisotropic half-space with mixed boundary conditions on its boundaries. To achieve this, Somigliana type integral formulas and corresponding singular integral equations are derived using the Stroh formalism and the theory of complex variable functions, with their kernels expressed explicitly. By applying the principle of coupling continua of different dimensions, a mathematical model is constructed for an anisotropic thermomagnetoelastic half-space with mixed boundary conditions on its boundaries and systems of internal thin deformable inclusions, holes, and cracks. The resulting systems of equations are solved using a modified boundary element method, which allows obtaining solutions for several new problems involving an anisotropic half-space with mixed boundary conditions on its boundaries, including cases with thin rectilinear inclusions inclined at an angle to the material's surface. Graphical dependencies of stress intensity factors on relative stiffness and inclination angles of the thin inhomogeneities are constructed. A numerical analysis is also conducted to investigate the influence of boundary conditions on the half-space boundaries on the stress intensity factors at the inclusion vertices. Additionally, the effect of the inclusion bending on the stress intensity factor values is examined.

In the fourth chapter, boundary value problems are considered for a thermomagnetoelastic bimaterial solid with imperfect thermal and perfect magneto-electromechanical contact between its components, which may, in turn, contain holes, cracks, and internal thin inhomogeneities. Using the theory of complex variable functions and the Stroh formalism, a closed-form formulation is developed for boundary integral equations of the formulated problem. These equations incorporate the imperfect thermomagneto-electromechanical interaction of the components of the piecewise homogeneous solids within their kernels. The integrals in these equations only include those along the lines of jumps in the physical field variables (for cracks or thin inclusions) and integrals along the external boundary and shores of internal voids. Solving these integral equations using the modified boundary element method has enabled the construction of numerical solutions for several new problems involving finite and infinite bimaterial bodies composed of identical and different anisotropic thermomagnetoelastic materials, including those containing thin deformable strip-like inclusions. Graphical dependencies are established for generalized stress intensity factors, electric displacements, and magnetic inductions as functions of the thermal conductivity parameter at the internal material interface. The obtained results demonstrate a significant influence of the high thermal conductivity interface on stress fields at the vertices of thin inclusions, including its substantial effect on the values of electric displacement intensity factors.

Based on the application of complex expansions of the Stroh potential in a power series followed by the satisfaction of boundary conditions using the least squares approach, a semi-analytical computational method has been developed for the analysis of physicomechanical fields in structures made of two materials with non-ideal contact between components.

Keywords: thermomagnetoelasticity, planar problem, half-space, bimaterial, high-temperature conducting interface, non-ideal thermal contact, thin inclusion, crack, Stroh formalism, interfacial layer, boundary element method.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Sulym H., Pasternak I., **Vasylyshyn A.**, Smal M. Mixed boundary value problem for an anisotropic thermoelastic half-space containing thin inhomogeneities. *Acta Mechanica et Automatica*. 2019. Vol. 13. P. 238–244 (Scopus, Q3).

DOI: <https://doi.org/10.2478/ama-2019-0032>

2. **Vasylyshyn A.**, Sulym H., Pasternak I. Thermomagnetoelasticity of Bimaterial Solids with High Temperature Conducting Interface and Thin Internal Inhomogeneities. *Structural Integrity*. 2020. Vol. 16, P. 261–267 (Scopus, Q4).

DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_47

3. Sulym H., **Vasylyshyn A.**, Pasternak I. Influence of imperfect interface of anisotropic thermomagnetoelastic bimaterial solids on interaction of thin deformable inclusion. *Acta Mechanica et Automatica*. 2022. 3. P. 242–249 (Scopus, Q3).

DOI: <https://doi.org/10.2478/ama-2022-0029>

4. Pasternak Ia.M., Sulym H.T., **Vasylyshyn A.V.**, Iasniy O.P. Influence of interfacial layers of high thermal conductivity on the distribution of physicomachanical fields in two-component structures. *Materials Science*. 2023. Vol. 58, № 6, P. 725–730 (Scopus, Q2).

DOI: <https://doi.org/10.1007/s11003-023-00722-1>

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. **Василишин А.**, Пастернак Я., Звізло І., Сулим Г. Термомагнітоелектропружність скінченних кусковооднорідних тіл за наявності сполучного прошарку та внутрішніх тонких включень.

Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики – 2023”. Львів, 2023. С. 179–18.

2. Sulym H., Paternak I., **Vasylyshyn A.** Influence of high temperature conducting interface on temperature induced fields in finite bimaterial solids. *International conference “Polish Conference on Crystal Growth”*. Gdansk, 2022.
3. **Василишин А.**, Звізло І. Вплив інтерфейсу високої теплопровідності у біматеріальних скінченних тілах. *Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2022”*. Львів, 2022.
4. **Василишин А.**, Сулим Г. Вплив інтерфейсу високої теплопровідності обмежених біматеріальних тіл на взаємодію внутрішніх тріщин. *“15-ий Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові”*. Львів, 2021. С. 36-37.
5. **Василишин А.** Періодичні задачі термомагнітоелектропружності тіл із тонкими включеннями. *Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2021”*. Львів, 2021.
6. **Василишин А.**, Пастернак Я., Термомагнітоелектропружність анізотропного біматеріалу із неідеальним магнітоелектромеханічним контактом складових. *Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2020”*. Львів, 2020.
7. **Василишин А.** Термопружність анізотропного півпростору зі змішаними крайовими умовами на межі та внутрішніми тонкими неоднорідностями. *Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2019”*. Львів, 2019.
8. **Василишин А.**, Сулим Г., Пастернак Я. Термомагнітоелектропружність біматеріальних тіл із тонкими включеннями та тріщинами за неідеального контакту фаз. *Друга міжнародна науково-технічна конференція пам’яті академіка НАН України В. І. Моссаковського “Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій (до сторіччя від дня народження)”*. Дніпро, 2019. С. 63–64.

9. Сулим Г., **Василишин А.** Термомагнітоелектропружність структурно неоднорідних біматеріальних тіл із неідеальним тепловим контактом складових. *10-а Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”*. Львів, 2019. С. 202–203.

Зміст

ВСТУП	17
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	25
1.1. Загальні питання теорії тонких включень	25
1.2. Основні методи дослідження тіл із тонкими неоднорідностями..	26
1.3. Включення і тріщини в анізотропних матеріалах	31
1.4. Включення і тріщини в анізотропних п'єзоелектричних, п'єземагнітних термомагнітоелектропружних матеріалах	32
1.5. Біматеріальні тіла	35
1.6. Біматеріальні тіла із неідеальним контактом складових	36
Висновки до розділу 1	38
РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕРМО-МАГНІТО- ЕЛЕКТРО-ПРУЖНОСТІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА. РОЗШИРЕНИЙ ФОРМАЛІЗМ СТРО	39
2.1. Рівняння рівноваги та балансу тепла	39
2.2. Дія електричного та магнітного полів	40
2.3. Конститутивні співвідношення	41
2.3.1. Теплопровідність та термопружність	41
2.3.2. Термомагнітоелектропружність	42
2.4. Формалізм Стро.....	43
2.5. Розширений формалізм Стро для врахування теплових ефектів..	47
2.6. Формула Коші. Теорема Сохоцького – Племелі	51
2.7. Теорема про голоморфність функцій комплексної змінної	51
2.8. Принцип спряження континуумів різної вимірності	52

2.9. Математична модель тонкого дефекту та умови взаємодії включення з середовищем	54
2.10. Поєднання принципу спряження та умов взаємодії у системі сингулярних інтегральних рівнянь	56
2.11. Структурно-модульний метод функцій стрибка	57
2.12. Модель тонкого магнітоелектропружного включення	58
2.13. Побудова моделі тонкого термомагнітоелектропружного включення	61
2.14. Побудова інтегральних рівнянь магнітоелектропружності на основі теореми взаємності	65
2.15. Побудова інтегральних рівнянь магнітоелектропружності на основі формалізму Стро	70
2.16. Особливість розв'язку інтегральних рівнянь магнітоелектропружності тіл із тонкими включеннями. Узагальнені коефіцієнти інтенсивності	73
2.17. Схема методу граничних елементів для розв'язування інтегральних рівнянь магнітоелектропружності тіл із тонкими неоднорідностями	76

РОЗДІЛ 3. ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНИЙ МЕТОД ФУНКЦІЙ СТРИБКА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ НЕОДНОРІДНОГО АНІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ ЗІ ЗМІШАНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ НА ЙОГО МЕЖІ

3.1. Побудова інтегральних подань комплексних потенціалів для анізотропного півпростору [179].....	81
3.1.1. Теплопровідність	83
3.1.2. Термопружність	84
3.2. Числові приклади [179]	90

	16
Висновки до розділу 3	94
РОЗДІЛ 4. ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНИЙ БІМАТЕРІАЛ З ІНТЕРФЕЙСОМ ВИСОКОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ	96
4.1. Постановка задачі [180].....	96
4.2. Побудова інтегральних подань для біматеріалу з неідеальним тепловим контактом складових [180, 186]	97
4.2.1. Теплопровідність	97
4.2.2. Термоелектропружність	106
4.3. Числові приклади	128
Висновки до розділу 4	148
СПИСОК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ.....	152
ДОДАТОК А.....	171

ВСТУП

Актуальність теми

На сьогоднішній день термомагнітоелектропружні матеріали (зокрема, піроелектричні, піромагнітні тощо) є основою створення нових інтелектуальних матеріалів та конструкцій мікро-електромеханічних систем, що самі підлаштовуються до режимів експлуатації, а відтак щораз ширше використовуються у сучасному високотехнологічному інженерному проектуванні і виробництві. Корисні властивості цих матеріалів обумовлені здатністю внутрішньо поєднувати та перерозподіляти енергію полів різної фізичної природи (переважно механічного, температурного, електричного та магнітного). Це відіграє важливу роль та далі має великі перспективи застосування у галузях мікроелектроніки, біотехнологій, енергетики, зброярства тощо. Без них практично неможливе створення приладів точної механіки, перетворювачів енергії, пристроїв точного і надточного позиціонування та ін. Такі вироби дають можливість продукувати давачі та сенсорні системи, що, в свою чергу, здатні в режимі реального часу діагностувати і контролювати внутрішній стан відповідних конструкцій.

З метою проектування бажаних властивостей термомагнітоелектричних матеріалів їх часто виготовляють за допомогою механічного поєднання піроелектричної та піромагнітної фаз, котрі поодиноці мають високі піроелектричні, п'єзоелектричні (наприклад, сегнетоелектрики) та піромагнітні і п'єзромагнітні модулі. Таке механічне поєднання фаз, зазвичай, виконується за допомогою тонкого зв'язуючого прошарку, що в свою чергу часто істотно впливає на термомагнітоелектропружні властивості такої мультиматеріальної композиції.

Як і будь які інші, такі термомагнітоелектропружні матеріали можуть містити й інші різної природи тонкі неоднорідності (включення). Вони можуть буди як природніми, так і цілеспрямовано впровадженими, з метою зміни функціональних макро- та мікро-властивостей. Причому можуть вони

перебувати як в ідеальному, так і в неідеальному контакті з основним матеріалом. Окрім включень під час виробництва, обробки та експлуатації в елементах конструкцій чи деталях приладів можуть виникати різного роду структурні зміни, що можуть спричиняти появу тріщин. Наявність неоднорідностей довільного типу спричиняє концентрацію напружень і, відповідно, зниження надійності та експлуатаційних властивостей виробів.

У зв'язку з цим виникає необхідність розробки нових високопродуктивних аналітичних та аналітично-числових методів, що дали би можливість здійснити кількісну оцінку інтенсивності та розподілу фізико-механічних полів, які можуть взаємодіяти, у тілах складної геометричної конфігурації із тріщинами, включеннями та іншими тонкими неоднорідностями за різних типів крайових умов та умов контакту складових. Крім цього, розрахункові моделі термомагнітоелектропружних середовищ повинні враховувати велику кількість фізичних властивостей, що діють у них, внаслідок чого постає необхідність розробки нових складніших математичних моделей.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дослідження за темою дисертації виконані в межах наукової бюджетної теми Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України “Математичні моделі та методи розрахунку процесів локального деформування структурно-неоднорідних тіл” (№ д/р 0121U109716, термін виконання: 2021–2023). Результати дисертації частково використані у науково-технічній розробці “Розробка дорожніх конструкцій і жорстких покриттів на автомобільних дорогах із використанням дисперсійного армування” (фінансувалася за кошти державного бюджету в межах конкурсу підтримки досліджень молодих вчених, Луцький національний технічний університет), де Васишин А.В. був виконавцем.

Метою дослідження є розробка математичних моделей та високопродуктивних аналітичних і аналітично-числових методів аналізу плоских (плоска деформація) фізико-механічних полів у кусково-однорідних (півпростори, біматеріали) тілах зі змішаними термомеханічними крайовими

умовами на поверхнях (зокрема й контактних), що також можуть містити тонкі включення та тріщини. Досягнення мети роботи передбачало виконання таких завдань:

- розробити підхід для отримання інтегральних формул типу Сомільяни та сингулярних інтегральних рівнянь для анізотропного термомагнітоелектропружного півпростору, що містить отвори та тонкі включення (як частковий випадок тріщини) за різних типів крайових умов на його межі;
- побудувати систему сингулярних інтегральних рівнянь задач для термопружного півпростору чи окремого його фрагменту зі змішаними крайовими умовами на межі та внутрішніми тонкими включеннями;
- отримати розв'язки нових задач для термопружного півпростору зі змішаними крайовими умовами на його межі та внутрішніми тонкими включеннями, шляхом розв'язування отриманих інтегральних рівнянь модифікованим методом граничних елементів;
- побудувати інтегральні формули типу Сомільяни, та відповідні системи сингулярних інтегральних рівнянь для термомагнітоелектропружного біматеріального тіла з неідеальним тепловим та ідеальним магнітоелектромеханічним контактом складових, що в свою чергу можуть містити порожнини й тонкі деформівні включення;
- отримати аналітичні та числові (шляхом розв'язування отриманих рівнянь модифікованим методом граничних елементів) розв'язки нових задач для термомагнітоелектропружного біматеріального тіла з інтерфейсом високої теплопровідності та внутрішніми тонкими неоднорідностями.

Об'єктом дослідження є кусково-однорідні ізотропні, анізотропні, п'єзоелектричні, термо- та магнітоелектропружні безмежні (півбезмежні) біматеріальні структури та тіла скінченних розмірів з неідеальним температурним контактом їх компонент, а також півпростори зі змішаними

крайовими умовами на межі, що містять тонкі включення (як частковий випадок тріщини).

Предметом дослідження є двовимірний плоский (плоска деформація) термо-, магніто- електронапружено-деформований стани, розподіл та концентрація фізико-механічних полів у матеріальних півпросторах та біматеріальних тілах з тонкими стрічковими неоднорідностями за врахування змішаних термомеханічних крайових умов на внутрішніх межі та інтерфейсу високої теплопровідності у біматеріалі.

Методи дослідження

У роботі використано загальні співвідношення лінійних теорій пружності, термо- і магнітоелектропружності; концепцію методу функцій стрибка, розширений формалізм Стро разом із теорією аналітичних функцій, та теорією функцій комплексної змінної для побудови крайових інтегральних рівнянь; концепція методу граничних елементів для числового розв'язування отриманих систем інтегральних рівнянь.

Наукова новизна отриманих результатів

У результаті здійснених досліджень отримано такі нові результати:

- із використанням розширеного формалізму Стро та теорії функції комплексної змінної розроблено аналітичний підхід для отримання сингулярних інтегральних рівнянь для анізотропного термомагнітоелектропружного півпростору, що містить циліндричні порожнини, тріщини чи тонкі деформівні включення;
- побудовано інтегральні формули типу Сомільяни для анізотропного термопружного півпростору з урахуванням усіх можливих змішаних температурних та механічних крайових умов на його межі;
- застосування до розв'язування отриманих для півпростору систем сингулярних інтегральних рівнянь модифікованого методу граничних елементів дало можливість розв'язати низку нових задач для термопружного півпростору зі змішаними крайовими умовами на його межі та системою внутрішніх тонких включень;

- отримано інтегральні формули та рівняння, що моделюють термомагнітоелектропружне біматеріальне тіло з неідеальним тепловим та ідеальним магнітоелектромеханічним контактом складових, що в свою чергу можуть містити тонкі деформівні включення;
- застосування модифікованого методу граничних елементів дало можливість із високою точністю розв'язувати задачі термомагнітоелектропружності для біматеріальних тіл з інтерфейсом високої теплопровідності та внутрішніми тонкими неоднорідностями;
- на основі застосування розвинень комплексних потенціалів Стро у степеневі ряди, з подальшим задовольнянням крайових умов на основі підходу найменших квадратів побудовано напіваналітичний обчислювальний метод аналізу фізико-механічних полів у біматеріальних структурах із неідеальним контактом компонентів;
- побудовані інтегральні рівняння дають можливість для їхнього розв'язування легко використовувати навіть довільну схему методу граничних елементів оскільки не містять у явній формі інтегралів по об'єму, по безмежній межі та по інтерфейсу біматеріалу.

Достовірність отриманих результатів забезпечується коректним застосуванням математичного апарату й апробованих рівнянь лінійних теорій пружності, термопружності, електропружності та термомагнітоелектропружності; контрольним розв'язуванням вивчених іншими дослідниками задач; зіставленням отриманих результатів у часткових і граничних випадках із вже відомими розв'язками інших авторів; відповідністю результатів розв'язування нових задач фізичній суті досліджуваних явищ.

Практичне та теоретичне значення отриманих результатів

У роботі викладено аналітичний підхід для отримання інтегральних формул типу Сомільяни та відповідних інтегральних рівнянь для анізотропного термопружного півпростору урахуванням усіх можливих змішаних температурних та механічних граничних умов на його внутрішній межі. Побудовано відповідну математичну модель. Отримані результати дають

можливість зробити висновок про значний вплив типу крайових умов на значення фізико-механічних полів біля вершин тонких неоднорідностей, що обов'язково необхідно враховувати при проєктуванні відповідних елементів конструкцій із анізотропних матеріалів.

Запропоновано метод розв'язування плоских (плоска деформація) задач термомагнітоелектропружності для скінченних та безмежних біматеріальних тіл, компоненти яких поєднані тонким сполучним прошарком (інтерфейсом) високої теплопровідності, та містять чутливі до впливу фізико-механічних полів тонкі включення. Завдяки використанню розширеного формалізму Стро і теорії функцій комплексної змінної побудовано інтегральні рівняння типу Сомільяни. Отримані результати, математичні моделі та аналітичні методи можуть бути використані при аналізі кусково-однорідних ізотропних, анізотропних, п'єзоелектричних, термо- та магнітоелектропружних безмежних (півбезмежних) біматеріальних структур та відповідних тіл скінченних розмірів з неідеальним контактом їх компонент, а також півпросторів зі змішаними крайовими умовами на внутрішній межі, що містять внутрішні тонкі включення та тріщини. Це має велике практичне значення, адже існує необхідність розробки нових високопродуктивних аналітичних та аналітично-числових методів, що дали б можливість оцінити розподіл фізико-механічних полів у конструкціях з таких матеріалів та дати оцінки їхньої міцності, експлуатаційного ресурсу, оптимізувати самі конструкції. Згадані матеріали внаслідок численних корисних властивостей мають значні перспективи застосування у різних галузях мікроелектроніки, робототехніки, біотехнологій, енергетики, зброярства тощо.

Особистий внесок здобувача

Усі викладені в роботі основні наукові результати отримані автором самостійно. У спільних публікаціях [153, 179, 180, 186] співавторам належить участь у постановці задач, виборі методів дослідження та обговоренні одержаних результатів. Автору належить математичне моделювання об'єкту дослідження, побудова інтегральних рівнянь на основі розширеного формалізму Стро, розробка комп'ютерного програмного забезпечення для числового аналізу

сформульованих задач, розрахунок числових прикладів, аналіз результатів, формулювання висновків.

Апробація результатів дисертації

Основні матеріали роботи доповідалися та обговорювалися на міжнародних наукових та науково-технічних конференціях і симпозиумах:

1. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики – 2023”. (Львів, 2023).
2. Міжнародна конференція “Polish Conference on Crystal Growth” (Гданськ, 2022).
3. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2022”. (Львів, 2022).
4. 15-ий Міжнародний симпозиум українських інженерів-механіків у Львові. (Львів, 2021).
5. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2021”. (Львів, 2021).
6. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2020”. (Львів, 2020).
7. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2019”. (Львів, 2019).
8. Друга міжнародна науково-технічна конференція пам’яті академіка НАН України В. І. Моссаковського “Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій (до сторіччя від дня народження)”. (Дніпро, 2019).
9. 10-а Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”. (Львів, 2019).

У повному обсязі дисертаційну роботу представлено та обговорено на науковому семінарі кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка.

Публікації

Основні результати дисертаційного дослідження опубліковані у 13 наукових працях, у тому числі: 3 наукових статтях у закордонних виданнях, включених до Web of Science та Scopus; 1 – у науковому фаховому виданні України, що входить до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus); 9 – у збірниках матеріалів міжнародних та національних наукових та науково-технічних конференцій і симпозіумів.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, 4 розділів, що містять 28 рисунки, висновків та переліку літератури із 197 найменувань. Загальний обсяг дисертації складає 173 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації становить 123 с. Автор висловлює подяку науковому керівнику Звізлу Івану Степановичу за постійну увагу та всебічну підтримку під час виконання роботи. Автор щиро вдячний за наукові обговорення та всебічне сприяння доктору фізико-математичних наук, професору Георгію Теодоровичу Сулиму та доктору фізико-математичних наук, професору Пастернаку Ярославу Михайловичу.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Загальні питання теорії тонких включень

У сучасному інженерному проєктуванні та на передових високотехнологічних виробництвах, зокрема, при розробці інноваційних приладів точної механіки, виникає необхідність в пошуку нових технологічних підходів та матеріалів, що дозволяють досягти більшого рівня продуктивності та функціональності. Одна з тенденцій розвитку – це створення і використання смарт-матеріалів. Останні на даний час проєктують у вигляді структурно неоднорідних композитних матеріалів. Вони поєднують у собі традиційні технології з новими досягненнями науки та техніки.

Проте, як і звичайні, смарт матеріали можуть містити різного роду порожнини та неоднорідності, зокрема й тонкі. Природа останніх може бути різною. Вони можуть виникати у процесі виробництва чи внаслідок експлуатації та виявлятися у формі дефектів (тріщини і тонкі включення) або можуть бути впровадженні навмисно, з ціллю зміцнення (накладки, підкріплення) [6, 191], або операційного контролю стану конструкційного елемента (сенсори, тензодатчики) чи можуть з'являтися у процесі “заліковування” порожнин та тріщин [38]. Поблизу вершин тонких неоднорідностей, зазвичай, виникають значні концентрації напружень та інших фізичних полів, що може негативно впливати на їхній розподіл у тілі. Крім цього, як свідчить досвід, саме в таких місцях можуть виникати процеси пластичного деформування чи навіть руйнування. У книзі [137] досліджено вплив неметалевих включень і порожнин на втому матеріалів, а також наведено результати відповідних експериментальних досліджень. Ясній П.В. у монографії [93] досліджуючи багатоплановий вплив попереднього пластичного деформування на механічні властивості конструкційних матеріалів та їхню міцність довів, що значну роль при цьому відіграють дрібні включення.

Необхідно також зазначити, що значне місце у напрямку збільшення довговічності та покращення експлуатаційних властивостей конструкційних елементів посідають ін'єкційні технології заліковування тріщин [38, 39, 72, 74, 75], які полягають у комбінуванні технологій заліковування тріщин, з використанням різних процесів зміцнювання. В залежності від механічної та теплових характеристик наповнювача отримуємо задачу розрахунку напруженого стану тіла з включеннями [38, 147]. Анізотропія властивостей матеріалу може суттєво вплинути на результати досліджень цього класу задач, тому її слід враховувати.

1.2. Основні методи дослідження тіл із тонкими неоднорідностями

Над створенням методів розв'язку задач для тіл з тонкими неоднорідностями працювали Бурак Я.Й. [8, 9], Гачкевич О.Р. [13], Говоруха В.Б. [15, 16, 115], Кушнір Р.М. [27], Лобода В.В. [36, 37], Підстригач Я.С. [61]. Цій проблематиці присвячені оглядові праці Гриліцького Д.В., Сулима Г.Т. та Піскозуба Й.З. [18, 144, 168], Попова Г.Я. [87] та інших. Слід виділити також монографію Сулима Г.Т. [79] у якій проведено поглиблений огляд бібліографічних джерел, що стосуються тематики включень у деформованих тілах, а також створено засадничий метод функцій стрибка, що дозволяє розв'язувати задачі тонких неоднорідностей з урахуванням анізотропії термофізичних властивостей матеріалів.. У монографії також наведено приклади розв'язання конкретних задач для однорідних і шаруватих тіл, що містять одне, декілька чи періодичні системи тонких включень. Крім цього детально досліджено граничні випадки, коли термопружні включення перетворюються на тріщини чи абсолютно жорсткі дефекти. Також у цій праці Сулим Г.Т. виділяє п'ять основних підходів аналізу тіл з тонкими неоднорідностями: 1) загальнотеоретичний; 2) числовий; 3) експериментальний; 4) асимптотичний; 5) розробка нових теорій неідеального контакту.

Перший підхід до аналізу тіл з тонкими включеннями був запропонований Підстригачем Я. С. у роботі [61]. Згідно з ним, один із розмірів включення

істотно зменшують. Потім деякі властивості включення усереднюються за його товщиною, а деякі взагалі відкидаються. Після цього включення вилучається із розгляду, а його вплив описується певними умовами неідеального контакту на деякій лінії, що зазвичай вибирають на серединній поверхні вилученого із розгляду дефекту. Цей метод застосовувався у працях Андрейківа О.Є., Панасюка В.В. [58], Лободи В.В. [35], Михаськіва В.В., Хая М.В. [40], Кушніра Р.М., Николишина М.М., Осадчука В.А. [32], Опанасовича В.К. [44, 46] та інших. Цей підхід використовувався також у монографії Божидарника В.В., Андрейківа О.Є. і Сулима Г.Т. [6]. Автори розробили модель стабільного та нестабільного росту втомної тріщини, яка дозволяє прогнозувати характеристики тріщиноотривкості при статичному та циклічному навантаженні з урахуванням історії навантаження. Ясній П.В. у монографії [93] розглядав вплив попереднього одноразового та циклічного пластичного деформування матеріалу на тріщиноотривкість конструкційних сплавів. Автор проаналізував вплив попередніх деформацій на швидкість росту втомних тріщин та опір крихкому руйнуванню.

Числовий підхід до розв'язання задач із тонкими неоднорідностями, полягає у застосуванні прямих числових методів таких як, метод скінченних елементів, метод граничних елементів тощо. Його у своїх працях використовували Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. [53, 54, 86, 178], Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А. [89], Cavalcante M.A. [105], Telles J. [182], Härkengård G [118].

Пастернаку Я. М. вдалося поєднати метод функцій стрибка з методом граничних елементів [55]. В результаті цього, було отримано граничноелементний метод стрибка, за допомогою якого можна ефективно та з високою точністю розв'язувати двовимірні задачі (антиплоску, плоску та осесиметричну) для тонких включень та тріщин довільної форми.

Метод скінченних елементів використовувався для розрахунку напружень і деформацій у пружно-пластичних пластинах із порожнинами та включеннями в умовах плоскої деформації. Для аналізу твердих тіл, що містять жорсткі та м'які включення у роботі Leite L.G.S. [129] застосовувався метод граничних елементів.

У праці Liu Y.J.[133], автор застосовує новий метод граничних елементів для аналізу тривимірних задач армованих волокнами композитів на основі моделі жорсткого включення. Дослідження Meguid S.A. [134], пов'язане з розробкою та впровадженням нового методу скінченних елементів, який застосовується до задач про взаємодію кругових неоднорідностей у неоднорідних твердих тілах під дією механічних та температурних навантажень. Стаття Кухарського В.М., Савули Я.Г., Мандзака Т.І. [31] присвячена розробці математичних моделей та чисельних схем для розв'язання задач поширення речовини в середовищі з тонкими включеннями, коли фізико-хімічні властивості включення можуть відрізнитися від властивостей середовища. Для розв'язання відповідної задачі використовувався модифікований метод скінченних елементів.

F. Garcia-Sanchez та ін. [112] для аналізу задач теорії тріщин розробили змішаний граничноелементний підхід, що використовує як сингулярні, так і гіперсингулярні інтегральні рівняння. Liew K.M., Sun Y., та Kitipornchai S. [130] запропонували безелементний підхід, який використовує гіперсингулярні інтегральні рівняння та метод найменших квадратів для моделювання тріщин у п'єзоелектричних матеріалах.

Експериментальний підхід застосовувався в роботах [111, 184]. Гриліцький Д.В., Сорокати́й Ю.І. [17] для дослідження напружено-деформованого стану використовували механічні і оптичні методи дослідження. Також експериментальні методи використовував Сорокати́й Ю.І. [78] при дослідженні термопружного стану пластини з тонким пружним включенням. У монографії Божидарника В.В., Андрейківа О.Є. і Сулима Г.Т. [6] основна увага зосереджена на механіці руйнування неперервно армованих композиційних матеріалів при статичних і циклічних навантаженнях. Самі ж композити розглядаються як анізотропні матеріали, механічні властивості яких усереднено відповідають характеристикам структурно неоднорідних композитів. Тут уперше в тісному взаємозв'язку запропоновані основні критерії, розрахункові моделі неперервно армованих композитів з тріщинами, математичні методи їх реалізації та

експериментальні методики для визначення базових характеристик таких матеріалів

Асимптотичний підхід полягає використанні асимптотичних методів дослідження напруженого стану біля вершин тонких неоднорідностей та межі поділу матеріалів. Так Кунець Я.І. в праці [30] для обґрунтування явища різкої зміни поведінки напружено-деформованого стану в околі м'якого гострокінцевого тонкостінного включення, коли його модуль зсуву прямує до нуля застосовував метод зрощування асимптотичних розвинень.

Слід звернути увагу на праці, у яких вивчаються плоскі задачі для тіл з тріщинами та щілинами, які є частковим випадком загального класу дефектів у вигляді тонких неоднорідностей і можуть бути описані математичним розрізом із заданими крайовими умовами на його поверхні. Серед них можна виділити роботи Андрейківа О.Є. [2], Кушніра Р.М., Николишина М.М., Осадчука В.А [32, 47], Назарчука З.Т. [43], Панасюка В.В., Саврука М.П., Дацишин О.П. [56, 70, 71] та інших вчених.

Основні результати, отримані в рамках теорії тонких включень в ізотропних тілах, були отримані за допомогою трьох методів: методу функцій стрибка [79], лінійного розвинення комплексних потенціалів [44, 45] та розривних розв'язків [68, 69].

У роботі [82] вперше розв'язано задачу для тонкого пружного включення у повному спектрі зміни його властивостей, а також знайдено асимптотичний розподіл напружень та переміщень в околі вершини такого включення. Запропоновано ефективний числово-аналітичний метод аналізу пружної рівноваги необмеженого пружного середовища з тонкостінним включенням довільної жорсткості. Проведено числове дослідження впливу тонкостінного включення різної відносної жорсткості на напружений стан композиції

Задачу про рівновагу неоднорідного двовимірного пружного тіла з двома взаємодіючими тонкими жорсткими включеннями було розглянуто у роботі Lazarev N. [126]. Тонкі жорсткі включення в пружному середовищі досліджено також у монографії, Kanaun S.K., Levin V.M. [124]. Податні ж включення у

просторі детально розглянуті у монографіях Панасюка В.В. та Силованюка В.П. [57, 76].

Особливі методи, такі як метод функцій стрибка [79], є ефективними при розв'язанні задач, пов'язаних із лінійними включеннями у нескінченних середовищах, смугах, півплощинах та інших аналогічних задачах. Це стосується ситуацій, в яких геометричні параметри та спосіб навантаження дозволяють сформулювати зручну для подальших обчислень систему інтегральних рівнянь. Щодо викривлених включень, то у праці Опанасовича В.К. і Бернара І.І. [4], досліджено включення, розташоване вздовж дуги кола. Також дугове включення розглядалося у статті Франченко Ю.С. [91].

Прямі числові методи [48, 83, 84], такі як методи скінченних елементів або метод граничних елементів, дозволяють вирішувати широкий спектр задач для тіл із включеннями різної форми, як прямолінійними, так і вигнутими. Однак ефективність таких методів залежить від якості моделювання тонких елементів тіла [83, 84]. Для дослідження напруженого стану тіл із тонкими криволінійними включеннями ефективним є поєднання прямих чисельних методів із спеціальними підходами. Зокрема, у роботах Винницької Л. І. [11, 12] модель тонкого податного згину включення була введена в метод скінченних елементів. У роботі Leite L.G.S. [127] на основі методу граничних елементів була побудована модель тіла з тонким жорстким включенням, яке описується стрижневими скінченними елементами. Ця модель була розвинута в роботі [128] для випадку податних включень.

У статті Padron L.A. [142] застосовано метод скінченних елементів у комбінації з методом граничних елементів. У ній свої моделюються (модель згину стрижнів) за допомогою першого, тоді як ґрунт моделюється за допомогою методу граничних елементів як напівнескінченне, ізотропне, однорідне, лінійне, в'язкопружне середовище. Riederer K. [166] для дослідження впливу загвинчених у породу утримуючих болтів (модель розтягу-стиску стрижнів) також застосовує метод граничних елементів.

Застосовуючи метод граничних елементів при моделюванні тонких включень, вплив останніх на основний матеріал часто замінюють силами, розподіленими з певною густиною уздовж лінії, що лежить на серединній поверхні включення (метод масових сил). Проте внаслідок використання цього підходу у моделях не вдається описати поперечне деформування включення, яке супроводжується стрибком переміщень при переході через серединну поверхню. Саме тому згадані вище моделі тонких неоднорідностей потребують розвитку в напрямі урахування також і поперечної податності матеріалу включення, зокрема, із використанням підходів методу функцій стрибка. Крім того, є важливим врахування впливу можливої викривленості форми тонкого включення.

1.3. Включення і тріщини в анізотропних матеріалах

Дослідження тонких пружних включень в анізотропних тілах є складним завданням. Це пов'язано з математичною громіздкістю даного типу задач та складністю розв'язання породжених ними інтегральних рівнянь. У монографії Божидарника В.В., Андрейківа О.Є., Сулима Г.Т. [6] можна знайти вичерпний огляд відповідних літературних джерел. Розв'язування відповідних задач за допомогою інтегральних рівнянь з використанням комплексних потенціалів Лехніцького представлено у роботі [33]. Застосування формалізму Стро до розв'язання задач для анізотропних середовищ із абсолютно жорсткими включеннями можна знайти у працях [22, 183]. Крім цього, формалізм Стро також використовувався у роботі [110], у якій наведено моделі податного та пружного прямолінійних включень в анізотропному матеріалі та розв'язки відповідних задач для безмежного середовища.

У монографії Сулима Г.Т. [79] описано теорію тонких пружних прямолінійних включень в анізотропних середовищах. Ці включення можуть мати різні механічні властивості, від абсолютно податливих (тріщини) до абсолютно жорстких. Перші результати в цьому напрямі були отримані в

роботах [48, 81]. У граничних випадках, коли включення є податливим або абсолютно жорстким, отримано інтегральні рівняння для опису їхньої поведінки.

У статті Tewary V.K., Garboczi E.J., [185] представлено напіваналітичний вираз для ефективної тепло/електропровідності двовимірних анізотропних твердих тіл, таких як фосфорен, що містять металеві включення довільної форми та розміру. У роботі [103] розглядається моделювання теплопровідності анізотропних багатошарових композитів, зміцнених включеннями. Jiang D. [120] досліджує в'язкі включення в анізотропних матеріалах. Мікромеханічне моделювання анізотропної теплопровідності еліпсоїдальних, армованих включеннями, композитних матеріалів викладено у Bonfoh N. [135]. Pan та Amadei [145] розробили ефективний гранично-елементний підхід до розв'язування задач для пружних анізотропних біматеріальних твердих тіл, що містять тріщини і тонкі включення.

1.4. Включення і тріщини в анізотропних п'єзоелектричних, п'єзомагнітних термомагнітоелектропружних матеріалах

Вивченню п'єзоелектричних та магнітоелектропружних тіл з тонкими неоднорідностями присвячено праці Бурака Я.Й. [7, 9, 10], Гачкевича О.Р. [13], Дробенко О.Р., Кондрата В.Ф., Мольченко Л.В., Партона В.З. [28, 49], Підстригача Я.С. [67], Терлецького Р.Ф. [87, 88], Улітко А.Ф. [90], та ін. Крім цього задачі електро- та магнітопружності для тіл із тріщинами вивчаються у монографіях Калоєрова С.А. [26], Партона В.З. [49], Bardzokas D. [95], Qin Q.H. [161].

Дослідження п'єзоелектричних та магнітоелектропружних тіл є складним завданням через необхідність врахування взаємодії полів різної фізичної природи. Навіть при тому, що вчені досягли значних успіхів у створенні математичних моделей для розв'язання таких задач, проблема впливу тонких неоднорідностей на експлуатаційні властивості таких матеріалів потребує поглибленого вивчення. Зокрема, такі неоднорідності, як тріщини, чужорідні

прошарки, електропровідні чи непровідні включення можуть призвести до відмови або механічного руйнування конструкційних компонентів.

У той час як механіка руйнування пружних тіл є лінійною, теорія тріщин у п'єзоелектричних та магнітоелектропружних матеріалах є нелінійною. Це пов'язано з тим, що діелектрична та магнітна проникності газу, що заповнює тріщину, відмінна від нуля. У літературі виділяють проникну, напівпроникну та непроникну тріщини. Для проникної тріщини, електричний та магнітний потенціали разом із нормальними складовими електричного зміщення та магнітної індукції є неперервними при переході через поверхню дефекту [136, 173]. У цьому випадку реалізується ідеальний електричний і магнітний контакт. У напівпроникній тріщині стрибок електричного чи магнітного потенціалів на дефекті пропорційний до добутку розкриття на нормальну складову електричного зміщення чи магнітної індукції. Для непроникної тріщини електричне зміщення та магнітна індукція на поверхнях дефекту є заданими (зазвичай, нульовими). У цьому випадку магнітний та електричний контакт поверхонь відсутній.

Відтак, завжди існують додаткові, переважно нелінійні, зв'язки між розкриттям тріщини та розривами електричного та магнітного потенціалів на ній. Так у статті [116] досліджено механіку руйнування твердих п'єзоелектричних тіл та запропоновано нову електричну граничну умову, в якій враховується електрична проникність повітря всередині тріщини. У статті [195], за допомогою формалізму Стро отримано розв'язок для еліптичної порожнини в нескінченному двовимірному магнітоелектропружному середовищі, що піддається рівномірно прикладеним комбінованим магнітоелектромеханічним навантаженням, уздовж поверхні порожнини. Запропоновано метод розрахунку реального розкриття тріщини при комбінованих магнітоелектромеханічних навантаженнях.

Електропровідні та феромагнітні тіла з тріщинами за дії зовнішнього електромагнітного поля досліджені у роботах Андрейківа О.Є., Назарчука З.Т., Скальського В.Р. та ін. [1, 29]. Пан Е.у праці [144] розробив метод граничних

елементів для аналізу плоских задач руйнування п'єзоелектричних тіл. Цей метод не використовує підобластей, що робить його більш ефективним, ніж традиційний метод граничних елементів. Rajapakse R. та Xu X.L. [167] запропонували модифікований метод граничних елементів, який використовує сингулярні інтегральні рівняння для моделювання тріщин у п'єзоелектричних матеріалах. У цьому методі тріщина моделюється, як сукупність розподілених уздовж лінії дислокацій. У роботах [151, 158], одержано крайові інтегральні рівняння типу Сомільяни для граничноелементного аналізу анізотропного термоелектропружного біматеріалу з отворами, тріщинами і тонкими включеннями.

Qin і Mai у працях [162, 163] розробили спеціальний метод граничних елементів для вивчення термоелектропружних біматеріальних тіл, що містять множинні тріщини. У праці [175] представлено безсітковий підхід до аналізу магнітоелектропружних твердих тіл з тріщинами, що знаходяться під дією теплового навантаження.

Дотримуючись теорії лінійної п'єзоелектрики Shindo Y. [173] з колегами розглянули задачу визначення сингулярних напружень і електричних полів в ортотропній п'єзоелектричній керамічній смузі, що містить тріщину Гріффітса при поздовжньому зсуві. У статті Ang W. T. [94] розглянуто плоску статичну задачу електропружності з довільно розташованими плоскими електрично напівпроникними тріщинами. У роботі [108] Denda M. розробив метод граничних елементів для аналізу напівпроникної тріщини з використанням чисельного підходу функції Гріна. У статті [125] досліджено, як пружні та електричні поля взаємодіють поблизу вершини тріщини на межі двох п'єзоелектричних тіл, а також отримано формули, які описують, як розвивається тріщина в такому середовищі. В [149] Park S.B., та Sun C.T. на основі результатів досліджень показали, що розширенню тріщини може сприяти або перешкоджати електричне поле, залежно від напрямку поля. Досліджено критерії руйнування п'єзоелектричних матеріалів. Для розрахунку швидкості вивільнення енергії

механічної деформації було введено метод закриття тріщини разом із аналізом кінцевих елементів.

1.5. Біматеріальні тіла

У більшості випадків смарт матеріали є біматеріальними та мультиматеріальними структурами. Їхня будова дозволяє поєднувати в одному матеріалі енергію чотирьох фізичних полів: механічного, теплового, електричного та магнітного. Так п'єзоелектричні матеріали, основною властивістю яких є зв'язок між електричними та механічними полями, все ширше використовують в інтелектуальних електромеханічних системах у якості сенсорів, перетворювачів енергії та актуаторів [3, 77, 90, 169]. Також, їх часто впроваджуються в конструкційні елементи для контролю прикладеного навантаження. У працях [131, 132] було запропоновано використовувати композити на основі п'єзоелектричних матриць із п'єзоволокнами. Це дає можливість створювати прилади з великою кількістю додаткових функцій, зокрема, моніторингу внутрішнього стану та перетворення енергії [132]. У працях [24, 109, 114, 187], вивчалися магнітоелектричні композити. У них магнітоелектричний ефект виникає внаслідок механічної взаємодії п'єземагнітної та п'єзоелектричної компонент. Особливістю цих матеріалів є наявність у них взаємозалежних, але різних за своєю природою властивостей [104, 117, 136, 148, 170, 171]. Це дозволяє застосовувати їх у якості сенсорів, чутливих до зовнішнього впливу. Наприклад, вони можуть використовуватися для вимірювання температури, тиску, деформації тощо. Деякі з «розумних» матеріалів можуть самостійно реагувати та адаптуватися під дію зовнішнього впливу, як, для прикладу, біметалеві пластини в найпростіших регуляторах температури. Так у роботах Мусія Р.С. та ін. [41, 138], запропоновано математичну модель для визначення температурного поля біметалевої пластини з плоскопаралельними межами при короткотривалому індукційному нагріванні нестационарним електромагнітним полем. Також у [139] сформульована динамічна задача термомеханіки для біметалевого шару з під впливом

однорідного нестационарного електромагнітного поля. Чисельно аналізується тепловий напружений стан, несуча спроможність та контактні властивості розглянутого шару під впливом електромагнітних імпульсів мікросекундної тривалості.

Ефективним методом при розв'язуванні задач термоелектропружності для біматеріалів є підхід, заснований на методах теорії функції комплексної змінної і формалізму Стро. Його широко використовують під час аналізу анізотропних [119, 183], п'єзоелектричних [160, 183, 193] та магнітоелектропружних [160] твердих тіл з наскрізними тріщинами та включеннями. У дослідженні Liang J., Han J., Wang B., Shany D. [122] використовується формалізм Стро для отримання загального розв'язку для нескінченного анізотропного п'єзоелектричного середовища з еліптичним включенням. На основі формалізму Стро в [197] також досліджено термомагнітоелектропружність розгалужених тріщин у термомагнітоелектропружному матеріалі. Наведено функції Гріна для взаємодії тріщини та термомагнітоелектропружної дислокації. У роботі Qing-Hua Qin [164] розглядаються термомагнітоелектропружні задачі для різноманітних дефектів, вбудованих у нескінченну матрицю. Отримано функції Гріна в закритій формі для дефекту в нескінченному магнітоелектропружному твердому тілі. В ролі дефекту може виступати еліптичний отвір, тріщина Гріффітса або жорстке включення.

1.6. Біматеріальні тіла із неідеальним контактом складових

Створення біматеріалів дуже часто відбувається шляхом механічного поєднання в єдине ціле піроелектричних (сегнетоелектричних) та магнітострикційних (п'єзомагнітних) матеріалів. У результаті цього процесу, на межі контакту, як правило, виникає тонкий з'єднувальний міжфазний шар [99-102, 135]. У [98] Benvensite Y. для моделювання поверхні між двома анізотропними матеріалами використовує спеціально розроблені умови на межі поділу матеріалів. Навіть за майже ідеального електромеханічного контакту, контакт тепловий часто буває неідеальним і навіть дуже тонкий чужорідний

прошарок може істотно впливати на температурні поля всередині структурно неоднорідного тіла. А це, у свою чергу, унаслідок теплового розширення та існування піроелектричного та піромагнітного ефектів може зумовити істотну концентрацію окремих фізико-механічних полів у такому мультиматеріальному тілі. У зв'язку із цим у науковій літературі виділяють два типи неідеального теплового контакту складових біматеріалу [98]. Якщо при переході через поверхню контакту нормальна складова теплового потоку є неперервною функцією, а температура має пропорційний до нормальної складової теплового потоку стрибок, то такі умови називають слабкою теплопровідністю (інтерфейс типу Капіци) [123, 140]. Доволі велика кількість наукових праць розглядає задачі такого типу. Скажімо, задача термопружності анізотропного біматеріалу із умовою слабкої теплопровідності та ідеальним механічним контактом складових була розв'язана у праці [150]. Крім цього, у роботі [151] були отримані крайові інтегральні рівняння анізотропної термоелектропружності для біматеріального тіла з інтерфейсом типу Капіци. У праці Wang X., Pan E., [190] були одержані функції Гріна для температури у біматеріальних тілах з інтерфейсом типу Капіци. У статті Yvonnet J. [194] роботі запропоновано загальний та ефективний метод для моделювання даного інтерфейсу який базується на розширеному методі скінченних елементів у поєднанні з методом множини рівнів (set levels-method). У статті Nan Ce-Wen, Xiao-Ping Li, Birringer R. [106] розглянута обернена задача для композитів з інтерфейсом низької теплопровідності. Сулим Г.Т. і Пастернак Я.М. у статі [151] застосовують формалізм Стро та методи функцій комплексної змінної для виведення інтегральних формул і граничних інтегральних рівнянь анізотропної термоелектропружності для біматеріалу інтерфейсом типу Капіци.

Якщо ж при переході через межу контакту вважати температуру неперервною функцією, а нормальний тепловий потік таким, що має пропорційний до похідної від температури стрибок, то таким чином можна створити найпростішу математичну модель інтерфейсу високої теплопровідності [98]. Незважаючи на те, що даний тип інтерфейсу теж на свій

спосіб істотно впливає на розподіл у смарт матеріалах температури, досліджень, що стосувалися би цієї проблеми для термомагнітоелектропружних біматеріальних є менше. У статті Quang H.L., Phan T.L., Bonnet G. [165]. Cheng H., Torquato S. [107] розглядають задачу теплопровідності композитного матеріалу, що складається з масивів сфер з контактом високої теплопровідності.

Висновки до розділу 1

У результаті аналізу літературних джерел з'ясовано, що на даний час мало дослідженими є інтегральні формули та сингулярні інтегральні рівняння для математичного моделювання анізотропного термомагнітоелектропружного півпростору з включеннями, отворами, і тріщинами. До цього часу не було побудовано розв'язку даної задачі з урахуванням усіх можливих змішаних механічних і теплових крайових умов на межі півпростору. Також не було створено числових методів типу граничних елементів для розв'язування відповідної задачі.

На даний час не сформульовано підходу, який дав би можливість аналізувати розподіл фізико-механічних полів у скінченних двокомпонентних тілах із інтерфейсом високої теплопровідності. Також існує необхідність у розробці цілісних математичних моделей і методів аналізу біматеріальних термомагнітоелектропружних тіл, які можуть містити як дефекти структури, так і цілеспрямовано введені тонкі прошарки, які змінюють властивості цих тіл. Досі не було побудовано схеми прямого методу граничних елементів для відповідних задач. Дуже мало досліджень стосується нескінченних та обмежених термомагнітоелектропружним біматеріальних тіл із тонкими неоднорідностями за наявності інтерфейсу високої теплопровідності. У даний час цього питання стосуються лише поодинокі роботи. Усе це дало можливість сформулювати мету дисертаційного дослідження.

РОЗДІЛ 2.

ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕРМО-МАГНІТО-ЕЛЕКТРО- ПРУЖНОСТІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА. РОЗШИРЕНИЙ ФОРМАЛІЗМ СТРО

2.1. Рівняння рівноваги та балансу тепла

Розглянемо деформівне тверде тіло \mathfrak{B} , обмежене поверхнею $\partial\mathfrak{B}$, з яким пов'язана нерухома прямокутна система координат $Ox_1x_2x_3$. Окрім зовнішнього навантаження, що передається через поверхню $\partial\mathfrak{B}$ тіла, на нього можуть також діяти об'ємні сили, що характеризуються вектором \mathbf{f} з компонентами f_i . Напруження від дії зовнішнього навантаження, розподілені на поверхні $\partial\mathfrak{B}$, характеризуються вектором \mathbf{t} із компонентами t_i . Згідно з [33, 183] у цьому випадку рівняння рівноваги для даного тіла можна записати у наступному вигляді:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0. \quad (2.1)$$

Тут і надалі у формулах прийняте правило Айнштайна [183] підсумовування за індексом, що повторюється. Кома в індексних позначеннях відповідає диференціюванню за зазначеною після коми координатою, тобто, $\sigma_{ij,j} = \sum_j \partial\sigma_{ij}/\partial x_j$.

Компоненти вектора напружень на поверхні $\partial\mathfrak{B}$ задаються наступним чином:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j, \quad (2.2)$$

де σ_{ij} – компоненти симетричного тензора напружень, n_j – компоненти зовнішньої нормалі \mathbf{n} до поверхні $\partial\mathfrak{B}$ тіла.

Внаслідок дії прикладеного навантаження, точки даного тіла, як правило, зміщуються одна відносно одної. При цьому переміщення точки тіла відносно її початкового положення описує вектор переміщення \mathbf{u} з компонентами u_i . Мала

деформація тіла в околі даної точки характеризується симетричним тензором ε_{ij} малої деформації Коші, компоненти якого означені виразами

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.3)$$

Повертання елементарного об'єму тіла як жорсткого цілого у кожній його точці задане асиметричним ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$) тензором

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (2.4)$$

Вектор густини теплового потоку \mathbf{h} повинен задовольняти рівняння теплового балансу [119, 141]

$$\operatorname{div} \mathbf{h} - f_h \equiv h_{i,i} - f_h = 0, \quad (2.5)$$

де f_h густина розподілених за об'ємом тіла джерел (стоків) тепла. Густина теплового потоку h_n на поверхні тіла $\partial \mathfrak{B}$ визначатиметься наступним чином

$$h_n = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = h_j n_j. \quad (2.6)$$

Якщо тіло \mathfrak{B} складається з двох частин \mathfrak{B}_1 та \mathfrak{B}_2 , які ідеально поєднані уздовж поверхонь $S_1 \in \partial \mathfrak{B}_1$ та $S_2 \in \partial \mathfrak{B}_2$, тоді умови ідеальної механічної взаємодії та нерозривності цих частин у відповідних множинах точок на ділянках відповідних поверхонь S_1 та S_2 мають вигляд

$$\mathbf{t}^{(1)} = -\mathbf{t}^{(2)}, \quad \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}, \quad h_n^{(1)} = -h_n^{(2)}, \quad \theta^{(1)} = \theta^{(2)}. \quad (2.7)$$

Тут $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$ – значення температури на відповідних ділянках.

2.2. Дія електричного та магнітного полів

Розглянемо випадок, коли на тіло, крім теплового та механічного навантажень, діють ще й електричне і магнітне поля. Вважатимемо, що матеріал тіла є діелектриком і не проводить електричний струм. За теоремою Гауса рівняння балансу для стаціонарного електричного поля в діелектрику мають вигляд [73]

$$\operatorname{div} \mathbf{D} - q \equiv D_{i,i} - q = 0. \quad (2.8)$$

Тут \mathbf{D} – вектор електричного зміщення з компонентами D_i ; q – густина вільних електричних зарядів. Поверхнева густина ρ зв'язаних зарядів на поверхні тіла $\partial\mathfrak{B}$ [73]

$$\rho = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = -D_j n_j. \quad (2.9)$$

Напруженість електричного поля \mathbf{E} у конкретній точці тіла характеризує силу, з якою це поле діє на одиничний електричний заряд. Електричне поле в речовині є потенціальним, а його напруженість означена залежністю [73]

$$E_i = -\phi_{,i}, \quad (2.10)$$

де ϕ – електричний потенціал.

Аналогічно до (2.8) співвідношення для вектора магнітної індукції \mathbf{B} записують у вигляді [73, 160]

$$\operatorname{div} \mathbf{B} + b_m \equiv B_{i,i} + b_m = 0, \quad (2.11)$$

де b_m – об'ємна густина постійного електричного струму. Для діелектриків вона дорівнює нулю. При цьому магнітна індукція B_n на поверхні тіла задається залежністю

$$B_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = B_i n_i. \quad (2.12)$$

Статичне магнітне поле в речовині також є потенціальним, а тому згідно [73] напруженість магнітного поля \mathbf{H} визначається через його потенціал ψ так:

$$H_i = -\psi_{,i} \quad (2.13)$$

Для випадку, коли тіло \mathfrak{B} складається з двох частин \mathfrak{B}_1 та \mathfrak{B}_2 , умови ідеальної електромагнітної взаємодії \mathfrak{B}_1 та \mathfrak{B}_2 на ділянках відповідних поверхонь $S_1 \in \partial\mathfrak{B}_1$ та $S_2 \in \partial\mathfrak{B}_2$ відповідних поверхонь мають вигляд [183], [73]

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= -\rho^{(2)}, \phi^{(1)} = \phi^{(2)}; \\ B_n^{(1)} &= -B_n^{(2)}, \psi^{(1)} = \psi^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.3. Конститутивні співвідношення

2.3.1. Теплопровідність та термopружність

Нехай початкова температура тіла не змінюється і на нього не діють електричні та магнітні поля. Тоді у випадку лінійної задача теорії пружності

анізотропного тіла конститутивні співвідношення записуються наступним чином [33, 183]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{km}. \quad (2.15)$$

Тут C_{ijkl} – компоненти симетричного тензора пружних сталей. Індeksi цих компонентів можна розбити на дві пари та замінити останні одним індексом за таким правилом: $11 \leftrightarrow 1$; $22 \leftrightarrow 2$; $33 \leftrightarrow 3$, 23 ; $32 \leftrightarrow 4$; 13 , $31 \leftrightarrow 5$; 12 , $21 \leftrightarrow 6$. У цьому випадку пружні сталі матеріалу можна сформувати у матрицю $C = [C_{ij}]$ розміром 6×6 . Даний спосіб запису носить назву запису Фойгта.

Для лінійної задачі термопружності анізотропного тіла, коли температура тіла буде змінюватися порівняно із початковою, конститутивні співвідношення у лінеаризованому випадку запишуться так:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{km} - \beta_{ij} \theta. \quad (2.16)$$

Рівняння плоскої стаціонарної теплопровідності (закон Фур'є) можна подати [119, 141]:

$$h_i = -k_{ij} \theta_{,j}. \quad (2.17)$$

Тут θ – зміна температури порівняно з відліковою; k_{ij} – коефіцієнти теплопровідності; $\beta_{ij} = C_{ijkm} \alpha_{km}$ ($i, j, k, m = 1, \dots, 3$) – модулі теплового розширення (коефіцієнти теплових напружень); α_{ij} – коефіцієнти теплового розширення. Тензори з компонентами, k_{ij} , α_{ij} та β_{ij} вважаються симетричними.

2.3.2. Термомагнітоелектропружність

Конститутивні співвідношення лінійної термоелектропружності відповідно до [24, 25, 160] записуються наступним чином

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{pij} E_p - h_{pij} H_p - \beta_{ij} \theta, \\ D_i &= e_{ikm} \varepsilon_{km} + \kappa_{ip} E_p + \gamma_{ip} H_p - \chi_j \theta, \\ B_i &= h_{ikm} \varepsilon_{km} + \gamma_{ip} E_p + \mu_{ip} H_p - \nu_j \theta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

де h_{ijk} – п'єзомагнітні сталі, μ_{ij}, γ_{ij} – магнітна та електромагнітна проникності матеріалу, причому $\mu_{ij} = \mu_{ji}, \gamma_{ij} = \gamma_{ji}$; e_{pij} – п'єзоелектричні сталі; κ_{ij} –

діелектричні сталі матеріалу, ν_j , χ_j – піромагнітні та піроелектричні коефіцієнти. Рівняння (2.1), (2,5) і (2,8) і конститутивні співвідношення (2.16), (2.17) з урахуванням формул (2.18) та умов симетрії тензорів κ_{ij} , γ_{ij} , μ_{ij} можна звести до такого загального вигляду [50, 152, 154, 160].

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkm} \tilde{u}_{k,m} - \tilde{\beta}_{ij} \theta. \quad (2.19)$$

Якщо ж підставити (2.19) у рівняння (2.1), (2.8) та (2.11) отримаємо:

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{f}_i \equiv \tilde{C}_{ijkm} \tilde{u}_{k,jm} + \tilde{f}_i - \tilde{\beta}_{ij} \theta_{,j} = 0. \quad (2.20)$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= u_i, \quad \tilde{u}_4 = \phi, \quad \tilde{u}_5 = \psi; \quad \tilde{f}_i = f_i, \quad \tilde{f}_4 = -q, \quad \tilde{f}_5 = b_m; \\ \tilde{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{4j} = D_j, \quad \tilde{\sigma}_{5j} = B_j; \\ \tilde{C}_{ijkm} &= C_{ijkm}, \quad \tilde{C}_{ij4m} = e_{mij}, \quad \tilde{C}_{4jkm} = e_{jkm}, \quad \tilde{C}_{4j4m} = -\kappa_{jm}, \\ \tilde{C}_{ij5m} &= h_{mij}, \quad \tilde{C}_{5jkm} = h_{jkm}, \quad \tilde{C}_{5j5m} = -\mu_{jm}, \quad \tilde{C}_{4j5m} = -\gamma_{jm}, \quad \tilde{C}_{5j4m} = -\gamma_{jm}; \\ \tilde{\beta}_{ij} &= \beta_{ij}, \quad \tilde{\beta}_{4j} = -\chi_j, \quad \tilde{\beta}_{5j} = \nu_j \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Причому, компоненти розширеного тензора магнітоелектричних сталей володіють такою властивістю симетрії [50, 152]

$$\tilde{C}_{ijkl} = \tilde{C}_{klij}. \quad (2.22)$$

2.4. Формалізм Стро

Формалізм Стро [176] є ефективним і зручним підходом при розв'язанні двовимірних задач термо-, магніто- електропружності анізотропних тіл. [119, 160, 183]. З його допомогою, для двовимірних полів, що залежать лише від координат x_1 та x_2 , можна подати однорідний розв'язок рівнянь рівноваги (2.20) у наступній формі [96, 119, 160, 183, 193]

$$\tilde{u}_k = a_k F(z), \quad z = x_1 + px_2. \quad (2.23)$$

Тут a_k та p – є комплексними сталими, які повинні бути якимось чином визначені; $F(z)$ – довільна аналітична функція від аргументу z , яка залежить від крайових умов заданих на межі області зайнятої тілом.

У випадку відсутності об'ємних сил та вільних зарядів вираз (2.20) можна записати

$$\tilde{C}_{ijkl}\tilde{u}_{k,jm} = 0 \quad (2.24)$$

Продиференціюємо (2.23) за змінною x_m :

$$\tilde{u}_{k,m} = a_k \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_m} = a_k (\delta_{m1} + p\delta_{m2}) F'(z) \quad (2.25)$$

Тут $F'(z) = dF(z)/dz$. Диференціюючи (2.25) ще раз по x_j , та підставляючи отриманий вираз у (2.24), можемо записати рівняння, для визначення невідомих комплексних сталих a_k та p :

$$\tilde{C}_{ijkm} (\delta_{m1} + p\delta_{m2}) (\delta_{j1} + p\delta_{j2}) a_k = 0. \quad (2.26)$$

Тут δ_{ij} – символ Кронекера, який рівний нулю, якщо $i \neq j$ і дорівнює одиниці коли $i = j$. А тому (2.26) можна переписати

$$\left\{ \tilde{C}_{ijkm} + p(\tilde{C}_{i1k2} + \tilde{C}_{i2k1}) + p^2 \tilde{C}_{i2k2} \right\} a_k = 0. \quad (2.27)$$

Введемо позначення

$$\tilde{C}_{i1k1} = Q_{ik}, \tilde{C}_{i1k2} = \tilde{C}_{k2i1} = R_{ik}, \tilde{C}_{i2k2} = T_{ik} \quad (2.28)$$

і перепишемо (2.27) наступним чином

$$\left\{ Q_{ik} + p(R_{ik} + R_{ki}) + p^2 T_{ik} \right\} a_k = 0. \quad (2.29)$$

Останнє рівняння можна записати у матричній формі [183]

$$\left\{ \mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2 \mathbf{T} \right\} \mathbf{a} = 0. \quad (2.30)$$

Згідно (2.22) матриці \mathbf{Q} та \mathbf{T} в (2.30) є симетричними. Для різних типів задач, розміри цих матриць будуть різними. Так у задачах термопружності розмірність \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{T} буде 3x3; електропружності – 4x4; магнітоелектропружності – 5x5.

Рівняння (2.28) має нетривіальний розв'язок, якщо

$$\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2 \mathbf{T} = 0. \quad (2.31)$$

Підставляючи (2.23) у (2.19), компоненти розширеного тензора напружень $\tilde{\sigma}_{ij}$ можна подати

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkm} (\delta_{m1} + p\delta_{m2}) a_k F'(z) = (\tilde{C}_{ijk1} + p\tilde{C}_{ijk2}) a_k F'(z). \quad (2.32)$$

Використовуючи позначення (2.28), (2.32) можна переписати

$$\tilde{\sigma}_{i1} = (Q_{ik} + pR_{ik})a_k F'(z), \tilde{\sigma}_{i2} = (R_{ki} + pT_{ik})a_k F'(z). \quad (2.33)$$

Вираз (2.29) можна переписати у дещо іншому вигляді:

$$(R_{ki} + pT_{ik})a_k = -\frac{1}{p}(Q_{ik} + pR_{ik})a_k. \quad (2.34)$$

Введемо новий вектор \mathbf{b} наступним чином:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{R}^T + p\mathbf{T})\mathbf{a} = -\frac{1}{p}(\mathbf{Q} + p\mathbf{R})\mathbf{a}. \quad (2.35)$$

Крім цього, введемо у розгляд розширену функцію напружень

$$\tilde{\varphi}_i = b_i F(z). \quad (2.36)$$

У векторній формі (2.36)

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{b}F(z). \quad (2.37)$$

Тепер (2.33) можна записати:

$$\tilde{\sigma}_{i1} = -\tilde{\varphi}_{i,2}, \tilde{\sigma}_{i2} = \tilde{\varphi}_{i,1}. \quad (2.38)$$

Зважаючи на властивість парності напружень $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, є очевидним, що складові φ_i не є незалежними, а пов'язані таким співвідношенням:

$$\tilde{\varphi}_{1,1} + \tilde{\varphi}_{2,2} = 0. \quad (2.39)$$

Вираз (2.35) можна подати у вигляді [183]

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

де \mathbf{I} – одинична матриця. Оскільки матриці \mathbf{Q} і \mathbf{T} симетричні, формулу (2.40) можна подати у вигляді задачі на власні значення [183]

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\xi} = p\boldsymbol{\xi}, \mathbf{N}^T\boldsymbol{\eta} = p\boldsymbol{\eta}, \quad (2.41)$$

де

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_1^T \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{N}_1 = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T, \mathbf{N}_2 = \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{N}_2^T, \mathbf{N}_3 = \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^T - \mathbf{Q} = \mathbf{N}_3^T. \quad (2.43)$$

Правий $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ та лівий $\boldsymbol{\eta}_\beta$ власні вектори, обчислені для власних значень p_α , p_β , нормують умовою [183]

$$\xi_\alpha^T \boldsymbol{\eta}_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.44)$$

Рівняння (2.41) у випадку магнітоелектропружних задач породжує 10 компонент. Усі власні значення p_α та власні вектори \mathbf{a}_α ($\alpha=1,\dots,5$) матриці \mathbf{N} є парами комплексно спряжених величин [55, 119]. Тому їх можна відсортувати у такому вигляді

$$\text{Im } p_\alpha > 0, p_{\alpha+5} = \bar{p}_\alpha, \xi_\alpha = \bar{\xi}_{\alpha+5}, \mathbf{a}_{\alpha+5} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha, \mathbf{b}_{\alpha+5} = \mathbf{b}_\alpha \quad (\alpha=1,\dots,5). \quad (2.45)$$

Якщо припустити, що p_α різні, то загальний розв'язок буде суперпозицією десяти розв'язків отриманих з (2.26) та (2.39):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= \sum_{\alpha=1}^5 \{a_\alpha F_\alpha(z_\alpha) + \bar{a}_\alpha F_{\alpha+5}(\bar{z}_\alpha)\}, \\ \tilde{\varphi}_i &= \sum_{\alpha=1}^5 \{b_\alpha F_\alpha(z_\alpha) + \bar{b}_\alpha F_{\alpha+5}(\bar{z}_\alpha)\}, \quad (i=1,\dots,5). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Тут F_α ($\alpha=1,\dots,5$) комплексні потенціали Стро, і

$$z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2. \quad (2.47)$$

Щоб розширені переміщення $\tilde{\mathbf{u}}$ і функції напружень $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ були дійсними, візьмемо

$$F_{\alpha+5} = \bar{F}_\alpha. \quad (2.48)$$

З (2.46) матимемо [160, 183, 193]:

$$\tilde{u}_i = 2\text{Re} \sum_{\alpha=1}^5 \{A_{i\alpha} F_\alpha(z_\alpha)\}, \quad \tilde{\varphi}_i = 2\text{Re} \sum_{\alpha=1}^5 \{B_{i\alpha} F_\alpha(z_\alpha)\}. \quad (2.49)$$

Рівність (2.49) можна також записати у вигляді

$$\tilde{\mathbf{u}} = 2\text{Re}\{\mathbf{A}\mathbf{f}(z_*)\}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = 2\text{Re}\{\mathbf{B}\mathbf{f}(z_*)\}, \quad (2.50)$$

де $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5]$, $\mathbf{f}(z_*) = [F_1(z_1), \dots, F_5(z_5)]^T$

Після об'єднання векторів функцій переміщення і напруження в один вектор-стовпець, залежність (2.45) можна подати наступним чином:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(z_*) \\ \bar{\mathbf{f}}(z_*) \end{Bmatrix}. \quad (2.51)$$

У випадку задач теорії пружності анізотропного тіла підхід Стро цілком еквівалентний до підходу Лехніцького С.Г. [33]. Відповідне доведення подане у роботі Barnett D.M. та Kirchner H.O.K. [97]. Перевагою формалізму Стро є його матрична форма та використання умов ортогональності (2.44). Зокрема, записавши останні у вигляді [183]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{A}^T \\ \bar{\mathbf{B}}^T & \bar{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Або

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{B} &= \mathbf{I} = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{B}}; \\ \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{0} = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{A} + \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

на основі (2.50) легко обчислити значення комплексних потенціалів Стро через дійсні розширені функції переміщень $\tilde{\mathbf{u}}$ та напружень $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$.

$$\mathbf{A}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(z_*). \quad (2.54)$$

Співвідношення (2.52) та (2.41) дають можливість отримати таку діагоналізацію матриці \mathbf{N} [183]:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{A}^T \\ \bar{\mathbf{B}}^T & \bar{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

де $\mathbf{P} = \text{diag}[p_\alpha]$.

2.5. Розширений формалізм Стро для врахування теплових ефектів

Розглянемо плоске температурне поле, в якому відсутнє теплоперенесення уздовж осі Ox_3 , тобто $\theta_{,3} \equiv 0$. У цьому випадку за відсутності розподілених джерел тепла рівняння (2.5) та (2.17) для теплопровідності зводяться до однорідного диференціального рівняння другого порядку

$$k_{ij} \theta_{,ij} = 0. \quad (2.56)$$

Відповідно до [119, 183] розв'язок (2.56) можна подати у вигляді

$$\theta = 2\text{Re}\{g'(z_t)\}, \quad z_t = x_1 + p_t x_2, \quad (2.57)$$

де $g'(z_t)$ - деяка аналітична функція комплексної змінної z_t , p_t – комплексна стала (теплове власне значення) з додатною уявною частиною, що є коренем характеристичного для (2.56) рівняння

$$k_{22}p_t^2 + (k_{21} + k_{12})p_t + k_{11} = 0. \quad (2.58)$$

Той факт, що теплота завжди переходить від більш нагрітих тіл до менш нагрітих, вказує на те, що розв'язки рівняння (2.58) не можуть бути дійсними. Тобто є одна пара комплексно спряжених значень p_t, \bar{p}_t , і нехай p_t в (2.57) має додатну уявну частину. Підставляючи (2.57) в (2.56), компоненти вектора густини теплового потоку можна записати у вигляді

$$h_i = -2\text{Re}\{(k_{i1} + p_t k_{i2})g''(z_t)\} \quad (2.59)$$

або у векторній формі

$$\mathbf{h} = -2\text{Re}\{(\mathbf{k}_1 + p_t \mathbf{k}_2)g''(z_t)\}, \quad (2.60)$$

де

$$\mathbf{h} = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix}, \mathbf{k}_1 = \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{Bmatrix}, \mathbf{k}_2 = \begin{Bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{Bmatrix}. \quad (2.61)$$

З (2.59) можна записати функцію теплового потоку:

$$\mathcal{G} = 2k_t \text{Im}\{g'(z_t)\}, \quad k_t = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}. \quad (2.62)$$

А компоненти вектора густини теплового потоку h_i [119, 183],

$$h_1 = -\mathcal{G}_2, \quad h_2 = \mathcal{G}_1. \quad (2.63)$$

Тепер на основі (2.62) та (2.57) можна отримати наступний зв'язок між функцією $g'(z_t)$ температурою θ і функцією теплового потоку \mathcal{G} .

$$g'(z_t) = \frac{1}{2} \left(\theta + i \frac{\mathcal{G}}{k_t} \right). \quad (2.64)$$

У випадку відсутності масових сил та вільних зарядів ($\bar{f}_i \equiv 0$) система рівнянь (2.20) для термопружної рівноваги зводиться до лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$\tilde{C}_{ijkm} \tilde{y}_{k,jm} - \tilde{\beta}_{ij} \theta_{,j} = 0 \quad (2.65)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\tilde{C}_{ijkm}\tilde{u}_{k,jm} = 0 \quad (2.66)$$

має вигляд (2.49). Частковий розв'язок рівняння (2.65) будемо шукати у вигляді [119, 183]

$$\tilde{u}_i = c_i g(z_t) \quad (2.67)$$

Підставляючи (2.67) у (2.65) отримаємо рівняння для визначення вектора \mathbf{c} .

$$\{\mathbf{Q} + p_t(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p_t^2 \mathbf{T}\} \mathbf{c} = \boldsymbol{\beta}_1 + p_t \boldsymbol{\beta}_2, \quad (2.68)$$

де

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \{\tilde{\beta}_{i1}\}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \{\tilde{\beta}_{i2}\}. \quad (2.69)$$

Оскільки переміщення є дійсною функцією, то повний розв'язок рівнянь (2.65) запишемо у вигляді дійсної частини суми однорідного (2.49) та часткового неоднорідного (2.67) розв'язків [153].

$$\tilde{u}_i = 2\text{Re} \left\{ \sum_{a=1}^5 A_{ia} F_a(z_a) + c_i g(z_t) \right\}, \quad (2.70)$$

Або у матричній формі [119, 183]

$$\tilde{\mathbf{u}} = 2\text{Re} \{ \mathbf{A}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{c}g(z_t) \}. \quad (2.71)$$

Подібним чином, компоненти розширеного тензора напружень $\tilde{\sigma}_{ij}$ можна виразити за допомогою функцій напруження φ_i виведених у (2.38). Згідно [183, 119] розширену функцію напружень можна записати:

$$\tilde{\varphi}_i = 2\text{Re} \left\{ \sum_{a=1}^5 B_{ia} F_a(z_a) + d_i g(z_t) \right\}. \quad (2.72)$$

У матричній формі (2.72) можна подати [119, 183],

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = 2\text{Re} \{ \mathbf{B}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{d}g(z_t) \}. \quad (2.73)$$

Використовуючи (2.68), (2.73) (2.38) та (2.19) вектор \mathbf{d} можна пов'язати з \mathbf{c} наступним чином:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{R}^T + \tau \mathbf{T}) \mathbf{c} - \boldsymbol{\beta}_2 = -\frac{1}{\tau} (\mathbf{Q} + \tau \mathbf{R}) \mathbf{c} + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\beta}_1. \quad (2.74)$$

Рівняння (2.68) та (2.74) також часто записують наступним чином [119, 183]:

$$\mathbf{N}\zeta = \mu_t \zeta + \gamma, \quad \zeta = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}, \quad \gamma = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{N}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

Тепер використовуючи умови ортогональності (2.52) можна побудувати такий зв'язок між комплексними потенціалами Стро та розширеними вектор-функціями переміщень і напружень:

$$\mathbf{f}(z_*) = \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{A}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} - \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{u}}^t - \mathbf{A}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}}^t, \quad (2.76)$$

що дає можливість уніфікувати задачі на власні значення для пружних і термопружних задач.

Підставимо (2.55) у вираз (2.75). Так як матриця \mathbf{N} і вектор γ є дійсними, то уявна частина (2.75) набуде вигляду

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{B}^T \text{Im}\{\mathbf{c}\} & \mathbf{P}\mathbf{A}^T \text{Im}\{\mathbf{d}\} \\ \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{B}}^T \text{Im}\{\mathbf{c}\} & \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{A}}^T \text{Im}\{\mathbf{d}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Im}\{p_t \mathbf{c}\} \\ \text{Im}\{p_t \mathbf{d}\} \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

Використовуючи умови ортогональності (2.52), на основі (2.77) матимемо таку тотожність [155]:

$$\mathbf{P}\mathbf{B}^T \text{Im}\{\mathbf{c}\} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T \text{Im}\{\mathbf{d}\} = \mathbf{B}^T \text{Im}\{p_t \mathbf{c}\} + \mathbf{A}^T \text{Im}\{p_t \mathbf{d}\}. \quad (2.78)$$

Так само для дійсної частини (2.75) отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{B}^T \text{Re}\{\mathbf{c}\} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T \text{Re}\{\mathbf{d}\} = & \mathbf{B}^T \text{Re}\{p_t \mathbf{c}\} + \\ & + \mathbf{A}^T \text{Re}\{p_t \mathbf{d}\} - (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{A}^T \mathbf{N}_1^T \boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{B}^T \mathbf{N}_2 \boldsymbol{\beta}_2). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Оскільки відповідно до (2.35) та (2.43)

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T \mathbf{T}, \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{N}_1^T = -\mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}, \quad (2.80)$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{A}^T \mathbf{N}_1^T \boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{B}^T \mathbf{N}_2 \boldsymbol{\beta}_2 = & \mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta}_1 - \\ & - \mathbf{A}^T \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{A}^T \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{P}\mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{P}\mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta}_2, \end{aligned} \quad (2.81)$$

і співвідношення (2.79) можна записати так [154]:

$$\mathbf{B}^T \text{Re}\{p_t \mathbf{c}\} + \mathbf{A}^T \text{Re}\{p_t \mathbf{d}\} - \mathbf{P}(\mathbf{B}^T \text{Re}\{\mathbf{c}\} + \mathbf{A}^T \text{Re}\{\mathbf{d}\}) = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{P}\mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta}_2, \quad (2.82)$$

або в індексній формі

$$\begin{aligned} A_{j\alpha} \text{Re}\{p_t d_j\} + B_{j\alpha} \text{Re}\{p_t c_j\} - \\ - p_\alpha (A_{j\alpha} \text{Re}\{d_j\} + B_{j\alpha} \text{Re}\{c_j\}) = A_{j\alpha} \tilde{\beta}_{j1} + p_\alpha A_{j\alpha} \tilde{\beta}_{j2}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Тотожності (2.78), (2.82) відіграють ключову роль при отриманні крайових інтегральних рівнянь та побудові фундаментальних розв'язків термопружності та термоелектропружності анізотропних тіл.

2.6. Формула Коші. Теорема Сохоцького – Племелі

Інтегральна формула Коші є однією з головних формул комплексного аналізу. Вона дозволяє виразити значення регулярної функції в будь-якій точці області через значення функції на межі цієї області.

Нехай функція $\phi(\tau)$ диференційовна в області D . Якщо скінченна область G разом зі своєю межею $\Gamma = \partial G$ належить області D а $\tau \in G$, $\tau_0 \in \partial G$ то

$$\phi(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau. \quad (2.84)$$

Нехай Γ деякий замкнутий гладкий контур, а ϕ – аналітична на Γ функція.

Тоді інтеграл типу Коші $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau$ визначає аналітичну функцію ϕ_i від τ всередині контуру Γ , та іншу аналітичну функцію ϕ_e зовні Γ [42]. Формули Сохоцького – Племелі пов'язують граничні значення цих аналітичних функцій у точці z на контурі Γ та головне значення інтегралу Коші (CPV)

$$\begin{aligned} \phi_i(\tau_0) &= \frac{1}{2\pi i} \text{CPV} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau + \frac{1}{2} \phi(\tau_0) \\ \phi_e(\tau_0) &= \frac{1}{2\pi i} \text{CPV} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau - \frac{1}{2} \phi(\tau_0) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Якщо $\phi_i(\tau) \equiv \phi(\tau)$ тоді

$$\frac{1}{2} \phi(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \text{CPV} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau \quad (2.86)$$

2.7. Теорема про голоморфність функцій комплексної змінної

При визначенні комплексних потенціалів Стро за крайовими умовами задачі корисним є застосування наступних теорем про голоморфність комплексних функцій.

Розглянемо безмежну комплексну площину із системою гладких розімкнутих дуг $\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$, що не перетинаються. Для того, щоб функції $\phi^+(\tau)$, $\phi^-(\tau)$ класу H^* на Γ (включаючи початки і кінці дуг) були граничними значеннями кусково голоморфної зовні Γ функції $\phi(z)$, що дорівнює нулю на безмежності, необхідним і достатнім є виконання умови

$$\frac{1}{2} \Sigma \phi(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Delta \phi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau, \quad (2.87)$$

де $\Sigma(\cdot) = (\cdot)^+ + (\cdot)^-$, $\Delta(\cdot) = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$; $i = \sqrt{-1}$ [42], [34]. Функція $\phi(z)$ при цьому означена інтегральною формулою Коші

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Delta \phi(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (2.88)$$

2.8. Принцип спряження континуумів різної вимірності

Одним із ефективних методів при розв'язанні задач механіки деформівного твердого тіла для тіл із тонкостінними включеннями є метод функцій стрибка [5, 80, 177]. Ідея цього методу ґрунтується на використанні двох основних положень:

1) принципу спряження континуумів різної вимірності [19-21, 23, 60, 62-66, 80, 92];

2) побудови умов взаємодії тонкого включення із зовнішнім середовищем.

Розглянемо тонке включення, з об'ємом V і товщиною $2h$. Воно обмежене поверхнями Γ^+ та Γ^- з нормаллями \mathbf{n}^+ і $\mathbf{n}^- \sim \mathbf{n}$. Згідно принципу спряження це включення можна замінити поверхнею розриву фізико-механічних та температурних полів Γ_C . У двовимірних задачах, включення можна замінити деякою лінією Γ_C . Найчастіше у ролі такої поверхні (лінії) розриву Γ_C вибирають серединну, щодо Γ^+ та Γ^- поверхню. Значення фізико-механічних полів (компонент векторів переміщень $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, та напружень $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$, температури θ , теплових потоків $h_n \equiv \partial\theta / \partial n$, електричного зміщення, магнітної

індукції тощо), при проходженні через поверхню розриву можуть отримувати певні стрибки, які можна описувати за допомогою деяких функцій f_r . Останні називають функціями стрибка, і вони є загалом функціями координат поверхні (лінії) Γ_c .

$$f_r(\xi) = \Delta \mathbf{u}_h, \Delta \mathbf{t}_n, \Delta \theta_h, \dots, \xi \in \Gamma^\pm, \quad (2.89)$$

де $\Delta_h = \bullet(\xi, -h) - \bullet(\xi, h)$.

Після формування цих функцій, включення як геометричний об'єкт можна вилучити з розгляду як геометричний об'єкт, а задачу звести до визначення термомагнітоелектронапруженого стану тіла із лінією стрибків фізико-механічних полів. Крім цього, останню тепер можна розглядати, як зовнішню щодо включення, без огляду на його конкретні фізико механічні властивості.

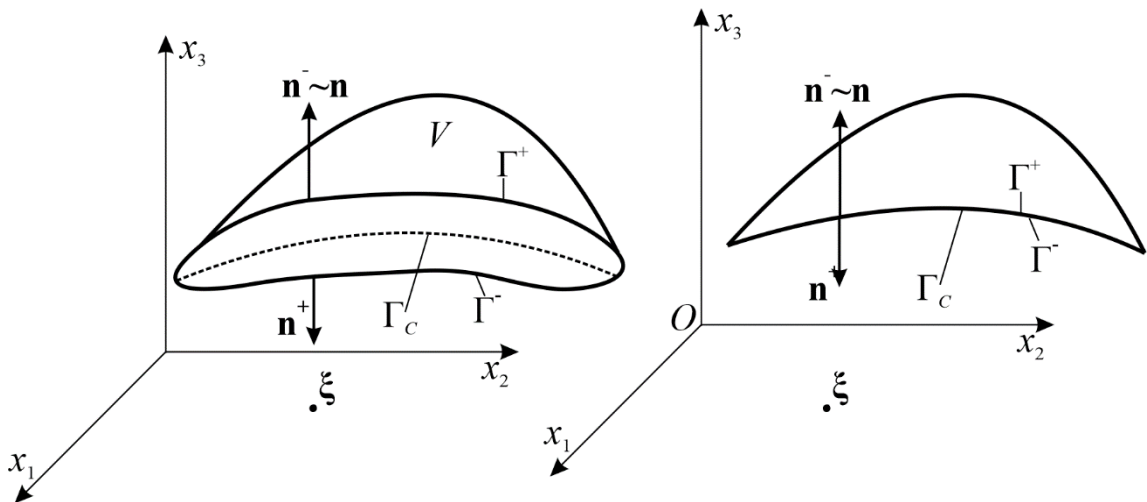


Рис. 2.1. Принцип спряження

При виборі кількості і фізико-механічного змісту прийнятих до розгляду функцій стрибка потрібно керуватися наступними положеннями [79]:

1. Обрані функції стрибка повинні відповідати тим ефектам, які породжує дана тонка неоднорідність у розглядуваному середовищі.
2. Функції стрибка повинні забезпечити просте й однозначне визначення усіх прийнятих до розгляду фізико-механічних полів у довільній точці ξ середовища поза областю, зайнятою включенням:

$$\bullet(\xi) = \bullet(\xi, f_r), \{\bullet\} = \{u_i, \sigma_{ij}, \theta, \dots\} \quad (2.90)$$

$$u_i(\xi) = u_i(\xi, f_r), \sigma_{ij}(\xi) = \sigma_{ij}(\xi, f_r), \theta(\xi) = \theta(\xi, f_r), \dots \quad (2.91)$$

Функції (2.91) залежать не лише від функцій стрибка f_r але і від:

а) властивостей матеріалу (ізотропний, анізотропний, лінійно чи нелінійно пружний тощо) і значення його механічних, теплофізичних та інших характеристик;

б) геометрії задачі (конфігурації тіла, поверхні Γ_C);

в) зовнішнього навантаження.

Вплив навантажувальних чинників можна заздалегідь розрахувати для кожного типу матеріалу і геометрії тіла. Це дозволяє подати функції (2.91) наступним чином

$$\bullet(\xi) = \hat{\bullet}(\xi, f_r) + \bullet^0(\xi) \quad (2.92)$$

$$\sigma_{ij}(\xi) = \hat{\sigma}_{ij}(\xi, f_r) + \sigma_{ij}^0(\xi), u_i(\xi) = \hat{u}_i(\xi, f_r) + u_i^0(\xi), \dots$$

Тут $\bullet^0(\xi)$ – значення відповідних функцій у тілі за наявності лише зовнішнього навантаження. $\hat{\bullet}(\xi, f_r)$ – значення відповідних функцій у тілі отримані лише внаслідок впливу функцій стрибка.

2.9. Математична модель тонкого дефекту та умови взаємодії включення з середовищем

Для визначення невідомих функцій стрибка необхідно використовувати умови взаємодії тонкого включення із середовищем. Процес побудови останніх можна розділити на два етапи [79].

В основу першого етапу покладено можливість побудови певних залежностей

$$F_j(\mathbf{t}_B^\pm, \mathbf{u}_B^\pm, \bullet_B^\pm) = 0 \quad (2.93)$$

між векторами переміщень $\mathbf{u}_B(\xi_0 \pm h) \equiv \mathbf{u}_B^\pm$ напружень $\mathbf{t}_{nB}(\xi_0 \pm h) \equiv \mathbf{t}_{nB}^\pm$, та інших параметрів фізичних полів \bullet_B^\pm на верхньому (+) та нижньому (-) берегах неоднорідності (рис. 2.2).

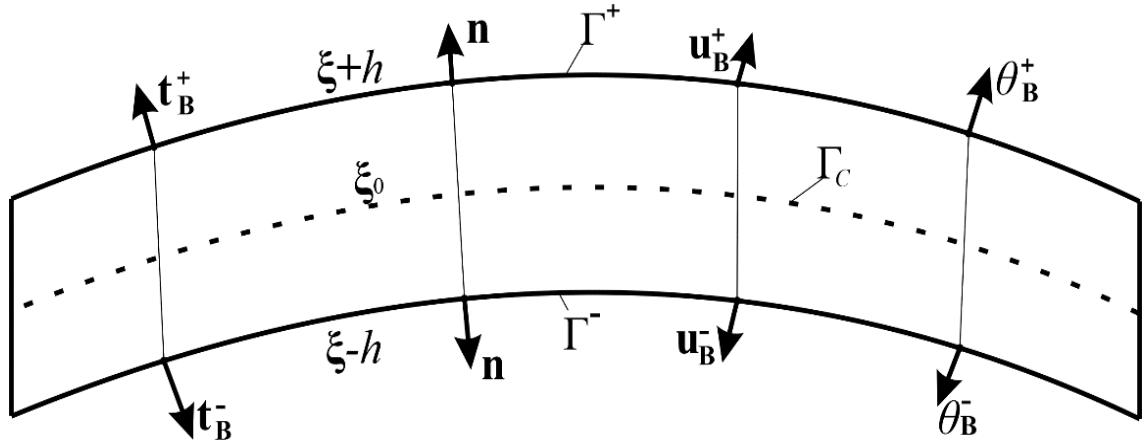


Рис. 2.2. Виокремлене тонке включення з навантаженими берегами

Ці залежності формують математичну модель включення. Їх кількість повинна відповідати кількості введених у розгляд принципом спряження невідомих функцій стрибка.

На другому етапі спочатку у рівняннях математичної моделі (2.93) використовують умови контакту включення з середовищем.

$$\bullet_B^\pm = \bullet(\xi_0 \pm h). \quad (2.94)$$

У випадку ідеального контакту їх можна записати у вигляді:

$$F_j(\mathbf{t}_n(\xi_0 \pm h), \mathbf{u}(\xi_0 \pm h), \bullet(\xi_0 \pm h)) = 0 \quad (2.95)$$

Потім відбувається знесення відповідних величин фізико-механічних полів з реальної межі контакту включення з $\xi = \xi_0 \pm h, (\xi_0 \in \Gamma)$ на моделюючу поверхню стрибка Γ_c :

$$\mathbf{t}_n(\xi_0 \pm h) \approx \mathbf{t}_n^\pm, \mathbf{u}(\xi_0 \pm h) \approx \mathbf{u}^\pm, \bullet(\xi_0 \pm h) \approx \bullet^\pm. \quad (2.96)$$

Це дозволяє записати математичну модель включення (2.93) з використанням граничних значень фізико-механічних полів $\mathbf{t}_n^\pm, \mathbf{u}^\pm, \bullet^\pm$ середовища.

$$\Psi_j(\mathbf{t}_n^\pm, \mathbf{u}^\pm, \bullet^\pm) = 0, t_{ni}^\pm = \sigma_{ij}^\pm n_j. \quad (2.97)$$

Якщо виконуються умови ідеального контакту включення з матрицею, то в (2.97) функції Ψ_j збігаються з F_j . В іншому, випадку умови взаємодії (2.97) є умовами неідеального контакту поверхонь середовища із неоднорідністю. Таким

чином ефект присутності включення в тілі зводиться до неідеального контакту вздовж поверхні Γ_C матеріального континууму матриці, а сама неоднорідність, як геометричний об'єкт, вилучається з розгляду.

2.10. Посднання принципу спряження та умов взаємодії у системі сингулярних інтегральних рівнянь

Якщо визначити з формули (2.91) граничні значення фізико-механічних полів на межі поверхонь стрибків [79]

$$\sigma_{ij}^{\pm} = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 \in \Gamma^{\pm}} \sigma_{ij}(\xi, f_r), \quad u_i^{\pm} = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 \in \Gamma^{\pm}} u_i(\xi, f_r), \quad \bullet^{\pm} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 \in \Gamma^{\pm}} \bullet(\xi, f_r), \quad (2.98)$$

та підставити їх у умови взаємодії (2.97), то буде отримана система інтегральних рівнянь для визначення функцій стрибка

$$\Phi_j(f_r) = 0. \quad (2.99)$$

Кількість цих рівнянь відповідає кількості функцій стрибка.

Розв'язок цієї системи на основі принципу спряження (2.91) визначає фізико-механічні поля у довільній точці ξ середовища. Використання умов контакту та математичної моделі включення (2.91) дає можливість на основі вже відомих функцій $\sigma_{ij}^{\pm}, u_i^{\pm}, \bullet^{\pm}$ обчислити фізико-механічні поля всередині неоднорідності.

Принцип спряження та умови взаємодії можуть вивчатися цілком незалежно. Принцип спряження застосовується без огляду на конкретні фізико-механічні властивості включення і визначається виключно геометричними та фізико-механічними властивостями матриці, геометрією включень та зовнішнім навантаженням. Тобто, якщо для заданого типу матриці та геометрії включень побудувати співвідношення (2.91) для збуреної складової (без урахування функцій стрибка), та обчислити вплив зовнішнього навантаження $\sigma_{ij}^0(\xi), u_i^0(\xi), \bullet^0(\xi)$, то вирази (2.91) можна застосовувати до довільних умов взаємодії типу (2.94), побудованих або для тріщин, або для жорстких прошарків, або для різних моделей пружного, пружно-пластичного, рідкого та іншого

реологічного типу тонкого включення. Важливо лише, щоб у отриманих виразах були враховані незалежні функції стрибка.

З іншого боку, під час побудови умов взаємодії (внутрішня задача) тип матриці і її навантаження не відіграє жодного значення – це просто деяке абстрактне суцільне середовище. До умов взаємодії необхідно ставити лише три основні вимоги [79]:

1. їхня кількість повинна дорівнювати кількості введених функцій стрибка;
2. вони повинні бути достатньо простими, щоб отримані на їхній основі системи інтегральних рівнянь (2.99) вдалося розв'язати;
3. вони повинні мати достатній рівень адекватності, відображаючи істотні для дослідника особливості деформування включення.

2.11. Структурно-модульний метод функцій стрибка

У випадку складних, фізично нелінійних матеріалів, побудова математичної моделі неоднорідності перетворюється у дуже складну задачу. Врахування особливостей цих матеріалів значно ускладнює розв'язок результуючих систем сингулярних рівнянь. Тому у праці [59], було запропоновано структурно-модульний метод функцій стрибка. На відміну від класичного методу стрибка, який передбачає отримання результуючих систем інтегральних рівнянь шляхом підстановки умов взаємодії у рівняння зовнішньої задачі через умови контакту, у структурно-модульному пропонується розв'язувати всі рівняння незалежно та без підстановок. На основі (2.91), (2.93), (2.95), (2.97) можна утворити наступну систему рівнянь:

$$\text{Модуль 1: Зовнішня задача } \{\bullet\} = \{u_i, \sigma_{ij}, \theta, \dots\}.$$

$$\text{Модуль 2: Внутрішня задача } F_j = (t_n(\xi_0 \pm h), u(\xi_0 \pm h), \bullet(\xi_0 \pm h)) = 0.$$

$$\text{Модуль 3: Умови контакту } \Psi_j = (t_n^\pm, \mathbf{u}^\pm, \bullet^\pm) = 0.$$

Перевагами такого підходу можна виділити наступні

- Хоч рівнянь в системі є більше, проте вони простіші для розв'язання.

- Зникає потреба у здійсненні громіздких перетворень для системи (2.99) при розв'язуванні нової задачі.
- Істотно спрощується методика побудови результуючих систем лінійних алгебричних рівнянь.
- Зміни у формулюваннях зовнішньої, внутрішньої чи проміжної задач відбуваються незалежно і не вимагають кожного разу, як це робилося у МФС, докорінної перебудови системи (2.99).

Цей підхід завдяки своїй універсальності дозволяє розв'язувати багато задач починаючи від макро- і закінчуючи задачами наномеханіки, які досі з огляду на складність розв'язувалися виключно числовими методами.

2.12. Модель тонкого магнітоелектропружного включення

Розглянемо переріз у магнітоелектропружного включення товщини $2h$. У ньому розглянемо локальну систему координат $Ox'_1x'_2x'_3$. початок якої знаходиться на серединній поверхні включення, а вісь Ox'_1 збігається із вектором нормалі $\mathbf{n}^+(\mathbf{y})$ до поверхні Γ_C^+ у точці \mathbf{y} . Умови взаємодії неоднорідності з тілом, можна подати у вигляді наступних функціональних залежностей

$$\begin{aligned}\Sigma\tilde{u}_i(\mathbf{y}) &= F_i^u(\mathbf{y}, \Sigma\tilde{t}_j, \Delta\tilde{u}_j), \\ \Sigma\tilde{t}_i(\mathbf{y}) &= F_i^t(\mathbf{y}, \Sigma\tilde{t}_j, \Delta\tilde{u}_j).\end{aligned}\tag{2.100}$$

Тут $\Sigma(\bullet) = (\bullet)^+ + (\bullet)^-$, $\Delta(\bullet) = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$, а знаками “+” та “-” позначено величини, що відносяться до поверхонь Γ_C^+ та Γ_C^- розрізу Γ_C .

Значення компонент векторів у локальній і глобальній системах координат пов'язані наступними співвідношеннями:

$$\tilde{t}'_i = \Omega_{ij}\tilde{t}_j, \tilde{t}_i = \Omega_{ji}\tilde{t}'_j.\tag{2.101}$$

Тут Ω – матриця повороту.

Крім цього,

$$\tilde{t}'_i(-h) = \tilde{t}'_i^+, \tilde{t}'_i(h) = \tilde{t}'_i^-; \quad \tilde{u}_i(-h) = \tilde{u}_i^+, \tilde{u}_i(h) = \tilde{u}_i^-.\tag{2.102}$$

Таким чином умови ідеальної механічної (2.7) та електромагнітної (2.14) взаємодії включення з середовищем, внаслідок $\mathbf{n}^\pm = -\mathbf{n}^{\pm}$, матимуть вигляд

$$\tilde{t}_i^\pm = -\tilde{t}_i^{\pm}, \tilde{u}_i^\pm = \tilde{u}_i^{\pm} \quad (2.103)$$

Індекс “і” вказує на те, що відповідна величина відноситься до включення.

Використовуючи позначення формалізму Стро (2.28) та вирази (2.19) напруження, електричне зміщення та магнітну індукцію у включенні можна визначити наступним чином

$$\tilde{\sigma}'_{i1} = Q_{ik}^i \tilde{u}'_{k,1} + R_{ik}^i \tilde{u}'_{k,2}, \quad \tilde{\sigma}'_{i2} = R_{ik}^i \tilde{u}'_{k,1} + T_{ik}^i \tilde{u}'_{k,2} \quad (i, k = 1, \dots, 5). \quad (2.104)$$

Інтегруючи (2.104) за товщиною включення, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i1} dx'_1 &= Q_{ik}^i [\tilde{u}'_k(h) - \tilde{u}'_k(-h)] + R_{ik}^i \int_{-h}^h \tilde{u}'_{k,2} dx'_1, \\ \int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i2} dx'_1 &= R_{ik}^i [\tilde{u}'_k(h) - \tilde{u}'_k(-h)] + T_{ik}^i \int_{-h}^h \tilde{u}'_{k,2} dx'_1. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Зважаючи на рівняння рівноваги (2.20) та умову контакту (2.103), за принципом спряження континуумів різної вимірності матимемо

$$\int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i2} dx'_1 = \tilde{P}'_i(\mathbf{y}) = \Omega_{ij}(\mathbf{y}) \tilde{P}_j(\mathbf{y}), \quad \tilde{P}_j(\mathbf{y}) = -\tilde{P}_j^0 + \int_{y_0}^{\mathbf{y}} \Sigma \tilde{t}_j(s) ds, \quad (2.106)$$

де s – дугова координата математичного розрізу Γ_C ; \tilde{P}_j^0 – зусилля, електричні заряди та магнітна індукція на лівому торці включення, координати якого означені точкою y_0 . На основі теореми про середнє значення інтеграла отримаємо зв'язки

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i1} dx'_1 &= 2h \tilde{\sigma}'_{i1}{}^{\text{avr}} \approx h(\mathbf{y}) [\tilde{t}_i^i(h) - \tilde{t}_i^i(-h)] = h(\mathbf{y}) \Delta \tilde{t}_i(\mathbf{y}), \\ \int_{-h}^h \tilde{u}'_{k,2} dx'_1 &= 2h \tilde{u}'_{k,2}{}^{\text{avr}} \approx h(\mathbf{y}) [\tilde{u}'_{k,2}(h) + \tilde{u}'_{k,2}(-h)] = h(\mathbf{y}) \Sigma \tilde{u}'_{k,2}(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Знехтуємо у тонкому включенні взаємодією поперечних та поздовжніх стосовно серединної поверхні неоднорідності складових векторів магнітних, електричних та механічних полів. Тоді, використовуючи (2.106) та (2.107), зі співвідношень (2.105) матимемо:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{t}'_i(\mathbf{y}) &= -\frac{Q_{ik}^i(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})}[\Delta\tilde{u}'_k(\mathbf{y}) + \Delta\tilde{u}'_{k*}(\mathbf{y})], \\ T_{ik}^i(\mathbf{y})\Sigma\tilde{u}'_{k,2}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{h(\mathbf{y})}[\tilde{P}'_i(\mathbf{y}) + \tilde{P}'_{i*}(\mathbf{y})].\end{aligned}\quad (2.108)$$

З огляду на зроблені спрощення, у (2.108) за аналогією із [57], [79] введено систему коригувальних функцій $\Delta\tilde{u}'_{k*}$ і \tilde{P}'_{i*} (у задачах теорії пружності їх ще називають торцьовими зусиллями і переміщеннями [79]). Для тонких дефектів ці функції, зазвичай, вважають нульовими або задають наближеними апіорними залежностями [79] так, щоб задача мала точний розв'язок для трьох основних характерних випадків властивостей матеріалу неоднорідності (тріщина, абсолютно жорстке включення, суцільне бездефектне тіло, тобто, включення із матеріалу середовища).

Позначаючи $\mathbf{N}^1 = (\mathbf{T}^i)^{-1}$ та зважаючи на те, що $\Sigma\tilde{u}'_{k,2} = \partial\Sigma\tilde{u}'_k/\partial s$ отримаємо таку модель тонкого включення

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{t}'_i(\mathbf{y}) &= -\frac{Q_{ij}^i(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})}[\Delta\tilde{u}'_j(\mathbf{y}) + \Delta\tilde{u}'_{j*}(\mathbf{y})], \\ \frac{\partial\Sigma\tilde{u}'_i(\mathbf{y})}{\partial s} &= \frac{N_{ij}^1}{h(\mathbf{y})}[\tilde{P}'_j(\mathbf{y}) + \tilde{P}'_{j*}(\mathbf{y})].\end{aligned}\quad (2.109)$$

Перейшовши у (2.109) до глобальної системи координат та інтегруючи $\partial\Sigma\tilde{u}'_k/\partial s$ уздовж дуги Γ_C від лівого торця \mathbf{y}_0 до точки колокації \mathbf{y} , матимемо

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) &= -\frac{\mathbf{V}(\mathbf{y})[\Delta\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) + \Delta\tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{y})]}{h(\mathbf{y})}, \\ \Sigma\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) &= 2\tilde{\mathbf{u}}^0 + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \frac{\mathbf{W}(s)[\tilde{\mathbf{P}}(s) + \tilde{\mathbf{P}}^*(s)]}{h(s)} ds.\end{aligned}\quad (2.110)$$

Тут $\mathbf{V} = \mathbf{\Omega}^T \mathbf{Q}^i \mathbf{\Omega}$, $\mathbf{W} = \mathbf{\Omega}^T \mathbf{N}^1 \mathbf{\Omega}$; $\tilde{\mathbf{u}}^0$ – середні значення переміщень та електричного й магнітного потенціалів на лівому торці включення. Модель (2.109) придатна також для вивчення п'єзoeлектричних включень. Тоді матриці \mathbf{V} та \mathbf{W} і вектори $\tilde{\mathbf{u}}$ та $\tilde{\mathbf{t}}$ вважаються чотиривимірними та не враховують магнітних компонент [152].

Для визначення середніх значень переміщень та електричного й магнітного потенціалів на лівому торці тонкого включення до побудованих співвідношень слід долучити рівняння глобальної магнітоелектропружної рівноваги неоднорідності

$$\tilde{P}_j^n + \tilde{P}_j^0 - \int_{\Gamma_C^+} \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.111)$$

Тут \tilde{P}_j^n – зусилля, електричні заряди та магнітна індукція на правому торці тонкого включення.

2.13. Побудова моделі тонкого термомагнітоелектропружного включення

Розглянемо деякий переріз у термомагнітоелектропружного включення товщини $2h$. У ньому розглянемо локальну систему координат $Ox'_1x'_2x'_3$. Центр цієї системи розташований на серединній поверхні включення, а вісь Ox'_1 співпадає із вектором нормалі $\mathbf{n}^+(\mathbf{y})$ до поверхні Γ_C^+ у точці \mathbf{y} що належить Γ_C .

У цьому випадку умови взаємодії неоднорідності із середовищем, можна подати наступним чином [154]:

$$\begin{aligned} \Sigma \theta(\mathbf{y}) &= F^\theta(\mathbf{y}, \Sigma h_n, \Delta \theta), \\ \Sigma h_n(\mathbf{y}) &= F^h(\mathbf{y}, \Sigma h_n, \Delta \theta), \\ \Sigma \tilde{u}_i(\mathbf{y}) &= F_i^u(\mathbf{y}, \Sigma \tilde{t}_j, \Delta \tilde{u}_j, \Sigma \theta, \Delta \theta), \\ \Sigma \tilde{t}_i(\mathbf{y}) &= F_i^t(\mathbf{y}, \Sigma \tilde{t}_j, \Delta \tilde{u}_j, \Sigma \theta, \Delta \theta). \end{aligned} \quad (2.112)$$

$\Sigma(\bullet) = (\bullet)^+ + (\bullet)^-$, $\Delta(\bullet) = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$, а знаками “+” та “-” позначено величини що відносяться до поверхонь Γ_C^+ та Γ_C^- розрізу

Тоді

$$\begin{aligned} \tilde{t}_i(-h) &= \tilde{t}_i^+, \tilde{t}_i(h) = \tilde{t}_i^-; \quad \tilde{u}_i(-h) = \tilde{u}_i^+, \tilde{u}_i(h) = \tilde{u}_i^-; \\ \theta(-h) &= \theta^+, \theta(h) = \theta^-; \quad h_n(-h) = h_n^+, h_n(h) = h_n^-. \end{aligned}$$

Враховуючи $\mathbf{n}^\pm = -\mathbf{n}^{\mp}$ умови ідеальних теплового, механічного (2.7) та електромагнітного (2.14) контакту включення із середовищем матимуть вигляд

$$\theta^\pm = \theta^{i\pm}, h_n^\pm = -h_n^{i\pm}, \tilde{t}_i^\pm = -\tilde{t}_i^{i\pm}, \tilde{u}_i^\pm = \tilde{u}_i^{i\pm}. \quad (2.113)$$

Відповідно до (2.17), (2.19) густина теплового потоку, напруження та електричне зміщення у включенні з використанням позначень (2.28) дорівнюють

$$\begin{aligned} h'_1 &= -k_{11}^{i'}\theta'_{,1} - k_{12}^{i'}\theta'_{,2}, \quad h'_2 = -k_{12}^{i'}\theta'_{,1} - k_{22}^{i'}\theta'_{,2}; \\ \tilde{\sigma}'_{i1} &= Q_{ik}^{i'}\tilde{u}'_{k,1} + R_{ik}^{i'}\tilde{u}'_{k,2} - \tilde{\beta}_{i1}^{i'}\theta, \quad \tilde{\sigma}'_{i2} = R_{ik}^{i'}\tilde{u}'_{k,1} + T_{ik}^{i'}\tilde{u}'_{k,2} - \tilde{\beta}_{i2}^{i'}\theta. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Інтегруючи (2.114) по товщині включення, згідно [154] отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h h'_1 dx'_1 &= -k_{11}^{i'}[\theta(h) - \theta(-h)] - k_{12}^{i'} \int_{-h}^h \theta'_{,2} dx'_1, \\ \int_{-h}^h h'_2 dx'_1 &= -k_{12}^{i'}[\theta(h) - \theta(-h)] - k_{22}^{i'} \int_{-h}^h \theta'_{,2} dx'_1, \\ \int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i1} dx'_1 &= Q_{ik}^{i'}[\tilde{u}'_k(h) - \tilde{u}'_k(-h)] + R_{ik}^{i'} \int_{-h}^h \tilde{u}'_{k,2} dx'_1 - \tilde{\beta}_{i1}^{i'} \int_{-h}^h \theta dx'_1 \\ \int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i2} dx'_1 &= R_{ik}^{i'}[\tilde{u}'_k(h) - \tilde{u}'_k(-h)] + T_{ik}^{i'} \int_{-h}^h \tilde{u}'_{k,2} dx'_1 - \tilde{\beta}_{i2}^{i'} \int_{-h}^h \theta dx'_1 \end{aligned} \quad (2.115)$$

Зважаючи на балансові рівняння (2.3), (2.20) та умови контакту $h_n^\pm = -h_n^{i\pm}, \tilde{t}_i^\pm = -\tilde{t}_i^{i\pm}$ за принципом спряження континуумів різної вимірності матимемо

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h h'_2 dx'_1 &= H(\mathbf{y}), \quad H(\mathbf{y}) = -H^0 + \int_{y_0}^y \Sigma h_n(s) ds \\ \int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i2} dx'_1 &= \tilde{P}'_i(\mathbf{y}) = \Omega_{ij}(\mathbf{y}) \tilde{P}_j(\mathbf{y}), \quad \tilde{P}_j(\mathbf{y}) = -\tilde{P}_j^0 + \int_{y_0}^y \Sigma \tilde{t}_j(s) ds \end{aligned} \quad (2.116)$$

де s – дугова координата математичного розрізу Γ_C ; \tilde{P}_j^0 – зусилля, електричні заряди та магнітна індукція на лівому торці включення, координати якого означені точкою y_0 . H_0 – тепловий потік через лівий торець включення. На основі теореми про середнє значення інтеграла, отримаємо зв'язки

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^h h'_1 dx'_1 &= 2h \cdot h'_1{}^{\text{avr}} \approx h(\mathbf{y}) [h_n^i(h) - h_n^i(-h)] = h(\mathbf{y}) \Delta h_n(\mathbf{y}), \\
\int_{-h}^h h'_2 dx'_1 &= 2h \cdot \theta'_{,2}{}^{\text{avr}} \approx h(\mathbf{y}) [\theta'_{,2}(h) + \theta'_{,2}(-h)] = h(\mathbf{y}) \Sigma \theta'_{,2}(\mathbf{y}), \\
\int_{-h}^h \theta dx'_1 &= 2h \cdot \theta^{\text{avr}} \approx h(\mathbf{y}) [\theta(h) + \theta(-h)] = h(\mathbf{y}) \Sigma \theta(\mathbf{y}); \\
\int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i1} dx'_1 &= 2h \tilde{\sigma}'_{i1}{}^{\text{avr}} \approx h(\mathbf{y}) [\tilde{t}_i^i(h) - \tilde{t}_i^i(-h)] = h(\mathbf{y}) \Delta \tilde{t}_i^i(\mathbf{y}), \\
\int_{-h}^h \tilde{u}'_{k,2} dx'_1 &= 2h \tilde{u}'_{k,2}{}^{\text{avr}} \approx h(\mathbf{y}) [\tilde{u}'_{k,2}(h) + \tilde{u}'_{k,2}(-h)] = h(\mathbf{y}) \Sigma \tilde{u}'_{k,2}(\mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Знову ж, для спрощення моделі знехтуємо у тонкому включенні взаємовпливом комплексу теплових, електричних та механічних полів відповідно у поперечних та поздовжніх стосовно серединної поверхні неоднорідності напрямках. Вважатимемо, що $k_{12}^i = 0, R_{ik}^i = 0$. Тоді, використовуючи (2.116) та (2.117), зі співвідношень (2.115) матимемо

$$\begin{aligned}
\Delta h_n(\mathbf{y}) &= \frac{k_{11}^i(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})} [\Delta \theta(\mathbf{y}) + \Delta \theta^*(\mathbf{y})], \\
\Sigma \theta'_{,2}(\mathbf{y}) &= -\frac{H(\mathbf{y}) - H^*(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y}) k_{22}^i(\mathbf{y})}; \\
\Delta \tilde{t}_i^i(\mathbf{y}) &= -\frac{Q_{ik}^i(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})} [\Delta \tilde{u}'_k(\mathbf{y}) + \Delta \tilde{u}'_k{}^*(\mathbf{y})] - \tilde{\beta}_{i1}^i \Sigma \theta(\mathbf{y}), \\
T_{ik}^i(\mathbf{y}) \Sigma \tilde{u}'_{k,2}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{h(\mathbf{y})} [\tilde{P}'_i(\mathbf{y}) + \tilde{P}'_i{}^*(\mathbf{y})] + \tilde{\beta}_{i2}^i \Sigma \theta(\mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{2.118}$$

За аналогією із (2.110) у (2.118) введено систему коригувальних функцій $\Delta \theta^*, H^*, \Delta \tilde{u}'_i{}^*, \tilde{P}'_i{}^*$. Для достатньо тонких включень останні можна з більшою чи меншою похибкою вважати нульовими.

Позначаючи $\mathbf{N}^1 = (\mathbf{T}^i)^{-1}$, $\tilde{\alpha}_{i2}^i = N_{ij}^1 \tilde{\beta}_{i2}^i$ та зважаючи на те, що $\Sigma \theta'_{,2} = \partial \Sigma \theta / \partial s$, $\Sigma \tilde{u}'_{k,2} = \partial \Sigma \tilde{u}'_k / \partial s$ отримаємо таку модель тонкого включення

$$\begin{aligned}
\Delta h_n(\mathbf{y}) &= \frac{k_{11}^{ni}(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})} [\Delta\theta(\mathbf{y}) + \Delta\theta^*(\mathbf{y})], \\
\frac{\partial\Sigma\theta(\mathbf{y})}{\partial s} &= -\frac{H(\mathbf{y}) - H^*(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})k_{22}^{ni}(\mathbf{y})}, \\
\Delta\tilde{t}'_i(\mathbf{y}) &= -\frac{Q_{ik}^{ni}(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})} [\Delta\tilde{u}'_k(\mathbf{y}) + \Delta\tilde{u}'_k^*(\mathbf{y})] - \tilde{\beta}_{i1}^{ni}\Sigma\theta(\mathbf{y}), \\
\frac{\partial\Sigma\tilde{u}'_i(\mathbf{y})}{\partial s} &= \frac{N_{ij}^1}{h(\mathbf{y})} [\tilde{P}'_i(\mathbf{y}) + \tilde{P}'_i^*(\mathbf{y})] + \tilde{\alpha}_{i2}^{ni}\Sigma\theta(\mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{2.119}$$

Перейшовши у (2.119) до глобальної системи координат та інтегруючи $\partial\Sigma\theta/\partial s$ та $\partial\Sigma\tilde{u}'_k/\partial s$ уздовж дуги Γ_C від лівого торця \mathbf{y}_0 до точки колокації \mathbf{y} , матимемо [154]

$$\begin{aligned}
\Delta h_n(\mathbf{y}) &= \frac{k_{11}^{ni}(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})} [\Delta\theta(\mathbf{y}) + \Delta\theta^*(\mathbf{y})], \\
\Sigma\theta(\mathbf{y}) &= 2\theta^0 - \int_{y_0}^y \frac{H(s) - H^*(s)}{h(s)k_{22}^{ni}(s)} ds, \\
\Delta\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) &= -\frac{\mathbf{V}(\mathbf{y}) [\Delta\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) + \Delta\tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{y})]}{h(\mathbf{y})} - \mathbf{v}(\mathbf{y})\Sigma\theta(\mathbf{y}), \\
\Sigma\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) &= 2\tilde{\mathbf{u}}^0 + \int_{y_0}^y \frac{\mathbf{W}(s) [\tilde{\mathbf{P}}(s) + \tilde{\mathbf{P}}^*(s)]}{h(s)} ds + \int_{y_0}^y \mathbf{w}(s)\Sigma\theta(s) ds.
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Тут $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{Q}^{ni} \boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{N}^1 \boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}^T \tilde{\beta}_1^{ni}$, $\mathbf{w} = \boldsymbol{\Omega}^T \tilde{\alpha}_2^{ni}$; θ^0 – середнє значення зміни температури лівого торця включення; $\tilde{\mathbf{u}}^0$ – середні значення переміщень, електричного та магнітного потенціалів на торці включення. Модель (2.120) для ізотермічного випадку $\theta \equiv \theta$ еквівалентна до співвідношень (2.110) магнітоелектропружності тонкого включення

Середні значення зміни температури, переміщень та електричного потенціалу на лівому торці тонкого включення можна визначити, долучивши до визначальних співвідношень моделі піроелектричного тіла та виразів (2.120) моделі тонкого включення рівняння глобальної рівноваги та балансу тепла в неоднорідності:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_j^n + \tilde{P}_j^0 - \int_{\Gamma_c^+} \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) &= 0 \\ H^0 + H^n - \int_{\Gamma_c^+} \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) &= 0\end{aligned}\quad (2.121)$$

де \tilde{P}_j^n – зусилля та електричні заряди, зосереджені на правому торці тонкого включення; H^n – тепловий потік через правий торець неоднорідності.

2.14. Побудова інтегральних рівнянь магнітоелектропружності на основі теореми взаємності

Інтегральні рівняння задач магнітоелектропружності (МЕП), зазвичай, виводять на основі [160] варіаційних принципів, методу зважених нев'язок чи теорем взаємності. Проте у всіх цих підходах використовують не узагальнені величини (2.21) а окремі механічні, п'єзоелектричні, п'єзомагнітні тощо сталі матеріалу, що значно ускладнює процедуру побудови та подальше отримання інтегральних подань напружень і градієнтів фізико-механічних полів. Застосування (2.21) дає можливість значно спростити та узагальнити ці результати [152]. Завдяки властивості симетрії (2.22) тензора МЕП сталих \tilde{C}_{ijkl} справджується така диференціальна форма теореми взаємності для двох довільних станів магнітоелектропружної рівноваги:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} = \tilde{C}_{ijkl} \tilde{u}_{k,m}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} = \tilde{C}_{kmij} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} \tilde{u}_{k,m}^{(1)} = \tilde{C}_{ijkm} \tilde{u}_{k,m}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} \tilde{u}_{i,j}^{(1)} \quad (2.122)$$

Інтегруючи (2.122) в усьому перерізі S тіла та використовуючи теорему Остроградського – Гауса, матимемо

$$\begin{aligned}\iint_S \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} \tilde{u}_{i,j}^{(2)} dS &= \int_{\partial S} \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} n_j \tilde{u}_i^{(2)} d\Gamma - \iint_S \tilde{\sigma}_{ij,j}^{(1)} \tilde{u}_i^{(2)} dS \\ &= \int_{\partial S} \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} n_j \tilde{u}_i^{(1)} d\Gamma - \iint_S \tilde{\sigma}_{ij,j}^{(2)} \tilde{u}_i^{(1)} dS.\end{aligned}\quad (2.123)$$

Позначивши поверхневі напруження, густину заряду та нормальні компоненти вектора магнітної індукції п'ятимірним вектором із компонентами $\tilde{t}_i = \tilde{\sigma}_{ij} n_j = [t_1, t_2, t_3, -\rho, B_n]$ та враховуючи, що відповідно до (2.20)

$\tilde{\sigma}_{ij,j} = -\tilde{f}_i$ із (2.123) отримаємо аналог теореми взаємності робіт Бетті – Максвелла:

$$\int_{\partial S} [\tilde{u}_j^{(2)} \tilde{t}_j^{(1)} - \tilde{t}_j^{(2)} \tilde{u}_j^{(1)}] d\Gamma + \iint_S \tilde{f}_j^{(1)} \tilde{u}_j^{(2)} dS = \iint_S \tilde{f}_j^{(2)} \tilde{u}_j^{(1)} dS \quad (2.124)$$

Вибравши в (2.124) за один зі станів магнітоелектропружної рівноваги поле, зумовлене дією одиничних зосереджених чинників $\tilde{f}_j^{(2,i)} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ на основі властивостей інтеграла від дельта-функції матимемо МЕР аналог формули Сомільяни

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\partial S} [U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \iint_S U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{f}_j(\mathbf{x}) dS \end{aligned} \quad (2.125)$$

Тут $U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ та $T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ – фундаментальні розв'язки магнітоелектропружності, означені виразами [160]:

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = & \frac{1}{\pi} \text{Im} [A_{i\alpha} A_{j\alpha} \ln Z_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})], \\ T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = & \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[A_{i\alpha} B_{j\alpha} (n_2 - n_1 p_\alpha) \frac{1}{Z_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})} \right], \end{aligned} \quad (2.126)$$

де $Z_\alpha(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = x_1 + p_\alpha x_2 - (\xi_1 + p_\alpha \xi_2)$. Функції (2.126) означають переміщення та електричний і магнітний потенціали $\tilde{u}_i = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \phi, \psi]$, а також напруження, поверхневу густину заряду і нормальну складову магнітної індукції $\tilde{t}_i = \tilde{\sigma}_{ij} n_j = [t_1, t_2, t_3, -\rho, B_n]$ в точці $\mathbf{x}(x_1, x_2)$ тіла на площадці з нормаллю $\mathbf{n}(n_1, n_2)$ від дії зосередженого чинника $\tilde{f}_i \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = [f_1, f_2, f_3, -q, b_m] \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ у точці $\boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2)$:

$$\tilde{u}_j(\mathbf{x}) = U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{f}_i, \quad \tilde{t}_j(\mathbf{x}) = T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{f}_i. \quad (2.127)$$

Тут $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функція Дірака.

Стягуючи деякий контур Γ_i до математичного розрізу Γ_c із берегами Γ_c^+ та Γ_c^- (рис. 2.3) та зважаючи на те, що нормалі до цих берегів у відповідних

протилежних точках є протилежними за напрямом, на основі інтегральних формул (2.125) отримаємо таке інтегральне подання для компонент розширеного вектора переміщень у тілі із розрізом Γ_C :

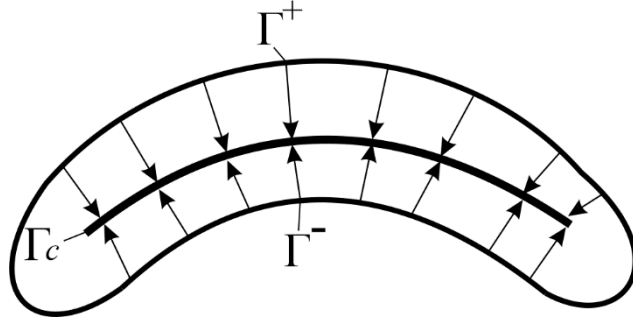


Рис. 2.3. Стягування контуру Γ_i до деякого математичного розрізу Γ_C

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(\xi) = & \int_{\partial S} [U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \int_{\Gamma_C} [U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \iint_S U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \tilde{f}_j(\mathbf{x}) dS. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Тут $\Gamma \equiv \partial S$; $\tilde{t}_i^\pm = \tilde{\sigma}_{ij}^\pm n_j^\pm$ (n_j^\pm – компоненти вектора нормалей \mathbf{n}^\pm до поверхонь Γ_C^\pm), а знаками “+” та “-” позначено величини що відносяться до поверхонь Γ_C^+ та Γ_C^- , утворених математичним розрізом Γ_C .

Для спрощення викладок надалі не враховуватимемо в (2.128) останній член, зумовлений дією об’ємних сил та вільних зарядів, тобто вважатимемо, що $\tilde{f}_i \equiv 0$.

Спрямовуючи внутрішню точку ξ до точки $\mathbf{y} \in \Gamma$ межі тіла та вважаючи, що в точці \mathbf{y} крива Γ гладкою, аналогічно до [144, 160, 193] із (2.128) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння стосовно переміщень та електричного і магнітного потенціалів [152]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{u}_i(\mathbf{y}) = & \int_{\Gamma_C^+} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \text{RPV} \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.129)$$

де символами RPV позначено величину невластивого інтеграла (Riemann principal value); CPV – головне значення інтеграла (Cauchy principal value). Так само для точки колокації \mathbf{y} , що лежить на гладкій ділянці розрізу Γ_c , отримаємо інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma \tilde{u}_i(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma_c^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & - \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.130)$$

Забезпечивши в обчислювальній схемі вимогу, щоб точка колокації \mathbf{y} не потрапляла у точку зламу, інтегральне рівняння (2.130) можна використовувати і при числовому моделюванні ламаних розрізів та включень. Диференціюючи (2.130) за y_k та використовуючи узагальнений магнітоелектропружний аналог (2.19) закону Гука, з урахуванням зв'язку $n_i^+ = -n_i^-$ отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \tilde{t}_i(\mathbf{y}) = & n_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right. \\ & - \text{HPV} \int_{\Gamma_c^+} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & \left. + \int_{\Gamma} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \quad (2.131)$$

де HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтеграла (Hadamard principal value). Ядра інтегралів у (2.131) мають вигляд

$$\begin{aligned} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \tilde{C}_{ijpm} \frac{\partial U_{pk}}{\partial y_m} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j} p_\alpha) B_{i\alpha} A_{k\alpha} \frac{1}{Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right], \\ S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \tilde{C}_{ijpm} \frac{\partial T_{pk}}{\partial y_m} = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j} p_\alpha) B_{i\alpha} B_{k\alpha} \frac{n_2 - n_1 p_\alpha}{[Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})]^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.132)$$

У відомих виразах [144, 160, 193] для ядер $D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ $S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ додатково крім матриць \mathbf{A} та \mathbf{B} фігурують ще й магнітоелектропружні сталі \tilde{C}_{ijpm} матеріалу, що порівняно з (2.132) ускладнює обчислювальний алгоритм.

Нехай Γ_c є серединною поверхнею тонкого включення. Тоді умови взаємодії МЕП тіла з неоднорідністю, що моделюється за принципом спряження континуумів різної вимірності, відповідно до (2.122), (2.130) та (2.131) зручно подати у вигляді функційних залежностей

$$\Sigma \tilde{u}_i(\mathbf{y}) = F_i^u(\mathbf{y}, \Sigma \tilde{t}_j, \Delta \tilde{u}_j), \quad \Sigma \tilde{t}_i(\mathbf{y}) = F_i^t(\mathbf{y}, \Sigma \tilde{t}_j, \Delta \tilde{u}_j). \quad (2.133)$$

Тоді система інтегральних рівнянь для задач магнітоелектропружності тіл із тонкими включеннями набуде вигляду [152]

- коли точка колокації \mathbf{y} лежить на гладкій поверхні Γ тіла:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{u}_i(\mathbf{y}) = & \int_{\Gamma_c^+} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \text{RPV} \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}); \end{aligned} \quad (2.134)$$

- коли точка колокації \mathbf{y} лежить на гладкій серединній поверхні Γ_c^+ неоднорідності

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_i^u(\mathbf{y}, \Sigma \tilde{t}_j, \Delta \tilde{u}_j) = & \text{RPV} \int_{\Gamma_c^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & - \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2} F_i^t(\mathbf{y}, \Sigma \tilde{t}_j, \Delta \tilde{u}_j) = & n_j^+(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + n_j^+(\mathbf{y}) \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & - n_j^+(\mathbf{y}) \text{HPV} \int_{\Gamma_c^+} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.135)$$

Тобто, поставлена задача зведена до знаходження із системи інтегральних рівнянь (2.134), (2.135) невідомих стрибків переміщень, електричного і

магнітного потенціалів $\Delta\tilde{u}_i$ та напружень, електричного зміщення і магнітної індукції $\Delta\tilde{\sigma}_{in} = (\tilde{\sigma}_{ij}^+ - \tilde{\sigma}_{ij}^-)n_j^+ = \tilde{\sigma}_{ij}^+n_j^+ + \tilde{\sigma}_{ij}^-n_j^+ = \Sigma\tilde{t}_i$ на берегах математичного розрізу Γ_C та не заданих крайовими умовами функції \tilde{u}_i чи \tilde{t}_i на межі Γ тіла. Якщо всі крайові функції визначені, то поле переміщень та електричного і магнітного потенціалів можна обчислити із використанням співвідношення (2.128). Після диференціювання (2.128) можна визначити поле напружень, електричних зміщень та магнітної індукції у довільній точці ξ тіла

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{ij}(\xi) = & \int_{\Gamma} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \xi)\tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \xi)\tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \int_{\Gamma_C^+} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \xi)\Sigma\tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \xi)\Delta\tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (2.136)$$

2.15. Побудова інтегральних рівнянь магнітоелектропружності на основі формалізму Стро

Зв'язок (2.54) між комплексними потенціалами Стро та розширеними векторами переміщень і функції напружень дає можливість безпосередньо отримати розширену тотожність Сомільяни для двовимірних задач магнітоелектропружності [52, 157].

Для цього розглянемо безмежну площину із системою гладких розімкнутих контурів $\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$, що не перетинаються. Виходячи зі співвідношень (2.54) та (2.87) бачимо, що для того, щоб комплексні потенціали Стро $F_\alpha(z_\alpha)$ були голоморфними у комплексних площинах z_α , необхідним і достатнім є виконання таких умов:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Sigma F_\alpha(Z_\alpha(\mathbf{y})) &= \frac{1}{2\pi i} \text{CPV} \int_{\Gamma} \frac{\Delta F_\alpha(Z_\alpha(\mathbf{x}))}{Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})} dZ_\alpha(\mathbf{x}) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \text{CPV} \int_{\Gamma} \frac{A_{j\alpha}\Delta\tilde{\varphi}_j(\mathbf{x}) + B_{j\alpha}\Delta\tilde{u}_j(\mathbf{x})}{Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})} dZ_\alpha(\mathbf{x}),\end{aligned}\quad (2.137)$$

де $Z_\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + p_\alpha x_2$; $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$.

Відповідно до (2.38) похідна від розширеної функції напружень $\tilde{\varphi}$ за дуговою координатою s кривої Γ дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_i}{\partial s} &= \frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s} = -\Delta \tilde{\sigma}_{i2} n_2 - \Delta \tilde{\sigma}_{i1} n_1 = \\ &= -\Delta \tilde{\sigma}_{ij} n_j = -(\tilde{\sigma}_{ij}^+ n_j^+ + \tilde{\sigma}_{ij}^- n_j^-) = -\Sigma \tilde{t}_i. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Тому

$$\begin{aligned} \text{CPV} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\varphi}_j(\mathbf{x})}{Z_{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} dZ_{\alpha}(\mathbf{x}) &= \text{CPV} \int_{\Gamma} \Delta \tilde{\varphi}_j(\mathbf{x}) d(\ln Z_{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{y})) = \\ &= \Delta \tilde{\varphi}_j(\mathbf{x}) \ln Z_{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \Big|_a^b + \text{RPV} \int_{\Gamma} \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) \ln Z_{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.139)$$

Зважаючи на (2.139), балансове рівняння $\int_{\Gamma} \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = -\Delta \tilde{\varphi}_j \Big|_a^b = 0$,

співвідношення $dZ_{\alpha} = -(n_2 - p_{\alpha} n_1) d\Gamma$ та інтегруючи (2.137) частинами отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma F_{\alpha}(Z_{\alpha}(\mathbf{y})) &= \frac{1}{2\pi i} \text{RPV} \int_{\Gamma} A_{j\alpha} \ln Z_{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \text{CPV} \int_{\Gamma} \frac{B_{j\alpha}(n_2 - n_1 p_{\alpha})}{Z_{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x}) dZ_{\alpha}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.140)$$

де n_1, n_2 – компоненти вектора нормалі $\mathbf{n} = \mathbf{n}^+$ до кривої Γ у точці \mathbf{x} ; $\tilde{t}_i^{\pm} = \tilde{\sigma}_{ij}^{\pm} n_j^{\pm}$ – граничні значення компонент розширеного вектора напружень. При цьому комплексні потенціали Стро у довільній точці $\xi \notin \Gamma$ площини відповідно до (2.88), (2.140) означені виразами

$$\begin{aligned} F_{\alpha}(Z_{\alpha}(\xi)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[A_{j\alpha} \ln Z_{\alpha}(\mathbf{x}-\xi) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - \frac{B_{j\alpha}(n_2 - n_1 p_{\alpha})}{Z_{\alpha}(\mathbf{x}-\xi)} \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.141)$$

На основі (2.38), (2.49) та (2.140) отримуємо такі сингулярні інтегральні рівняння для задач магнітоелектропружності [157], [52]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma\tilde{u}_i(\mathbf{y}) &= \text{RPV} \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma\tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&\quad - \text{CPV} \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta\tilde{u}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \\
\frac{1}{2}\Delta\tilde{t}_i(\mathbf{y}) &= n_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma\tilde{t}_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right. \\
&\quad \left. - \text{HPV} \int_{\Gamma} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right].
\end{aligned} \tag{2.142}$$

У (2.142) сингулярні та гіперсингулярні інтеграли слід обчислювати в сенсі головного значення чи скінченної частини.

Відповідно до (2.38), (2.49) та (2.141) компоненти розширених вектора переміщень та тензора напружень означені виразами

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_i(\xi) &= \int_{\Gamma} \left[U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma\tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Delta\tilde{u}_j(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}), \\
\tilde{\sigma}_{ij}(\xi) &= \int_{\Gamma} \left[D_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma\tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) \Delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{2.143}$$

У рівняннях (2.142), (2.143) ядра задані співвідношеннями (2.126), (2.132). Відповідно до [34, 42] формули для замкнутих контурів можна трактувати як частковий випадок формул для розімкнутих контурів. Для цього слід лише вважати, що на замкнутому контурі $F_{\alpha}^+ = F_{\alpha}$, $F_{\alpha}^- = 0$, тобто $\Sigma\tilde{t}_j = \Delta\tilde{t}_j = \tilde{t}_j$, $\Delta\tilde{u}_j = \Sigma\tilde{u}_j = \tilde{u}_j$.

Інтегральні рівняння (2.142) та подання (2.143) аналогічні до співвідношень (2.128), (2.136), отриманих на підставі теорем взаємності робіт. Єдиною відмінністю є неврахування у (2.142), (2.143) дії масових сил. Це зумовлено тим, що формалізм Стро подає розв'язок однорідних задач магнітоелектропружності. Подібність інтегральних формул та рівнянь, отриманих на підставі двох підходів, дає можливість інтерпретувати розширену формулу Сомільяни як магнітоелектропружний аналог формули Коші (2.88) чи формули Гріна.

2.16. Особливість розв'язку інтегральних рівнянь магнітоелектропружності тіл із тонкими включеннями. Узагальнені коефіцієнти інтенсивності

Враховуючи, що гіперсингулярний інтеграл, взятий в сенсі скінченної частини, можна інтегрувати частинами [34], отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c^+} \frac{\Delta \tilde{u}_i(\mathbf{x})(n_2 - n_1 p_\alpha) d\Gamma(\mathbf{x})}{Z_\alpha^2(\mathbf{x} - \xi)} &= - \int_{\Gamma_c^+} \frac{\Delta \tilde{u}_i(s) dZ_\alpha(s)}{Z_\alpha^2(\mathbf{x}(s) - \xi)} = \\ &= \frac{\Delta \tilde{u}_j(s)}{Z_\alpha(\mathbf{x} - \xi)} \Big|_{\mathbf{x}=y_0}^{\mathbf{x}=y_n} - \int_{\Gamma_c^+} \frac{[\partial \Delta \tilde{u}_i(s) / \partial s] ds}{Z_\alpha(\mathbf{x}(s) - \xi)} \end{aligned} \quad (2.144)$$

Зважаючи на умови нерозривності переміщень та електричного і магнітного потенціалів на кінцях математичного розрізу $\Delta \tilde{u}_i(\mathbf{y}_0) = \Delta \tilde{u}_i(\mathbf{y}_n) = 0$, за допомогою (2.144) система рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_i^u(\mathbf{y}, \Sigma \tilde{t}_j, \Delta \tilde{u}_j) &= \text{RPV} \int_{\Gamma_c^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.145)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_i^t(\mathbf{y}, \Sigma \tilde{t}_j, \Delta \tilde{u}_j) &= n_j^+(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ n_j^+(\mathbf{y}) \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- n_j^+(\mathbf{y}) \text{HPV} \int_{\Gamma_c^+} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.146)$$

після диференціювання першого рівняння зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Коші [152], [51], [50]. Після діагоналізації з урахуванням моделей (2.110) або (2.120) тонкого включення отримуємо систему рівнянь, характеристичну частину [14] кожного з яких можна подати у вигляді

$$K^0 \psi \equiv \frac{b(s_0)}{i\pi} \int_{-a}^a \frac{\psi(s) ds}{s - s_0}, \quad (2.147)$$

де ψ – лінійні комбінації крайових функцій $\partial\Delta\tilde{u}_i(s)/\partial s$ та $\Sigma\tilde{t}_i$. Отже, відповідно до [14] $\psi = f(s)\omega(s)$, де $f(s)$ – регулярна функція, а $\omega(s) = (1 - s/a)^{-1/2}(1 + s/a)^{-1/2}$ – канонічна функція. Тобто біля торців включення крайові функції змінюються так:

$$\Delta\tilde{u}_i(s) = \Delta\tilde{u}_i^0\sqrt{s} + O(s), \quad \Sigma\tilde{t}_i(s) = \Sigma\tilde{t}_i^0(s)/\sqrt{s} + O(1) \quad (2.148)$$

де s – дугова координата, що відраховується від вершини неоднорідності. Зважаючи на (2.144) і (2.148) та асимптотичну поведінку сингулярних інтегралів біля вершин розімкнутої дуги [42]

$$\int_{ac} \frac{f(t)dt}{\sqrt{c-t(t-z)}} \approx \frac{\pi f(c)}{\sqrt{z-c}} \quad (2.149)$$

при $z = c + \varepsilon e^{i\theta}$, із (2.132) та (2.136) отримаємо асимптотичний розподіл напружень, електричних зміщень та магнітної індукції біля вершини тонкого включення:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) = \text{Im} \left\{ \left(\delta_{2j} - \delta_{1j} p_\alpha \right) B_{i\alpha} \left(\frac{1}{2} B_{k\alpha} \Delta\tilde{u}_k^0 + A_{k\alpha} \Sigma\tilde{t}_k^0 \right) [Z_\alpha(\mathbf{x})]^{-1/2} \right\}. \quad (2.150)$$

Вираз (2.150) записано для локальної системи координат, центр O якої поміщено у вершину включення, а вісь Ox_1 спрямовано уздовж дотичної до його серединної лінії. Матриці \mathbf{A} та \mathbf{B} , а також корені p_α характеристичного рівняння (2.30) необхідно обчислювати з урахуванням орієнтації цієї локальної системи координат відносно системи, в якій обчислено електричні та пружні сталі матеріалу

За аналогією із задачами теорії тріщин уведемо узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень, електричних зміщень та магнітної індукції (КІНЕЗМІ) залежностями

$$\begin{aligned} \tilde{k}_i^{(1)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tilde{\sigma}_{i2}(r, \theta) \Big|_{\theta=0, \Sigma\tilde{t}^0=0}, \\ \tilde{k}_i^{(2)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tilde{\sigma}_{i2}(r, \theta) \Big|_{\theta=\pi, \Delta\tilde{u}^0=0}. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Тут r – відстань до вершини неоднорідності; θ – полярний кут локальної системи координат; $\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = [K_{21}, K_{11}, K_{31}, K_{41}, K_{51}]$, $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = [K_{12}^{(2)}, K_{22}^{(2)}, K_{32}, K_{42}, K_{52}]$ –

вектори узагальнених КІНЕЗМІ K_{ij} ; причому $K_{i1} = f(\Delta\tilde{u}_j^0)$, $K_{i2} = f(\Delta\tilde{t}_j^0)$. Для тріщин $K_{11} = K_I$, $K_{21} = K_{II}$, $K_{31} = K_{III}$, $K_{41} = K_{IV} \equiv K_D$, $K_{51} = K_V \equiv K_B$; $K_{12}^{(2)} = K_{22}^{(2)} = K_{32} = K_{42} = K_{52} = 0$, де $K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV} \equiv K_D, K_V \equiv K_B$ класичні КІНЕЗМІ теорії тріщин [113, 160, 188].

Відповідно до означення (2.151) із асимптотичних виразів (2.148), (2.150) отримаємо зв'язки узагальнених КІНЕЗМІ із крайовими функціями

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta\tilde{\mathbf{u}}(s); \quad \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(s), \quad (2.152)$$

де $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ – дійсний тензор Бернет – Лоте [152], що залежить лише від властивостей матеріалу і при повертанні осей координат Ox_1x_2 , в яких обчислюються пружні сталі, його компоненти змінюються за тензорним законом. Перший вираз у (2.152) збігається з відповідним для КІНЕЗМІ тріщин, поданим у [160, 193]. Другий отримано вперше в праці [55].

Дві перші компоненти $K_{12}^{(2)}, K_{22}^{(2)}$ вектора $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$ відрізняються від узагальнених КІН K_{12}, K_{22} , які вводять для суто пружних задач теорії тонких включень в ізотропних та анізотропних матеріалах [48, 79, 81] наступним чином

$$\begin{aligned} K_{11} + K_{12} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, \theta)|_{\theta=0}, \\ K_{21} + K_{22} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(r, \theta)|_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (2.153)$$

Щоб знайти K_{12}, K_{22} через $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$ потрібно використати формулу

$$k_i^{(2)} = S_{ji} \tilde{k}_j^{(2)} \quad (i = 1, 2; \quad j = 1, \dots, 5). \quad (2.154)$$

Тут $\mathbf{k}^{(2)} = [K_{22}, K_{12}]^T$ – вектор узагальнених КІН; $\mathbf{S} = \sqrt{-1}(2\mathbf{A}\mathbf{B}^T - \mathbf{I})$ – другий дійсний тензор Бернета – Лоте [152, 160].

Узагальнені коефіцієнти інтенсивності теплового потоку означені виразами

$$K_{h1} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} k_t \Delta\theta(s); \quad K_{h2} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma h_n(s).$$

Таким чином, поля переміщень та електричного і магнітного потенціалів, напружень, температури і теплового потоку в околі поблизу вершини включення

повністю характеризуються узагальненими КІНЕЗМІ і визначаються наступними залежностями:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{u}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{A} \langle \sqrt{Z_*} \rangle \left(\sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} - 2 \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} \right) \right\}; \\
 \tilde{\Phi} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \langle \sqrt{Z_*} \rangle \left(\sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} - 2 \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} \right) \right\}; \\
 \theta &= \frac{1}{k_t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \left(K_{h1} + \sqrt{-1} K_{h2} \right) \sqrt{Z_t} \right\}; \\
 \vartheta &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \left(\sqrt{-1} K_{h1} - K_{h2} \right) \sqrt{Z_t} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.155}$$

Де $\langle \sqrt{Z_*} \rangle = \operatorname{diag} \left[\sqrt{Z_1}, \dots, \sqrt{Z_5} \right]$. Компоненти тензора напружень та векторів електричних зміщень і магнітної індукції визначаються через компоненти розширеної функції напружень $\tilde{\Phi}$ за формулами (2.38) так

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_1 = [\tilde{\sigma}_{i1}] &= -\tilde{\Phi}_{,2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \langle p_* \sqrt{Z_*} \rangle \left(\sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} - 2 \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} \right) \right\}; \\
 \tilde{\sigma}_2 = [\tilde{\sigma}_{i2}] &= -\tilde{\Phi}_{,1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \langle \sqrt{Z_*} \rangle \left(\sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} - 2 \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.156}$$

2.17. Схема методу граничних елементів для розв'язування інтегральних рівнянь магнітоелектропружності тіл із тонкими неоднорідностями

Систему крайових інтегральних рівнянь (2.134), (2.135) сумісно з моделлю тонкого включення (2.110), (2.111) розв'язуватимемо методом граничних елементів [159]. Для цього криві Γ та Γ_c апроксимуємо за допомогою відповідно n та n_c прямолінійних відрізків – граничних елементів Γ_q [152, 156].

На кожному елементі виберемо по 3 вузлові точки: одну в центрі, а дві інші – на відстані $1/3$ довжини елемента по обидва боки від центральної (розривний тривузловий граничний елемент). Тоді точка колокації завжди потраплятиме на гладку ділянку утвореного апроксимацією контуру, тобто, висунуті до

інтегральних рівнянь умови будуть забезпечені. Крайові функції $\tilde{t}_j, \tilde{u}_j, \Sigma\tilde{t}_j, \Delta\tilde{u}_j$, апроксимуємо на елементі за їхніми вузловими значеннями [152, 156]

$$[\tilde{t}_j, \tilde{u}_j, \Sigma\tilde{t}_j, \Delta\tilde{u}_j](\xi) \approx \sum_{p=1}^3 [\tilde{t}_j^{q,p}, \tilde{u}_j^{q,p}, \Sigma\tilde{t}_j^{q,p}, \Delta\tilde{u}_j^{q,p}] \phi_p(\xi). \quad (2.157)$$

ξ – параметр розташування точки на елементі, означений на проміжку $-1 \leq \xi \leq 1$ так:

$$d\Gamma_q = \frac{L_q}{2} d\xi = J_q d\xi$$

де J_q – модуль якобіана заміни змінних на елементі Γ_q .

У цей спосіб систему сингулярних інтегральних рівнянь (2.134), (2.135) сумісно з моделлю (2.117), (2.118) тонкого включення зведемо до системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно шуканих вузлових значень $\tilde{t}_j^{q,p}, \tilde{u}_j^{q,p}, \Sigma\tilde{t}_j^{q,p}, \Delta\tilde{u}_j^{q,p}$ крайових функцій $\tilde{t}_j, \tilde{u}_j, \Sigma\tilde{t}_j, \Delta\tilde{u}_j$.

Базові функції для елементів, що не прилягають до торців неоднорідності, виберемо для (2.157) як і в [159] у формі поліномів Лагранжа для системи вузлів $\xi_p = [-2/3; 0; 2/3]$ тривузлового розривного граничного елемента:

$$\phi_1 = \xi \left(\frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right), \quad \phi_2 = \left(1 - \frac{3}{2} \xi \right) \left(1 + \frac{3}{2} \xi \right), \quad \phi_3 = \xi \left(\frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right) \quad (2.158)$$

Для підвищення точності методу та зручності визначення узагальнених КІНЕЗ введемо спеціальні тривузлові розривні граничні елементи, що моделюють приторцеві ділянки тонкого включення [152, 156]. Згідно з (2.148), відповідні базові функції задамо у вигляді:

- для розривів переміщень та електричного і магнітного потенціалів

$$\phi_p^{\Delta u} = \Phi_{p1}^{\Delta u} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2}^{\Delta u} \rho + \Phi_{p3}^{\Delta u} \rho^{3/2} \quad (p=1,2,3); \quad (2.159)$$

- для стрибків напружень, електричного зміщення та магнітної індукції

$$\phi_p^{\Sigma t} = \Phi_{p1}^{\Sigma t} \rho^{-1/2} + \Phi_{p2}^{\Sigma t} + \Phi_{p3}^{\Sigma t} \sqrt{\rho} \quad (p=1,2,3). \quad (2.160)$$

Тут $\rho = 1 \pm \xi$; $\Phi_{pj}^{\Delta u}, \Phi_{pj}^{\Sigma t}$ – матриці сталих, що визначаються з рівнянь

$$\phi_p(\xi_p) = 1, \phi_p(\xi_{j \neq p}) = 0 \quad (2.161)$$

ξ_p – координати вузлових точок на граничному елементі.

Запропоновані базові функції (2.159), (2.160) дають можливість безпосередньо визначати за формулами (2.152) не тільки КІНЕЗМІ електрично непроникних тріщин, а й узагальнені КІНЕЗМІ для тонких включень з довільними пружними, електричними та магнітними властивостями.

Базові функції у формі (2.159) мають значну перевагу також і при моделюванні тріщин, навіть порівняно зі спеціальними функціями [143] типу $\phi_p = \Phi_{p1}\sqrt{\rho} + \Phi_{p2}\rho + \Phi_{p3}$, оскільки останні вводять сталу складову в розриви переміщень у вершині дефекту, що фізично невиправдано. Саме тому у роботі [143] КІН визначалися все ж за допомогою J – інтеграла, а не безпосередньо як коефіцієнт при $\sqrt{\rho}$ (що було би природно).

Також при числовому моделюванні тріщин функції (2.159) зручніші від застосованих у [144] виразів $\phi_p = \sqrt{\rho}(\Phi_{p1} + \Phi_{p2}\rho + \Phi_{p3}\rho^2)$ оскільки (2.159) математично коректніше описують асимптотичне поведіння сингулярного інтеграла типу Коші біля кінців розімкнутої дуги.

Із введенням базових функцій (2.159), (2.160) у числовій схемі методу граничних елементів необхідно обчислювати такі особливі інтеграли

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 U(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi_p)) \phi^{\Sigma t}(\xi) d\xi, I_2 = \int_{-1}^1 T(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi_p)) \phi^{\Delta u}(\xi) d\xi, \\ I_3 &= \int_{-1}^1 D(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi_p)) \phi^{\Sigma t}(\xi) d\xi, I_4 = \int_{-1}^1 S(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi_p)) \phi^{\Delta u}(\xi) d\xi; \end{aligned} \quad (2.162)$$

які, відповідно до (2.104) та (2.110), є слабо (I_1), сильно (I_2, I_3) та гіперсингулярними (I_4).

При обчисленні інтегралів типу I_1 продуктивними виявилися нелінійні відображення [121]. Однак вони згладжують підінтегральний вираз лише в особливій точці ξ_p , а не на кінцях проміжку інтегрування, що необхідно при використанні базових функцій (2.160). Тому при обчисленні інтеграла I_1

доцільно розбити інтервал особливою точкою на два, і нормувати ці проміжки інтегрування до інтервалу $(0, 1)$ так, щоб особлива точка потрапляла в точку $\xi = 0$. Після цього проміжок інтегрування відображається в себе за допомогою перетворення

$$\xi = 3s^2 - 2s^3, d\xi = 6(s - s^2)ds, \quad (2.163)$$

що згладжує підінтегральний вираз на обох кінцях проміжку інтегрування.

Для обчислення інших сингулярних інтегралів I_2, I_3, I_4 побудуємо спеціальні квадратури інтерполяційного типу із вузлам Чебишева

$$\int_{-1}^1 \frac{f(s)}{s} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{\text{CPV}} f(\sigma_k), \quad \int_{-1}^1 \frac{f(s)}{s^2} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{\text{HPV}} f(\sigma_k), \quad (2.164)$$

де $\sigma_k = \cos\left[\left[\frac{(2k-1)}{\pi}\right](2n)\right]$ – нулі поліномів Чебишева; n – парне додатне ціле число; інтеграли записані в сенсі головного значення чи скінченної частини. Квадратури (2.164) є точними, коли $f(s)$ є поліномом степеня, меншого за n .

Коефіцієнти A_k^{CPV} та A_k^{HPV} у формулах (2.164) можна обчислити, підставивши в (2.164) замість $f(s)$ одночлени степеня, нижчого за n . Тоді отримаємо такі системи рівнянь стосовно невідомих A_k^{CPV} та A_k^{HPV} :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{s} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{\text{CPV}} = 0, \quad (2.165)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{s^j}{s} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{\text{CPV}} \sigma_k^j = \frac{1 - (-1)^j}{j} \quad (j = 1, \dots, n-1);$$

$$\int_{-1}^1 \frac{s}{s^2} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{\text{HPV}} \sigma_k = 0, \quad (2.166)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{s^j}{s^2} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{\text{HPV}} \sigma_k^j = \frac{1 + (-1)^j}{j-1} \quad (j = 0, 2, 3, \dots, n-1).$$

При обчисленні сингулярних і гіперсингулярних інтегралів за квадратурами (2.164) пропонується використовувати нелінійне відображення

$$\xi = \mu(s) = \xi_p + \left(1 + \left(-2\xi_p + \left(1/2 + (\xi_p - s/2)s\right)s\right)s\right)s, \quad (2.167)$$

яке завдяки своїм властивостям

$$\begin{aligned} \mu(\pm 1) = \pm 1, \quad \mu'(s)|_{s=\pm 1} = 0, \quad \mu(0) = \xi_p; \\ |\mu(s)| < 1 \quad (-1 < s < 1, \xi_p = [-2/3; 0; 2/3]) \end{aligned} \quad (2.168)$$

дає можливість згладити підінтегральний вираз біля кінців проміжку інтегрування, а також перенести особливу точку ξ_p в точку $s = 0$. Із використанням відображення (2.167) та спеціальних квадратур (2.164) інтеграли I_2, I_3, I_4 обчислюються так:

$$\begin{aligned} \{I_2, I_3\} &= \int_{-1}^1 \{T, D\}(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi_p)) \phi(\xi) d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \{T, D\}[\mathbf{x}(\mu(s)), \mathbf{y}(\xi_p)] \phi(\mu(s)) \mu'(s) ds \\ &\approx \sum_{k=1}^n A_k^{\text{CPV}} \{T, D\}[\mathbf{x}(\mu(\sigma_k)), \mathbf{y}(\xi_p)] \phi(\mu(\sigma_k)) \sigma_k \mu'(\sigma_k), \end{aligned} \quad (2.169)$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{-1}^1 S(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi_p)) \phi^{\Delta u}(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 S[\mathbf{x}(\mu(s)), \mathbf{y}(\xi_p)] \phi^{\Delta u}(\mu(s)) \mu'(s) ds \\ &\approx \sum_{k=1}^n A_k^{\text{HPV}} S[\mathbf{x}(\mu(\sigma_k)), \mathbf{y}(\xi_p)] \phi^{\Delta u}(\mu(\sigma_k)) \sigma_k^2 \mu'(\sigma_k). \end{aligned} \quad (2.170)$$

Для згладження підінтегрального виразу на кінцях проміжку інтегрування при обчисленні регулярних інтегралів від добутку відповідних ядер на спеціальні базові функції (2.159) та (2.160) слід використовувати таке поліноміальне відображення:

$$\xi = \frac{1}{2}(3s - s^3), \quad d\xi = \frac{1}{2}(3 - 3s^2) ds. \quad (2.171)$$

РОЗДІЛ 3.

ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНИЙ МЕТОД ФУНКЦІЙ СТРИБКА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ НЕОДНОРІДНОГО АНІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ ЗІ ЗМІШАНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ НА ЙОГО МЕЖІ

3.1. Побудова інтегральних подань комплексних потенціалів для анізотропного півпростору [179]

З огляду на те, що змішані крайові умови на межі півпростору можна задавати лише для механічного поля, то у цьому розділі зосередимося саме на пружній взаємодії.

Розглянемо термопружний півпростір $x_2 > 0$, що містить систему гладких замкнутих контурів $\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i$ (рис. 3.1).

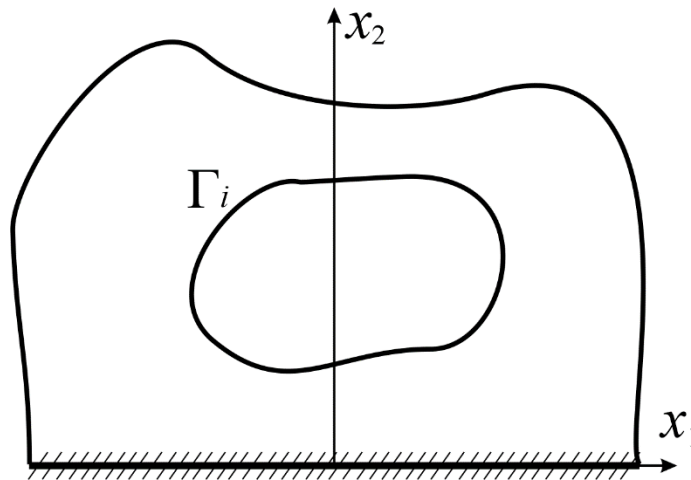


Рис. 3.1. Термопружний анізотропний півпростір із системою контурів

Відповідно до інтегральної формули Коші (2.84) вектор $\mathbf{f}(z_*)$ комплексних потенціалів Стро у довільній точці z_* ($\text{Im } z_* > 0$) півпростору можна обчислити за його контурними значеннями:

$$\mathbf{f}(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1), \quad (\text{Im } z_* > 0); \quad (3.1)$$

де $\langle F(z_*) \rangle = \text{diag}[F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3)]$. Додатним напрямом обходу контурів є той, за якого зайнята тілом область залишається ліворуч.

Очевидно, що за межами півпростору інтеграли Коші (3.1) дорівнюють нулю, тобто для точок \bar{z}_* ($\text{Im } z_* > 0$) формула (3.1) набуде вигляду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) = 0 \quad (\text{Im } z_* > 0). \quad (3.2)$$

Подібні інтегральні формули можуть бути записані і для функції $g'(z_t)$.

$$g'(z_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_t}{\tau_t - z_t} \right\rangle g'(\tau_t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_t} \right\rangle g'(x_1), \quad (\text{Im } z_* > 0) \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_t}{\tau_t - \bar{z}_t} \right\rangle g'(\tau_t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_t} \right\rangle g'(x_1) = 0, \quad (\text{Im } z_* > 0). \quad (3.4)$$

Отримані інтегральні подання (3.1) та (3.3) містять лінійні інтеграли уздовж нескінченної межі півпростору, що є незручним для подальших обчислень. Оскільки крайові умови на межі півпростору відомі, ці інтеграли можуть бути виключені з формул (3.1), (3.3). Крайові умови в загальному випадку мають як тепловий (3.5a) – (3.5b), так і механічний (3.5c) – (3.5f), зміст, а саме:

- теплоізольована поверхня півпростору

$$\mathcal{A}(x_1) = 0, \quad \forall x_2 = 0; \quad (3.5a)$$

- поверхня півпростору з нульовою температурою точок межі

$$\theta(x_1) = 0, \quad \forall x_2 = 0; \quad (3.5b)$$

- поверхня півпростору з нульовим нормальним переміщенням точок межі та нульовим нормальним напруженням

$$u_1(x_1) = 0, \quad \varphi_1(x_1) = 0; \quad (3.5c)$$

- поверхня півпростору з нульовим нормальним переміщенням точок межі та нульовим дотичним напруженням

$$u_1(x_1) = 0, \quad \varphi_2(x_1) = 0; \quad (3.5d)$$

- поверхня півпростору з нульовим дотичним переміщенням точок межі та нульовим нормальним напруженням

$$u_2(x_1) = 0, \varphi_1(x_1) = 0; \quad (3.5e)$$

- поверхня півпростору з нульовим дотичним переміщенням точок межі та нульовим дотичним напруженням

$$u_2(x_1) = 0, \varphi_2(x_1) = 0. \quad (3.5f)$$

Розглянемо крайову задачу з механічною (3.5d) та тепловою (3.5a) крайовими умовами, і для цієї задачі продемонструємо метод виключення інтегралів по необмеженій області. Аналогічно можна розглядати термомагнітоелектропружні півпростори задаючи відповідні електричні та магнітні крайові умови першого (поверхневий електричний заряд, нормальна складова вектору магнітної індукції) або другого (електричний та магнітний потенціал) роду.

3.1.1. Теплопровідність

Згідно крайової умови (3.5a) та співвідношення (2.64), інтегральна формула для функції $g'(z_t)$ запишеться у вигляді

$$g'(z_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g'(\tau_t) d\tau_t}{\tau_t - z_t} + \frac{1}{4\pi k_t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{G}(x_1) dx_1}{x_1 - z_t} \quad (3.6)$$

Обчисливши комплексно спряжений до інтегралу Коші вираз та використавши (2.64), і (3.4), отримаємо значення інтеграла уздовж межі півпростору:

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(x_1) dx_1}{x_1 - z_t} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{g'(\tau_t)} d\bar{\tau}_t}{\bar{\tau}_t - z_t} \quad (3.7)$$

Підставивши (3.7) у (3.6), матимемо інтегральне подання комплексної функції $g'(z_t)$:

$$g'(z_t) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \frac{g'(\tau_t) d\tau_t}{\tau_t - z_t} - \int_{\Gamma} \frac{\overline{g'(\tau_t)} d\bar{\tau}_t}{\bar{\tau}_t - z_t} \right]. \quad (3.8)$$

Використовуючи (2.64), можна побудувати інтегральне подання функції $g'(z_t)$ через крайові значення температури і потоку θ і \mathcal{G} :

$$g'(z_t) = \frac{1}{4\pi i} \left[\int_{\Gamma} \frac{(\theta + i\vartheta/k_t) d\tau_t}{\tau_t - z_t} - \int_{\Gamma} \frac{(\theta - i\vartheta/k_t) d\bar{\tau}_t}{\bar{\tau}_t - z_t} \right] \quad (3.9)$$

Рівність (3.9) можна звести до криволінійних інтегралів першого роду. Подання (3.9) в такому випадку запишеться у вигляді

$$g'(z_t) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{n_2(s) - p_t n_1(s)}{\tau_t(s) - z_t} - \frac{n_2(s) - \bar{p}_t n_1(s)}{\bar{\tau}_t(s) - z_t} \right] \theta(s) ds + \frac{1}{4\pi k_t} \int_{\Gamma} \left[\ln(\tau_t(s) - z_t) + \ln(\bar{\tau}_t(s) - z_t) \right] h_n(s) ds. \quad (3.10)$$

На основі (2.57), (2.62) та (3.10) отримаємо інтегральні подання для температури і теплового потоку у довільній точці ξ півпростору $x_2 > 0$:

$$\theta(\xi) = 2\text{Re} \left\{ g'(Z_t(\xi)) \right\} = \int_{\Gamma} \left[\Theta^{\text{hsmc}^*}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - H^{\text{hsmc}^*}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}) \quad (3.11)$$

$$h_i(\xi) = 2k_t \text{Im} \left\{ (\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t) g''(Z_t(\xi)) \right\} = \int_{\Gamma} \Theta_i^{\text{hsmc}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} H_i^{\text{hsmc}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \quad (3.12)$$

де ядра означені виразами:

$$\Theta^{\text{hsmc}^*}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi k_t} \left[\ln |Z_t(\mathbf{x} - \xi)| + \ln |\bar{Z}_t(\mathbf{x}) - Z_t(\xi)| \right], \quad (3.13)$$

$$H^{\text{hsmc}^*}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left\{ \frac{n_2(x) - p_t n_1(x)}{Z_t(x - \xi)} - \frac{n_2(x) - \bar{p}_t n_1(x)}{\bar{Z}_t(x) - Z_t(\xi)} \right\}; \quad (3.14)$$

$$\Theta_i^{\text{hsmc}^{**}} = -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \left\{ \frac{\delta_{i2} - p_t \delta_{i1}}{Z_t(x - \xi)} + \frac{\delta_{i2} - p_t \delta_{i1}}{\bar{Z}_t(x) - Z_t(\xi)} \right\}; \quad (3.15)$$

$$H_i^{\text{hsmc}^{**}} = -\frac{k_t}{2\pi} \text{Re} \left\{ (\delta_{i2} - p_t \delta_{i1}) \left[\frac{n_2(x) - p_t n_1(x)}{[Z_t(x - \xi)]^2} - \frac{n_2(x) - \bar{p}_t n_1(x)}{[\bar{Z}_t(x) - Z_t(\xi)]^2} \right] \right\}. \quad (3.16)$$

Тут $Z_*(\mathbf{x}) = x_1 + p_* x_2$.

3.1.2. Термопружність

Використовуючи крайову умову (3.5d) та подання (2.76) комплексних потенціалів, перепишемо у (3.1) інтеграл по межі півпростору так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle [\mathbf{B}^T \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{B}^T \mathbf{u}'(x_1) - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi}'(x_1)]. \quad (3.17)$$

Інтегруючи (3.17) частинами, з огляду на обмеженість функцій $\mathbf{u}'(x_1)$ та $\boldsymbol{\varphi}'(x_1)$, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} + \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^T \mathbf{u} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - z_*) \rangle \left[\mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{u}'(x_1)}{\partial x_1} + \mathbf{A}^T \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}'(x_1)}{\partial x_1} \right] dx_1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Врахуємо тепер, що відповідно до (2.54), (3.1) та крайових умов (3.5a), (3.5d):

$$\mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{u}'(x_1)}{\partial x_1} + \mathbf{A}^T \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}'(x_1)}{\partial x_1} = \mathbf{m} \theta, \quad (3.19)$$

де

$$\mathbf{m} = \mathbf{B}^T \operatorname{Re}[\mathbf{c}] + \mathbf{A}^T \operatorname{Re}[\mathbf{d}] \quad (3.20)$$

Таким чином інтеграл Коші (3.21) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^T \mathbf{u} + \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - z_*) \rangle \mathbf{m} \theta(x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Підставивши (3.21) у (3.2), запишемо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_*} \right\rangle [\mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}^T \mathbf{u}] = - \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) - \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - \bar{z}_*) \rangle \mathbf{m} \theta(x_1) dx_1 \quad (3.22)$$

Тепер нехай

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}^T \mathbf{u} = \mathbf{C} \mathbf{X},$$

де $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}$, а \mathbf{C} – квадратна матриця, яка буде формуватися на основі матриці

$(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)$; відповідно до крайових умов (3.5c) – (3.5f) із останньої будуть викидатися певні стовпчики (так щоб задовільнити конкретні крайові умови).

Так при умові (3.5c) – $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b_{21} & a_{21} \\ b_{22} & a_{22} \end{pmatrix}$; при (3.5d) – $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b_{21} & a_{11} \\ b_{22} & a_{12} \end{pmatrix}$; при (3.5e) –

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b_{11} & a_{21} \\ b_{12} & a_{22} \end{pmatrix}; \text{ при (3.5f) – } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} b_{11} & a_{11} \\ b_{12} & a_{12} \end{pmatrix}.$$

Зважаючи на це можемо переписати (3.22) у дещо зміненому вигляді:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_*} \right\rangle [\mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}^T \mathbf{u}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{C} \mathbf{X} \\ &= - \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) - \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - \bar{z}_*) \rangle \mathbf{m} \theta(x_1) dx_1, \end{aligned}$$

або у комплексно спряженій формі

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \bar{\mathbf{C}} \mathbf{X} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_*} \right\rangle [\bar{\mathbf{A}}^T \boldsymbol{\varphi} + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{u}] \\ &= - \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_*}{\bar{\tau}_* - z_*} \right\rangle \overline{\mathbf{f}(\tau_*)} - \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - z_*) \rangle \bar{\mathbf{m}} \theta(x_1) dx_1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

З урахуванням умов ортогональності формалізму Стро перший інтеграл у правій частині (3.21) можна подати у вигляді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle [\mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}^T \mathbf{u}] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{C} \mathbf{X} = - \sum_{\beta=1}^3 \mathbf{I}_{\beta} \mathbf{C} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_{\beta}} \right\rangle \bar{\mathbf{C}} \mathbf{X}. \quad (3.24)$$

Тут $\mathbf{I}_1 = \text{diag}[1, 0, 0]$, $\mathbf{I}_2 = \text{diag}[0, 1, 0]$, $\mathbf{I}_3 = \text{diag}[0, 0, 1]$.

Підставивши (3.23) у (3.24) та врахувавши отримане співвідношення, рівність (3.21) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) &= \sum_{\beta=1}^3 \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_{\beta}}{\bar{\tau}_{\beta} - z_*} \right\rangle \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{I}_{\beta} \overline{\mathbf{f}(\tau_*)} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - z_*) \rangle [\mathbf{m} + \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{m}}] \theta(x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

а інтегрування (3.7) дає

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - z_*) \rangle \theta(x_1) dx_1 = -2 \int_{\Gamma} \langle \ln(\bar{\tau}_t - z_*) \rangle \overline{g'(\tau_t)} d\bar{\tau}_t. \quad (3.26)$$

Отже, інтегральну формулу (3.1) тепер вдається записати у формі, що не містить інтегралів уздовж межі півпростору:

$$\mathbf{f}(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \sum_{\beta=1}^3 \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_{\beta}}{\bar{\tau}_{\beta} - z_*} \right\rangle \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{\beta} \overline{\mathbf{f}(\tau_*)} \right. \\ \left. - 2 \int_{\Gamma} \langle \ln(\bar{\tau}_t - z_*) \rangle [\mathbf{m} + \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{m}}] d\bar{\tau}_t \right]. \quad (3.27)$$

З використанням співвідношення (2.76), (2.64), інтегральна формула (3.27) набуде вигляду

$$\mathbf{f}(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \left[- \int_{\Gamma} \left\langle \frac{n_2(s) - p_* n_1(s)}{\tau_*(s) - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^T \right. \\ \left. + \sum_{\beta=1}^3 \left\langle \frac{n_2(s) - \bar{p}_{\beta} n_1(s)}{\bar{\tau}_{\beta}(s) - z_*} \right\rangle \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{\beta} \bar{\mathbf{B}}^T \right] \mathbf{u}(s) ds \\ + \int_{\Gamma} \left[\langle \ln(\tau_*(s) - z_*) \rangle \mathbf{A}^T + \sum_{\beta=1}^3 \langle \ln(\bar{\tau}_{\beta}(s) - z_*) \rangle \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{\beta} \bar{\mathbf{A}}^T \right] \mathbf{t}(s) ds \\ - \int_{\Gamma} \langle \ln(\tau_*(s) - z_*) \rangle (\mathbf{A}^T \operatorname{Re}[\mathbf{d}(n_2 - n_1 p_t)] + \mathbf{B}^T \operatorname{Re}[\mathbf{c}(n_2 - n_1 p_t)]) \theta(s) ds \\ - \int_{\Gamma} \sum_{\beta=1}^3 \langle \ln(\bar{\tau}_{\beta}(s) - z_*) \rangle \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{\beta} (\bar{\mathbf{A}}^T \operatorname{Re}[\mathbf{d}(n_2 - n_1 p_t)] \\ + \bar{\mathbf{B}}^T \operatorname{Re}[\mathbf{c}(n_2 - n_1 p_t)]) \theta(s) ds \\ - \int_{\Gamma} \langle \ln(\bar{\tau}_t(s) - z_*) \rangle [n_2(s) - \bar{p}_t n_1(s)] [\mathbf{m} + \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{m}}] \theta(s) ds \\ - \frac{1}{k_t} \int_{\Gamma} \langle f^*(\tau_*(s) - z_*) \rangle (\mathbf{A}^T \operatorname{Im}[\mathbf{d}] + \mathbf{B}^T \operatorname{Im}[\mathbf{c}]) h_n(s) ds \\ + \frac{1}{k_t} \int_{\Gamma} \langle f^*(\bar{\tau}_t - z_*) \rangle [\mathbf{m} + \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{m}}] h_n(s) ds \\ - \frac{1}{k_t} \int_{\Gamma} \sum_{\beta=1}^3 \langle f^*(\bar{\tau}_{\beta}(s) - z_*) \rangle \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{\beta} (\bar{\mathbf{A}}^T \operatorname{Im}[\mathbf{d}] + \bar{\mathbf{B}}^T \operatorname{Im}[\mathbf{c}]) h_n(s) ds. \quad (3.28)$$

На основі (2.71), (3.6) та (3.27) можна побудувати таку інтегральну тотожність типу Сомільяни для переміщення в довільній точці ξ термопружного півпростору:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A} \mathbf{f}(Z_*(\xi)) + \mathbf{c} g(Z_t(\xi)) \right\} = \int_{\Gamma} [\mathbf{U}^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{t}(\mathbf{x}) \\ - \mathbf{T}^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x})] ds(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.29)$$

де ядра цієї інтегральної залежності означені виразами

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} [\mathbf{A} \langle \ln Z_*(\mathbf{x} - \xi) \rangle] \mathbf{A}^T \\ + \mathbf{A} \sum_{\beta=1}^3 \langle \ln(\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \rangle \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}^T \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi k_t} \operatorname{Im} \left[\mathbf{A} \langle f^*(Z_*(\mathbf{x} - \xi)) \rangle (\mathbf{A}^T \operatorname{Im}[\mathbf{d}] + \mathbf{B}^T \operatorname{Im}[\mathbf{c}]) \right] \\ - \frac{1}{\pi k_t} \operatorname{Im} \left[\sum_{\beta=1}^3 \mathbf{A} \langle f^*(\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \rangle \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{I}_\beta (\bar{\mathbf{A}}^T \operatorname{Im}[\mathbf{d}] + \bar{\mathbf{B}}^T \operatorname{Im}[\mathbf{c}]) \right] \\ - \frac{1}{2\pi k_t} \operatorname{Re} \left[\mathbf{c} \left[f^*(Z_t(\mathbf{x} - \xi)) + f^*(\bar{Z}_t(\mathbf{x}) - Z_t(\xi)) \right] \right] \\ + \frac{1}{\pi k_t} \operatorname{Re} \left[\mathbf{A} \langle f^*(\bar{Z}_t(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \rangle (\mathbf{m} + \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{m}}) \right]; \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{A} \left\langle \frac{n_2(x) - p_* n_1(x)}{Z_*(x - \xi)} \right\rangle \right] \mathbf{B}^T \\ + \mathbf{A} \sum_{\beta=1}^3 \left\langle \frac{n_2(x) - \bar{p}_\beta n_1(x)}{\bar{Z}_\beta(x) - Z_*(\xi)} \right\rangle \mathbf{I}_\beta \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{B}}^T; \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{A} \langle \ln Z_*(\mathbf{x} - \xi) \rangle (\mathbf{A}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{d}(n_2 - p_t n_1)\} \right. \\ \left. + \mathbf{B}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{c}(n_2 - p_t n_1)\}) \right] - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{\beta=1}^3 \left[\mathbf{A} \langle \ln(\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \rangle \right. \\ \left. \times \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{I}_\beta (\bar{\mathbf{A}}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{d}(n_2 - p_t n_1)\} + \bar{\mathbf{B}}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{c}(n_2 - p_t n_1)\}) \right] \\ - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{A} \langle \ln(\bar{Z}_t(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \rangle \mathbf{A}^{-1} \operatorname{Re}[\mathbf{c}](n_2 - \bar{p}_t n_1) \right] \\ \left. + \frac{1}{\pi} \left[\mathbf{c} [n_2 - p_t n_1] \ln Z_t(\mathbf{x} - \xi) - (n_2 - \bar{p}_t n_1) \ln(\bar{Z}_t(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Тут $Z_*(\mathbf{x}) = x_1 + p_*x_2$.

Так само із (2.73), (3.10) та (3.28) отримаємо інтегральне подання для тензора напружень

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_j(\boldsymbol{\xi}) &= [\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{\xi})] = 2\operatorname{Re}\{\mathbf{B}(\delta_{2j} - \delta_{1j}\mathbf{P})\mathbf{f}'(Z_*(\boldsymbol{\xi})) \\
&\quad + \mathbf{d}(\delta_{2j} - \delta_{1j}p_t)g'(Z_t(\boldsymbol{\xi}))\} = \int_{\Gamma} \mathbf{D}_j^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{t}(\mathbf{x})ds(\mathbf{x}) \\
&\quad - \int_{\Gamma} \mathbf{S}_j^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{u}(\mathbf{x})ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{q}_j^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\theta(\mathbf{x})ds(\mathbf{x}) \\
&\quad + \int_{\Gamma} \mathbf{w}_j^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})h_n(\mathbf{x})ds(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{3.34}$$

де ядра означені такими виразами:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_j^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \left\langle \frac{\delta_{2j} - p_*\delta_{1j}}{Z_*(x - \xi)} \right\rangle (\mathbf{A}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{d}(n_2 - p_t n_1)\} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{B}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{c}(n_2 - p_t n_1)\} \right\} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \sum_{\beta=1}^3 \frac{\delta_{2j} - p_*\delta_{1j}}{\bar{Z}_\beta(x) - Z_*(\xi)} \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}}\mathbf{I}_\beta \right. \\
&\quad \left. \times \left(\bar{\mathbf{A}}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{d}(n_2 - p_t n_1)\} + \bar{\mathbf{B}}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{c}(n_2 - p_t n_1)\} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \left\langle \frac{\delta_{2j} - p_*\delta_{1j}}{\bar{Z}_\beta(x) - Z_*(\xi)} \right\rangle \mathbf{A}^{-1} \operatorname{Re}[\mathbf{c}](n_2 - \bar{p}_t n_1) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{d}(\delta_{2j} - p_*\delta_{1j}) \left[\frac{\delta_{2j} - p_*\delta_{1j}}{Z_*(x - \xi)} - \frac{\delta_{2j} - \bar{p}_*\delta_{1j}}{\bar{Z}_t(x) - Z_t(\xi)} \right] \right\} \right. \\
\mathbf{w}_j^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi k_t} \operatorname{Im} \left[-\mathbf{B} \left\langle (\delta_{2j} - \delta_{1j}\mathbf{P}_*) \ln Z_*(x - \xi) \right\rangle (\mathbf{B}^T \operatorname{Im}[\mathbf{c}] + \mathbf{A}^T \operatorname{Im}[\mathbf{d}]) \right] \\
&\quad + \frac{1}{\pi k_t} \operatorname{Im} \left[\sum_{\beta=1}^3 \mathbf{B} \left\langle (\delta_{2j} - \delta_{1j}\mathbf{P}_*) \ln \bar{Z}_\beta(x) - Z_*(\xi) \right\rangle \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}}\mathbf{I}_\beta (\bar{\mathbf{B}}^T \operatorname{Im}[\mathbf{c}] + \bar{\mathbf{A}}^T \operatorname{Im}[\mathbf{d}]) \right] \\
&\quad - \frac{1}{\pi k_t} \operatorname{Re} \left[\sum_{\beta=1}^3 \mathbf{B} \left\langle (\delta_{2j} - \delta_{1j}\mathbf{P}_*) \ln \bar{Z}_t(x) - Z_*(\xi) \right\rangle \mathbf{A}^{-1} \operatorname{Re}[\mathbf{c}] \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\pi k_t} \operatorname{Re} \left[\mathbf{d}(\delta_{2j} - \delta_{1j}\mathbf{P}_t (\ln Z_t(x - \xi) + \ln(\bar{Z}_t(x) - \ln Z_t(\xi)))) \right], \\
\mathbf{D}_j^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \left[\left\langle \frac{\delta_{2j} - p_*\delta_{2j}}{Z_*(x - \xi)} \right\rangle \mathbf{A}^T + \sum_{\beta=1}^4 \left\langle \frac{\delta_{2j} - p_*\delta_{1j}}{\bar{Z}_\beta(x) - Z_*(\xi)} \right\rangle \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}}\mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}^T \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \xi) = & \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B} \left\langle \frac{(\delta_{2j} - p_* \delta_{1j})(n_2 - p_* n_1)}{(Z_*(x - \xi))^2} \right\rangle \mathbf{B}^T \right\} + \\ & + \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}(\delta_{2j} - p_* \delta_{1j}) \sum_{\beta=1}^4 \left\langle \frac{(n_2 - \bar{p}_* n_1)}{(\bar{Z}_\beta(x) - Z_*(\xi))^2} \right\rangle \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}^T \right\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Таким чином для задачі анізотропної термопружності отримано інтегральні подання, що враховують усі типи мішаних крайових умов (3.5a), (3.5d).

Крайові умови на контурах Γ задають лише половину із компонент функцій $\theta(\mathbf{x})$, $h_n(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ та $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ ($\forall \mathbf{x} \in \Gamma$). Тому для гладких замкнутих контурів Γ в термопружному півпросторі їх потрібно доповнити наступними інтегральними рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \theta(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma} \Theta^{\text{hsmc}*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{H}^{\text{hsmc}*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{U}^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{T}^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\ & + \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{r}^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{v}^{\text{hsmc}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.36)$$

де RPV – головне значення невластивого інтеграла; CPV – головне значення інтеграла Коші.

3.2. Числові приклади [179]

Одержані інтегральні рівняння (3.11), (3.12), (3.29), (3.35) разом із моделлю тонких включень [79] були введені в модифікований метод граничних елементів [119, 155]. Тут для демонстрації ефективності та універсальності розробленого методу розв'язано деякі задачі термопружності для анізотропного півпростору. Для розбиття включення використано всього 20 граничних елементів включно з двома спеціальними кінцевими

Розглянемо анізотропний термопружний півпростір $x_2 > 0$, що містить тонке прямолінійне термопружне ізотропне включення завдовжки $2a$ і завтовшки $h = 0,01a$ (рис. 3.2). Включення є теплоізованим і не зазнає теплового розширення. Його центр розташований на відстані d до межі.

У півпросторі діє рівномірний тепловий потік одиничної інтенсивності вздовж межі. Вона виготовлена із анізотропного склопластику з такими характеристиками: $E_1 = 55$ ГПа, $E_2 = 21$ ГПа, $G_{12} = 9,7$ ГПа, $\nu_{12} = 0,25$, $\alpha_{11} = 6,3 \cdot 10^{-6}$ K^{-1} , $\alpha_{22} = 2,0 \cdot 10^{-5}$ K^{-1} , $k_{11} = 3,46$ Вт/(м·К), $k_{22} = 0,35$ Вт/(м·К). Значення цих матеріальних констант подано у напрямі головних осей анізотропії.

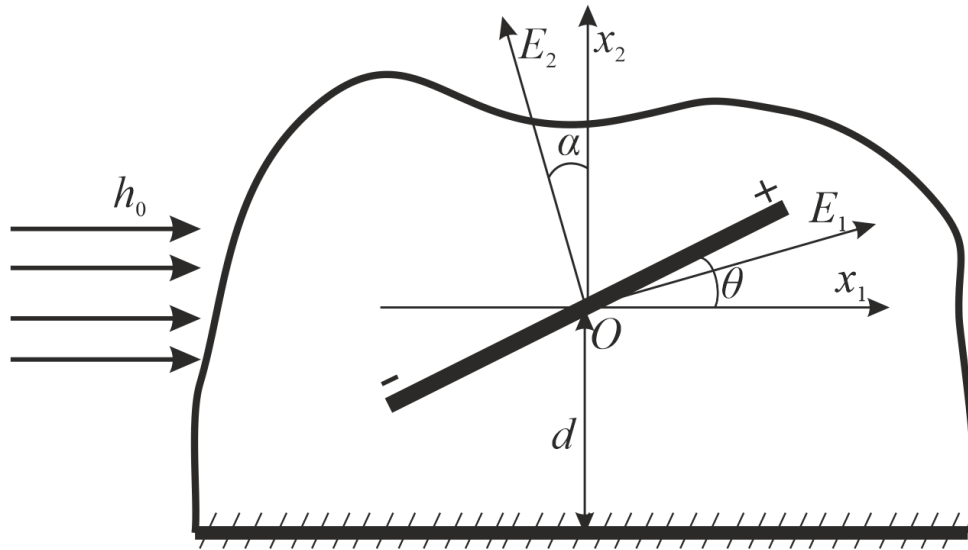


Рис. 3.2. Термопружний анізотропний півпростір із тонким включенням

На поданих нижче рисунках зображено залежність узагальнених КІН від відносної жорсткості $k = G^i / G_{12}$ неоднорідності, (G^i модуль зсуву матеріалу включення) за граничних умов (3.5a), (3.5d) та різних значень кута нахилу осі включення θ КІН нормовані величиною $K_0 = a\sqrt{\pi a} \cdot E_1 \cdot \alpha_{11} / k_{11} \cdot h_0$. Вважається, що включення не зазнає ефекту теплового розширення. Графіки подано для значення параметра $d = a$. Штриховими лініями показані випадки, коли при розрахунках не враховувався ефект згину включення. Як видно графіків, цей вплив суттєвий, а тому він потребує додаткового ретельного аналізу.

Також варто зазначити що знак "+" біля КІН вказує на те, що коефіцієнт взятий для правого берега включення; знак "-" – що для лівого. Якщо ж біля КІН немає таких позначення, то це означає, що даний КІН набуває однакового значення на лівому і правому берегах включення

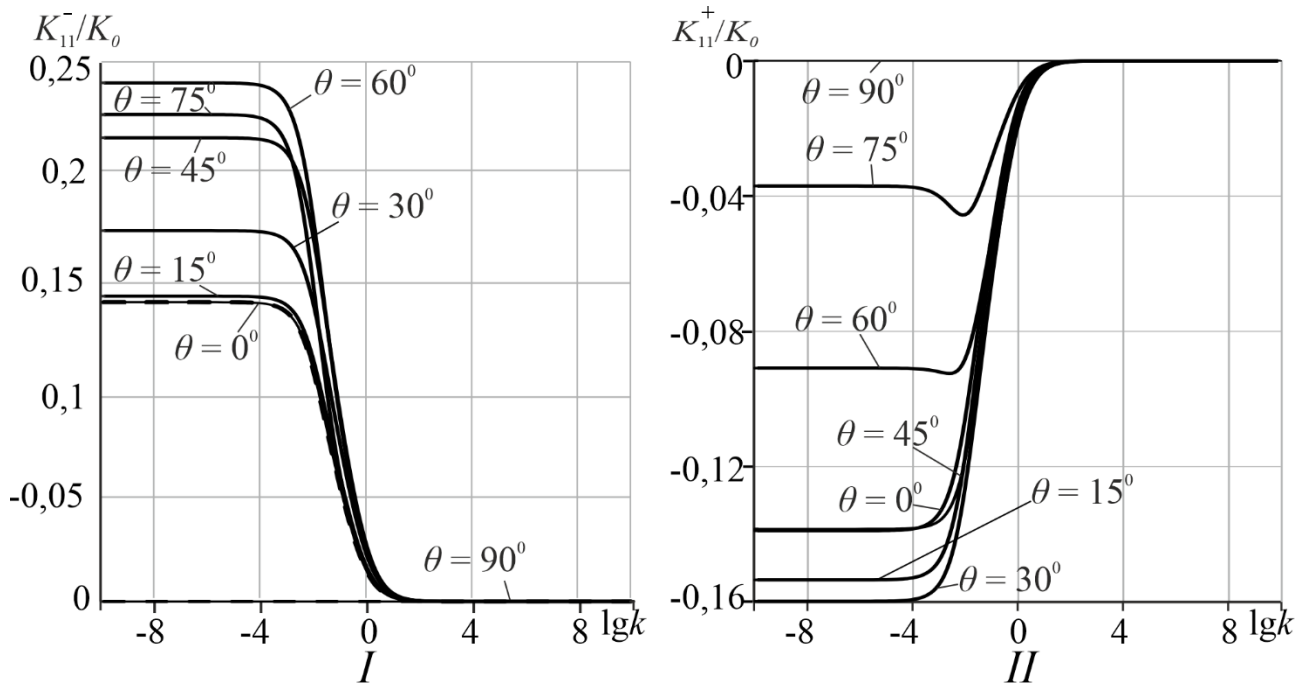


Рис. 3.3. Залежність між узагальнених КІН K_{11} / K_0 та відносною жорсткістю неоднорідності k при різних значеннях θ

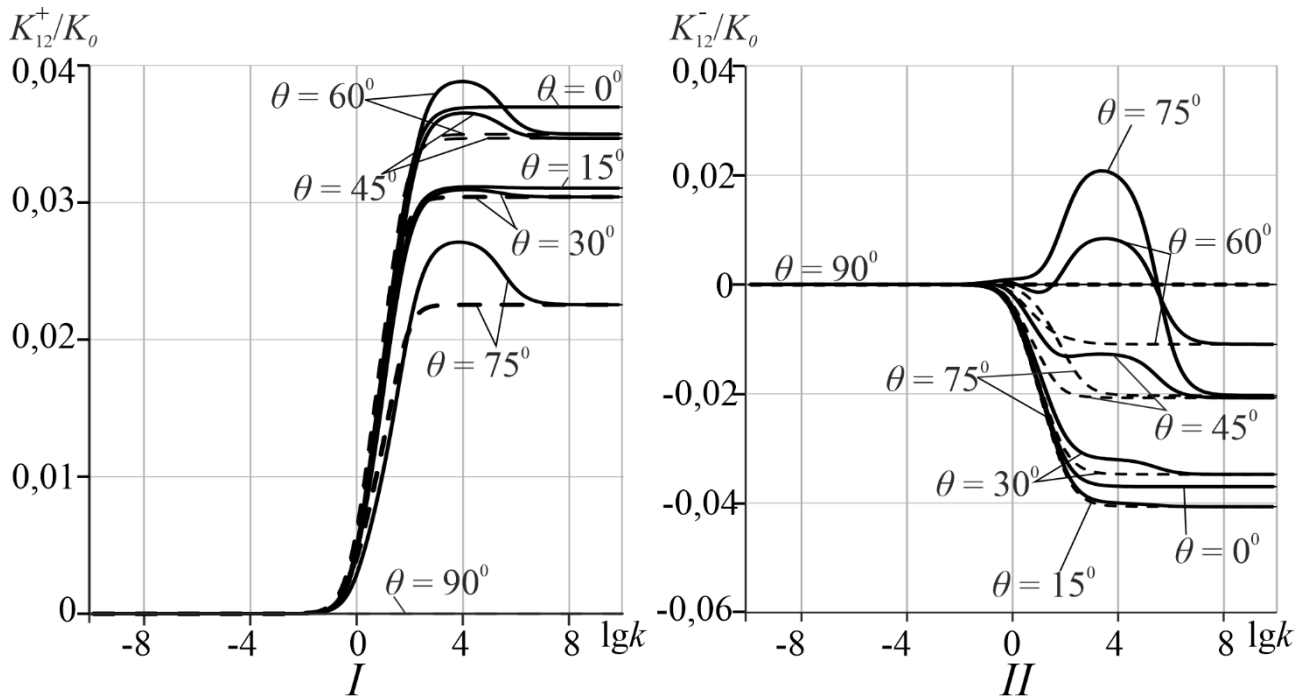


Рис. 3.4. Залежність між узагальнених КІН K_{12} / K_0 та відносною жорсткістю неоднорідності k при різних значеннях θ

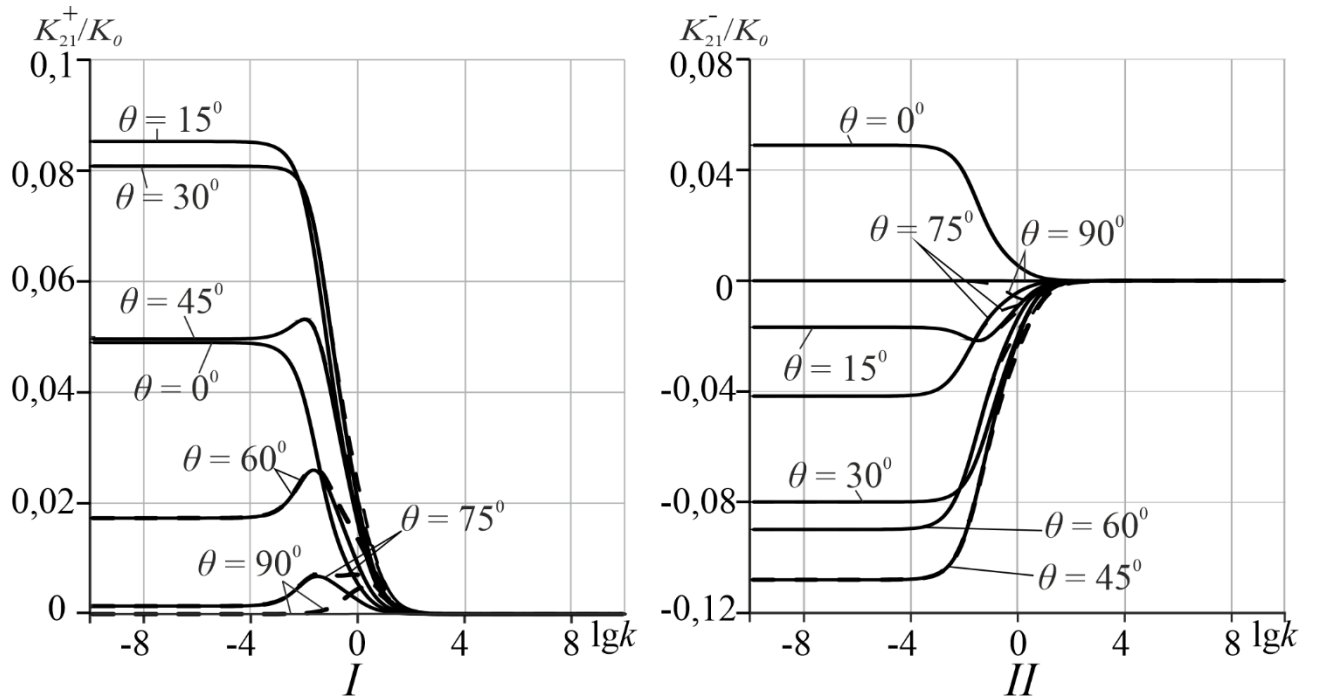


Рис. 3.5. Залежність між узагальнених КІН K_{21}/K_0 та відносною жорсткістю неоднорідності k при різних значеннях θ

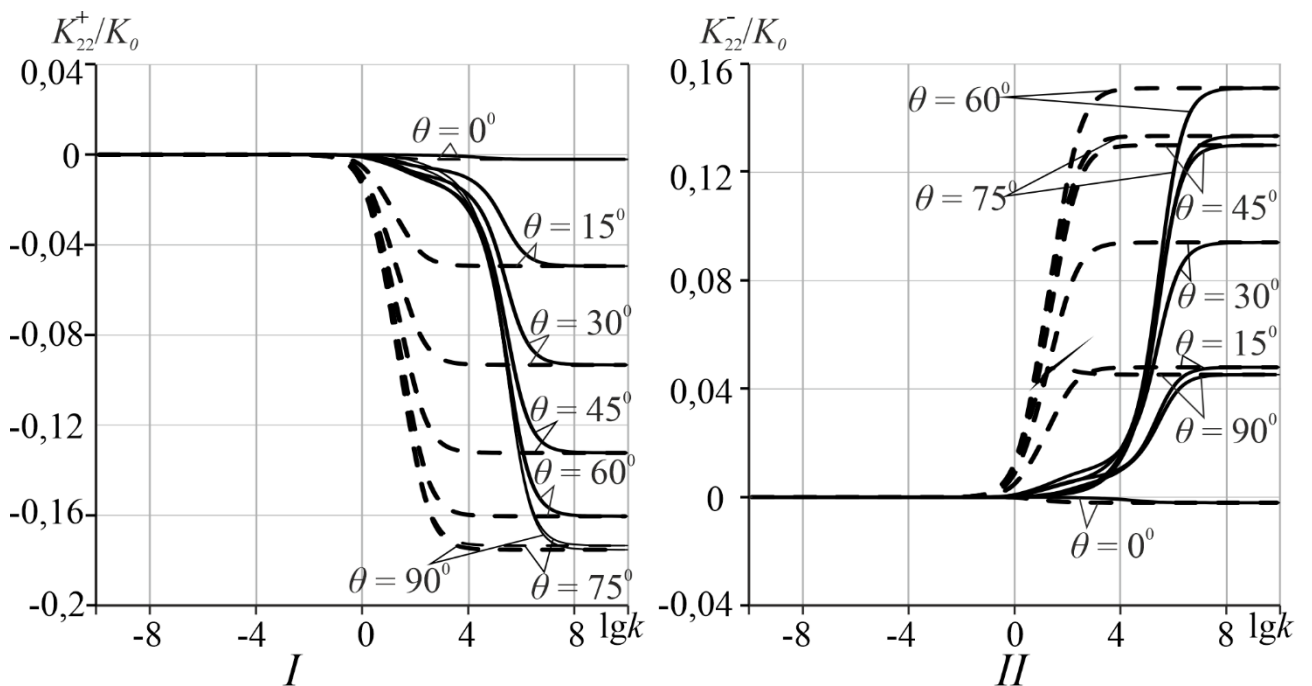


Рис. 3.6. Залежність між узагальнених КІН K_{22}/K_0 та відносною жорсткістю неоднорідності k при різних значеннях θ

З рис. 3.3 бачимо, що згин включення не впливає на значення КІН K_{11}/K_0 .

Також слід зазначити, що максимальне значення K_{11}^-/K_0 досягається, коли

включення нахилене під кутом $\theta = 60^\circ$ до межі півплощини. При $\lg k < -4$ значення КІН не змінюються, а при $\lg k > -4$ (крім випадку $\theta = 75^\circ$) вони монотонно прямують до нуля.

Аналізуючи рис. 3.4 та рис. 3.5 бачимо, що ефект згину включення суттєво впливає на значення КІН. Особливо це помітно на рис.3.4(II), коли $\theta = 60^\circ$ та $\theta = 75^\circ$. Як зазначалося раніше, цей ефект потребує ретельного аналізу.

На рис. 3.6 видно, що нижче $\lg k = 4$ значення КІН зростають повільно, а вище $\lg k > 4$ – їх зростання відбувається інтенсивно. Коли вплив згину включення виключити з розгляду, то можна помітити, що КІН K_{22} / K_0 монотонно зростають навіть при $\lg k = 0$ і швидше досягають своїх максимальних значень.

Висновки до розділу 3

У даному розділі отримано інтегральні формули та крайові інтегральні рівняння, що є математичною моделлю анізотропного термомагнітоелектропружного півпростору зі змішаними крайовими умовами на його межі, який може містити різного роду тонкі деформівні включення. В основу цього підходу отримання відповідних співвідношень покладено розширений формалізм Стро, який дозволяє записати загальний розв'язок задачі термопружності за допомогою певних аналітичних функцій. Для моделювання півпростору з тонкими неоднорідностями використовувався принцип спряження континуумів різної вимірності. Із застосуванням теорії функцій комплексної змінної, зокрема інтегральної формули Коші та формули Сохоцького–Племелі, побудовано сингулярні крайові інтегральні рівняння. Ядра цих рівнянь записано у явному вигляді. Отримані інтегральні рівняння введено в модифікований метод граничних елементів. Вдалося розв'язати декілька нових задач для анізотропного півпростору, що містить тонке прямолінійне включення, яке нахилене під кутом до межі. Побудовано графічні залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень, відносної жорсткості та кутів нахилу тонкої неоднорідності. Проведено

числовий аналіз впливу крайових умов на межі півпростору на коефіцієнти інтенсивність напружень у вершинах включення. Також було досліджено дію ефекту згину включення на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень. Причому на різні коефіцієнти інтенсивності цей ефект може впливати по різному. Аналізуючи графічні залежності бачимо, що найяскравіше вплив ефект згину проявляється на рис. 3.4 та рис. 3.6. Тоді як, на рис. 3.3 та рис. 3.5 він майже непомітний.

РОЗДІЛ 4. ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНИЙ БІМАТЕРІАЛ З ІНТЕРФЕЙСОМ ВИСОКОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

4.1. Постановка задачі [180]

У межах умов плоскої задачі розглянемо у системі координат $Ox_1x_2x_3$ анізотропне термомагнітоелектропружне біматеріальне середовище (рис. 4.1), що складається з двох розділених поверхнею $x_2 = 0$ термомагнітоелектропружних анізотропних півпросторів S_1 ($x_2 > 0$) та S_2 ($x_2 < 0$).

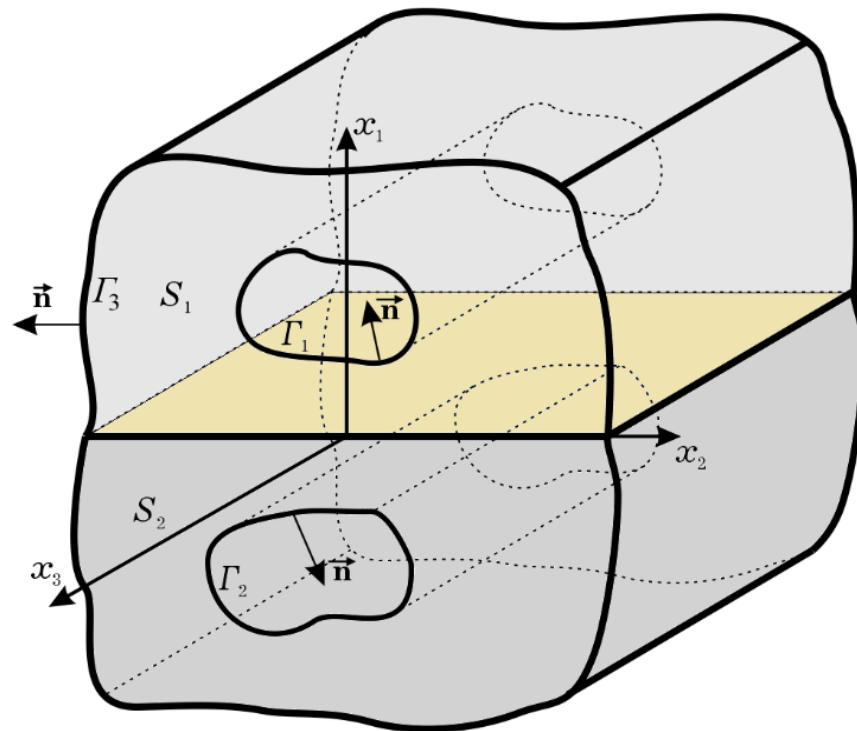


Рис. 4.1. Геометрична схема плоскої задачі для термомагнітоелектропружного анізотропного біматеріального середовища

На межі контакту наявний тонкий плоский міжфазний шар. Півпростори містять паралельні до осі x_3 циліндричні порожнини, на поверхні яких задано довільні незалежні від x_3 механічні, електричні, магнітні і теплові крайові умови. У цьому випадку достатньо обмежитися розглядом температурного і

термомагнітоелектропружного стану у довільному перпендикулярному до осі x_3 перерізі середовища

На межі поділу виконуються умови неідеального теплового контакту у вигляді інтерфейсу високої теплопровідності

$$\mathcal{G}^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \mathcal{G}(x_1) + \mu_0 \theta_{,1}(x_1), \mu_0 = 2h^{\text{int}} k_{22}^{\text{int}}, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \mathcal{G}(x_1),$$

$$\theta^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \theta^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \theta(x_1), \forall x_2 = 0; \quad (4.2)$$

а також умови ідеального магнітоелектромеханічного контакту складових

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \tilde{\mathbf{u}}^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \tilde{\mathbf{u}}(x_1), \quad (4.3)$$

$$\tilde{\Phi}^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \tilde{\Phi}^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \tilde{\Phi}(x_1), \forall x_2 = 0. \quad (4.4)$$

Тут μ_0 - зведена теплопровідність інтерфейсу, $2h^{\text{int}}$ - товщина міжфазного шару; k_t^{int} - його коефіцієнт теплопровідності. Індекси 1 і 2 використовуються для позначення величин полів, що діють у півпросторах S_1 та S_2 . Тонкий міжфазний шар з розгляду вилучаємо. Кожна складова матеріалу містить систему гладких замкнутих контурів $\Gamma_1 = \bigcup_i \Gamma_i^{(1)}$ та $\Gamma_2 = \bigcup_i \Gamma_i^{(2)}$, на яких можна задавати ті чи інші теплові, механічні, електричні та магнітні крайові умови. Напрямок обходу контурів вибираємо таким чином, щоб нормаль \mathbf{n} до Γ_i була спрямована назовні області обмеженої Γ_i . Для побудови інтегральних формул комплексних потенціалів Стро використаємо інтегральну формулу Коші (2.84) [42].

4.2. Побудова інтегральних подань для біматеріалу з неідеальним тепловим контактом складових [180, 186]

4.2.1. Теплопровідність

Задача теплопровідності є лінійною. Її розв'язок можна подати як суперпозицію однорідного та збуреного розв'язків. Однорідний розв'язок ($g_{1\infty}(z_t^{(1)})$ та $g_{2\infty}(z_t^{(2)})$) повинен задовольняти рівняння (2.64). Другий же,

спричинений присутністю контурів Γ_1 , Γ_2 і Γ_3 та окресленням певних крайових умов на них.

Запишемо формули Коші (2.84) для складових біматеріалу наступним чином:

$$\forall \text{Im}(z_t^{(1)}) > 0, g_1'(z_t^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_1'(\tau_t^{(1)}) d\tau_t^{(1)}}{\tau_t^{(1)} - z_t^{(1)}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1'(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(1)}}, \quad (4.6)$$

$$\forall \text{Im}(z_t^{(2)}) < 0, g_2'(z_t^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_2'(\tau_t^{(2)}) d\tau_t^{(2)}}{\tau_t^{(2)} - z_t^{(2)}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_2'(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(2)}}. \quad (4.7)$$

Використовуючи умови неідеального теплового контакту, вираз (2.64) можна записати:

$$g_1'(x_1) = \frac{1}{2} \left(\theta(x_1) + \frac{i}{k_t^{(1)}} \mathcal{G}(x_1) + \frac{i\mu_0}{k_t^{(1)}} \theta_{,1}(x_1) \right); \quad (4.8)$$

$$g_2'(x_1) = \frac{1}{2} \left(\theta(x_1) + \frac{i}{k_t^{(2)}} \mathcal{G}(x_1) \right). \quad (4.9)$$

Отже підставимо тепер (4.8) та (4.9) у (4.6) і (4.7) відповідно.

$$g_1'(z_t^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_1'(\tau_t^{(1)}) d\tau_t^{(1)}}{\tau_t^{(1)} - z_t^{(1)}} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(1)}} + \frac{i}{2k_t^{(1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{G}(x_1) x_1}{x_1 - z_t^{(1)}} + \frac{i}{2k_t^{(1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 \theta_{,1}(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(1)}} \right), \quad (4.10)$$

$$g_2'(z_t^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_2'(\tau_t^{(2)}) d\tau_t^{(2)}}{\tau_t^{(2)} - z_t^{(2)}} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(2)}} + \frac{i}{2k_t^{(2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{G}(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(2)}} \right). \quad (4.11)$$

Введемо позначення для контурних інтегралів та невластивих інтегралів по необмеженій області межі поділу півпросторів:

$$m_t(z_t^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{G}(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(j)}}, \quad q_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = \int_{\Gamma_i} \frac{g_i'(\tau_t^{(i)}) d\tau_t^{(i)}}{\tau_t^{(i)} - z_t^{(j)}}, \quad \bar{q}_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = \int_{\Gamma_i} \frac{\overline{g_i'(\tau_t^{(i)})} d\bar{\tau}_t^{(i)}}{\bar{\tau}_t^{(i)} - z_t^{(j)}}. \quad (4.12)$$

$$p_t(z_t^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(j)}}, \quad p_t'(z_t^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta_{,1}(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(j)}}. \quad (4.13)$$

Тепер, з урахуванням введених позначень, формули (4.6)–(4.9) матимуть такий вигляд:

$$g_1'(z_t^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} \left(q_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + \frac{1}{2} p_t(z_t^{(1)}) + \frac{i}{2k_t^{(1)}} m_t(z_t^{(1)}) + \frac{i\mu_0}{2k_t^{(1)}} p_t'(z_t^{(1)}) \right), \quad \forall \text{Im}(z_t^{(1)}) > 0; \quad (4.14)$$

$$g_2'(z_t^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i} q_t^{(2)}(z_t^{(2)}) - \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2} p_t(z_t^{(2)}) + \frac{i}{k_t^{(2)}} m_t(z_t^{(2)}) \right), \quad \forall \text{Im}(z_t^{(2)}) > 0.$$

Для визначення невластивих інтегралів (4.13) через інтеграли Коші (4.12) отримаємо такі системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\text{Im}(z_t^{(1)}) > 0: \begin{cases} \bar{q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + \frac{1}{2} p_t(z_t^{(1)}) - \frac{i}{2k_t^{(1)}} [m_t(z_t^{(1)}) + \mu_0 p_t'(z_t^{(1)})] = 0, \\ q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) - \frac{1}{2} p_t(z_t^{(1)}) - \frac{i}{2k_t^{(2)}} m_t(z_t^{(1)}) = 0; \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\text{Im}(z_t^{(2)}) < 0: \begin{cases} \bar{q}_t^{(2)}(z_t^{(2)}) - \frac{1}{2} p_t(z_t^{(2)}) + \frac{i}{2k_t^{(2)}} m_t(z_t^{(2)}) = 0, \\ q_t^{(1)}(z_t^{(2)}) + \frac{1}{2} p_t(z_t^{(2)}) - \frac{i}{2k_t^{(1)}} [m_t(z_t^{(2)}) + \mu_0 p_t'(z_t^{(2)})] = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Розглянемо спочатку систему рівнянь (4.15), у якій перше рівняння поділимо на $k_t^{(2)}$, а друге – на $k_t^{(1)}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2k_t^{(2)}} p_t(z_t^{(1)}) - \frac{i\mu_0}{2k_t^{(1)}k_t^{(2)}} p_t'(z_t^{(1)}) - \frac{i}{2k_t^{(1)}k_t^{(2)}} m_t(z_t^{(1)}) = -\frac{1}{k_t^{(2)}} \bar{q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}), \\ -\frac{1}{2k_t^{(1)}} p_t(z_t^{(1)}) - \frac{i}{2k_t^{(1)}k_t^{(2)}} m_t(z_t^{(1)}) = -\frac{1}{k_t^{(1)}} q_t^{(2)}(z_t^{(1)}). \end{cases} \quad (4.17)$$

Якщо відняти від першого рівняння цієї системи друге, отримаємо

$$\frac{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}}{2k_t^{(1)}k_t^{(2)}} p_t(z_t^{(1)}) - \frac{i\mu_0}{2k_t^{(1)}k_t^{(2)}} p_t'(z_t^{(1)}) = -\frac{1}{k_t^{(2)}} \bar{q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + \frac{1}{k_t^{(2)}} q_t^{(2)}(z_t^{(1)}). \quad (4.18)$$

Помножимо (4.18) на $\frac{2k_t^{(1)}k_t^{(2)}}{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}}$. Отримаємо:

$$p_t(z_t^{(1)}) - \frac{i\mu_0}{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}} p_t'(z_t^{(1)}) = -\frac{2k_t^{(1)}}{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}} \bar{q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + \frac{2k_t^{(2)}}{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}} q_t^{(2)}(z_t^{(1)}). \quad (4.19)$$

Введемо позначення:

$$K = \frac{k_t^{(1)} - k_t^{(2)}}{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}}, \frac{1}{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}} = \frac{1+K}{2k_t^{(1)}} = \frac{1-K}{2k_t^{(2)}}; \quad (4.20)$$

$$\beta_1 = -\frac{i\mu_0(1+K)}{2k_t^{(1)}} = -\frac{i\mu_0(1-K)}{2k_t^{(2)}} = -\beta_2.$$

Тепер (4.19) можна записати як:

$$p_t(z_t^{(1)}) + \beta_1 p_t'(z_t^{(1)}) = -(1+K)\bar{q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + (1-K)q_t^{(2)}(z_t^{(1)}). \quad (4.21)$$

Врахуємо, що

$$e_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^{(j)}) = e^{-\frac{z_t^{(j)}}{\alpha_i}} \int e^{\frac{z_t^{(j)}}{\alpha_i}} q_t^{(k)}(z_t^{(j)}) dz_t^{(j)}; \quad (4.22)$$

$$\bar{e}_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^{(j)}) = e^{-\frac{z_t^{(j)}}{\alpha_i}} \int e^{\frac{z_t^{(j)}}{\alpha_i}} \bar{q}_t^{(k)}(z_t^{(j)}) dz_t^{(j)}.$$

Тоді вирази для невластивих інтегралів матимуть наступний вигляд:

$$p_t(z_t^{(1)}) = -\frac{(1+K)}{\beta_1} \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1, z_t^{(1)}) + \frac{(1-K)}{\beta_1} e_t^{(2)}(\beta_1, z_t^{(1)}), \quad (4.23)$$

$$m_t(z_t^{(1)}) = -2ik_t^{(2)} q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) - \frac{ik_t^{(2)}(1+K)}{\beta_1} \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1, z_t^{(1)}) + \frac{ik_t^{(2)}(1-K)}{\beta_1} e_t^{(2)}(\beta_1, z_t^{(1)}). \quad (4.24)$$

а вираз для комплексної функції $g_1'(z_t^{(1)})$ можна записати так:

$$g_1'(z_t^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} \left[q_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + \bar{q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) - \frac{(1+K)}{\beta_1} \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) + \frac{(1-K)}{\beta_1} e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right]. \quad (4.25)$$

Тепер повернемося до системи рівнянь (4.16) За аналогією до попередніх перетворень запишемо вирази для невластивих інтегралів та функції $g_2'(z_t^{(2)})$:

$$p_t(z_t^{(2)}) = -\frac{(1+K)}{\beta_2} e_t^{(1)}(\beta_2; z_t^{(2)}) + \frac{(1-K)}{\beta_2} \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_t^{(2)}); \quad (4.26)$$

$$m_t(z_t^{(2)}) = 2ik_t^{(2)} \bar{q}_t^{(2)}(z_t^{(2)}) + \frac{ik_t^{(2)}(1+K)}{\beta_2} e_t^{(1)}(\beta_2; z_t^{(2)}) - \frac{ik_t^{(2)}(1-K)}{\beta_2} \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_t^{(2)}); \quad (4.27)$$

$$g'_2(z_t^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i} \left[q_t^{(2)}(z_t^{(2)}) + \bar{q}_t^{(2)}(z_t^{(2)}) + \frac{(1+K)}{\beta_2} e_t^{(1)}(\beta_2; z_t^{(2)}) - \frac{(1-K)}{\beta_2} \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_t^{(2)}) \right]. \quad (4.28)$$

Слід зазначити, що

$$\begin{aligned} E_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^j) &= -\alpha_i e_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^j) + \alpha_i Q_t^{(k)}(z_t^j), \\ \bar{E}_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^j) &= -\alpha_i \bar{e}_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^j) + \alpha_i \bar{Q}_t^{(k)}(z_t^j); \end{aligned} \quad (4.29)$$

де

$$\begin{aligned} Q_t^{(k)}(z_t^{(j)}) &= \int_{\Gamma_k} q_t^{(k)}(z_t^{(j)}) dz_t^{(j)} = -\int_{\Gamma_k} g'_k(\tau_t^{(k)}) \ln(\tau_t^{(k)} - z_t^{(j)}) d\tau_t^{(k)}, \\ \bar{Q}_t^{(k)}(z_t^{(j)}) &= \int_{\Gamma_k} \bar{q}_t^{(k)}(z_t^{(j)}) dz_t^{(j)} = -\int_{\Gamma_k} \bar{g}'_k(\bar{\tau}_t^{(k)}) \ln(\bar{\tau}_t^{(k)} - z_t^{(j)}) d\bar{\tau}_t^{(k)}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Тоді можна спочатку записати

$$e_t^{(k)}(\beta_i; z_t^{(j)}) = \exp\left(-\frac{z_t^{(j)}}{\beta_i}\right) \int_{\Gamma_k} \exp\left(\frac{z_t^{(j)}}{\beta_i}\right) \int_{\Gamma_k} \frac{g'_k(\tau_t^{(k)}) d\tau_t^{(k)}}{\tau_t^{(k)} - z_t^{(j)}} dz_t^{(j)}, \quad (4.31)$$

а якщо використати залежність

$$E_i(z_t^{(j)}) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (4.32)$$

то цей вираз можна записати у такий спосіб:

$$\begin{aligned} e_t^{(k)}(\beta_i; z_t^{(j)}) &= \int_{\Gamma_k} g'_k(\tau_t^{(k)}) \mathbb{K}\left(\frac{\tau_t^{(k)} - z_t^{(j)}}{\beta_i}\right) d\tau_t^{(k)}, \\ \bar{e}_t^{(k)}(\beta_i; z_t^{(j)}) &= \int_{\Gamma_k} \bar{g}'_k(\bar{\tau}_t^{(k)}) \mathbb{K}\left(\frac{\bar{\tau}_t^{(k)} - z_t^{(j)}}{\beta_i}\right) d\bar{\tau}_t^{(k)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Тут $\mathbb{K} = e^z E_1(z)$.

Після низки очевидних перетворень формули (4.25) та (4.28) набудуть вигляду

$$g_1(z_t^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} \left[Q_t^{(1)}(z_t^{(1)}) - K\bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + (1-K)Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) + (1+K)\bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - (1-K)e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right]; \quad (4.34)$$

$$g_2(z_t^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i} \left[Q_t^{(2)}(z_t^{(2)}) + K\bar{Q}_t^{(2)}(z_t^{(2)}) + (1+K)Q_t^{(1)}(z_t^{(2)}) - (1+K)e_t^{(1)}(\beta_2; z_t^{(2)}) + (1-K)\bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_t^{(2)}) \right]. \quad (4.35)$$

Відтак інтеграли (4.12), (4.30), (4.33) можна записати у такий спосіб:

$$q_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \frac{n_2 - p_t^{(i)} n_1}{\tau_t^{(i)} - z_t^{(j)}} \theta(s) ds + \frac{i}{2k_t^{(i)}} \int_{\Gamma_i} \ln(\tau_t^{(i)} - z_t^{(j)}) h_n(s), \quad (4.36)$$

$$\bar{q}_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \frac{n_2 - \bar{p}_t^{(i)} n_1}{\bar{\tau}_t^{(i)} - z_t^{(j)}} \theta(s) ds - \frac{i}{2k_t^{(i)}} \int_{\Gamma_i} \ln(\bar{\tau}_t^{(i)} - z_t^{(j)}) h_n(s);$$

$$Q_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} (n_2 - p_t^{(i)} n_1) \ln(\tau_t^{(i)} - z_t^{(j)}) \theta(s) ds - \frac{i}{2k_t^{(i)}} \int_{\Gamma_i} f^*(\tau_t^{(i)} - z_t^{(j)}) h_n(s), \quad (4.37)$$

$$\bar{Q}_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} (n_2 - \bar{p}_t^{(i)} n_1) \ln(\bar{\tau}_t^{(i)} - z_t^{(j)}) \theta(s) ds + \frac{i}{2k_t^{(i)}} \int_{\Gamma_i} f^*(\bar{\tau}_t^{(i)} - z_t^{(j)}) h_n(s);$$

$$e_t^{(k)}(\beta_i; z_t^{(j)}) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} (n_2 - p_t^{(k)} n_1) \mathbb{K} \left(\frac{\tau_t^{(k)} - z_t^{(j)}}{\beta_i} \right) \theta(s) ds + \frac{i\beta_i}{2k_t^{(k)}} \int_{\Gamma_i} \left(\mathbb{K} \left(\frac{\tau_t^{(k)} - z_t^{(j)}}{\beta_i} \right) + \ln(\tau_t^{(k)} - z_t^{(j)}) \right) h_n(s), \quad (4.38)$$

$$\bar{e}_t^{(k)}(\beta_i; z_t^{(j)}) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} (n_2 - \bar{p}_t^{(k)} n_1) \mathbb{K} \left(\frac{\bar{\tau}_t^{(k)} - z_t^{(j)}}{\beta_i} \right) \theta(s) ds - \frac{i\beta_i}{2k_t^{(k)}} \int_{\Gamma_i} \left(\mathbb{K} \left(\frac{\bar{\tau}_t^{(k)} - z_t^{(j)}}{\beta_i} \right) + \ln(\bar{\tau}_t^{(k)} - z_t^{(j)}) \right) h_n(s).$$

Таким чином отримано інтегральні подання для температури і теплового потоку у довільній точці ξ біматеріалу:

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \begin{cases} 2\operatorname{Re}\{g'_1(Z_t^{(1)}(\xi))\} & (\forall \xi \in S_1), \\ 2\operatorname{Re}\{g'_2(Z_t^{(2)}(\xi))\} & (\forall \xi \in S_2) \end{cases} = \\ &= \int_{\Gamma} [\Theta^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - H^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x})] ds(\mathbf{x}) + \theta^\infty(\xi); \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} h_i(\xi) &= \begin{cases} 2k_t^{(1)} \operatorname{Im}\{(\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(1)}) g''_1(Z_t^{(1)}(\xi))\} & (\forall \xi \in S_1), \\ 2k_t^{(2)} \operatorname{Im}\{(\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(2)}) g''_2(Z_t^{(2)}(\xi))\} & (\forall \xi \in S_2) \end{cases} = \\ &= \int_{\Gamma} \Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} H_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + h_i^\infty(\xi). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Тут функції $\theta^\infty(\xi)$ і $h_i^\infty(\xi)$ є однорідними розв'язками для біматеріалу.

$$\begin{aligned} \theta^\infty(\xi) &= \begin{cases} 2\operatorname{Re}\{g'_{1\infty}(Z_t^{(1)}(\xi))\} & (\forall \xi \in S_1), \\ 2\operatorname{Re}\{g'_{2\infty}(Z_t^{(2)}(\xi))\} & (\forall \xi \in S_2); \end{cases} \\ h_i^\infty(\xi) &= \begin{cases} 2k_t^{(1)} \operatorname{Im}\{(\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(1)}) g''_{1\infty}(Z_t^{(1)}(\xi))\} & (\forall \xi \in S_1), \\ 2k_t^{(2)} \operatorname{Im}\{(\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(2)}) g''_{2\infty}(Z_t^{(2)}(\xi))\} & (\forall \xi \in S_2). \end{cases} \end{aligned}$$

Вирази для ядер цих інтегральних подань можна записати, використовуючи (2.57), (2.59) та (4.34)–(4.38). Вони матимуть такий вигляд:

$\mathbf{x} \in S_1 \wedge \xi \in S_1$:

$$\Theta_i^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi k_t^{(1)}} \operatorname{Re} \left(\ln(\tau_t^{(1)} - z_t^{(1)}) + K \ln(\bar{\tau}_t^{(1)} - z_t^{(1)}) + (1+K) \mathbb{K} \left(\frac{\bar{\tau}_t^{(1)} - z_t^{(1)}}{\beta_1} \right) \right),$$

$$H_i^{\text{HCl}^*} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{n_2 - p_t^{(1)} n_1}{\tau_t^{(1)} - z_t^{(1)}} + \frac{n_2 - \bar{p}_t^{(1)} n_1}{\bar{\tau}_t^{(1)} - z_t^{(1)}} + \frac{(1+K)(n_2 - \bar{p}_t^{(1)} n_1)}{\beta_1} \mathbb{K} \left(\frac{\bar{\tau}_t^{(1)} - z_t^{(1)}}{\beta_1} \right) \right);$$

$$\begin{aligned} \Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) &= -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left((\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(1)}) \left(\frac{1}{\tau_t^{(1)} - z_t^{(1)}} - \frac{1}{\bar{\tau}_t^{(1)} - z_t^{(1)}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{i(1+K)}{\beta_1} \mathbb{K} \left(\frac{\bar{\tau}_t^{(1)} - z_t^{(1)}}{\beta_1} \right) \right) \right), \end{aligned}$$

$$H_i^{\text{HCI}^{**}} = -\frac{k_t^{(1)}}{2\pi} \text{Re} \left((\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(1)}) \left(\frac{n_2 - p_t^{(1)} n_1}{\tau_t^{(1)} - z_t^{(1)}} + \frac{n_2 - \bar{p}_t^{(1)} n_1}{\bar{\tau}_t^{(1)} - z_t^{(1)}} + \frac{(1+K)(n_2 - \bar{p}_t^{(1)} n_1)}{\beta_1^2} \left(\mathbb{K} \left(\frac{\bar{\tau}_t^{(1)} - z_t^{(1)}}{\beta_1} \right) - \frac{\beta_1}{\bar{\tau}_t^{(1)} - z_t^{(1)}} \right) \right) \right).$$

$\mathbf{x} \in S_2 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_1 :$

$$\Theta_i^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{(1-K)}{2k_t^{(2)}} \text{Re} \left(\mathbb{K} \left(\frac{\tau_t^{(2)} - z_t^{(1)}}{\beta_1} \right) + \ln(\tau_t^{(2)} - z_t^{(1)}) \right),$$

$$H_i^{\text{HCI}^*} = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left(\frac{(1-K)(n_2 - p_t^{(2)} n_1)}{\beta_1} \mathbb{K} \left(\frac{\tau_t^{(2)} - z_t^{(1)}}{\beta_1} \right) \right);$$

$$\Theta_i^{\text{HCI}^{**}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{k_t^{(1)}}{2\pi} \text{Im} \left(\frac{i(1-K)(\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(1)})}{k_t^{(2)} \beta_1} \mathbb{K} \left(\frac{\tau_t^{(2)} - z_t^{(1)}}{\beta_1} \right) \right),$$

$$H_i^{\text{HCI}^{**}} = \frac{k_t^{(1)}}{2\pi} \text{Re} \left((\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(1)}) \frac{(1-K)(n_2 - p_t^{(2)} n_1)}{\beta_1^2} \left(\mathbb{K} \left(\frac{\tau_t^{(2)} - z_t^{(1)}}{\beta_1} \right) - \frac{\beta_1}{\tau_t^{(2)} - z_t^{(1)}} \right) \right).$$

$\mathbf{x} \in S_1 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_2 :$

$$\Theta_i^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{(1+K)}{2k_t^{(1)}} \text{Re} \left(\mathbb{K} \left(\frac{\tau_t^{(1)} - z_t^{(2)}}{\beta_2} \right) + \ln(\tau_t^{(1)} - z_t^{(2)}) \right),$$

$$H_i^{\text{HCI}^*} = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left(\frac{(1+K)(n_2 - p_t^{(1)} n_1)}{\beta_2} \mathbb{K} \left(\frac{\tau_t^{(1)} - z_t^{(2)}}{\beta_2} \right) \right);$$

$$\Theta_i^{\text{HCI}^{**}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{k_t^{(2)}}{2\pi} \text{Im} \left(\frac{i(1+K)(\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(2)})}{k_t^{(1)} \beta_2} \mathbb{K} \left(\frac{\tau_t^{(1)} - z_t^{(2)}}{\beta_2} \right) \right),$$

$$H_i^{\text{HCI}^{**}} = \frac{k_t^{(2)}}{2\pi} \text{Re} \left((\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(1)}) \frac{(1+K)(n_2 - p_t^{(1)} n_1)}{\beta_2^2} \left(\mathbb{K} \left(\frac{\tau_t^{(1)} - z_t^{(2)}}{\beta_2} \right) - \frac{\beta_2}{\tau_t^{(1)} - z_t^{(2)}} \right) \right).$$

$\mathbf{x} \in S_2 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_2 :$

$$\Theta_i^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi k_t^{(2)}} \operatorname{Re} \left(\ln(\tau_t^{(2)} - z_t^{(2)}) - K \ln(\bar{\tau}_t^{(2)} - z_t^{(2)}) + (1-K) \mathbb{K} \left(\frac{\bar{\tau}_t^{(2)} - z_t^{(2)}}{\beta_2} \right) \right),$$

$$H_i^{\text{HCl}^*} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{n_2 - p_t^{(2)} n_1}{\tau_t^{(2)} - z_t^{(2)}} + \frac{n_2 - \bar{p}_t^{(2)} n_1}{\bar{\tau}_t^{(2)} - z_t^{(2)}} + \frac{(1-K)(n_2 - \bar{p}_t^{(2)} n_1)}{\beta_2} \mathbb{K} \left(\frac{\bar{\tau}_t^{(2)} - z_t^{(2)}}{\beta_2} \right) \right);$$

$$\Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left((\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(2)}) \times \left(\frac{1}{\tau_t^{(2)} - z_t^{(2)}} - \frac{1}{\bar{\tau}_t^{(2)} - z_t^{(2)}} + \frac{i(1-K)}{\beta_2} \mathbb{K} \left(\frac{\bar{\tau}_t^{(2)} - z_t^{(2)}}{\beta_2} \right) \right) \right),$$

$$H_i^{\text{HCl}^{**}} = -\frac{k_t^{(2)}}{2\pi} \operatorname{Re} \left((\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(2)}) \left(\frac{n_2 - p_t^{(2)} n_1}{\tau_t^{(2)} - z_t^{(2)}} + \frac{n_2 - \bar{p}_t^{(2)} n_1}{\bar{\tau}_t^{(2)} - z_t^{(2)}} + \frac{(1-K)(n_2 - \bar{p}_t^{(2)} n_1)}{\beta_2^2} \left(\mathbb{K} \left(\frac{\bar{\tau}_t^{(2)} - z_t^{(2)}}{\beta_2} \right) - \frac{\beta_2}{\bar{\tau}_t^{(2)} - z_t^{(2)}} \right) \right) \right).$$

Щоб одержати інтегральні формули для переміщень і напружень потрібно обчислити первісні функцій $m_t(z)$ та $p_t(z)$:

$$M_t(z) = \int m_t(z) dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z) \mathcal{G}(x_1) dx_1; \quad (4.41)$$

$$P_t(z) = \int p_t(z) dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z) \theta(x_1) dx_1.$$

У подібний спосіб неважко отримати

$$P_t(z_t^{(1)}) = (1+K) \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - (1-K) e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - (1+K) \bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + (1-K) Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}), \quad (4.42)$$

$$M_t(z_t^{(1)}) = -ik_t^{(2)} \left((1-K) \left(Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) + e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right) + (1+K) \left(\bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) - \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right) \right); \quad (4.43)$$

$$P_t(z_t^{(2)}) = (1+K) e_t^{(1)}(\beta_2; z_t^{(2)}) - (1-K) \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_t^{(2)}) - (1+K) Q_t^{(1)}(z_t^{(2)}) + (1-K) \bar{Q}_t^{(2)}(z_t^{(2)}), \quad (4.44)$$

$$M_t(z_t^{(2)}) = ik_t^{(2)} \left((1+K) \left[Q_t^{(1)}(z_t^{(2)}) + \bar{Q}_t^{(2)}(z_t^{(2)}) \right] - (1+K)e_t^{(1)}(\beta_2; z_t^{(2)}) + (1-K)\bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_t^{(2)}) \right). \quad (4.45)$$

Стягуючи деякий контур Γ_i до математичного розрізу Γ_C із берегами Γ_C^+ та Γ_C^- та зважаючи на те, що нормалі до цих берегів у відповідних протилежних точках є протилежними за напрямом, на основі інтегральних формул (4.39), (4.40) можна отримати такі інтегральні тотожності для температури і теплового потоку у тілі із розрізом Γ_C (за аналогією до п. п 2.14):

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \int_{\Gamma} \left[\Theta^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - H^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{\Gamma_C} \left[\Theta^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma h_n(\mathbf{x}) - H^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) \Delta \theta(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \iint_S \Theta^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) f_n(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \\ h_i(\xi) &= \int_{\Gamma} \left[\Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - H_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{\Gamma_C} \left[\Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma h_n(\mathbf{x}) - H_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \Delta \theta(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \iint_S \Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) f_n(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Тут Γ – межа області S без внутрішніх розрізів Γ_C ; $\Sigma f = f^+ + f^-$, $\Delta f = f^+ - f^-$ – сума та стрибок величини f поля на берегах Γ_C^+ та Γ_C^- розрізу Γ_C .

4.2.2. Термоелектропружність

Використовуючи (4.5), запишемо інтегральну формулу Коші для векторів $\mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)})$ та $\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)})$, комплексних потенціалів Стрo, які є аналітичними вектор-функціями у областях S_1 та S_2 відповідно:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_1} \left\langle \frac{d\tau_*^{(1)}}{\tau_*^{(1)} - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(1)}(\tau_*^{(1)}) + \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(1)}(x_1) \right]; \\ \mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_2} \left\langle \frac{d\tau_*^{(2)}}{\tau_*^{(2)} - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(2)}(\tau_*^{(2)}) - \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(2)}(x_1) \right]. \end{aligned}$$

Вводячи позначення

$$\mathbf{q}_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{\Gamma_i} \left\langle \frac{d\tau_*^{(j)}}{\tau_*^{(j)} - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(j)}(\tau_*^{(j)}), \quad \bar{\mathbf{q}}_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{\Gamma_i} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_*^{(j)}}{\bar{\tau}_*^{(j)} - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \bar{\mathbf{f}}^{(j)}(\tau_*^{(j)}), \quad (4.46)$$

їх перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(1)}(x_1) dx_1 \right], \\ 0 &= \bar{\mathbf{q}}_1(z_*^{(1)}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(1)}} \right\rangle \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(x_1) dx_1, \\ 0 &= \mathbf{q}_1(z_*^{(2)}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(1)}(x_1) dx_1; \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_2(z_*^{(2)}) - \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(2)}(x_1) dx_1 \right], \\ 0 &= \bar{\mathbf{q}}_2(z_*^{(2)}) - \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(2)}} \right\rangle \bar{\mathbf{f}}^{(2)}(x_1) dx_1, \\ 0 &= \mathbf{q}_2(z_*^{(1)}) - \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(2)}(x_1) dx_1. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Далі використаємо залежності (2.76)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(i)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(j)}(x_1) dx_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x_1 - z_*^{(i)}} \left[\mathbf{B}_j^T \tilde{\mathbf{u}}^{(j)} + \mathbf{A}_j^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(j)} - \mathbf{B}_j^T \tilde{\mathbf{u}}^{t(j)} - \mathbf{A}_j^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{t(j)} \right] dx_1 \\ &= \mathbf{B}_j^T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{(j)} dx_1}{x_1 - z_*^{(i)}} + \mathbf{A}_j^T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(j)} dx_1}{x_1 - z_*^{(i)}} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\mathbf{B}_j^T \operatorname{Re}[\mathbf{c}_j g_j(z_t)] + 2\mathbf{A}_j^T \operatorname{Re}[\mathbf{d}_j g_j(z_t)]}{x_1 - z_*^{(i)}} \\ &= \mathbf{B}_j^T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{(j)} dx_1}{x_1 - z_\beta^{(i)}} + \mathbf{A}_j^T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(j)} dx_1}{x_1 - z_\beta^{(i)}} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \left[\mathbf{B}_j^T \operatorname{Re}[\mathbf{c}_j] + \mathbf{A}_j^T \operatorname{Re}[\mathbf{d}_j] \right] \theta_j dx_1 \\ &\quad - \frac{1}{k_t^{(j)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \left[\mathbf{B}_j^T \operatorname{Im}[\mathbf{c}_j] + \mathbf{A}_j^T \operatorname{Im}[\mathbf{d}_j] \right] \mathcal{G}_j dx_1 \end{aligned}$$

і, вводячи позначення

$$\mathbf{m}_j(z_\beta^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_j(x_1) dx_1}{x_1 - z_\beta^{(j)}}, \quad \mathbf{p}_j(z_\beta^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_j(x_1) dx_1}{x_1 - z_\beta^{(j)}}; \quad (4.49)$$

$$\boldsymbol{\mu}_j = \frac{1}{k_t^{(j)}} (\mathbf{A}_j^T \text{Im}[\mathbf{d}_j] + \mathbf{B}_j^T \text{Im}[\mathbf{c}_j]), \quad \boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{A}_j^T \text{Re}[\mathbf{d}_j] + \mathbf{B}_j^T \text{Re}[\mathbf{c}_j], \quad (4.50)$$

остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(j)}(x_1) dx_1 &= \mathbf{B}_j^T \mathbf{p}_j(z_\beta^{(j)}) + \mathbf{A}_j^T \mathbf{m}_j(z_\beta^{(j)}) + \\ &+ \boldsymbol{\lambda}_j \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \theta_j dx_1 - \boldsymbol{\mu}_j \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \mathcal{G}_j dx_1. \end{aligned} \quad (4.51)$$

З використанням позначень

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \theta(x_1) dx_1 &= -P_t(z_\beta^{(i)}), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \mathcal{G}(x_1) dx_1 &= -M_t(z_\beta^{(i)}); \end{aligned} \quad (4.52)$$

умов ідеального електромеханічного

$$\mathbf{p}_1(z_\beta^{(j)}) = \mathbf{p}_2(z_\beta^{(j)}) = \mathbf{p}(z_\beta^{(j)}), \quad \mathbf{m}_1(z_\beta^{(j)}) = \mathbf{m}_2(z_\beta^{(j)}) = \mathbf{m}(z_\beta^{(j)}) \quad (4.53)$$

та умови неідеального теплового контакту

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \mathcal{G}(x_1) dx_1 &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \mathcal{G}(x_1) dx_1 \\ + \mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \theta_{,1}(x_1) dx_1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \mathcal{G}(x_1) dx_1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \theta_{,1}(x_1) dx_1 \end{cases} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) d\theta = \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \theta \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(x_1) dx_1}{x_1 - z_\beta^{(i)}} = -P_t(z_\beta^{(i)}) \end{aligned} \quad (4.54)$$

отримаємо залежність

$$Y_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x_1 - z_\beta^{(i)}) \mathcal{G}^{(i)}(x_1) dx_1 = \begin{cases} -M_t(z_\beta^{(i)}) - \mu_0 P_t(z_\beta^{(i)}) & (j=1), \\ -M_t(z_\beta^{(i)}) & (j=2). \end{cases} \quad (4.55)$$

Відтак з використанням (4.55) вираз (4.51) можна записати

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(j)}(x_1) dx_1 = \mathbf{A}_j^T \mathbf{m}(z_\beta^{(i)}) + \mathbf{B}_j^T \mathbf{p}(z_\beta^{(i)}) - \lambda_j P_t(z_\beta^{(i)}) - \mu_j Y_j(z_\beta^{(i)}). \quad (4.56)$$

Тому також

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \bar{\mathbf{f}}^{(j)}(x_1) dx_1 = \bar{\mathbf{A}}_j^T \mathbf{m}(z_\beta^{(i)}) + \bar{\mathbf{B}}_j^T \mathbf{p}(z_\beta^{(i)}) - \bar{\lambda}_j P_t(z_\beta^{(i)}) - \bar{\mu}_j Y_j(z_\beta^{(i)}). \quad (4.57)$$

Якщо взяти теж до відома, що

$$\left\langle \frac{1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{A} \mathbf{f}(z_*) = \sum_{\beta=1}^5 I_\beta \mathbf{A} \frac{\mathbf{f}(z_\beta)}{x_1 - z_\beta},$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left(\mathbf{A}_1^T \mathbf{m}(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{B}_1^T \mathbf{p}(z_\beta^{(1)}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \langle Y_1(z_*^{(1)}) \rangle \boldsymbol{\mu}_1 - \langle P_t(z_*^{(1)}) \rangle \boldsymbol{\lambda}_1 \right]; \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{m}(z_\beta^{(1)}) + \bar{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{p}(z_\beta^{(1)}) = -\bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \bar{\lambda}_1 P_t(z_\beta^{(1)}) + \bar{\mu}_1 Y_1(z_\beta^{(1)}), \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{m}(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{B}_2^T \mathbf{p}(z_\beta^{(1)}) = \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)}) + \lambda_2 P_t(z_\beta^{(1)}) + \mu_2 Y_2(z_\beta^{(1)}); \end{cases} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_2(z_*^{(2)}) - \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left(\mathbf{A}_2^T \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{B}_2^T \mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \langle Y_2(z_*^{(2)}) \rangle \boldsymbol{\mu}_2 - \langle P_t(z_*^{(2)}) \rangle \boldsymbol{\lambda}_2 \right]; \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^T \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{B}_1^T \mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) = -\mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) + \lambda_1 P_t(z_\beta^{(2)}) + \mu_1 Y_1(z_\beta^{(2)}), \\ \bar{\mathbf{A}}_2^T \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) = \bar{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)}) + \bar{\lambda}_2 P_t(z_\beta^{(2)}) + \bar{\mu}_2 Y_2(z_\beta^{(2)}). \end{cases} \quad (4.61)$$

Розглянемо спочатку систему (4.59). Нехай

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1(z_\beta^{(1)}) = -\bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \bar{\lambda}_1 P_t(z_\beta^{(1)}) + \bar{\mu}_1 Y_1(z_\beta^{(1)}), \\ \mathbf{y}_2(z_\beta^{(1)}) = \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)}) + \lambda_2 P_t(z_\beta^{(1)}) + \mu_2 Y_2(z_\beta^{(1)}). \end{cases} \quad (4.62)$$

Тоді

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{m}(z_\beta^{(1)}) + \bar{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{p}(z_\beta^{(1)}) = \mathbf{y}_1(z_\beta^{(1)}); \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{m}(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{B}_2^T \mathbf{p}(z_\beta^{(1)}) = \mathbf{y}_2(z_\beta^{(1)}). \end{cases} \quad (4.63)$$

Використовуючи рівності (4.63), інтеграли (4.49) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(z_\beta^{(1)}) &= (\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1^{-1} - \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2^{-1})^{-T} (\bar{\mathbf{B}}_1^{-T} \mathbf{y}_1(z_\beta^{(1)}) - \mathbf{B}_2^{-T} \mathbf{y}_2(z_\beta^{(1)})), \\ \mathbf{p}(z_\beta^{(1)}) &= (\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} - \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2^{-1})^{-T} (\bar{\mathbf{A}}_1^{-T} \mathbf{y}_1(z_\beta^{(1)}) - \mathbf{A}_2^{-T} \mathbf{y}_2(z_\beta^{(1)})). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Тепер вектор комплексних потенціалів Стро запишемо так:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left(\mathbf{A}_1^T (\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1^{-1} - \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2^{-1})^{-T} (\bar{\mathbf{B}}_1^{-T} (-\bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \right. \right. \\ &+ \bar{\lambda}_1 P_t(z_\beta^{(1)}) + \bar{\mu}_1 Y_1(z_\beta^{(1)})) - \mathbf{B}_2^{-T} (\mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)}) + \lambda_2 P_t(z_\beta^{(1)}) + \mu_2 Y_2(z_\beta^{(1)}))) + \\ &+ \mathbf{B}_1^T (\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} - \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2^{-1})^{-T} (\bar{\mathbf{A}}_1^{-T} (-\bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \bar{\lambda}_1 P_t(z_\beta^{(1)}) + \bar{\mu}_1 Y_1(z_\beta^{(1)})) - \\ &\left. \left. - \mathbf{A}_2^{-T} (\mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)}) + \lambda_2 P_t(z_\beta^{(1)}) + \mu_2 Y_2(z_\beta^{(1)}))) \right) - \langle Y_1(z_*^{(1)}) \rangle \boldsymbol{\mu}_1 - \langle P_t(z_*^{(1)}) \rangle \boldsymbol{\lambda}_1 \right], \end{aligned} \quad (4.65)$$

або

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left(\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)}) \right) + \right. \\ &+ \langle P_t(z_\beta^{(1)}) \rangle (-\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_1 + \mathbf{G}_2^{(1)} \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_1) + \\ &\left. + \langle Y_1(z_*^{(1)}) \rangle (-\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) + \langle Y_2(z_\beta^{(1)}) \rangle (\mathbf{G}_2^{(1)} \boldsymbol{\mu}_2) \right]; \end{aligned} \quad (4.66)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1^{(1)} &= - \left[\mathbf{A}_1^T (\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1^{-1} - \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2^{-1})^{-T} \bar{\mathbf{B}}_1^{-T} + \mathbf{B}_1^T (\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} - \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2^{-1})^{-T} \bar{\mathbf{A}}_1^{-T} \right], \\ \mathbf{G}_2^{(1)} &= - \left[\mathbf{A}_1^T (\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1^{-1} - \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2^{-1})^{-T} \mathbf{B}_2^{-T} + \mathbf{B}_1^T (\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} - \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2^{-1})^{-T} \mathbf{A}_2^{-T} \right]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Використання формул (4.55), (4.42) та (4.43) дає спочатку можливість отримати

$$\begin{aligned}
Y_1(z_*^{(1)}) &= -M_t(z_\beta^{(i)}) - \mu_0 P_t(z_\beta^{(i)}) = \\
&+ ik_t^{(2)} \left((1-K) Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) + (1+K) \bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) - (1+K) \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) + \right. \\
&\left. + (1-K) e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right) - \mu_0 \left(-\frac{(1+K)}{\beta_1} \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1, z_t^{(1)}) + \frac{(1-K)}{\beta_1} e_t^{(2)}(\beta_1, z_t^{(1)}) \right),
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
Y_2(z_*^{(1)}) &= -M_t(z_\beta^{(i)}) = ik_t^{(2)} (1+K) \left(Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) + \bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) - \right. \\
&\left. - \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right) + 2ik_t^{(2)} e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)});
\end{aligned} \tag{4.69}$$

а після розкриття дужок -

$$\begin{aligned}
Y_1(z_*^{(1)}) &= ik_t^{(2)} (1+K) \left[\bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) \right. \\
&\quad \left. - \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right] + 2ik_t^{(1)} \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}); \\
Y_2(z_*^{(1)}) &= ik_t^{(2)} (1+K) \left[Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) + \bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) \right. \\
&\quad \left. - \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right] + 2ik_t^{(2)} e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}).
\end{aligned} \tag{4.70}$$

З урахуванням цих виразів (4.67) спочатку набуде вигляду

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left(\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)}) \right) \right] + \\
&+ \left((1+K) \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - (1-K) e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - \right. \\
&- (1+K) \bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + (1-K) Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) \left. \right) \left(-\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\lambda}_1 + \mathbf{G}_2^{(1)} \lambda_2 - \lambda_1 \right) + \\
&+ \left(ik_t^{(2)} (1+K) \left[\bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right] + 2ik_t^{(1)} \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right) \left(-\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\mu}_1 - \mu_1 \right) + \\
&+ \left(ik_t^{(2)} (1+K) \left(Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) + \bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) - \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right) + 2ik_t^{(2)} e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right) \left(\mathbf{G}_2^{(1)} \mu_2 \right),
\end{aligned} \tag{4.71}$$

а з використанням (4.60) та позначень -

$$\begin{aligned}
\delta_1^{(1)} &= -(1+K) \left(\mathbf{G}_2^{(1)} \lambda_2 - \mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 \right) + ik_t^{(2)} (1+K) \left(\mathbf{G}_2^{(1)} \mu_2 - \mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\mu}_1 - \mu_1 \right), \\
\delta_2^{(1)} &= (1-K) \left(\mathbf{G}_2^{(1)} \lambda_2 - \mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 \right) + ik_t^{(2)} (1+K) \left(\mathbf{G}_2^{(1)} \mu_2 - \mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\mu}_1 - \mu_1 \right)
\end{aligned} \tag{4.72}$$

формулу (4.71) можна записати компактніше

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left(\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)}) \right) \right] + \\
&+ \langle \bar{\mathcal{Q}}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) \rangle \delta_1^{(1)} + \langle \mathcal{Q}_t^{(2)}(z_t^{(1)}) \rangle \delta_2^{(1)} + \langle \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \rangle \times \\
&\times \left(-\delta_1^{(1)} - 2ik_t^{(1)} \left(-\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \right) \right) + \langle e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \rangle \left(-\delta_2^{(1)} + 2ik_t^{(2)} \mathbf{G}_2^{(1)} \boldsymbol{\mu}_2 \right),
\end{aligned} \tag{4.73}$$

або

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left(\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)}) \right) \right] \\
&+ \langle \bar{\mathcal{Q}}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) \rangle \delta_1^{(1)} + \langle \mathcal{Q}_t^{(2)}(z_t^{(1)}) \rangle \delta_2^{(1)} \\
&+ \langle \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \rangle \mathbf{X}_1^{(1)} + \langle e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \rangle \mathbf{X}_2^{(1)}.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\text{Тут } \mathbf{X}_1^{(1)} = \left(-\delta_1^{(1)} - 2ik_t^{(1)} \left(-\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \right) \right), \mathbf{X}_2^{(1)} = \left(-\delta_2^{(1)} + 2ik_t^{(2)} \mathbf{G}_2^{(1)} \boldsymbol{\mu}_2 \right).$$

Побудуємо тепер вираз для вектора $\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)})$. Для цього розглянемо систему (4.61). Як і в попередньому випадку:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^T \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{B}_1^T \mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) = -\mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) + \lambda_1 P_t(z_\beta^{(2)}) + \boldsymbol{\mu}_1 Y_1(z_\beta^{(2)}), \\ \bar{\mathbf{A}}_2^T \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) = \bar{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)}) + \bar{\lambda}_2 P_t(z_\beta^{(2)}) + \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 Y_2(z_\beta^{(2)}). \end{cases} \tag{4.75}$$

Введемо позначення

$$\begin{cases} \mathbf{y}_3(z_\beta^{(1)}) = \bar{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)}) + \bar{\lambda}_2 P_t(z_\beta^{(2)}) + \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 Y_2(z_\beta^{(2)}), \\ \mathbf{y}_4(z_\beta^{(1)}) = -\mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) + \lambda_1 P_t(z_\beta^{(2)}) + \boldsymbol{\mu}_1 Y_1(z_\beta^{(2)}). \end{cases} \tag{4.76}$$

Тобто,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_2^T \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) &= \mathbf{y}_3(z_\beta^{(2)}); \\ \mathbf{A}_1^T \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{B}_1^T \mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) &= \mathbf{y}_4(z_\beta^{(2)}). \end{aligned} \tag{4.77}$$

З (4.77) можна одержати такі залежності:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) &= \left(\bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^{-1} - \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \right)^{-T} \left(\bar{\mathbf{B}}_2^{-T} \mathbf{y}_3(z_\beta^{(2)}) - \mathbf{B}_1^{-T} \mathbf{y}_4(z_\beta^{(2)}) \right), \\ \mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) &= \left(\bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{A}}_2^{-1} - \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \right)^{-T} \left(\bar{\mathbf{A}}_2^{-T} \mathbf{y}_3(z_\beta^{(2)}) - \mathbf{A}_1^{-T} \mathbf{y}_4(z_\beta^{(2)}) \right) \end{aligned} \tag{4.78}$$

після чого

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_2(z_*^{(2)}) - \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left(\mathbf{A}_2^\top (\bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^{-1} - \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1})^{-\top} \times \right. \right. \\
&\times \left. \left(\bar{\mathbf{B}}_2^{-\top} \mathbf{y}_3(z_\beta^{(2)}) - \mathbf{B}_1^{-\top} \mathbf{y}_4(z_\beta^{(2)}) \right) + \mathbf{B}_2^\top (\bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{A}}_2^{-1} - \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1})^{-\top} \times \right. \\
&\times \left. \left(\bar{\mathbf{A}}_2^{-\top} \mathbf{y}_3(z_\beta^{(2)}) - \mathbf{A}_1^{-\top} \mathbf{y}_4(z_\beta^{(2)}) \right) \right] - \langle Y_2(z_*^{(2)}) \rangle \boldsymbol{\mu}_2 - \langle P_t(z_*^{(2)}) \rangle \boldsymbol{\lambda}_2.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Також, як і в попередньому випадку, після введення позначень

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_1^{(2)} &= - \left[\mathbf{A}_2^\top (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1} - \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^{-1})^{-\top} \mathbf{B}_1^{-\top} + \mathbf{B}_2^\top (\mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1} - \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{A}}_2^{-1})^{-\top} \mathbf{A}_1^{-\top} \right], \\
\mathbf{G}_2^{(2)} &= - \left[\mathbf{A}_2^\top (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1} - \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^{-1})^{-\top} \bar{\mathbf{B}}_2^{-\top} + \mathbf{B}_2^\top (\mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1} - \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{A}}_2^{-1})^{-\top} \bar{\mathbf{A}}_2^{-\top} \right]
\end{aligned} \tag{4.80}$$

формулу (4.64) можна подати так:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_2(z_*^{(2)}) - \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left(\mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)}) \right) + \right. \\
&+ \langle P_t(z_\beta^{(2)}) \rangle \left(-\mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_2 + \mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2 \right) + \langle Y_2(z_*^{(2)}) \rangle \times \\
&\times \left(-\mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 + \boldsymbol{\mu}_2 \right) + \langle Y_1(z_\beta^{(2)}) \rangle \left(\mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\mu}_1 \right) \left. \right].
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Аналогічним чином

$$\begin{aligned}
Y_1(z_\beta^{(2)}) &= -ik_t^{(2)} (1 + K) \left[Q_t^{(1)}(z_\beta^{(2)}) + \bar{Q}_t^{(2)}(z_\beta^{(2)}) - \right. \\
&\left. - \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}) - e_t^{(1)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}) \right] - 2ik_t^{(1)} e_t^{(1)}(\beta_2; z_\beta^{(2)});
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned}
Y_2(z_\beta^{(2)}) &= -ik_t^{(2)} (1 + K) \left[Q_t^{(1)}(z_\beta^{(2)}) + \bar{Q}_t^{(2)}(z_\beta^{(2)}) - \right. \\
&\left. - \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}) - e_t^{(1)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}) \right] - 2ik_t^{(2)} \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}).
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Тепер можна записати інтегральну, на додаток до (4.74), другу формулу для потенціалів Стро у нижньому півпросторі біматеріалу з неідеальним тепловим контактом, які не містять інтегралів уздовж нескінченної межі, у вигляді

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_2(z_*^{(1)}) - \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left(\mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)}) \right) \right] + \\
&+ \left((1+K)e_t^{(1)}(\beta_2; z_t^{(2)}) - (1-K)\bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_t^{(2)}) - (1+K)\mathcal{Q}_t^{(1)}(z_t^{(2)}) + \right. \\
&+ (1-K)\bar{\mathcal{Q}}_t^{(2)}(z_t^{(2)}) \left. \right) \left(-\mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_2 + \mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2 \right) + \\
&+ \left(-ik_t^{(2)}(1+K) \left[\mathcal{Q}_t^{(1)}(z_\beta^{(2)}) + \bar{\mathcal{Q}}_t^{(2)}(z_\beta^{(2)}) - \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}) - \right. \right. \\
&- e_t^{(1)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}) \left. \right] - 2ik_t^{(1)} e_t^{(1)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}) \left. \right) \left(-\mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 + \boldsymbol{\mu}_2 \right) + \\
&+ \left(-ik_t^{(2)}(1+K) \left[\mathcal{Q}_t^{(1)}(z_\beta^{(2)}) + \bar{\mathcal{Q}}_t^{(2)}(z_\beta^{(2)}) - \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}) - \right. \right. \\
&- e_t^{(1)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}) \left. \right] - 2ik_t^{(2)} \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}) \left. \right) \left(\mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\mu}_1 \right) \left. \right]. \tag{4.84}
\end{aligned}$$

Після введення позначення

$$\begin{aligned}
\delta_1^{(2)} &= -(1+K) \left(\mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\lambda}_1 - \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_2 + \boldsymbol{\lambda}_2 \right) \\
&- ik_t^{(2)}(1+K) \left(\mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\mu}_1 - \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 + \boldsymbol{\mu}_2 \right), \\
\delta_2^{(2)} &= (1-K) \left(\mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\lambda}_1 - \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_2 + \boldsymbol{\lambda}_2 \right) \\
&- ik_t^{(2)}(1+K) \left(\mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\mu}_1 - \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 + \boldsymbol{\mu}_2 \right), \tag{4.85}
\end{aligned}$$

як і в попередньому випадку

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_2(z_*^{(2)}) - \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left(\mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)}) \right) \right] \\
&+ \left\langle \mathcal{Q}_t^{(1)}(z_*^{(2)}) \right\rangle \delta_1^{(2)} + \left\langle \bar{\mathcal{Q}}_t^{(2)}(z_*^{(2)}) \right\rangle \delta_2^{(2)} \\
&+ e_t^{(1)}(\beta_2; z_*^{(2)}) \mathbf{X}_1^{(2)} + \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_*^{(2)}) \mathbf{X}_2^{(2)} \left. \right], \tag{4.86}
\end{aligned}$$

де $\mathbf{X}_1^{(2)} = -\delta_1^{(2)} - 2ik_t^{(1)} \mathbf{G}_2^{(2)} \boldsymbol{\mu}_1$, $\mathbf{X}_2^{(2)} = -\delta_2^{(2)} + 2ik_t^{(2)} \cdot (\mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$.

Інтеграл Коші (4.46) від функцій стрибка можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_j(z_\beta^{(i)}) &= \int_{\Gamma_j} \left\langle \ln(\tau_*^{(j)}(s) - z_\beta^{(i)}) \right\rangle \mathbf{A}_j^T \tilde{\mathbf{t}}(s) ds - \int_{\Gamma_j} \left\langle \frac{n_2(s) - p_*^{(j)} n_1(s)}{\tau_*^{(j)}(s) - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \mathbf{B}_j^T \tilde{\mathbf{u}}(s) ds \\
&- \int_{\Gamma_j} \left\langle \ln(\tau_*^{(j)}(s) - z_\beta^{(i)}) \right\rangle (\boldsymbol{\lambda}_j n_2(s) - \boldsymbol{\rho}_j n_1(s)) \theta(s) ds \\
&- \int_{\Gamma_j} \left\langle f^*(\tau_*^{(j)}(s) - z_\beta^{(i)}) \right\rangle \boldsymbol{\mu}_j h_n(s) ds, \tag{4.87}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{q}}_j(z_\beta^{(i)}) &= \int_{\Gamma_j} \left\langle \ln(\bar{z}_*^{(j)}(s) - z_\beta^{(i)}) \right\rangle \bar{\mathbf{A}}_j^T \bar{\mathbf{t}}(s) ds \\
&\quad - \int_{\Gamma_j} \left\langle \frac{n_2(s) - \bar{p}_*^{(j)} n_1(s)}{\bar{z}_*^{(j)}(s) - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \bar{\mathbf{B}}_j^T \bar{\mathbf{u}}(s) ds \\
&\quad - \int_{\Gamma_j} \left\langle \ln(\bar{z}_*^{(j)}(s) - z_\beta^{(i)}) \right\rangle (\bar{\boldsymbol{\lambda}}_j n_2(s) - \bar{\boldsymbol{\rho}}_j n_1(s)) \theta(s) ds \\
&\quad - \int_{\Gamma_j} \left\langle f^*(\bar{z}_*^{(j)}(s) - z_\beta^{(i)}) \right\rangle \bar{\boldsymbol{\mu}}_j h_n(s) ds; \\
\boldsymbol{\rho}_j &= \mathbf{A}_j^T \operatorname{Re} [p_t^{(j)} \mathbf{d}_j] + \mathbf{B}_j^T \operatorname{Re} [p_t^{(j)} \mathbf{c}_j].
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Отримані рівності (4.74), (4.86) дають можливість записати інтегральні співвідношення, які пов'язують переміщення у довільній точці термопружного біматеріалу із значеннями температури, теплового потоку та векторів переміщень і напружень на контурах Γ_i :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{cases} 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}_1 \mathbf{f}^{(1)}(Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) + \mathbf{c}_1 g_1(Z_t^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) \right\} & (\forall \boldsymbol{\xi} \in S_1), \\ 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}_2 \mathbf{f}^{(2)}(Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) + \mathbf{c}_2 g_2(Z_t^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) \right\} & (\forall \boldsymbol{\xi} \in S_2) \end{cases} = \\
&= \mathbf{u}^\infty(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} \left[\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) h_n(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Тут ядра мають такий вигляд:

$\mathbf{x} \in S_1 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \left[\left\langle \ln(Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})) \right\rangle \mathbf{A}_1^T \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln(\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}_1^T \right] \right\}; \\
\mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \left[\left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_*^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{B}_1^T \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_\beta^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}_1^T \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \left[- \left\langle \ln \left(Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \xi) \right) \right\rangle (\boldsymbol{\lambda}_1 n_2(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\rho}_1 n_1(\mathbf{x})) - \right. \right. \\
&\quad - \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln \left(\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta (\bar{\boldsymbol{\lambda}}_1 n_2(\mathbf{x}) - \bar{\boldsymbol{\rho}}_1 n_1(\mathbf{x})) + \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \left\langle \ln \left(\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right\rangle \boldsymbol{\delta}_1^{(1)} \right] + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \mathbb{K} \left(\frac{\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) \mathbf{X}_1^{(1)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\mathbf{c}_1}{2} \left((n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \ln \left(Z_t^{(1)}(\mathbf{x} - \xi) \right) - (n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(K \ln \left(\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(1)}(\xi) \right) + (1 + K) \mathbb{K} \left(\frac{\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) \right) \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \left[- \left\langle f^* \left(Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \xi) \right) \right\rangle \boldsymbol{\mu}_1 - \right. \\
&\quad - \sum_{\beta=1}^5 \left\langle f^* \left(\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 + \frac{i}{2k_t^{(1)}} \left\langle f^* \left(\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right\rangle \boldsymbol{\delta}_1^{(1)} - \\
&\quad - \frac{i\beta_1}{2k_t^{(1)}} \left(\mathbb{K} \left(\frac{\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) + \ln \left(\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(1)}(\xi) \right) \right) \mathbf{X}_1^{(1)} \left. \right] - \\
&\quad - \frac{i\mathbf{c}_1}{2k_t^{(1)}} \left[f^* \left(Z_t^{(1)}(\mathbf{x} - \xi) \right) + K f^* \left(\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(1)}(\xi) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \beta_1 (1 + K) \left(\mathbb{K} \left(\frac{\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) + \ln \left(\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(1)}(\xi) \right) \right) \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{x} \in \mathcal{S}_2 \wedge \xi \in \mathcal{S}_1 :$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \sum_{\beta=1}^5 \left[\left\langle \ln \left(Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{A}_2^{\text{T}} \right\}; \\
\mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \sum_{\beta=1}^5 \left[\left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_\beta^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{B}_2^{\text{T}} \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \left[- \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \left\langle \ln \left(Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right\rangle (\boldsymbol{\lambda}_2 n_2(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\rho}_2 n_1(\mathbf{x})) \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})) \left\langle \ln \left(Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right\rangle \boldsymbol{\delta}_2^{(1)} \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})) \mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) \mathbf{X}_2^{(1)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{c}_1}{2} (1 - K) (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})) \right\} \\
&\quad \times \left(\ln \left(Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(1)}(\xi) \right) + \mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \left[- \sum_{\beta=1}^5 \left\langle f^* \left(Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \boldsymbol{\mu}_2 \right. \right. \\
&\quad - \frac{i}{2k_t^{(2)}} \left(\left\langle f^* \left(Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right\rangle \boldsymbol{\delta}_2^{(1)} \right. \\
&\quad \left. \left. - \beta_1 \left(\mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) + \ln \left(Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(1)}(\xi) \right) \right) \mathbf{X}_2^{(1)} \right] \right. \\
&\quad - \frac{i\mathbf{c}_1}{2k_t^{(2)}} (1 - K) \left(f^* \left(Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(1)}(\xi) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \beta_1 \left(\mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) + \ln \left(Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(1)}(\xi) \right) \right) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{x} \in \mathcal{S}_1 \wedge \xi \in \mathcal{S}_2 :$

$$\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \sum_{\beta=1}^5 \left[\left\langle \ln \left(Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right) \right\rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{A}_1^{\text{T}} \right\};$$

$$\mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \sum_{\beta=1}^5 \left[\left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_\beta^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{B}_1^{\text{T}} \right\};$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{\text{HCI}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \left[\sum_{\beta=1}^5 \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \left\langle \ln \left(Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right) \right\rangle (\boldsymbol{\lambda}_1 n_2(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\rho}_1 n_1(\mathbf{x})) \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \left\langle \ln \left(Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right) \right\rangle \boldsymbol{\delta}_1^{(2)} \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)}{\beta_1} \right) \mathbf{X}_1^{(2)} \right] \right. \\
&\quad + \frac{\mathbf{c}_1}{2} (1 + K) (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \\
&\quad \left. \times \left(\ln \left(Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(2)}(\xi) \right) + \mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)}{\beta_2} \right) \right) \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \left[\sum_{\beta=1}^5 \left\langle f^* \left(Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right) \right\rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \boldsymbol{\mu}_1 - \right. \\
&\quad - \frac{i}{2k_t^{(1)}} \left(\left\langle f^* \left(Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right\rangle \boldsymbol{\delta}_1^{(2)} - \right. \\
&\quad \left. \left. - \beta_2 \left(\mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(2)}(\xi)}{\beta_1} \right) + \ln \left(Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(2)}(\xi) \right) \right) \mathbf{X}_1^{(2)} \right] \right. \\
&\quad - \frac{i\mathbf{c}_2}{2k_t^{(1)}} (1 + K) \left(f^* \left(Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(2)}(\xi) \right) \right) \\
&\quad \left. \left. - \beta_2 \left(\mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(2)}(\xi)}{\beta_2} \right) + \ln \left(Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(2)}(\xi) \right) \right) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{x} \in \mathcal{S}_2 \wedge \xi \in \mathcal{S}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \left[\left\langle \ln \left(Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \xi) \right) \right\rangle \mathbf{A}_2^\text{T} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln \left(\bar{Z}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right) \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}_2^\text{T} \right] \right\}; \\
\mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \left[\left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_*^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \xi)} \right\rangle \mathbf{B}_2^\text{T} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_\beta^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{\bar{Z}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}_2^\text{T} \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \xi) = & \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \left[- \left\langle \ln \left(Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \xi) \right) \right\rangle (\lambda_2 n_2(\mathbf{x}) - \rho_2 n_1(\mathbf{x})) + \right. \right. \\
& + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln \left(\bar{Z}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right) \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta (\bar{\lambda}_2 n_2(\mathbf{x}) - \bar{\rho}_2 n_1(\mathbf{x})) + \\
& + \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})) \left\langle \ln \left(\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right) \right\rangle \delta_2^{(2)} + \\
& \left. - \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})) \mathbb{K} \left(\frac{\left(\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right)}{\beta_1} \right) \mathbf{X}_2^{(2)} \right] + \\
& + \frac{\mathbf{c}_2}{2} \left((n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \ln \left(Z_t^{(1)}(\mathbf{x} - \xi) \right) + (n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \times \right. \\
& \left. \times \left[K \ln \left(\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(2)}(\xi) \right) - (1 - K) \mathbb{K} \left(\frac{\left(\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right)}{\beta_2} \right) \right] \right) \Bigg\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \xi) = & \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \left[- \left\langle f^* \left(Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \xi) \right) \right\rangle \boldsymbol{\mu}_2 + \right. \\
& + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle f^* \left(\bar{Z}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right) \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 + \frac{i}{2k_t^{(2)}} \left\langle f^* \left(\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right) \right\rangle \delta_2^{(2)} - \\
& - \frac{i\beta_2}{2k_t^{(2)}} \left[\mathbb{K} \left(\frac{\left(\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right)}{\beta_1} \right) + \ln \left(\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(2)}(\xi) \right) \right] \mathbf{X}_2^{(2)} \Bigg] - \\
& - \frac{i\mathbf{c}_2}{2k_2^{(2)}} \left[f^* \left(Z_t^{(2)}(\mathbf{x} - \xi) \right) - K f^* \left(\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(2)}(\xi) \right) + \right. \\
& \left. + \beta_2 (1 - K) \left[\mathbb{K} \left(\frac{\left(\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi) \right)}{\beta_2} \right) + \ln \left(\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(2)}(\xi) \right) \right] \right] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

За допомогою (4.74) та (4.86) можна також записати подібні співвідношення для визначення напруження у довільній точці термопружного біматеріалу

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_j(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{cases} 2\operatorname{Re}\left\{\mathbf{B}_1(\delta_{2j} - \delta_{1j}p_*^{(1)})\mathbf{f}'(Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) \right. \\ \quad \left. + \mathbf{d}_1(\delta_{2j} - \delta_{1j}p_t^{(1)})g_1'(Z_t^{(1)}(\boldsymbol{\xi}))\right\} (\forall \boldsymbol{\xi} \in S_1), \\ 2\operatorname{Re}\left\{\mathbf{B}_2(\delta_{2j} - \delta_{1j}p_*^{(2)})\mathbf{f}'(Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) \right. \\ \quad \left. + \mathbf{d}_2(\delta_{2j} - \delta_{1j}p_t^{(2)})g_2'(Z_t^{(2)}(\boldsymbol{\xi}))\right\} (\forall \boldsymbol{\xi} \in S_2) \end{cases} = \\
&= \boldsymbol{\sigma}_j^\infty(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} \mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\
&\quad + \int_{\Gamma} \mathbf{q}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{w}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Причому

$\mathbf{x} \in S_1 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B}_1 \left[\left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j}p_*^{(1)}}{Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{A}_1^{\text{T}} + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j}p_*^{(1)}}{\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}_1^{\text{T}} \right] \right\}; \\
\mathbf{q}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B}_1 \left[\left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j}p_*^{(1)}}{Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})} \right\rangle (\boldsymbol{\lambda}_1 n_2(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\rho}_1 n_1(\mathbf{x})) \right. \right. \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j}p_*^{(1)}}{\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta (\bar{\boldsymbol{\lambda}}_1 n_2(\mathbf{x}) - \bar{\boldsymbol{\rho}}_1 n_1(\mathbf{x})) \\
&\quad - \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j}p_*^{(1)}}{\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \boldsymbol{\delta}_1^{(1)} \\
&\quad - \frac{1}{2} (\delta_{2j} - \delta_{1j}p_*^{(1)}) (n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \mathbb{K} \left(\frac{\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})}{\beta_1} \right) \left. \right] \\
&\quad - \frac{\mathbf{d}_1}{2} (\delta_{2j} - \delta_{1j}p_t^{(1)}) \left[\frac{n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{Z_t^{(1)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})} + \frac{n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(1)}(\boldsymbol{\xi})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(1+K)}{\beta_1} \mathbb{K} \left(\frac{\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})}{\beta_1} \right) \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_1 \left\langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)} \right\rangle \left[\left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_*^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{[Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \xi)]^2} \right\rangle \mathbf{B}_1^{\text{T}} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_\beta^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{[\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)]^2} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}_1^{\text{T}} \right] \right\};$$

$$\mathbf{w}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_1 \left\langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)} \right\rangle \left[\left\langle \ln(Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \xi)) \right\rangle \boldsymbol{\mu}_1 \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln(\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)) \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{i}{2k_t^{(1)}} \left\langle \ln(\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)) \right\rangle \boldsymbol{\delta}_1^{(1)} - \frac{i\beta_i}{2k_t^{(1)}} \left(\mathbb{K} \left(\frac{Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \xi)}{\beta_1} \right) + \ln(Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \xi)) \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{i\mathbf{d}_1}{2k_t^{(1)}} (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_t^{(1)}) \left[\ln(Z_t^{(1)}(\mathbf{x} - \xi)) + \ln(\bar{Z}_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(1)}(\xi)) \right] \right. \\ \left. - (1 + K) \left(\mathbb{K} \left(\frac{Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \xi)}{\beta_1} \right) + \ln(Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \xi)) \right) \right] \right\}.$$

$\mathbf{x} \in \mathcal{S}_2 \wedge \xi \in \mathcal{S}_1 :$

$$\mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_1 \sum_{\beta=1}^5 \left[\left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)}}{Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{A}_2^{\text{T}} \right\};$$

$$\mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_1 \left\langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)} \right\rangle \sum_{\beta=1}^5 \left[\left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_\beta^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{[Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)]^2} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{B}_2^{\text{T}} \right\};$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_1 \left[\sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)}}{Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta (\lambda_2 n_2(\mathbf{x}) - \rho_2 n_1(\mathbf{x})) \right. \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})) \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)}}{Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)} \right\rangle \delta_2^{(1)} \\
&\quad - \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})) \mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)}) (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{\mathbf{d}_1}{2} (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_t^{(1)}) (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})) \frac{(1-K)}{\beta_1} \mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) \Bigg\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_1 \left\langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)} \right\rangle \left[\sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln \left(Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \boldsymbol{\mu}_2 \right. \right. \\
&\quad + \frac{i}{2k_t^{(2)}} \left\langle \ln \left(Z_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right\rangle \delta_2^{(1)} \\
&\quad + \frac{i\beta_i}{2k_t^2} \left[\mathbb{K} \left(\frac{Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) + \ln \left(Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right] \mathbf{X}_2^1 \\
&\quad \left. \left. + \frac{i\mathbf{d}_1}{2k_t^{(2)}} \frac{(1-K)}{\beta_1} (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_t^{(1)}) \left[\mathbb{K} \left(\frac{Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi)}{\beta_1} \right) + \ln \left(Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\xi) \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{x} \in S_1 \wedge \xi \in S_2 :$

$$\mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_2 \sum_{\beta=1}^5 \left[\left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)}}{Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{A}_1^\top \Bigg\};$$

$$\mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_2 \left\langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)} \right\rangle \sum_{\beta=1}^5 \left[\left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_\beta^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{[Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)]^2} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{B}_1^\top \Bigg\};$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_2 \left[\sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)}}{Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta (\lambda_1 n_2(\mathbf{x}) - \rho_1 n_1(\mathbf{x})) - \right. \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)}}{Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)} \right\rangle \delta_1^{(2)} - \\
&\quad - \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)}{\beta_2} \right) - \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)}) (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(1)} n_1(\mathbf{x})) \mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)}{\beta_2} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mathbf{d}_2}{2} (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_t^{(1)}) (n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})) \frac{(1-K)}{\beta_2} \mathbb{K} \left(\frac{Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)}{\beta_2} \right) \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_2 \langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)} \rangle \left[- \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln(Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)) \right\rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \boldsymbol{\mu}_1 \right. \right. \\
&\quad + \frac{i}{2k_t^{(1)}} \left\langle \ln(Z_t^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)) \right\rangle \delta_1^{(2)} \\
&\quad + \frac{i\beta_i}{2k_t^{(1)}} \left(\mathbb{K} \left(\frac{Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)}{\beta_1} \right) + \ln(Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)) \right) \mathbf{X}_2 \left. \right] \\
&\quad + \frac{i\mathbf{d}_2}{2k_t^{(1)}} \frac{(1+K)}{\beta_1} (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_t^{(2)}) \left(\mathbb{K} \left(\frac{Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)}{\beta_2} \right) + \ln(Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)) \right) \left. \right\}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{x} \in S_2 \wedge \xi \in S_2 :$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_2 \left[\left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)}}{Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \xi)} \right\rangle \mathbf{A}_2^\text{T} - \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)}}{\bar{Z}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}_2^\text{T} \right] \right\}; \\
\mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_2 \langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)} \rangle \left[\left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_*^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \xi)} \right\rangle \mathbf{B}_2^\text{T} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_\beta^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{\bar{Z}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}_2^\text{T} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) = & \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_2 \left[\left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)}}{Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \xi)} \right\rangle (\lambda_2 n_2(\mathbf{x}) - \rho_2 n_1(\mathbf{x})) \right. \right. \\
& + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)}}{\bar{Z}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta (\bar{\lambda}_2 n_2(\mathbf{x}) - \bar{\rho}_2 n_1(\mathbf{x})) \\
& - \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})) \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)}}{\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)} \right\rangle \delta_2^{(2)} \left. \right] \\
& - \frac{1}{2} (n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})) \mathbb{K} \left(\frac{\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)}{\beta_2} \right) \\
& - \frac{\mathbf{d}_2}{2} (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_t^{(2)}) \left[\frac{n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{Z_t^{(2)}(\mathbf{x} - \xi)} + \frac{n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(2)}(\xi)} \right. \\
& \left. \left. + (n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_t^{(2)} n_1(\mathbf{x})) \frac{(1-K)}{\beta_2} \mathbb{K} \left(\frac{\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)}{\beta_2} \right) \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \xi) = & \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_2 \langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)} \rangle \left[\langle \ln(Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \xi)) \rangle \boldsymbol{\mu}_2 \right. \right. \\
& - \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln(\bar{Z}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)) \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 \\
& - \frac{i}{2k_t^{(2)}} \left\langle \ln(\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\xi)) \right\rangle \delta_2^{(2)} - \frac{i\beta_2}{2k_t^{(2)}} \left(\mathbb{K} \left(\frac{Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \xi)}{\beta_2} \right) + \ln(Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \xi)) \right) \left. \right] \\
& + \frac{i\mathbf{d}_2}{2k_t^{(2)}} (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_t^{(2)}) \left[\ln(Z_t^{(2)}(\mathbf{x} - \xi)) + \ln(\bar{Z}_t^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(2)}(\xi)) \right. \\
& \left. \left. + (1-K) \left(\mathbb{K} \left(\frac{Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \xi)}{\beta_2} \right) + \ln(Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \xi)) \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Як і у попередньому випадку, стягнемо контур Γ_i до деякого математичного розрізу Γ_c із берегами Γ_c^+ та Γ_c^- (за аналогією до п. п. 2.12). Зважаючи на те, що нормалі до цих берегів є протилежними за напрямом, на основі інтегральних формул (4.88), (4.89) можна отримати такі інтегральні тотожності для переміщень і напружень у тілі із розрізом Γ_c :

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_i(\xi) &= \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&+ \int_{\Gamma} [R_i(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) + V_i(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&+ \int_{\Gamma_c} [U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&+ \int_{\Gamma} [R_i(\mathbf{x}, \xi) \Delta \theta(\mathbf{x}) + V_i(\mathbf{x}, \xi) \Sigma h_n(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&+ \iint_S U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) f_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \iint_S V_i(\mathbf{x}, \xi) f_h(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \\
\sigma_{ij}(\xi) &= \int_{\Gamma} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) \tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) \tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&+ \int_{\Gamma} [Q_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) + W_{ij}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&+ \int_{\Gamma_c} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma \tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&+ \int_{\Gamma} [Q_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Delta \theta(\mathbf{x}) + W_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma h_n(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&+ \iint_S D_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) f_k(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \iint_S W_{ij}(\mathbf{x}, \xi) f_h(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Для побудови інтегральних рівнянь для знаходження температури, теплового потоку, переміщень і напружень, спрямовуємо точку z внутрішності до точки τ_0 на межі, і використаємо формулу Сохоцького – Племелі (2.86).

На основі формалізму Стро, теореми про голоморфність та виразів, (4.34), (4.35), (4.74), (4.86) побудуємо систему дуальних інтегральних рівнянь для термомагнітоелектропружного біматеріалу.

Якщо точка колокації y лежить на гладкій поверхні Γ замкнутого контуру:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \theta(\mathbf{y}) &= \text{RPV} \int_{\Gamma} \Theta^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{H}^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\
&+ \int_{\Gamma_c} \Theta^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_c} \mathbf{H}^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\
& + \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{v}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\
& + \int_{\Gamma_c} \left[\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \right. \\
& \left. + \mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Якщо точка колокації \mathbf{y} лежить на гладкій поверхні Γ_c розрізу:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma \theta(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma_c} \Theta^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\
& - \text{CPV} \int_{\Gamma_c} \mathbf{H}^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\
& + \int_{\Gamma} \left[\Theta^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) - \mathbf{H}^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta h_n(\mathbf{y}) = & n_i(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_c} \Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right. \\
& \left. - \text{HPV} \int_{\Gamma_c} \mathbf{H}_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \right. \\
& \left. \int_{\Gamma} \left[\Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) - \mathbf{H}_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \right],
\end{aligned} \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma_c} \mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\
& - \text{CPV} \int_{\Gamma_c} \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\
& + \text{RPV} \int_{\Gamma_c} \mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\
& + \int_{\Gamma_c} \mathbf{v}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\
& + \int_{\Gamma} \left[\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \right. \\
& \left. + \mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) = & n_j^+(\mathbf{y})\left[\text{CPV}\int_{\Gamma_c}\mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Sigma\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})ds(\mathbf{x})\right. \\
& - \text{HPV}\int_{\Gamma_c}\mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})ds(\mathbf{x}) \\
& + \text{CPV}\int_{\Gamma_c}\mathbf{q}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta\theta(\mathbf{x})ds(\mathbf{x}) \\
& + \text{RPV}\int_{\Gamma}\mathbf{w}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Sigma h_n(\mathbf{x})ds(\mathbf{x}) \\
& + \int_{\Gamma}\left[\mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\right. \\
& \left. + \mathbf{q}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\theta(\mathbf{x}) + \mathbf{w}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x},\mathbf{y})h_n(\mathbf{x})\right]ds(\mathbf{x})\left. \right].
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Тут RPV – головне значення невластивого інтеграла Рімана. HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтегралу за Адамаром.

Твердження. Інтегральні рівняння, отримані для необмежених біматеріальних тіл з внутрішніми вирізами Γ_1 та/або Γ_2 із неідеальним тепловим контактом складових, можна використовувати, як для задач із довільною кількістю внутрішніх контурів та тонких (уздовж математичних розрізів) включень у кожній із складових, так і для скінченних однорідних тіл обмежених зовнішнім контуром Γ_3 із внутрішніми контурами та тонкими включеннями. Очевидно, що їхні розв’язки придатні лише для точок, що не належать до внутрішності вирізів.

Можна також сформулювати твердження, що якщо ці рівняння суто формально розв’язати для внутрішніх точок замкнутих контурів на берегах яких задано певні крайові умови, то будуть отримані розв’язки для сукупності скінченних тіл відповідної до контуру форми з матеріалу, у якому міститься цей контур, та належними крайовими умовами.

Доведення. Без зменшення загальності припустимо, що скінченне тіло обмежене контурами Γ_1 та Γ_3 , що повністю лежать у півпросторі S_2 ($\Gamma_2 \in \emptyset$). Тоді легко бачити, що відповідно до інтегральної формули Коші (2.84) для цієї задачі співвідношення (4.8) та (4.9) набудуть вигляду

$$g_1'(z_t^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} q_t^{(1)}(z_t^{(1)}), \quad (4.94)$$

$$g_2'(z_t^{(2)}) = 0. \quad (4.95)$$

Співвідношення (4.94) та (4.95) аналогічні до відповідних для однорідного скінченного тіла без внутрішніх прошарків. Аналогічно можна довести сформульоване твердження і для співвідношень (4.74), (4.86) термомагнітоелектропружності. Те ж саме можна зробити і у випадку скінченного тіла, обмеженого контурами, що лежать в області S_2 .

Важливо, що незважаючи на свою позірну тривіальність в аналітичному плані це твердження створює можливість верифікації отриманих складних для отримання та числового розв'язування інтегральних співвідношень складної задачі на основі їхнього повномасштабного використання до розв'язування набагато простіших задач для скінченних однорідних тіл. Зокрема, розглядаючи за допомогою запропонованих для біматеріального тіла рівнянь скінченне однорідне тіло, розташоване цілковито у площині S_1 або S_2 можна таким чином верифікувати ці рівняння на апробованих аналітичних розв'язках для скінченних однорідних тіл канонічної форми. Такий спосіб верифікації використано у розглянутому нижче прикладі 1.

4.3. Числові приклади

Отримані інтегральні рівняння (4.90)–(4.93) разом із моделлю термомагнітоелектропружного включення (3.19) було введено у схему модифікованого методу граничних елементів [154], що дало можливість розв'язувати конкретні плоскі задачі термомагнітоелектропружності.

Приклад 1. Для верифікації побудованих інтегральних рівнянь та застосованої для їхнього розв'язування числового методу р Розглянемо біматеріальне середовище з інтерфейсом високої теплопровідності та обмежимо у ньому контуром Γ квадратну область ($W = H$), що повністю розташована у півпросторі $y > 0$ (рис. 4.2). Напрямок обходу вибираємо так, щоб вектор

нормалі \mathbf{n} до контуру був спрямований назовні квадратної області. Таким чином, сформулюємо задачу для однорідної скінченної квадратної області, яку однак, будемо розв'язувати за допомогою отриманих для біматеріальних тіл інтегральних співвідношень. На нижній межі $-W/2 \leq x \leq W/2$, $y = r$ області D вважатимемо, що температура дорівнює нулю (рис. 4.3). На верхній межі $-W/2 \leq x \leq W/2$, $y = r + H$ задана температура величиною $\theta = \theta^0$. Бічні сторони $x = \pm W/2$, $r \leq y \leq r + H$ вважаються теплоізолюваними. Інтегральні рівняння розв'язуватимемо числово за допомогою модифікованої схеми методу граничних елементів [154]. Для дискретизації межі Γ тіла використаємо 40 однакових за розміром граничних елементів (по 10 елементів на кожній зі сторін квадрата).

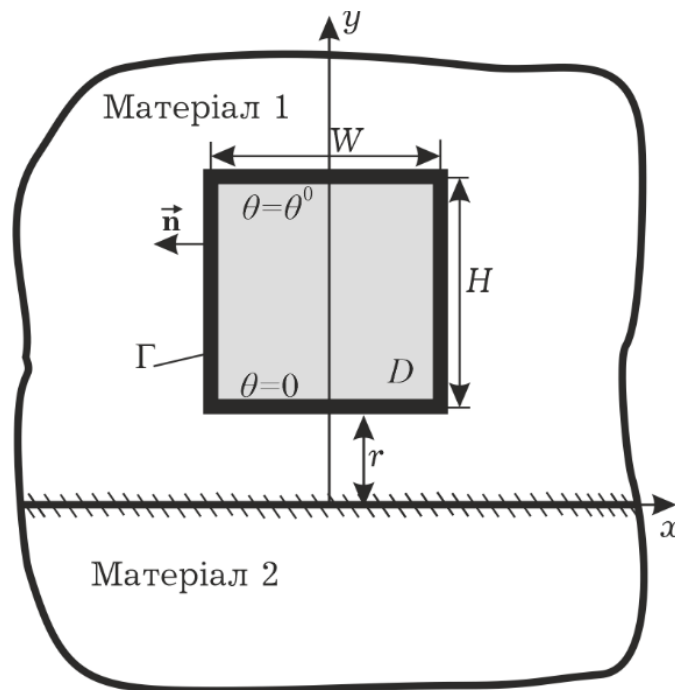


Рис. 4.3. Схема перерізу термопружного анізотропного біматеріального середовище з інтерфейсом високої теплопровідності, коли контур повністю перебуває у верхньому півпросторі

Відповідно до сформульованого та доведеного твердження у розглянутій задачі введено до інтегральних рівнянь врахування наявності інтерфейсу високої теплопровідності не здійснюватиме впливу на розподіл температури у даному скінченному тілі, адже останнє відповідно до формулювання задачі є

однорідним. Значення температури у тілі обчислювали, використовуючи квадратну сітку точок розміром 20×20 із кроком $h = 0.05W$, як за ординатою так і за абсцисою. Отриманий числово на підставі побудованих інтегральних рівнянь для біматеріалу розподіл температур у вузлах сітки із похибкою 0.05% відповідає аналітичному розв'язку цієї задачі $\theta = \theta^0(y-r)/W$. Це очевидно вказує на достовірність запропонованого підходу та з огляду на громіздкість отриманих виразів для ядер інтегральних рівнянь опосередковано верифікує їх.

Нехай тепер область, яку обмежує контур Γ повністю лежить у нижньому півпросторі $y < 0$. На Γ задані такі ж умови як і в попередньому випадку. Напрямок обходу контуру, як і раніше вибираємо так, щоб вектор нормалі \vec{n} був спрямований назовні. У цьому випадку, отримали задачу аналогічну до попередньої, для скінченного однорідного призматичного тіла виготовленого із матеріалу 2. Для її розв'язку використовуємо отримані у роботі інтегральні рівняння для біматеріалу. Інтегральні рівняння, як і в попередньому випадку розв'язуватимемо числово за допомогою модифікованої схеми методу граничних елементів [154]. Отримані розв'язки є ідентичними до попередніх, чого і слід було очікувати. Це також верифікує отримані для нижнього півпростору ядра інтегральних рівнянь.

У випадку скінченного тіла з однорідного матеріалу очевидно, що врахований в отриманих інтегральних рівняннях вплив інтерфейсу високої теплопровідності не повинен чинити дію на розподіл температури. Для підтвердження цього обчислення також здійснювалися для таких значень теплопровідності інтерфейсу $10^{-5} \leq \mu_0 \leq 10^5$ у логарифмічному масштабі з кроком 0.01 . І знову ж числові результати узгоджувалися зі сформульованим твердженням, що додатково верифікує отримані інтегральні формули та створені розрахункові програми.

Приклад 2. Розглянемо біматеріальне середовище з інтерфейсом високої теплопровідності та обмежимо у ньому контуром Γ квадратну область D ($W = H$) з інтерфейсом високої теплопровідності $x_2 = 0$, так що $-W/2 \leq x_1 \leq W/2$,

$-H/2 \leq x_2 \leq H/2$ (рис. 4.4). Нехай на верхній межі $-W/2 \leq x_1 \leq W/2$, $x_2 = H/2$ температура змінюється за законом, а на нижній $-W/2 \leq x_1 \leq W/2$, $x_2 = -H/2$ температура вважається нульовою. Бічні сторони $x_1 = \pm W/2$, $-H/2 \leq x_2 \leq H/2$ вважаються теплоізованими. Напрямок обходу контуру Γ вибираємо так, щоб вектор нормалі \vec{n} до контуру був спрямований назовні квадратної області. Вважатимемо, що матеріали з яких складається середовище є однаковими, а їхні властивості ізотропними щодо теплопровідності [153].

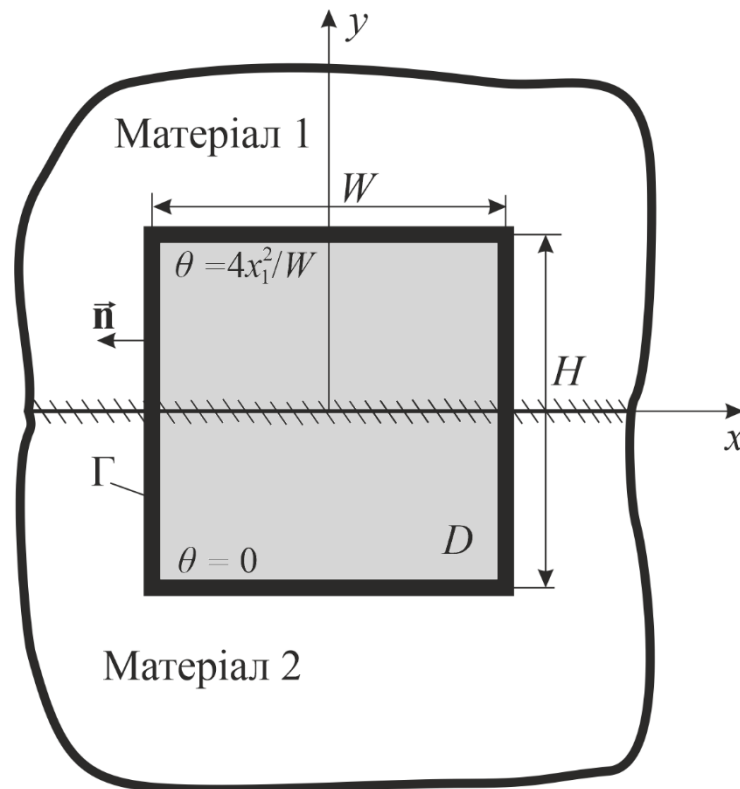


Рис. 4.4. Схема перерізу термопружного анізотропного біматеріального середовище з інтерфейсом високої теплопровідності

Для додаткової верифікації запропонованого методу. у кожній із областей подамо комплексні потенціали Стро у вигляді таких скінченних сум рядів:

$$g^{(1)}(z_t^{(1)}) = \sum_{k=0}^N C_k^{(1)} (z_t^{(1)})^k, \quad (4.96)$$

$$g^{(2)}(z_t^{(2)}) = \sum_{k=0}^N C_k^{(2)} (z_t^{(2)})^k, \quad (4.97)$$

$$F_{\alpha}^{(1)}(z_{\alpha}^{(1)}) = \sum_{k=0}^N E_{\alpha,k}^{(1)} (z_{\alpha}^{(1)})^k, \quad (4.98)$$

$$F_{\alpha}^{(2)}(z_{\alpha}^{(2)}) = \sum_{k=0}^N E_{\alpha,k}^{(2)} (z_{\alpha}^{(2)})^k \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (4.99)$$

Тут $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$, $E_{\alpha,k}^{(1)}$, $E_{\alpha,k}^{(2)}$ – комплексні сталі, що потребують визначення; N – додатне ціле число. При цьому з огляду на означеність функції теплового потоку із точністю до довільної сталої зафіксуємо $\text{Im}(C_0^{(1)}) = 0$.

Використовуючи співвідношень формалізму Стро, підставивши комплексні потенціали (4.96) та (4.97) в умови (4.1), (4.2) контакту фаз та прирівнюючи множники при однакових степенях x_1 , отримаємо

$$k_t^{(1)} \text{Im}(C_k^{(1)}) = k_t^{(2)} \text{Im}(C_k^{(2)}) + \mu_0(k+1) \text{Re}(C_{k+1}^{(1)}), \quad (4.100)$$

$$\text{Re}(C_k^{(1)}) = \text{Re}(C_k^{(2)}) \quad (k = 0, 1, \dots, N). \quad (4.101)$$

Аналогічно на основі співвідношень формалізму Стро, співвідношень (4.98), (4.99) та крайових умов (4.3) і (4.4) отримаємо зв'язки між коефіцієнтами комплексних потенціалів Стро в областях S_1 та S_2 :

$$\text{Re} \left[A_{i\alpha}^{(1)} E_{\alpha,k}^{(1)} + c_i C_k^{(1)} \right] = \text{Re} \left[A_{i\alpha}^{(2)} E_{\alpha,k}^{(2)} + c_i C_k^{(2)} \right], \quad (4.102)$$

$$\text{Re} \left[B_{i\alpha}^{(1)} E_{\alpha,k}^{(1)} + d_i C_k^{(1)} \right] = \text{Re} \left[B_{i\alpha}^{(2)} E_{\alpha,k}^{(2)} + d_i C_k^{(2)} \right] \quad (k = 0, 1, \dots, N). \quad (4.103)$$

Для визначення коефіцієнтів $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$, $E_{\alpha,k}^{(1)}$, $E_{\alpha,k}^{(2)}$, скористаємося заданими на контурах Γ_1 та Γ_2 крайовими умовами. За аналогією із [3] застосуємо методом найменших квадратів та складемо функціонал відхилень отриманих на основі (4.96)–(4.99) полів від крайових умов, заданих у деякій множині точок $(x_1^j, x_2^j) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ($j = 1, 2, \dots, M$) на контурах Γ_1 та Γ_2 , причому $M > N$. Мінімізуючи цей функціонал відхилень за дійсними та уявними частинами невідомих $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$, $E_{\alpha,k}^{(1)}$, $E_{\alpha,k}^{(2)}$ із використанням співвідношень (4.100)–(4.103) отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь на визначення шуканих коефіцієнтів.

Спочатку вважатимемо, що теплопровідність інтерфейсу є досить великою ($\mu_0 / \mu_0^* = 100$, де $\mu_0^* = Wk_t^{(1)}/2$). За таких умов температура міжфазного прошарку повинна мало змінюватися (бути практично сталою), а отже, у нижній частині двокомпонентного матеріалу за окреслених крайових умов температура має практично лінійно залежати від координати x_2 . Відповідні лінії рівня, отримані на підставі створеного напіваналітичного підходу побудовані на рис. 4.5. Із графіка добре видно окреслену фізичну особливість розглянутого прикладу, що також підтверджує достовірність отриманих розв'язків задачі.

На рис. 4.6 зображено розв'язок задачі з аналогічними крайовими умовами за відносно невеликих значень параметра теплопровідності інтерфейсу. Видно, що у верхній щодо інтерфейсу частині тіла температурні поля практично не залежать від параметра μ_0 теплопровідності міжфазного прошарку і фактично визначаються крайовими умовами на межі тіла. Натомість у нижній щодо інтерфейсу частині тіла невелика зміна параметра μ_0 чинить істотний вплив на розподіл температур.

Аналогічні особливості стосуються і полів напружень, електричних зміщень та магнітної індукції, зумовлених цими температурними полями, графіки щодо яких у цій праці не наводимо.

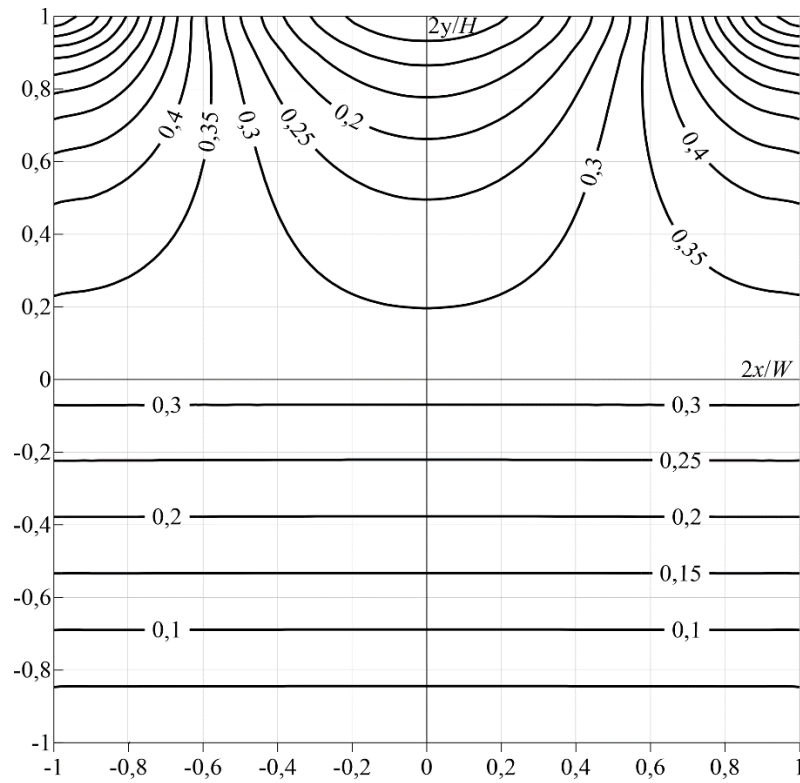


Рис. 4.5. Розподіл температур у двокомпонентному тілі з міжфазним прошарком за $\mu_0 / \mu_0^* = 100$

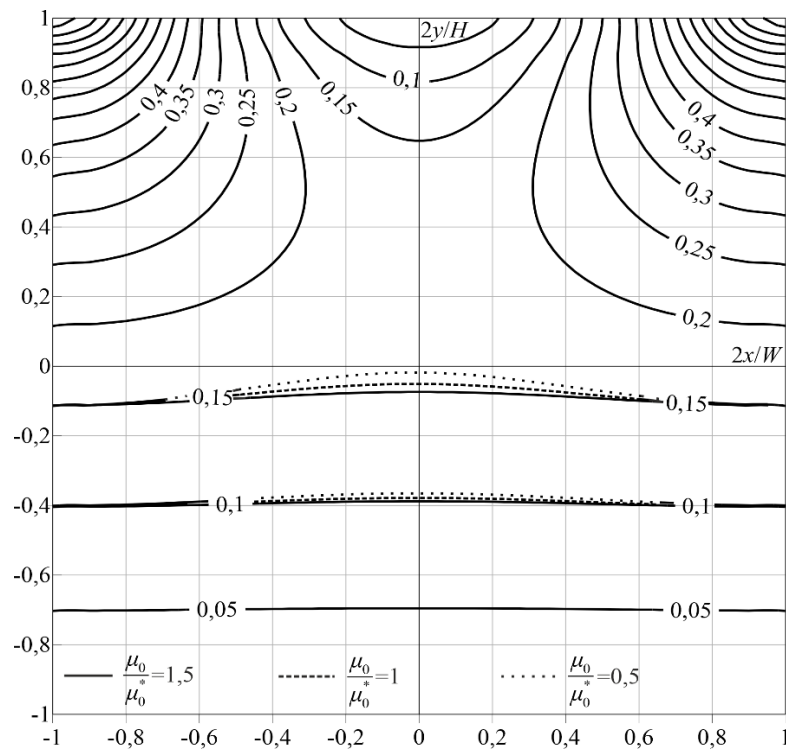


Рис.4.6. Розподіл температур у двокомпонентному тілі з міжфазним прошарком

Приклад 3. Тепер розглянемо задачу плоскої деформації для термопружного анізотропного біматеріалу, що складається з двох півпросторів. Він містить прямолінійне пружне ізотропне теплоізольоване електро- та магнітопроникне стрічкове включення безмежної довжини, завширшки $2a$. Для його моделювання використовується принцип спряження континуумів різної вимірності, який полягає у заміні тонкого включення деякою площиною розриву теплофізичного та напруженого деформованого стану тіла. У цьому прикладі вважається, що коефіцієнти лінійного теплового розширення матеріалу включення дорівнюють нулю. Його поперечний переріз перпендикулярний до межі біматеріалу (рис. 4.7). Один край включення розташований у півпросторі $x_2 > 0$, а другий – у півпросторі $x_2 < 0$. Особливість у точці перетину включення з межею матеріалів не враховувалася. Центр включення збігається з початком координат. Товщина включення $h = 0,01a$; відносна жорсткість включення – $k = G_i / C_{11}$.

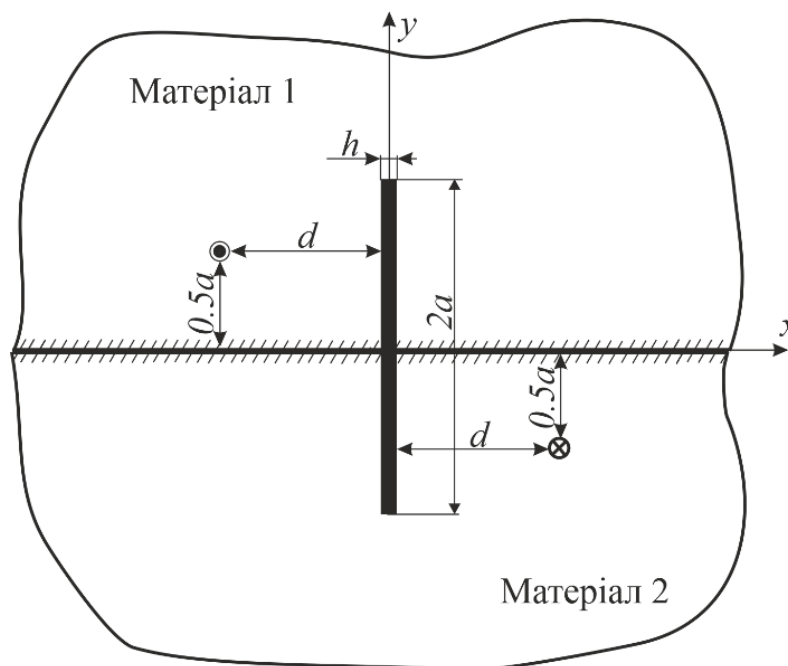


Рис. 4.7. Схема термопружного анізотропного біматеріалу, що містить тонку неоднорідність

У півпросторі $x_2 > 0$ на відстані $0,5a$ до межі розташоване джерело тепла інтенсивності q ; у півпросторі $x_2 < 0$ також, на відстані $0,5a$ до межі антисиметрично розташований стік тепла інтенсивності $-q$.

Розглянуто два варіанти матеріалів півпросторів:

- а) обидві складові виготовлені з титанату барію (BaTiO_3);
- б) складова $y > 0$ виготовлена з титанату барію (BaTiO_3), а складова $y < 0$ – із селеніду кадмію (CdSe).

Характеристики матеріалів подані нижче.

Матеріал BaTiO_3 :

пружні сталі (ГПа): $C_{11} = C_{33} = 150$; $C_{22} = 146$; $C_{12} = C_{13} = C_{23} = 66$; $C_{44} = C_{66} = 44$; $C_{55} = 42$;

п'єзоелектричні коефіцієнти (Кл/м²): $e_{21} = e_{23} = -4.35$; $e_{22} = 17.5$;
 $e_{16} = e_{34} = 11.4$;

діелектричні сталі (нФ/м): $\kappa_{11} = 9.86775$; $\kappa_{22} = 11.151$;

коефіцієнти теплопровідності (Вт/м·К): $k_{11} = k_{22} = 2.5$;

коефіцієнти теплового розширення(К⁻¹): $\alpha_{11} = 8.53 \cdot 10^{-6}$;

$\alpha_{22} = 1.99 \cdot 10^{-6}$;

піроелектричні сталі (ГВ/м·К): $\lambda_2 = 13.3 \cdot 10^{-6}$.

Матеріал CdSe :

пружні сталі (ГПа): $C_{11} = C_{33} = 74.1$; $C_{22} = 83.6$; $C_{12} = C_{23} = 39.3$;
 $C_{13} = 44.2$, $C_{44} = C_{66} = 13.17$; $C_{55} = 14.45$;

п'єзоелектричні коефіцієнти (Кл/м²): $e_{21} = e_{23} = -0.16$; $e_{22} = 0.347$;
 $e_{16} = e_{34} = -0.138$;

діелектричні сталі (нФ/м): $\kappa_{11} = 0.0826$; $\kappa_{22} = 0.0903$;

коефіцієнти теплопровідності (Вт/м·К): $k_{11} = 1$; $k_{22} = 2.5$;

теплові модулі(МПа/К): $\beta_{11} = \beta_{33} = 0.621$; $\beta_{22} = 0.551$;

піроелектричні коефіцієнти (Кл/м²·К): $\chi_2 = -2.94 \cdot 10^{-6}$.

На графіках зображена залежність знерозмірених коефіцієнтів інтенсивності напруження від параметра теплопровідності інтерфейсу μ_0 , ($\mu_0^* = ak_{11}$). Усі розрахунки здійснено згаданим вище методом граничних елементів [119], [155]. Для розбиття поверхні включення використано 20 граничних елементів. З подальшим збільшенням кількості елементів отримані результати відрізняються менше ніж на 0,5%. Узагальнені КІН нормовані величиною $K_0 = q \cdot \beta_{11} \sqrt{\pi a} / k_{11}$.

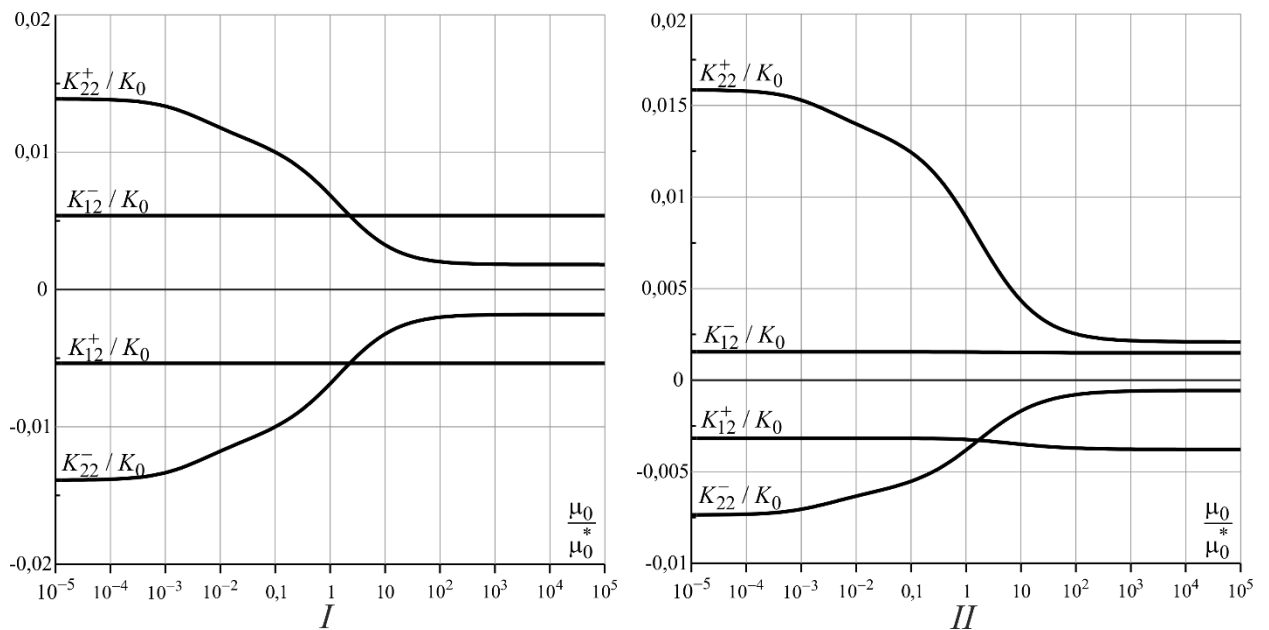


Рис. 4.8. Залежність знерозмірених узагальнених КІН включення в безмежному тілі від параметра μ_0

Помітно, що у першому випадку (рис. 4.8(I)), коли складові матриці виготовлені з однакового матеріалу за геометричної симетрії задачі та асиметрії температурного навантаження, значення коефіцієнтів інтенсивності напружень на протилежних кінцях включення є очікувано однаковими за величиною та протилежними за знаком (рис. 4.8(I)). Максимальними є знерозмірені КІН $K_{22}^+ / K_0 = K_{22}^- / K_0 \approx 0,014$, для інтерфейсу високої теплопровідності при $\mu_0 / \mu_0^* = 10^{-5}$.

Коли ж півпростори мають різні властивості (рис. 4.8(II)), то симетрія розв'язку порушується. Причому за такої геометрії задачі і такого ж теплового навантаження. Оскільки матеріал півпростору $x_2 > 0$, такий же, як і в

попередньому випадку, то значення КІН на кінці, що розташований у цій півплощині зміняться дуже слабо. Проте на кінці, що розміщений у нижньому півпросторі зміна коефіцієнтів ϵ відчутнішою: при $\mu_0 / \mu_0^* = 10^{-5}$ K_{22}^- / K_0 змінюється з 0,014 на 0,0075, а K_{12}^- / K_0 – з 0,005 – на 0,002.

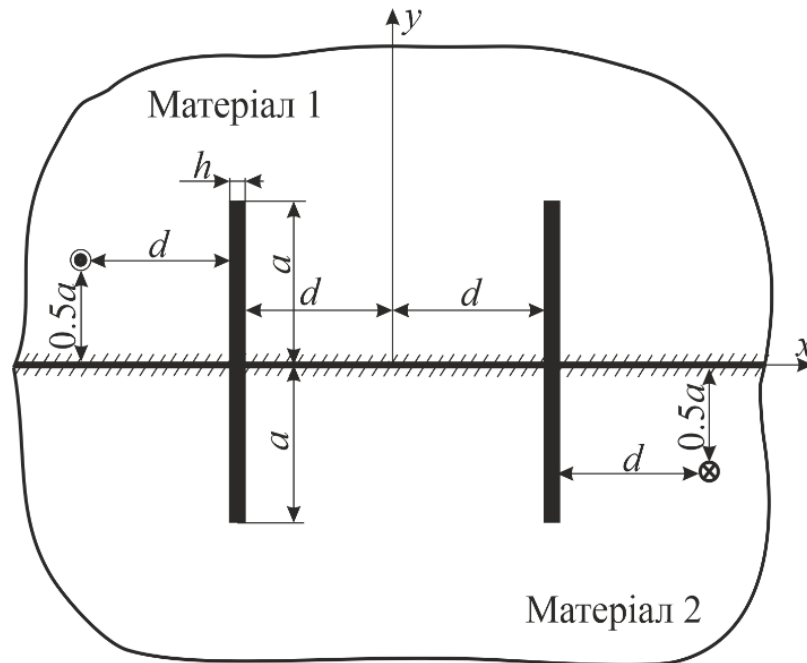


Рис. 4.9. Схема задачі для термопружного анізотропного біматеріалу з двома включеннями

Приклад 4. Тепер розглянемо біматеріал, що містить два однакові включення що перпендикулярні до межі. Їхні властивості такі ж, як і в попередній задачі. Вони розміщені на відстані d від осі x_2 . Джерело і стік тепла однакової інтенсивності, як і раніше розташовані на відстані $0,5a$ від межі у півпросторах $x_2 > 0$ та $x_2 < 0$ відповідно, а також на відстані $2d$ до осі x_2 (рис. 4.9).

Як і в попередній задачі дослідимо залежність коефіцієнтів інтенсивності напруження від параметра теплопровідності інтерфейсу μ_0 , ($\mu_0^* = ak_{11}$).

На графіках (рис. 4.10) відображені значення узагальнених КІН для першого (I) та другого (II) включень, коли складові матриці виготовлені із одного матеріалу.

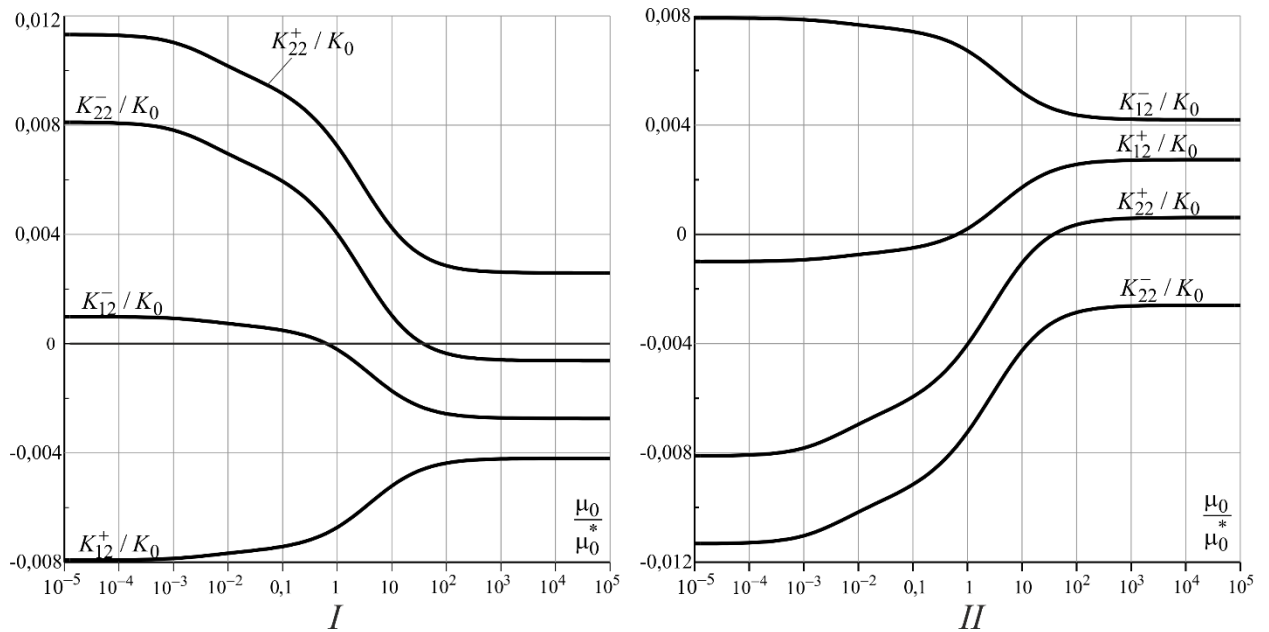


Рис. 4.10. Залежність знерозмірених узагальнених КІН двох включень в безмежному тілі від параметра μ_0 коли складові виготовлені з однакових матеріалів

Внаслідок того, що включення є однаковими і розташовані симетрично відносно осей x_2 та x_1 , а матеріали складових мають однакові властивості, графіки для обох включень мають схожий вигляд, і відрізняються лише знаком. Як і попередній задачі, максимальні значення КІН $K_{22}^+ / K_0 = 0,011$ отримано для $\mu_0 / \mu_0^* = 10^{-5}$.

Деякі інші результати спостерігаємо у разі, коли складова $x_2 < 0$ біматеріалу виготовлена із матеріалу властивості якого відмінні від $x_2 > 0$.

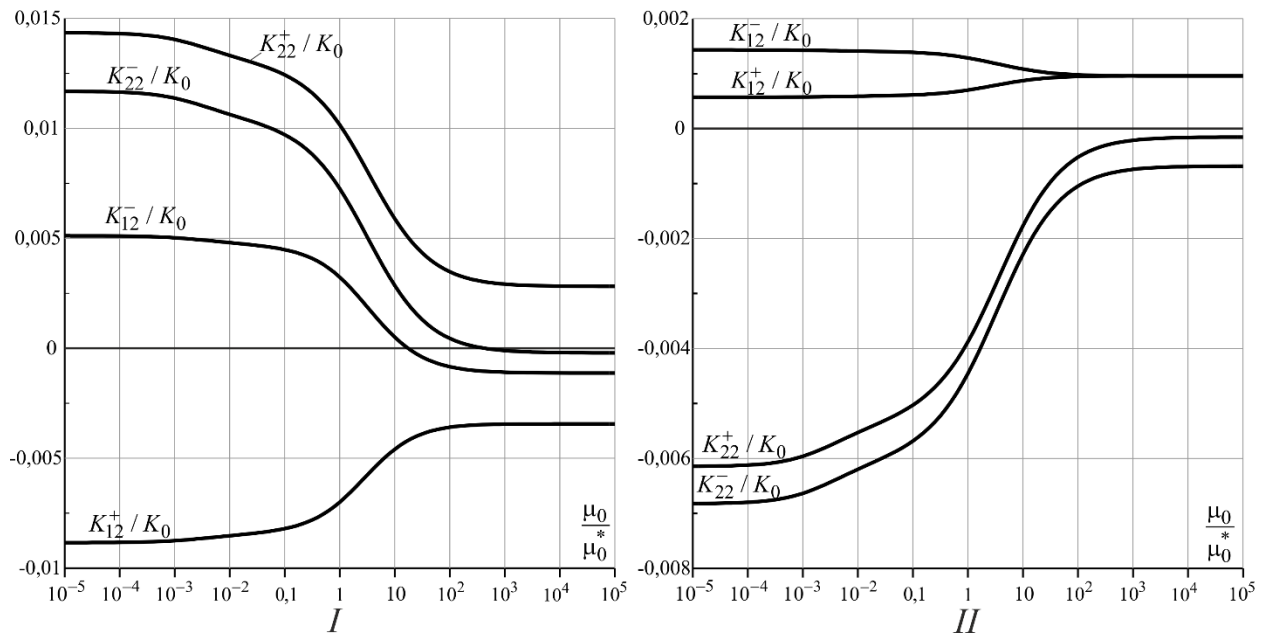


Рис. 4.11. Залежність узагальнених КІН двох включень в безмежному тілі від параметра μ_0 , коли складові виготовлені з різних матеріалів.

З рис. 4.11(I) бачимо, що у цьому разі значення коефіцієнтів інтенсивності на кінцях першого включення зазнали значних змін у порівнянні з однорідною матрицею Рис.4.10(I). Максимальне значення K_{22}^+ / K_0 збільшилося з 0,011 до 0,014; K_{22}^- / K_0 – з 0,008 до 0,012. Так само зросли і значення K_{12}^- / K_0 .

Натомість на кінцях другого включення КІН навпаки зменшилися. Як бачимо з рис. 4.11(II), максимальне значення K_{22}^- / K_0 зменшилося з 0,011 до 0,0078; K_{22}^+ / K_0 – з 0,008 до 0,0061. Також K_{12} / K_0 на верхньому та нижньому кінцях другого включення наближаються до значення 0,001 при $\mu_0 / \mu_0^* = 10^2$.

Приклад 4. Розглянемо біматеріальне термомагнітоелектропружне призматичне тіло квадратного поперечного перерізу з інтерфейсом високої теплопровідності, що займає область $-W/2 \leq x \leq W/2$, $-H/2 \leq y \leq H/2$ (рис.4.12). Верхня та нижня поверхні $y = \pm H/2$, а також бічні поверхні призми $x = \pm W/2$, теплоізольовані ($h_n = 0$) і вважаються вільними від механічних, теплових і електромагнітних навантажень ($\tilde{t}_i = 0$). Тіло містить тонке прямолінійне абсолютно жорстке теплоізольоване електро- та магнітопроникне

стрічкове включення завширшки $2a$ і завтовшки $2h$, яке є перпендикулярним до межі поділу. Окрім цього в тілі присутні джерело та стік тепла однакової інтенсивності q , розміщені антисиметрично на відстані $d=0,5a$ до межі поділу матеріалів у різних складових тіла.

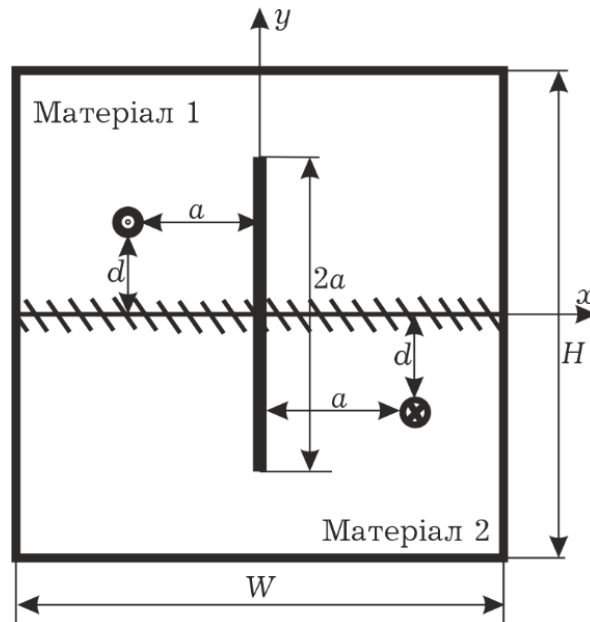


Рис. 4.12. Схема термопружного анізотропного біматеріального квадратного тіла, що містить тонке включення

У розрахунках вважалося, що коефіцієнти лінійного теплового розширення матеріалу включення дорівнюють нулю. Один край включення знаходиться у верхній ($y > 0$), а інший у нижній частині ($y < 0$) тіла. Особливості полів напружень, електричних зміщень та магнітної індукції у місці перетину включення з межею матеріалів не враховувалися. Центр включення збігається з початком координат. Півтовщина включення $h = 0,01a$.

Попередні розрахунки виявили, що максимальних значень узагальнені коефіцієнти інтенсивності полів для фіксованих значень параметра теплопровідності інтерфейсу досягають у випадку абсолютно жорсткого включення, тому на графіках подаємо відповідні саме для цього випадку. Розглянуто два варіанти матеріалів півпросторів

Коли компоненти тіла виготовлені з однакових матеріалів, для знерозмірнених коефіцієнтів інтенсивності напружень були одержані

відображені на (рис. 4.13) та (рис. 4.14) залежності. Узагальнені КІН і параметр теплопровідності нормовані величинами $K_0 = q \cdot \beta_{11} \sqrt{\pi a} / k_{11}$ та $\mu_0^* = a k_{11}$, відповідно. Тут коефіцієнти k_{11} та β_{11} є характеристиками ВаТіО₃.

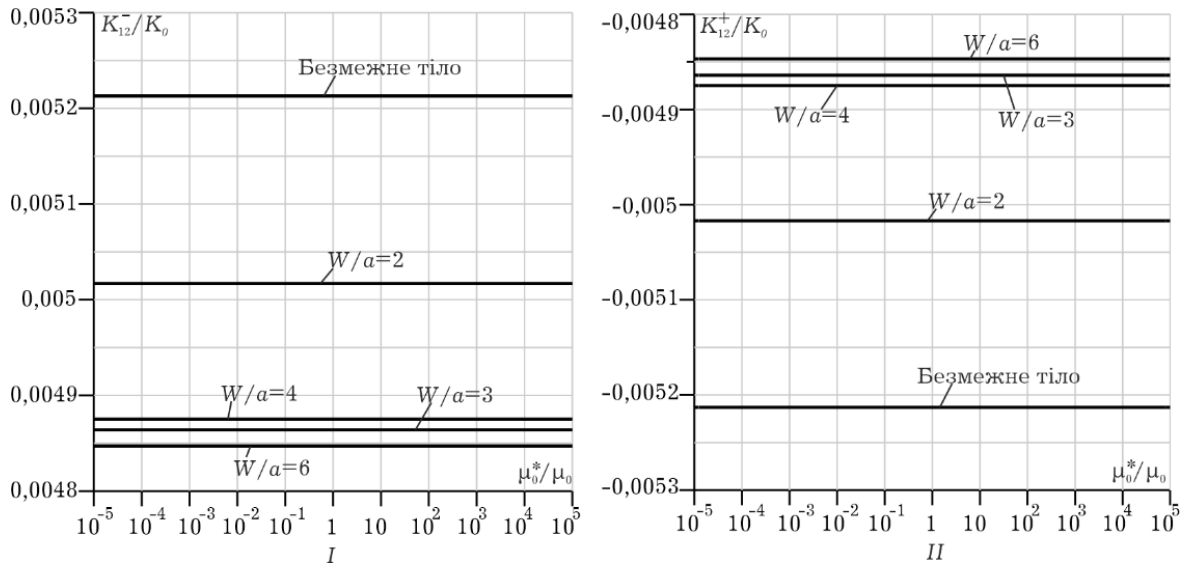


Рис. 4.13. Залежність узагальнених КІН K_{12} / K_0 включення у однорідному призматичному тілі від параметра μ_0

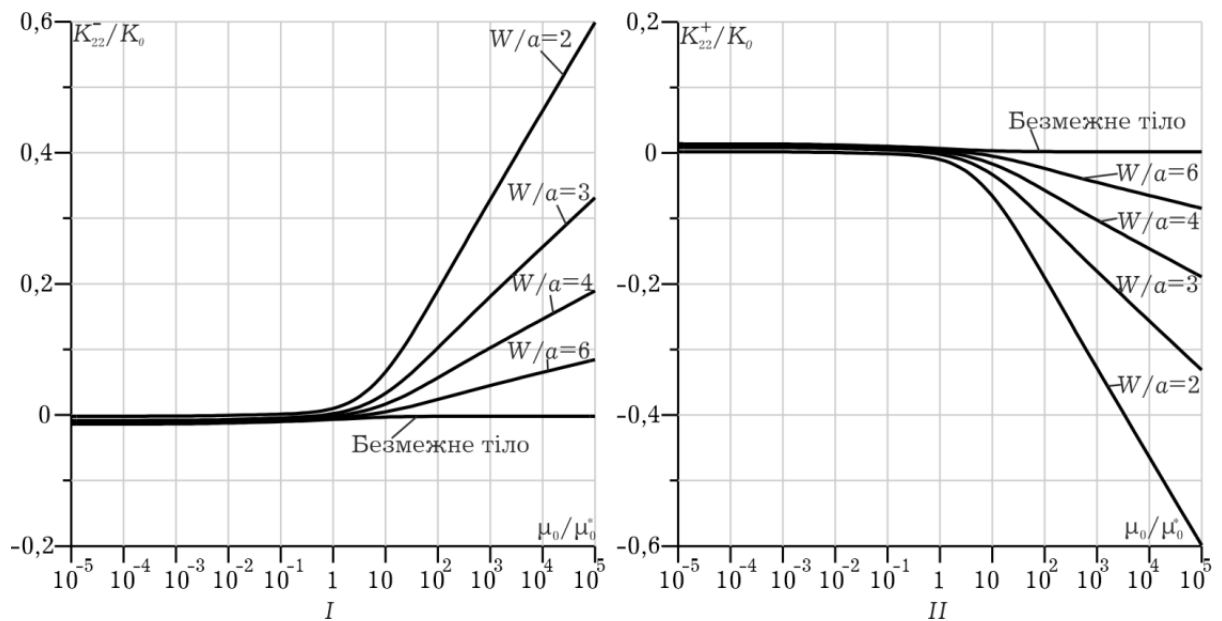


Рис. 4.14. Залежність узагальнених КІН K_{22} / K_0 включення у однорідному призматичному тілі від параметра μ_0

У цьому випадку, внаслідок геометричної та матеріальної симетрії задачі, значення КІН K_{12}^- / K_0 за різних значень параметра теплопровідності μ_0 будуть однаковими. Крім того, збільшення розмірів тіла практично не впливає на ці КІН.

У разі, коли складові квадратної призми виготовлені з різних матеріалів, графіки залежностей знерозмірених узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень від параметра теплопровідності інтерфейсу матимуть вигляд, зображений на (Рис.4.15) та (Рис 4.16).

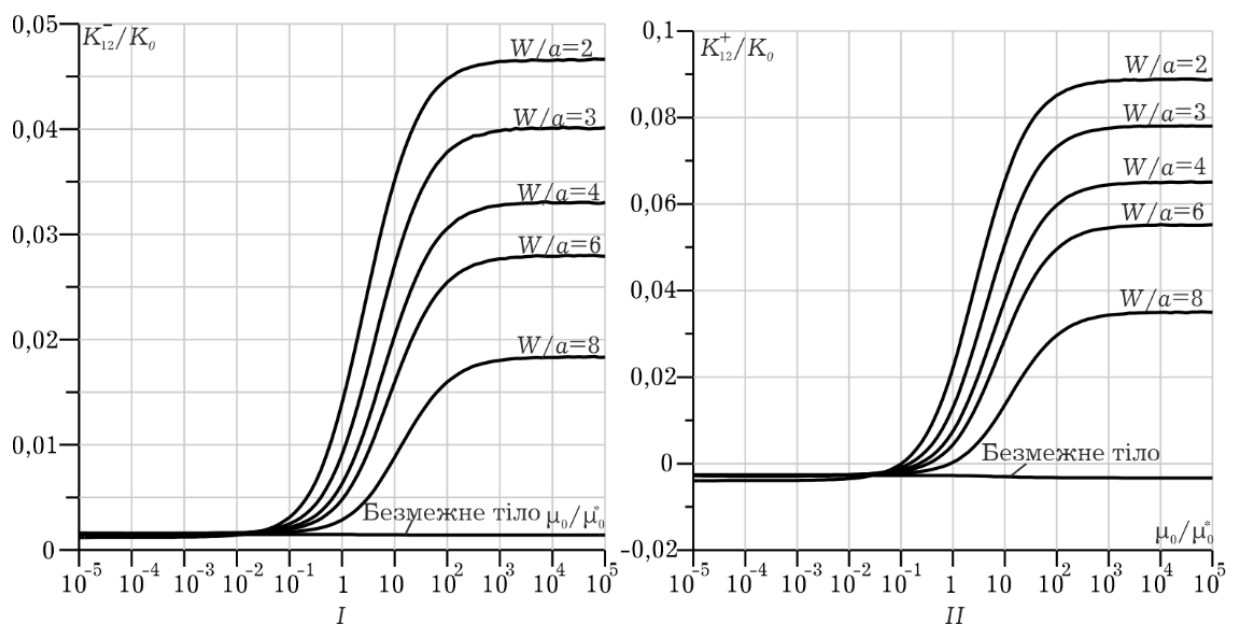


Рис. 4.15. Залежність узагальнених КІН K_{12}^- / K_0 включення у біматеріальному призматичному тілі від параметра μ_0

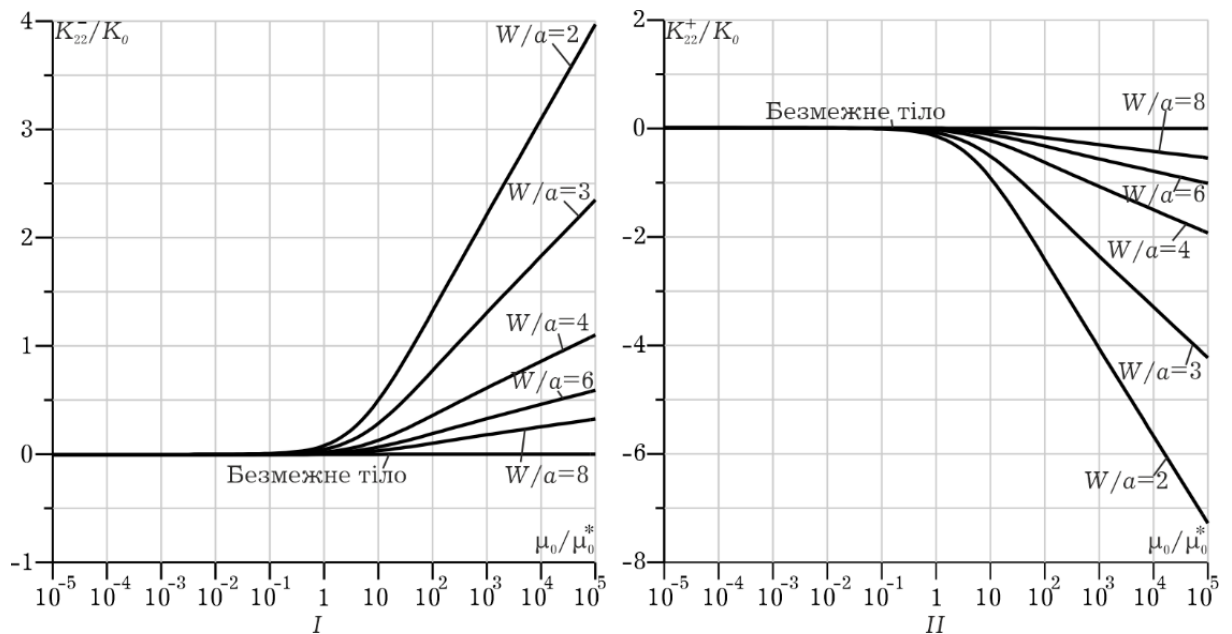


Рис. 4.16. Залежність узагальнених КІН K_{22} / K_0 включення у біматеріальному призматичному тілі від параметра μ_0

Із рис. 4.15 видно, що зі зменшенням розмірів тіла, порівняно із розміром неоднорідності (W/a), відношення K_{12} / K_0 монотонно зростає. Причому зі збільшенням μ_0 приріст стає щораз істотнішим. Це пояснюється зростанням впливу взаємодії торців включення із межами тіла. Оскільки кінці включення розташовані у різних матеріалах, значення КІН на них істотно відрізняються, однак їхня зміна відбувається у подібний спосіб. Усі коефіцієнти K_{12} / K_0 спочатку монотонно зростають, виходячи на горизонтальні асимптоти.

За обраного способу навантажування (як видно з графіків Рис.4.16) якісний вплив параметрів W/a і μ_0 на значення відношення K_{22} / K_0 є подібним і також монотонним. Однак для цього безрозмірного КІН це стосується абсолютного значення K_{22} / K_0 і зростання у разі прямування μ_0 до нескінченності є логарифмічним (границя відсутня). Таке явище виникає внаслідок того, що тіло є теплоізолююваним і містить всередині джерело і стік тепла по різні сторони від проміжного шару.

Зі збільшенням розмірів тіла, значення КІН K_{12} / K_0 та K_{22} / K_0 зменшують, повільно наближаючись до значень, властивих для безмежного тіла з включенням (рис. 4.15, та рис. 4.16).

Приклад 6. Розглянемо біматеріальне термоелектромагнітопружне призматичне тіло квадратного поперечного перерізу з інтерфейсом високої теплопровідності, яке містить включення, вісь якого нахилена під кутом φ до інтерфейсу (Рис. 4.17).

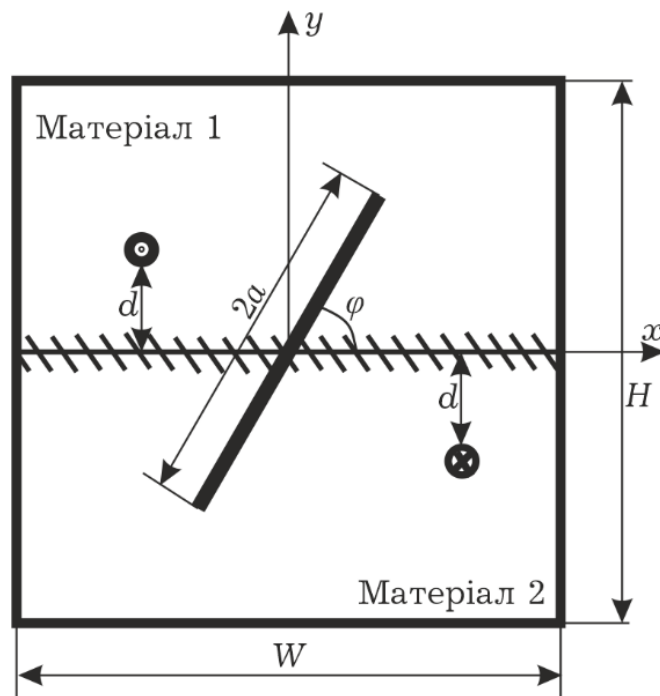


Рис. 4.17. Схема термопружного анізотропного біматеріального призматичного тіла, що містить включення нахилене під кутом до інтерфейсу

Компоненти тіла виготовлені з різних матеріалів (BaTiO_3 та CdSe). Крайові умови є такі ж, як і в прикладі 4. Включення вважається електропровідним (поперечна і поздовжня діелектричні проникності дорівнюють $\kappa_{22} = 10^{10}, \kappa_{11} = 10^{10}$ нФ/м) та абсолютно жорстким (значення відносної жорсткості $k = 10^{10}$). Значення $W/a = 5$ є сталим.

На наступних рисунках зображені графіки залежностей коефіцієнтів інтенсивності електричних зміщень від параметра теплопровідності інтерфейсу

μ_0 для різних значень кута φ у градусах. Пунктирними лініями позначені графічні залежності для значень φ більших за 90° .

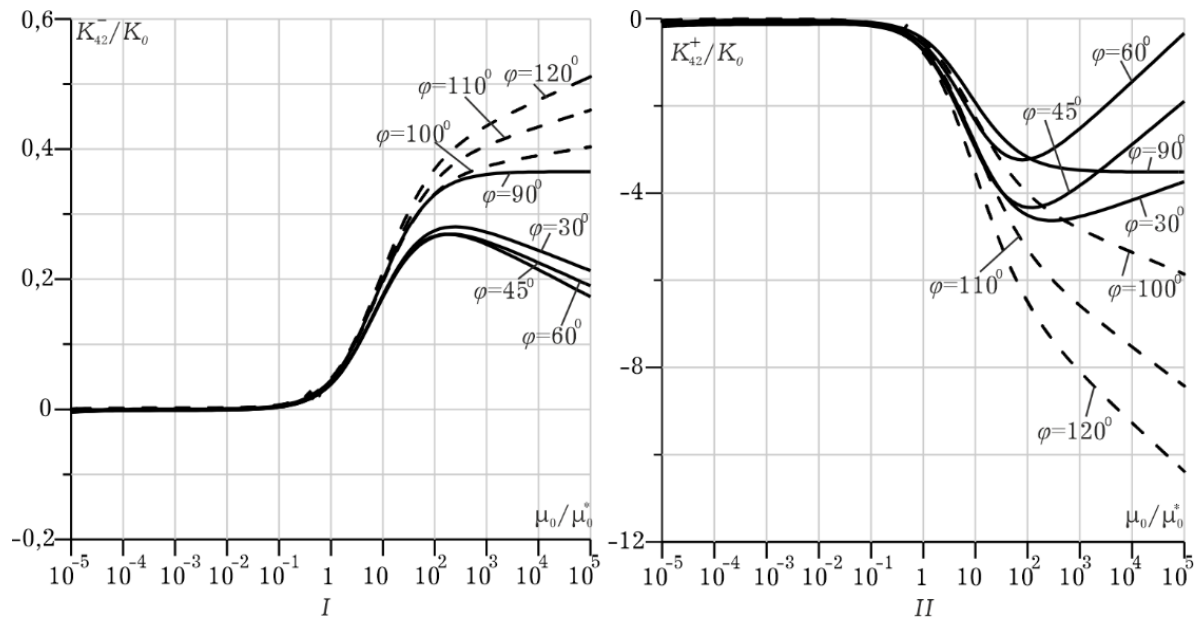


Рис. 4.18. Залежність коефіцієнтів інтенсивності електричних зміщень K_{42} / K_0 включення від параметра μ_0 за різних значень

Оскільки у цій задачі включення вважається електропровідним та абсолютно жорстким, то побудовано графіки лише для коефіцієнтів K_{42} / K_0 , а значення $K_{41} / K_0 = 0$. Як бачимо, вплив інтерфейсу на значення коефіцієнтів інтенсивності електричних зміщень є може бути ще більшим. Крім цього, кут нахилу осі включення до інтерфейсу теж істотно впливає на величини відповідних коефіцієнтів інтенсивності інших фізичних полів. Унаслідок того, що тіло виготовлене з різних матеріалів, значення коефіцієнтів на різних вершинах включення ще більше відрізняються у порівнянні із випадком однорідної матриці. Видно, що коли вісь включення перпендикулярна до інтерфейсу, ($\varphi = 90^\circ$), характер зміни коефіцієнтів K_{42} / K_0 у різних вершинах включення є подібним: спочатку їхні абсолютні значення монотонно зростають, виходячи на горизонтальну асимптоту

Якщо ж включення є податним (значення відносної жорсткості $k = 10^{-10}$) та електропровідним (поперечна і поздовжня діелектричні проникності

дорівнюють $\kappa_{22} = 10^{10}$ нФ/м $\kappa_{11} = 10^{10}$ нФ/м), то залежність знерозмірених коефіцієнтів інтенсивності електричних зміщень K_{41}/K_0 та K_{42}/K_0 від параметра μ_0 за окремих значень φ відображають (рис. 4.19) та (рис. 4.20) відповідно). Останні (рис. 4.20) з'являються внаслідок взаємодії полів деформації та електричних напруженостей.

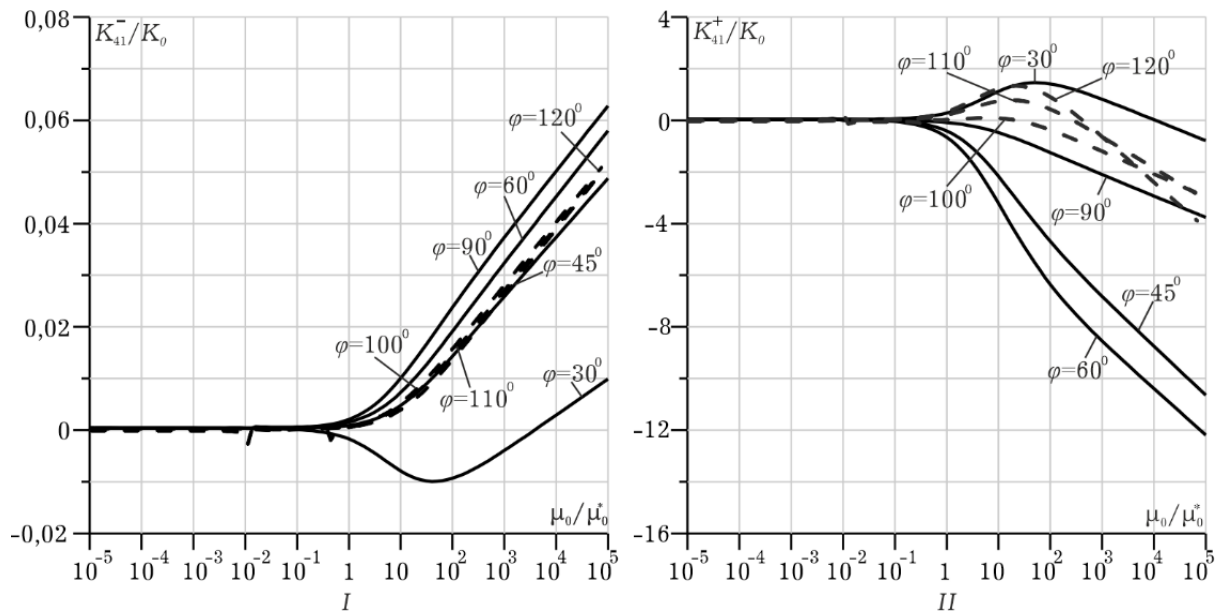


Рис. 4.19. Залежність безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності електричних зміщень K_{41}/K_0 включення від параметра μ_0 за різних значень φ

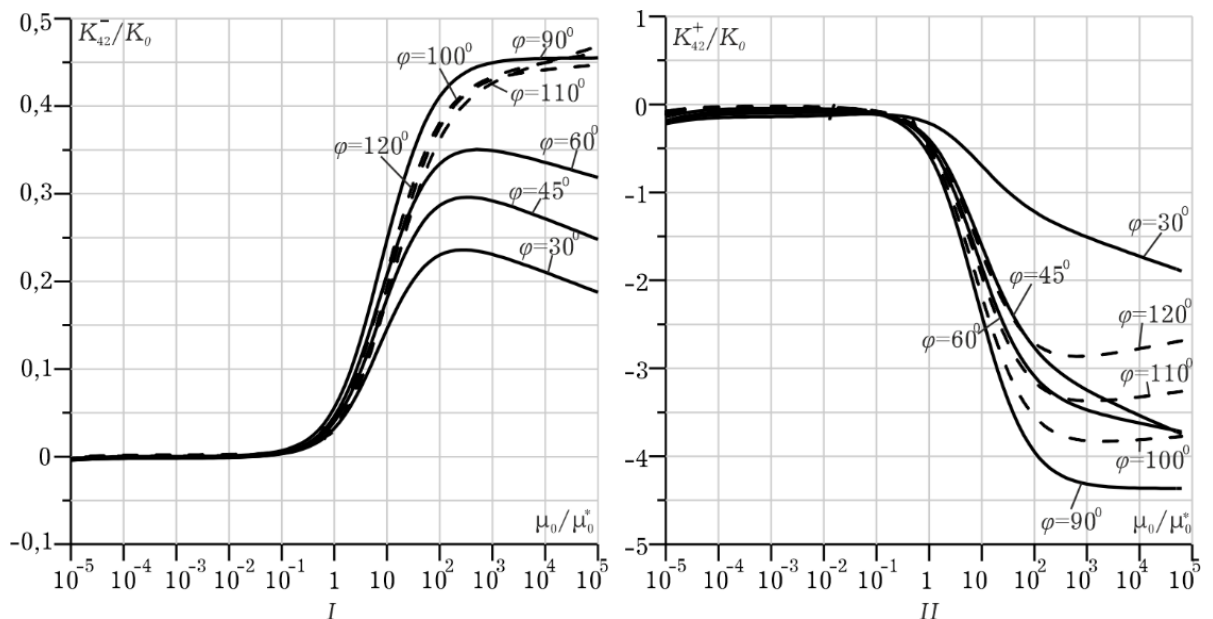


Рис. 4.20. Залежність безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності електричних зміщень K_{42}/K_0 включення від параметра μ_0 за різних значень φ

Щодо коефіцієнтів K_{42} / K_0 (рис. 4.20) можна відзначити таку закономірність зі збільшенням кута φ значення коефіцієнтів інтенсивності також збільшуються за абсолютною величиною.

Як видно з отриманих результатів, вплив електричних параметрів на значення узагальнених коефіцієнтів напруження є значним. Саме тому, важливо, при побудові розв'язків враховувати значення електричних параметрів включення.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі розглянуто задачу для термомагнітоелектропружного біматеріального тіла з інтерфейсом високої теплопровідності та ідеальним магнітоелектромеханічним контактом складових, що в свою чергу можуть містити тонкі деформівні включення. У замкнутій формі побудовано суто крайові інтегральні рівняння сформульованої задачі, у яких не потрібно додатково враховувати інтеграли уздовж інтерфейсу, а розбивати на елементи потрібно лише межу складеного тіла і серединні лінії тонких включень.

Розв'язування одержаних інтегральних рівнянь за допомогою модифікованого методу граничних елементів дало можливість вивчити декілька нових задач для біматеріалів, що складаються з однакових та різних анізотропних матеріалів, а також містять тонкі деформівні стрічкові включення. Побудовано графічні залежності узагальнених КІН від параметра теплопровідності. Отримані результати показують, що інтерфейс високої теплопровідності істотно впливає на поля напружень у вершинах тонких включень. Утому числі він здійснює значний вплив на значення коефіцієнтів інтенсивності електричних зміщень. Також виявлено, що для тіл скінченних розмірів при такій постановці задачі значення коефіцієнтів інтенсивності K_{22} / K_0 не досягають свого максимального значення, тоді як абсолютні значення коефіцієнтів K_{12} / K_0 монотонно зростають виходячи на асимптоту. Крім цього, на значення КІН впливає відношення розміру тіла до розміру включення. Так, зі

збільшенням значення W/a значення коефіцієнтів інтенсивності за модулем будуть зменшуватися.

Сформульованого та доведено твердження, яке обґрунтовує новий підхід до простої та ефективної верифікації побудованих інтегральних рівнянь та застосованих до їхнього розв'язування методів.

ВИСНОВКИ

У даній роботі розв'язано важливе науково-технічне завдання, що полягало у розробці математичних моделей та високопродуктивних аналітичних і аналітично-числових методів аналізу фізико-механічних полів у кусково-однорідних (півпростори, біматеріали) тілах зі змішаними крайовими умовами на поверхнях (зокрема, і контактних). Можна виділити такі основні наукові результати:

- поєднання формалізму Стро та теорії функції комплексної змінної, а саме використання підходів на основі інтегральної формули Коші та формул Сохоцького – Пледелі, дало можливість створити аналітичний підхід до побудови інтегральних формул та рівнянь для анізотропних термомагнітоелектропружних півпросторів та біматеріалів (складених півпросторів) із урахуванням змішаних крайових умов на межі півпростору, що містять тільки інтеграли уздовж внутрішніх контурів;
- отримані інтегральні формули та рівняння записані стосовно природніх величин (переміщення, температура, напруження, електричне зміщення тощо) на внутрішніх контурах, що дає можливість безпосереднього використання принципу спряження континуумів різної вимірності та (структурно-модульного) методу функцій стрибка для розв'язування задач про кусково-однорідні термомагнітоелектропружні тіла із тонкими неоднорідностями;
- використання отриманих для півпростору інтегральних рівнянь з модифікованим методом граничних елементів дозволило розв'язати низку нових задач для термопружного півпростору зі змішаними крайовими умовами на його межі та системою внутрішніх тонких включень здійснений числовий аналіз впливу крайових умов на межі півпростору на коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах включення вияв значний вплив ефекту згину включення на значення коефіцієнтів інтенсивності

напружень, причому цей вплив був різним для різних коефіцієнтів інтенсивності;

- за результатами числових досліджень виявлено істотний вплив змішаних механічних крайових умов на межі анізотропного півпростору на розподіл та концентрацію фізико-механічних полів у ньому, які значно відрізняються від відповідних у випадку врахування лише умов у формі Діріхле чи Неймана;
- поєднання модифікованого методу граничних елементів із отриманими інтегральними рівняннями дозволило розв'язати декілька нових задач для скінченних та безмежних біматеріальних тіл, що складаються з однакових та різних анізотропних матеріалів, а також містять тонкі деформівні стрічкові включення, зокрема, при аналізі побудованих графічних залежностей узагальнених КІН від параметра теплопровідності, кута нахилу включення до інтерфейсу та відношення розмірів тіла до розмірів включення для скінченного біматеріального тіла було виявлено, що деякі коефіцієнти інтенсивності напружень не досягають свого максимального значення при збільшенні відносної теплопровідності інтерфейсу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андрейків О.Є., Назарчук З.Т., Скальський В.Р., Рудавський Д.В., Сергієнко О.М. Коефіцієнти інтенсивності напружень, спричинених магнетним полем у феромагнетиках. Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2008. 44, № 3. С. 130–132.
2. Андрейкив А.Е. Разрушение квазихрупких тел с трещинами при сложном напряженном состоянии, К. : Наук. думка, 1992. – 184 с.
3. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И., Сеник Н.А., Фильштинский М.Л. Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел. М.: КомКнига, 2005. – 312 с.
4. Бернар И.И., Опанасович В.К. Напряженное состояние пластинки с тонкостенным включением по дуге окружности. Прикладная математика и механика, 1983. 47, № 2. С. 249–256.
5. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності. Львів: Світ, 1999. 945 с.
6. Божидарнік В.В., Андрейків О.Є., Сулим Г.Т. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів. Монографія. У 2-х т. Луцьк: Надстир'я, 2007.
7. Бурак Я., Кондрат В., Грицина О. Основи локально градієнтної теорії діелектриків. Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. – 208 с.
8. Бурак Я.Й. Вибрані праці. Львів: НУЦММІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. В-во «Ахіл», 2001. – 352 с.
9. Бурак Я.Й., Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. Визначення параметрів термомеханічного стану термочутливих магнітотвердих феромагнітних тіл за умов дії квазіусталених електромагнітних полів. Доп. НАН України, 2007. № 8. С. 53–58.
10. Бурак Я.И., Чекурин В.Ф. Физико-механические поля в полупроводниках. Математические основы теории. К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.

11. Винницька Л.І., Савула Я. Напружено-деформований стан пружного тіла з тонким включенням. Фіз.-мат. моделювання та інф. Технології, 2008. № 7. С. 21–29.
12. Винницька Л.І. Григоренко Я.М., Савула Я.Г. Гетерогенна математична модель пружного тіла з тонким податливим на згин включенням. Доп. НАН України, 2009. № 9. С. 62–66.
13. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. К.: Наук. думка, 1992. – 192 с.
14. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. – 640 с.
15. Говоруха В.Б. Аналіз тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами в полі стискального напруження та зосереджених сил. Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. Спецвипуск, 2015. С. 65–69.
16. Говоруха В.Б., Лобода В.В. Аналіз міжфазної тріщини в п'єзокерамічному тілі скінченних розмірів. Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. Науки, 2008. Вип.4. С. 47–52.
17. Грилицький Д.В., Сорокати́й Ю.І. Механічні і оптичні методи дослідження напружено-деформованого стану тіл. Львів: ЛДУ, 1984. – 59 с.
18. Грилицький Д.В., Сулим Г.Т. Розвиток теорії тонкостінних включень у Львівському державному університеті. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті, 1987. Вип. 27. С. 3–9.
19. Грилицький Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для кусочно-однородной плоскости с тонко-стенными включениями. Прикл. механика, 1975. 11, №1. С. 74–81.
20. Грилицький Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. Прикладная математика и механика, 1975, 39, № 3. С. 520–529.
21. Грилицький Д.В., Сулим Г.Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением. Мат. методы и физ.-мех. поля. Киев: Наук. думка, 1975. Вып. 1. С. 41–48.

22. Денисюк І.Т. Пружна рівновага тіла з негладким включенням. Луцьк: Ред.-видавничий відділ ЛДТУ, 2004. – 220 с.
23. Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. К учету особенностей при численном решении задач теории упругости. Тр. Новосиб. Ин-та инженеров ж.-д. трансп., 1976. 12, №11. С 74–84.
24. Калоеров С.А., Петренко А.В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
25. Калоеров С.А., Добряк Д.А. Термоэлектромагнитоупругое состояние многосвязной анизотропной полуплоскости. Теорет. и прикл. Мех, 2010. Вып. 1, 47. С. 45–61.
26. Калоеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей: Монография. Донецк: ООО «Юго-Восток, Лтд», 2007. – 268 с.
27. Коляно Ю.М., Кушнир Р.М., Музычук Ю.А. Температурные напряжения в слоистых телах при неидеальном термомеханическом контакте на поверхностях раздела. Прикл. механика, 1986. 22, № 11. С. 28–36.
28. Кондрат В., Грицина О. Лінійні теорії електромагнітомеханіки діелектриків. Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. 2009. Вип. 9. С. 7–46.
29. Кулинич Я.П., Назарчук З.Т. Інтегральні рівняння для електромагнетного поля у провідному тілі з тріщиною. Відбір і оброб. інформації: Міжвід. зб. наук. пр, 2005. Вип. 23. С. 11–16.
30. Кунець Я.І. Пружна рівновага тіла з тонким гострокінцевим м'яким включенням в умовах поздовжнього зсуву. Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2004. 47. № 3. С. 144–148.
31. Кухарський В., Кухарська Н., Савула Я., Мандзак Т. Фізико-математичне моделювання процесів тепломасоперенесення в середовищах із включеними тонкими шарами. Вісн. Тернопільського держ. техн. ун-ту, 2006. 11, № 3. С. 145–152.

32. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
33. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. – 416 с.
34. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
35. Лобода В.В. Применение метода осреднения к расчету плиты, подкрепленной стрингерами. Прикл. мат. и механика, 1981. 45, № 5. С. 867–875.
36. Лобода В.В., Шевельова А.Е. Трещина на границе раздела материалов с учетом Кулонова трения в области контакта ее берегов. Смешанные задачи механики деформируемых тел: сб. науч. трудов. Днепропетровск: ДГУ, 1995. С. 99–107.
37. Лобода В.В. Контактна модель тріщини в ортотропному матеріалі. Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1999. Т. 35, № 5. С. 59–60.
38. Маруха В.І., Панасюк В.В., Силованюк В.П. Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. Львів: СПОЛОМ, 2009. – 262 с.
39. Маруха В.І., Середницький Я.А., Гнип І.П., Силованюк В.П. Розробка ін'єкційних технологій та створення комплексу пересувного устаткування для діагностики та відновлення працездатності бетонних і залізобетонних конструкцій і споруд, що експлуатуються в умовах корозійномеханічного руйнування. Наука та інновації, 2007. Т. 3, № 5. С. 26–33.
40. Михаськів В.В., Хай О.М. Симетрична задача усталеної взаємодії тріщин і тонких жорстких включень у тривимірній матриці. Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2003. 39, № 2. – 11 с.
41. Мусій, Р.С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми: монографія. Л.: Растр-7, 2010. – 216 с.

42. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3-е, испр. и дополн. М.: Наука, 1968.– 512 с.
43. Назарчук З.Т., Стаднік Т.М. Дифракційна взаємодія тріщиноподібних дефектів. Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2008. 44, № 4. С. 47–51.
44. Опанасович В.К., Драган М.С. Антиплоска деформація тіла з системою тонких пружних включень. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.- мат, 1984. Вип. 22. С. 71–77.
45. Опанасович В.К., Драган М.С., Тисовский Л.О. Напряжения в плоскости, содержащей систему прямолинейных включений. Физ.-хим. механика материалов, 1985. 21, № 6. С. 21–26.
46. Опанасович В.К. О двух подходах к исследованию антиплоской деформации изотропного массива с тонким упругим включением. Прикл. математика и механика, 1988. 52, Вып. 1. С. 116–119.
47. Осадчук В., Кушнір Р., Николишин М., Залишкові напруження в циліндричній оболонці з тріщиною. Машинознавство, 1998. № 5. С. 40–43.
48. Павлычко В.М., Сулим Г.Т. Плоская задача для линейных включений на границе раздела анизотропных материалов. Физ.-хим. механика материалов, Львов, 1987. 330, 87 – 11с.
49. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. – 472 с.
50. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. Двовимірні зв'язані електричні, магнітні та механічні поля в діелектриках із тріщинами та тонкими включеннями. Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2012. 55, № 2. С. 71–85.
51. Пастернак Я.М. Плоска задача теорії пружності для анізотропних тіл із тонкими пружними включеннями. Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2011. 54, № 3. С. 124–137.
52. Пастернак Я.М. Побудова інтегральних рівнянь магнітоелектропружності на основі формалізму Стро. Доповіді НАН України, 2012. № 11. С. 66–72.
53. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т., Пастернак Р.М. Поздовжній зсув тіла з тонкими стрічковими накладками та пружними включеннями змінної

- жорсткості при їхньому ідеальному та неідеальному контактах. Механіка і фізика руйнування будівельних конструкцій: збірник наукових праць. Вип. 9. Львів: Каменяр, 2012. С. 98–113.
54. Пастернак Я.М., Сулим Г.Т. Розв'язування методами інтегральних рівнянь задач антиплоского деформування тіл із тонкими стрічковими включеннями. I. Загальні співвідношення. Фізико-хімічна механіка матеріалів, 2011. № 1. С. 37–43.
55. Пастернак Я.М. Математичні моделі та граничноелементний метод функцій стрибка розв'язування задач термомагнітоелектропружності структурно неоднорідних тіл. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, 2015. – 340 с.
56. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
57. Панасюк В.В. Стадник М.М., Силованюк В.П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
58. Панасюк В.В., Андрейків О.Є. Пружна рівновага необмеженого тіла з тонким включенням. Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976. № 7. С. 636–639.
59. Піскозуб Й. З. Структурно-модульний метод функцій стрибка дослідження деформування біматеріалів з тріщинами і фізично нелінійними тонкими включеннями, 2021 – 390 с.
60. Подстригач Я. С., Ломакин В.А, Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры, М.: Наука, 1984. – 378 с.
61. Підстригач Я.С. Умови теплового контакту твердих тіл. Доп. АН УРСР. Сер. А, 1963. № 7. С. 872–874.
62. Подстригач Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя. Инженерно-физический журнал, 1963. 6, № 10. С. 129–136.
63. Подстригач Я.С., Кит Г.С. Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин. Тепловые

- напряжения в элементах конструкций. К.: Наук. думка, 1967. Вып. 7. С. 194–201.
64. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и обусловленного им напряженного состояния в твердых телах. Физ.-хим. механика материалов, 1967. 3, № 5. С. 575–583.
 65. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. О напряженно-деформированном состоянии нагреваемых упругих тел, содержащих включения в виде тонких оболочек. Прикл. механика, 1967. 3, № 6. С. 8–16.
 66. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями. Докл. научн. совещ. «Тепловые напряжения в элементах конструкций». Вып. 7. К.: Наук. думка, 1967. С. 227–233.
 67. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф. Магнитотермоупругость электропроводных тел. К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
 68. Попов В.Г., Мойсеенок А.П. Концентрация напряжений вблизи отслоившегося тонкого упругого включения при воздействии нестационарной волны продольного сдвига. Теорет. и прикладная механика, 2005. Вып. 41. С. 184–192.
 69. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. – 344 с.
 70. Саврук М.П., Панасюка В.В. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами К: Наук. думка, 1988. – 620 с.
 71. Саврук М.П., Зеленьак В.М. Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. Львів: РАСТР, 2009. – 212 с.
 72. Савуляк В. І., Вплив заліковування тріщин мідними сплавами на міцність сталевих конструкцій. Вісник Вінницького політехнічного інституту №4, 2014. С. 172–175.
 73. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том III: Электричество М.: Наука, 1977. – 688 с.

74. Силованюк В.П., Юхим Р.Я. Деформація та руйнування матеріалів біля включень під статичним навантаженням тіла. Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2007. 43, № 6. С. 31-35.
75. Силованюк В.П., Юхим Р.Я. Зміцнення матеріалу в результаті "залвковування" тріщин та порожнин. Проблемы прочности, 2011. № 1. С. 51–62.
76. Силованюк В.П. Руйнування попередньо напружених і трансверсальноізотропних тіл із дефектами. Львів: НАНУ Фіз.-мех. ін-т ім. Г.В. Карпенка, 2000. – 300 с.
77. Сыркин Л.Н. Пьезомагнитная керамика. Л.: Энергия. Ленингр. отд-ние, 1980. – 208 с.
78. Сорокатый Ю.И. Экспериментальные исследования термоупругого состояния пластины с тонкостенным упругим включением. Механика неоднородных структур: тез. докл. I Всес. конф. Київ: Наук. думка, 1983. С. 209–210.
79. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007 – 716 с.
80. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонко-стенным упругим включением конечной длины. Прикл. механика, 1972, 8, № 11. С. 58–65.
81. Сулим Г.Т., Шевчук С.П. Плоска задача для кусково-однорідного анізотропного тіла зі стрічковим пружним включенням. Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1999. 35, № 6. С. 7–16.
82. Сулим Г.Т. Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений. Прикл. механика, 1981. 17, № 11. С. 82–89.
83. Сулим Г., Пастернак Я. Регуляризована тотожність Сомільяни для задач теорії пружності з тонкостінними структурами. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикладна математика та інформатика. Вип. 13, 2007. С. 142–150.

84. Сулим Г.Т., Пастернак Я.М. Застосування методу граничних елементів до аналізу антипоскої деформації анізотропних тіл із тонкостінними структурами. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 2008. 51, № 4. С. 136–144.
85. Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Умови контактної взаємодії тіл (огляд). *Мат. методи і фіз.-мех. поля*, 2004. 47, № 3. С. 110–125.
86. Сулим Г.Т., Пастернак Я.М. Визначення параметрів граничного стану пружних тіл із тонкими включеннями за числовим розв'язком задачі. *Вісник ТДТУ*, 2009. Том 14. №1. С. 15–22.
87. Терлецький Р.Ф. Моделювання термомеханічної поведінки багатокомпонентних деформівних твердих тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання. Ч.1. Балансові співвідношення механіки і другий закон термодинаміки. *Мат методи та фіз.-мех. поля*, 2002. 45, № 2. С. 81–91.
88. Терлецький Р.Ф. Моделювання термомеханічної поведінки багатокомпонентних деформівних твердих тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання. Ч. 2. Статистичний опис чинників дії електромагнітного поля на багатокомпонентні тіла. *Мат методи та фіз.-мех. поля*, 2002. 45, № 3. С. 155–168.
89. Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А., Щербина Н.М. Метод скінчених елементів і штучні нейронні мережі. Львів: ЛНУ ім. Ів. Франка, 2014.–396 с.
90. Улітко А.Ф., Мольченко Л.В., Ковальчук В.Ф. Магнітопружність при динамічному навантаженні. К.: Либідь, 1994. – 155 с.
91. Френчко Ю.С., Ткач М.Д. Антиплоская деформация тела с тонким дугообразным включением. *Физ.-мех. поля в деформируемых средах*. К.: Наук. думка, 1978. С. 81–84.
92. Черепанов Г.П. Метод внешних и внутренних разложений в теории упругости. *Механика деформируемых тел и конструкций*. М.: Машиностроение, 1975. С. 502–507.
93. Ясній П.В. Пластично деформовані матеріали: втома і тріщинотривкість. Львів: Світ, 1998. – 292 с.

94. Ang W.T., Athanasius L. A boundary integral approach for plane analysis of electrically semipermeable planar cracks in a piezoelectric solid. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011. 35. P. 647–656.
95. Bardzokas D. Filshinsky M.L., Filshinsky L.A. *Mathematical methods in electro-magneto-elasticity*. New York Springer, 2007. – 530 p.
96. Barnett D.M., Lothe J. Dislocation and line charges in anisotropic piezoelectric insulators. *Physica Status Solidi (b)*, 1975. 67. P. 105–111.
97. Barnett D.M., Kirchner H.O.K. A proof of the equivalence of the Stroh and Lekhnitskii sextic equations for plane anisotropic elastostatics. *Philosophical Magazine A*, 1997. 76, No. 1. P. 231–239.
98. Benveniste Y. A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media. *J. Mech. Phys. Solids*, 2006. 54. P.708–734.
99. Benveniste Y. An Interface Model for a Three-Dimensional Curved Thin Piezoelectric Interphase between Two Piezoelectric Media. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2009. 14. P. 102–122.
100. Benveniste Y., Dvorak G.J. On the thermomechanics of composites with imperfectly bonded interfaces and damage. *International Journal of Solids and Structures*, 1992. 29, 23. P. 2907–2919.
101. Benveniste Y. Effective thermal conductivity of composites with a thermal contact resistance between the constituents: Nondilute case. *Journal of Applied Physics*, 1987. 61, 8. P. 2840–2843.
102. Benveniste Y. The Effective Thermal Conductivity of Composites with Imperfect Thermal Contact at Constituent Interface. *International Journal of Engineering Science*, 1986. 24, 9. P. 1537–1552.
103. Bonfoh N., Dinzart F., Sabar H. New exact multi-coated ellipsoidal inclusion model for anisotropic thermal conductivity of composite materials *Applied Mathematical Modelling*, 2020. Vol. 87, P. 584–605.
104. Broutman L.J., Krock R.H. *Composite Materials*. Vol. 5.. Fracture and fatigue. New York: Academic Press, 1974.

105. Cavalcante M.A.A., Pindera M.-J. Generalized Finite-Volume Theory for Elastic Stress Analysis in Solid Mechanics – Part I: Framework. *J. Appl. Mech*, 2012. – 79p.
106. Ce-Wen Nan, Xiao-Ping Li, Birringer R. Inverse Problem for Composites with Imperfect Interface: Determination of Interfacial Thermal Resistance, Thermal Conductivity of Constituents, and Microstructural Parameters. *Journal of the American Ceramic Society*, 2004. Vol. 83, 4, P. 848–854.
107. Cheng H., Torquato S. Effective conductivity of dispersions of spheres with a superconducting interface. *Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1997. 453. P. 1331–1344.
108. Denda M. BEM analysis of semipermeable piezoelectric cracks. *Key Engng. Materials*, 2008. 383. P. 67–84.
109. Eerenstein W., Mathur N.D., Scott J.F. Multiferroic and magnetoelectric materials. *Nature*, 2006. 442. P. 759–765.
110. Fan H., Keer L.M. Two-dimensional line defects in anisotropic elastic solids. *Int. J. Fract*, 1993. 62. P. 25–42.
111. Feingold A., Mirza S., Malhotra R.N. Photoelastic study of stress concentration in rectangular panels with inserts. *Proc. Int. Symp Exp. Mech. Res. and Develop.* (Waterloo, 1972). Waterloo, 1973. P. 821–837.
112. Garcia-Sanchez F., Saez A., Dominguez J. Anisotropic and piezoelectric materials fracture analysis by BEM. *Computers and Structures*, 2005. 83. P. 804–820.
113. Gao C.-F. Kessler H., Balke H. Crack problems in magneto-electroelastic solids. Part I: exact solution of a crack. *Int. J. Engrg. Sci.* 2003. 41. P. 969–981.
114. Glinchuk M.D., Eliseev E.A., Morozovska A.N., Blinc R. Giant magnetoelectric effect induced by intrinsic surface stress in ferroic nanorods. *Phys. Rev*, 2008 B. 77, No. 2. 024106. P. –11.
115. Govorukha, V.B., Loboda, V.V., Kamlah, M. On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound. *Int. J. SolidsStruct*, 2006. 43, P. 1979–1990.

116. Hao T.H., Shen. Z.Y. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications. *Eng. Fract. Mech.*, 1994. 47. P. 793–802.
117. Hartmut J. *Adaptronics and Smart Structures, Basics, Materials, Design, and Applications*. Springer. 2007 – 554p.
118. Härkengård G. A finite element analysis of elastic-plastic plates containing cavities and inclusions with reference to fatigue crack initiation. *International Journal of Fracture*, 1973. 9, No. 4. P. 437–447.
119. Hwu C. *Anisotropic elastic plates*. London: Springer, 2010. – 673 p.
120. Jiang D. Viscous inclusions in anisotropic materials: Theoretical development and perspective applications. *Tectonophysics Volume 693, Part A*, 2016, P. 116-142p.
121. Johnston P.R., Elliott D. Transformations for evaluating singular boundary element integrals. *J. Comp. Appl. Math*, 2002. 146. P. 231–251.
122. Liang J., Han J., Wang B., Du S. Electroelastic modelling of anisotropic piezoelectric materials with an elliptic inclusion. *International Journal of Solids and Structures*, 1995. Vol. 32, Issue 20, P. 2989–3000p.
123. Kaessmair S., Javili A., Steinmann P., Thermomechanics of solids with general imperfect coherent interfaces. *Archive of Applied Mechanics*, 2014. 84, (9-11). P. 1409 – 1426.
124. Kanaun S.K., Levin V.M.. *Self-Consistent Methods for Composites. Vol.1: Static Problems*. Springer, 2008. – 376 p.
125. Kulikov A.A., Nazarov S.A. Cracks in piezoelectric and electroconductive bodies. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2007. Vol. 1, No. 2. P. 201–216.
126. Lazarev N., Semenova G., Efimova E. Equilibrium problem for an inhomogeneous two-dimensional elastic body with two interacting thin rigid inclusions. *Journal of computational and applied mathematics*, 2023. P.1-8.
127. Leite L.G.S., Coda H.B., Venturini W.S. Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2003. 27. P. 193–201.
128. Leite L.G.S., Venturini W.S. Boundary element formulation for 2D solids with stiff and soft thin inclusions. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2005. 29. P. 257–267.

129. Leite L.G.S., Venturini W.S. Boundary element formulation for 2D solids with stiff and soft inclusions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2005. 29, No. 3. P. 257–267.
130. Liew K.M. Sun Y., Kitipornchai S. Boundary element-free method for fracture analysis of 2-D anisotropic piezoelectric solids. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2007. 69. P. 729–749.
131. Lin Y., Sodano H.A. A double inclusion model for multiphase piezoelectric composites. *Smart Materials and Structures*, 2010. 19, No. 3.
132. Lin Y., Sodano H.A. Fabrication and electromechanical characterization of a piezoelectric structural fiber for multifunctional composites. *Advanced Functional Materials*, 2009. 19. P. 592–598.
133. Liu Y.J., Nishimura N., Otani Y., Takahashi T., Chen X.L., Munakata H. A fast boundary element method for the analysis of fiber-reinforced composites based on a rigid-inclusion model. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 2005. 72. P. 115–128.
134. Meguid S.A., Hu G.D. A new finite element for treating plane thermomechanical heterogeneous solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999. 44, No. 4. P. 567–585.
135. Montemor M.F. (Ed.) *Smart Composite Coatings and Membranes: Transport, Structural, Environmental and Energy Applications*, Boston: Woodhead Publishing, 2016.
136. Murat Bengisu, Marinella Ferrara *Materials that Move: Smart Materials, Intelligent Design*. Springer International Publishing, 2018. – 139p.
137. Murakami Y. *Metal fatigue: effects of small defects and nonmetallic inclusions*. Elsevier, 2002. – 369 p.
138. Musii R., Puckach P., Melnyk N., Vovk M., Slahor L. Modeling of the Temperature Regimes in a Layered Bimetallic Plate under Short-Term Induction Heating. *Energies*, 2023. Vol.13, P. 1-12.
139. Musii R.S, Melnyk N.B., Dmytruk V.A. Mathematical modeling and study of thermoelastic behavior of a bimetallic layer with plane-parallel boundaries under

- the action of electromagnetic pulses. *Journal of Thermal Stresses*, 2021. Vol. 44. 10, P. 1275-1288.
140. Nguyen Trung Kien, Nguyen Van Luat, Pham Duc Chinh Effective conductivity of isotropic composite with kapitza thermal resistance. *Vietnam Journal of Mechanics*, Vietnam Academy of Science and Technology, 1 – 9 p.
141. Nowacki W. *Thermoelasticity*. New York: Pergamon Press, 1962. – 628 p.
142. Padron L.A. Aznarez J.J., Maeso O. BEM–FEM coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2007. 31. P. 473–484.
143. Pan E., Amadei B. Fracture mechanics analysis of 2D anisotropic media with a new formulation of the boundary element method. *Int. J. Fract.*, 1996. 77. P. 161–174.
144. Pan E. A BEM analysis of fracture mechanics in 2D anisotropic piezoelectric solids *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 1999. 23. P. 67–76.
145. Pan E., B. Amadei, Boundary element analysis of fracture mechanics in anisotropic bimetals/ *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23. 1999. P. 683–691.
146. Pan E. Albrecht J.D., Zhang Y. Elastic and piezoelectric fields in quantum wire semiconductor structures – A boundary integral equation analysis. *Phys. Stat. Sol. (b)*, 2007. 244, No. 6. P. 1925–1939.
147. Panasyuk V. Sylovanyuk V, Marukha V. Static and cyclic strength of a cracked body which strengthened by injection technologies. *Acta mechanica et automatica*, 2007. Vol. 1, No. 1 P. 85–88.
148. Paolo Gaudenzi *Smart Structures: Physical Behaviour, Mathematical Modelling and Applications* Wiley, 2009. – 194 p.
149. Park S.B., Sun C.T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1995. 78. P. 1475–1480.
150. Pasternak I.M., Sulym H.T., Tomashivskyy M. Boundary integral equations for an anisotropic bimaterial with thermally imperfect interface and internal inhomogeneities. *Acta. Mech.*, 2016. Vol. 10 – P. 105 – 74.

151. Pasternak I.M., Pasternak R., Sulym H.T. 2D boundary element analysis of defective thermoelectroelastic bimaterial with thermally imperfect but mechanically and electrically perfect interface. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015. 61. P. 194–206.
152. Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011. 35, No. 4. P. 678–690.
153. Pasternak Ia. M., Sulym H. T., Vasylyshyn A. V., Iasniy O. P. Influence of interfacial layers of high thermal conductivity on the distribution of physicomachanical fields in two-component structures. *Materials Science*, 2023. Vol. 58, № 6. P. 725–730.
154. Pasternak Ia. Pasternak R., Sulym H. A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013. 37, No. 2. P. 419–433.
155. Pasternak Ia. Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2012. 36, No. 12. P. 1931–1941.
156. Pasternak Ia.M., Sulym H.T. Thin inclusions theory integral equations numerical solution using the boundary element method procedure, *Proc. Int. Conf. «Integral Equations – 2010»*. (Lviv, 25–27 August 2010). Lviv: PAIS, 2010. P. 104–108.
157. Pasternak Ia., Sulym H. Stroh formalism based boundary integral equations for 2D magnetoelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013. 37, No. 1. P. 167–175.
158. Pasternak I., Pasternak R., Sulym H. Boundary integral equations and Green's functions for 2D thermoelectroelastic bimaterial. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2014. 48. P. 87–101.
159. Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1992. 33. P. 1269–1287.

160. Qin Q.H. Green's function and boundary elements of multifield materials Oxford, Elsevier, 2007. – 254 p.
161. Qin Q.H. Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials. Boston: WIT Press, 2001.
162. Qin Q.H, Mai Y.W. Multiple cracks in thermoelectroelastic bimetals. Theor. Appl. Fract. Mech., 1998, 29: P. 141–150.
163. Qin Q.H, Mai Y.W. BEM for crack-hole problems in thermopiezoelectric materials. Engineering Fracture Mechanics, 2002. 69, 5. P. 577–588.
164. Qing Q.H. 2D Green's functions of defective magneto-electroelastic solids under thermal loading, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2005. Vol. 29, 6. P. 577-585.
165. Quang H.L., Phan T.L., Bonnet G. Effective thermal conductivity of periodic composites with highly conducting imperfect interfaces. International Journal of Thermal Sciences, 2011. 50. P.1428–1444.
166. Riederer K., Duenser G., Beer. Simulation of linear inclusions with the BEM Eng. Anal. Bound. Elem., 2009. 33. P. 959–965.
167. Rajapakse R.K.N.D. X.-L. Xu, Boundary element modelling of cracks in piezoelectric solids. Eng. Anal. Bound. Elem., 2001. 25. P. 771–781.
168. Rungamornrat J., Mear M.E. Analysis of fractures in 3D piezoelectric media by a weakly singular integral equation method Int. J. Fract., 2008. 151. P. 1–27.
169. Schwartz. M. Encyclopedia of smart materials / ed. by M. Schwartz. New York: Wiley, 2002. – 1073 p.
170. Schwartz M. Encyclopedia of Smart Materials, 2 Vol. Set Wiley. 2002 – 1176p.
171. Shahinpoor M., Schneider H.-J. Intelligent materials. Royal Society of Chemistry Publishing. Cambridge, England, 2008. – 139p.
172. Sheng N., Sze K.Y. Multi-region Trefftz boundary element method for fracture analysis in plane piezoelectricity. Comput. Mech., 2006. 37. P. 381–393.
173. Shindo Y., Ozawa E., Nowacki J.P. Singular stress and electric fields of a cracked piezoelectric strip. Int. J. Appl. Electromagn. Mater., 1990. 1. P. 77–87.

174. Sladek, J., Sladek V., Wuensche M., Zhang Ch. Analysis of an interface crack between two dissimilar piezoelectric solids. *Eng. Fract. Mech.*, 2012, 89, P. 114–127.
175. Sladek J., Sladek V., Solec P., Zhang Ch. Fracture analysis in continuously nonhomogeneous magneto-electro-elastic solids under a thermal load by the MLPG. *International Journal of Solids and Structures*, 2010. 47. P. 1381–1391.
176. Stroh A.N. Steady state problems in anisotropic elasticity. *J. Math. Phys.*, 1962. 41. P. 77–103.
177. Sulym G.T. Jump function method in fracture mechanics. *Fracture mechanics: successes and problems. Collection of Abstracts. Part.1. (ISF-8,Kiev, 8–14.06.1993). Lviv, 1993. P. 100–101.*
178. Sulym H., Pasternak Ia., Pasternak R. Boundary element analysis of multifield materials. *Scientific Thesis. No 274. Library of Mechanics. Bialystok: Printing House of Białystok University of Technology, 2015. 172 p.*
179. Sulym H. Pasternak I., Vasylyshyn A., Smal M. Mixed boundary value problem for an anisotropic thermoelastic half-space containing thin inhomogeneities. *Acta Mechanica et Automatica*, 2019. 13, P. 238–244.
180. Sulym H, Vasylyshyn A., Pasternak I. Influence of imperfect interface of anisotropic thermomagnetoelastic bimaterial solids on interaction of thin deformable inclusion. *Acta Mechanica et Automatica*, 2022. 3. P. 242–249.
181. Suo, Z., Kuo, C.M., Barnett, D.M., Willis, J.R.: *Fracture Mechanics for Piezoelectric Ceramics. J. Mech. Phys. Solids*, 1992. 40, P. 739–765.
182. Telles J.C.F. *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer, 1983. – 245 p.*
183. Ting T.C.T. *Anisotropic elasticity: theory and applications. New York: Oxford University Press, 1996. – 567 p.*
184. Theocaris P.S., Ioakimidis N.I. On the numerical solution of Cauchy-type singular integral equations and the determination of stress-intensity factors in case of complex singularities. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1977. 28, No. 6. P. 1085–1098.

185. Tewary V.K., Garboczi E.J. Green's function formulation of conductivity of anisotropic two-dimensional materials containing metallic inclusions: Application to phosphorene. Applied Chemicals and Materials Division, NIST, Boulder, CO 80305, USA.
186. Vasylyshyn A., Sulym H., Pasternak I. Thermomagnetoelasticity of Bimaterial Solids with High Temperature Conducting Interface and Thin Internal Inhomogeneities. *Structural Integrity*, 2020. Vol. 16. P. 261–267.
187. Vaz C.A.F. Hoffman J., Ahn C.H., Ramesh R. Magnetolectric Coupling Effects in Multiferroic Complex Oxide Composite Structures. *Adv. Mater.*, 2010. 22. P. 2900–2918.
188. Wang B.L., Mai Y.W. Crack tip field in piezoelectric/piezomagnetic media. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2003. 22, 4. P. 591–602.
189. Wang, T.C., Han, X.L. Fracture mechanics of piezoelectric materials. *Int. J. Fract.*, 1999. 98, P. 15–35.
190. Wang X., Pan E., Thermal Green's functions in plane anisotropic bimetals with spring-type and Kapitza-type imperfect interface. *Acta Mech.*, 2010. 209, P. 115–128.
191. Wang Y., Zheng M.H. Analytical Micromechanics Models for Elastoplastic Behavior of Long Fibrous Composites: A Critical Review and Comparative Study. *Materials*, 2018. 11. 1919. P. 1–55.
192. Yang P. S, Liou JY, Sung JC. Subinterface crack in an anisotropic piezoelectric bimaterial. *Int J Sol Struct.*, 2008. 45, P. 4990–5014
193. Yang J. Special topics in the theory of piezoelectricity. London, Springer, 2009. – 342 p.
194. Yvonnet J, He QC, Zhu QZ, Shao JF. A general and efficient computational procedure for modelling the Kapitza thermal resistance based on XFEM. *Comput Mater Sci*, 2011. 50(4). P. 1220–1224.
195. Zhao M.H. Wang H., Yang F., Liu T. A magnetoelastic medium with an elliptical cavity under combined mechanical–electric–magnetic loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2006. 45. P. 227–237.

196. Zhang T.Y., Zhao M.H., Tong P. Fracture of piezoelectric ceramics. *Adv. Appl. Mech*, 2002. 38. P. 147–289.
197. Zhang A, Wang B.L. Theoretical model of crack branching in magnetoelectric thermoelastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2014. Vol. 51, 6. P. 1340–1349.

ДОДАТОК А

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ
ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮНаукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати
дисертації

1. Sulym H., Pasternak I., **Vasylyshyn A.**, Smal M. Mixed boundary value problem for an anisotropic thermoelastic half-space containing thin inhomogeneities. *Acta Mechanica et Automatica*. 2019. Vol. 13. P. 238–244 (Scopus, Q3).
DOI: <https://doi.org/10.2478/ama-2019-0032>
2. **Vasylyshyn A.**, Sulym H., Pasternak I. Thermomagnetoelasticity of Bimaterial Solids with High Temperature Conducting Interface and Thin Internal Inhomogeneities. *Structural Integrity*. 2020. Vol. 16, P. 261–267 (Scopus, Q4).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_47
3. Sulym H., **Vasylyshyn A.**, Pasternak I. Influence of imperfect interface of anisotropic thermomagnetoelastic bimaterial solids on interaction of thin deformable inclusion. *Acta Mechanica et Automatica*. 2022. 3. P. 242–249 (Scopus, Q3).
DOI: <https://doi.org/10.2478/ama-2022-0029>
4. Pasternak Ia.M., Sulym H.T., **Vasylyshyn A.V.**, Iasniy O.P. Influence of interfacial layers of high thermal conductivity on the distribution of physicommechanical fields in two-component structures. *Materials Science*. 2023. Vol. 58, № 6, P. 725–730 (Scopus, Q2).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11003-023-00722-1>

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. **Василишин А.**, Пастернак Я., Звізло І., Сулим Г. Термомагнітоелектропружність скінченних кусковооднорідних тіл за

- наявності сполучного прошарку та внутрішніх тонких включень. *Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики – 2023”*. Львів, 2023. С. 179–180 (очна участь, усна доповідь).
2. Sulym H., Paternak I., **Vasylyshyn A.** Influence of high temperature conducting interface on temperature induced fields in finite bimaterial solids. *International conference “Polish Conference on Crystal Growth”*. Gdansk, 2022 (заочна участь, публікація тез).
 3. **Василишин А.**, Звізло І. Вплив інтерфейсу високої теплопровідності у біматеріальних скінченних тілах. *Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2022”*. Львів, 2022 (дистанційна участь, усна доповідь).
 4. **Василишин А.**, Сулим Г. Вплив інтерфейсу високої теплопровідності обмежених біматеріальних тіл на взаємодію внутрішніх тріщин. *“15-ий Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові”*. Львів, 2021. С. 36-37 (дистанційна участь, усна доповідь).
 5. **Василишин А.** Періодичні задачі термомагнітоелектропружності тіл із тонкими включеннями. *Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2021”*. Львів, 2021 (заочна участь, публікація тез).
 6. **Василишин А.**, Пастернак Я., Термомагнітоелектропружність анізотропного біматеріалу із неідеальним магнітоелектромеханічним контактом складових. *Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2020”*. Львів, 2020 (заочна участь, публікація тез).
 7. **Василишин А.** Термопружність анізотропного півпростору зі змішаними крайовими умовами на межі та внутрішніми тонкими неоднорідностями. *Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2019”*. Львів, 2019 (очна участь, усна доповідь).
 8. **Василишин А.**, Сулим Г., Пастернак Я. Термомагнітоелектропружність біматеріальних тіл із тонкими включеннями та тріщинами за неідеального контакту фаз. *Друга міжнародна науково-технічна конференція пам’яті академіка НАН України В. І. Моссаковського “Актуальні проблеми механіки*

суцільного середовища і міцності конструкцій (до сторіччя від дня народження)”. Дніпро, 2019. С. 63–64 (заочна участь, публікація тез).

9. Сулим Г., **Василишин А.** Термомагнітоелектропружність структурно неоднорідних біматеріальних тіл із неідеальним тепловим контактом складових. *10-а Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”*. Львів, 2019. С. 202–203 (очна участь, усна доповідь).