ВИСНОВОК

про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів»

здобувача ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика»

Мокрицького Тараса Володимировича

1. Актуальність теми дисертації

Теорія напівгруп має широке коло застосувань у багатьох розділах чистої та прикладної математики, зокрема у функціональному аналізі, теорії графів, комбінаториці, теорії кодів та шифруванні.

Біциклічна напівгрупа є важливим об'єктом в теорії напівгруп. Оскільки вона ізоморфна напівгрупі порядкових ізоморфізмів головних фільтрів натуральних чисел, то часто ідеологія та принципи біциклічного моноїда використовуються для описання властивостей та структури напівгруп часткових перетворень деяких порядкових структур. Так, зокрема, виникають такі природні узагальнення біциклічної напівгрупи:

-напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів скінченного степеня множини натуральних чисел відносно порядку добутку для довільного натурального числа $n \geq 2$;

-напівгрупа $IPF(^{\kappa}\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів к-кодобутку множини натуральних чисел відносно порядку добутку для довільного нескінченного кардинала к.

Тому природним є питання: чи мають напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$ і $IPF(^{\kappa}\mathbb{N})$ властивості близькі до властивостей біциклічного моноїда? А також природно виникає задача дослідження топологізації напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів скінченого степеня множини натуральних чисел.

Тему дисертації затверджено на засіданні Вченої ради Львівського національного університету імені Івана Франка, протокол № 58/11 від 28.11.2018 року.

2. Зв'язок теми дисертації з державними програмами, науковими напрямами університету та кафедри

Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри геометрії і топології (з 2020 року кафедри алгебри, топології та основ математики) механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми «Топологія та її застосування у фрактальній геометрії та математичній економіці» (номер державної реєстрації 0116U001537).

3. Особистий внесок здобувача в отриманні наукових результатів

У дисертаційній роботі здобувачем введено такі узагальнення біциклічної напівгрупи:

-напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів скінченного степеня множини натуральних чисел відносно порядку добутку для довільного натурального числа $n \geq 2$;

-напівгрупа $IPF({}^{\kappa}\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів к-кодобутку множини натуральних чисел відносно порядку добутку для довільного нескінченного кардинала к.

Тарас Мокрицький довів, що ці напівгрупи мають такі властивості. Вони є біпростими, E-унітарними та F-інверсними. Також здобувач описав групу одиниць і всі максимальні підгрупи цих моноїдів, відношення Ґріна, природний частовий порядок і напівґратку ідемпотентів на цих напівгрупах. Крім того, доведено, що всі неодиничні конгруенції на напівгрупах $IPF(\mathbb{N}^n)$ і $IPF({}^{\kappa}\mathbb{N})$ є груповими, та описано мінімальну групову конгруенцію на них. Доведено, що напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна напівпрямому добутку n-го степеня біциклічної напівгрупи групою підстановок n елементної множини, а напівгрупа $IPF({}^{\kappa}\mathbb{N})$ ізоморфна напівпрямому добутку $S_{\kappa} \ltimes {}^{\kappa}\mathbb{B}$ напівгрупи ${}^{\kappa}\mathbb{B}$ групою S_{κ}. Також доведено, що фактор-напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)/\rho_{\mathrm{mg}}$ по мінімальній груповій конгруенції ρ_{mg} ізоморфна напівпрямому добутку $\mathrm{S}_{\mathrm{n}} \ltimes \mathbb{Z}_{+}^{\mathrm{n}}$ n-го степеня адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}_{+}^{\mathrm{n}}$ групою S_{n}, а фактор-напівгрупа $IPF({}^{\kappa}\mathbb{N})/\rho_{\mathrm{mg}}$ — напівпрямому добутку $\mathrm{S}_{\kappa} \ltimes {}^{\kappa}\mathbb{Z}_{+}$ групи ${}^{\kappa}\mathbb{Z}_{+}$ групою S_{κ} бієкцій кардинала к.

Тарас Мокрицький довів, що для довільного натурального числа $n \geq 2$ кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ є дискретною і показав, що якщо для деякого натурального числа $n \geq 2$ напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)$ є щільною підмножиною деякої гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи S і $I = S \setminus IPF(\mathbb{N}^n) \neq \emptyset$, то $I -$ двобічний ідеал у напівгрупі S. Також здобувач довів, якщо для деякого натурального числа $n \geq 2$ деяка гаусдорфова топологічна напівгрупа $S \times S$ містить напівгрупу $IPF(\mathbb{N}^n)$ як щільну піднапівгрупу, то квадрат $S \times S$ не є слабко компактним простором.

Мокрицький Т. В. довів, що для довільного натурального числа $n \geq 2$ кожна недискретна гаусдорфова локально компактна трансляційно-неперервна топологія τ на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем збігається з одноточковою компактифікацією Алєксандрова зліченного дискретного простору.

Автор самостійно отримав основні результати, які виносяться на захист. В опублікованій спільно з науковим керівником праці, О. В. Гутіку належать

постановка задачі, вибір методів дослідження та обговорення отриманих результатів.

4. Достовірність та обґрунтованість отриманих результатів та запропонованих автором вирішень, висновків, рекомендацій

Дисертаційна робота містить повні та строгі доведення всіх наукових результатів. Матеріали дисертації апробовано на 3-х міжнародних наукових конференціях, а також на семінарах «Теорія полігонів і спектральні простори» та «Топологічна алгебра» у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Результати, наведені в дисертації, опубліковано в 3-х наукових статтях у виданнях, з яких 2 віднесено до переліку наукових фахових видань України, та 1 закордонному науковому виданні, віднесеному до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank та проіндексованому у наукометричній базі Scopus.

5. Ступінь новизни основних результатів дисертації порівняно з відомими дослідженнями аналогічного характеру

У дисертаційній роботі:

- для довільного натурального числа $n \geq 2$ описано алгебричну структуру напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$ і доведено, що вона ізоморфна напівгрупі $\mathrm{S}_{\kappa} \ltimes \mathbb{B}^{\mathrm{n}}$;
- доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ є дискретною;
- доведено, що якщо напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)$ є щільною підмножиною деякої гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи S і виконується умова $I = S \setminus IPF(\mathbb{N}^n) \neq \emptyset$, то I є двобічним ідеалом в напівгрупі S;
- доведено, що якщо для деякого натурального числа деяка гаусдорфова топологічна напівгрупа S містить напівгрупу $IPF(\mathbb{N}^n)$ як щільну піднапівгрупу, то квадрат $S \times S$ не є слабко компактним простором;
- доведено, що кожна недискретна гаусдорфова локально компактна трансляційно-неперервна топологія τ на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем збігається з одноточковою компактифікацією Алєксандрова зліченного дискретного простору;
- для довільного кардинала к описано алгебричну структуру напівгрупи $IPF({}^{\kappa}\mathbb{N})$ і доведено, що вона ізоморфна напівгрупі $S_{\kappa} \ltimes {}^{\kappa}\mathbb{B}$.

6. Перелік наукових праць, які відображають основні результати дисертації

6.1. Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Mokrytskyi, T. (2019). On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$ with adjoined zero. *Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична*, 87, 37–45.

2. Mokrytskyi, T. (2022). The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\sigma\mathbb{N}^\kappa$. *Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична*, 93, 14–33.

6.2. Публікації у наукових періодичних виданнях, що індексуються у наукометричних базах Scopus та/або Web of Science Core Collection:

1. Gutik, O., Mokrytskyi, T. (2020). The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$. *European Journal of Mathematics*, 6(1), 14–36. *Особистий внесок здобувача*: основні наукові результати отримані здобувачем, науковому керівнику О. Гутіку належать постановка задачі, вибір методів дослідження та обговорення отриманих результатів.

7. Апробація основних результатів дослідження на конференціях, симпозіумах, семінарах тощо

1. Mokrytskyi, T., Gutik, O.: On the semigroup of order isomorphisms of principal filters of a power of the integers. In: Abstracts of the International Conference in Functional Analysys dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, p. 74. University of Lviv, Lviv, Ukraine, 18-23 September 2017.
2. Mokrytskyi, T.: On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms of principal filters of a power of the positive integers with adjoined zero. In: Abstracts of the International Conference dedicated to 70th anniversary of Professor A. M. Plichko “Banach Spaces and their Applications”, p. 85-86. Lviv, Ukraine, 26-29 June 2019.
3. Mokrytskyi, T.: The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\sigma(\mathbb{N}^n)$. In: Abstracts of the International Algebraic Conference “At the End of the Year”, p. 19. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, 27-28 December, 2021.

8. ***Наукове значення виконаного дослідження із зазначенням можливих наукових галузей та розділів програм навчальних курсів, де можуть бути застосовані отримані результати***

Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у теорії напівгруп та топологічній алгебрі.

9. ***Практична цінність результатів дослідження із зазначенням конкретного підприємства або галузі, де вони можуть бути застосовані***

Отримані результати можуть бути використані в математичних дослідженнях таких ЗВО: Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Інституті математики НАН України, Державному закладі "Луганський національний університет імені Тараса Шевченка", Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника, які є осередками науково-дослідницької діяльності в теорії напівгруп та топологічній алгебрі.

10. Оцінка структури дисертації, її мови та стилю викладення

Дисертація за структурою, мовою та стилем викладу відповідає вимогам МОН України.

Дисертацію заслухано та обговорено на науковому семінарі кафедри алгебри, топології та основ математики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка (протокол №2 від 13 вересня 2023 року). У ході обговорення дисертації суттєвих зауважень, які стосуються суті роботи, не було висунуто.

Дисертація Мокрицького Тараса Володимировича «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» є завершеною науковою працею в рамках поставлених задач.

Основні результати опубліковано в 3-х наукових статтях, з яких 2 віднесено до переліку наукових фахових видань України, та в 1 закордонному науковому виданні, що індексується у наукометричних базах Scopus і Web of Science та віднесено до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank.

На основі вищесказаного можна зробити такі висновки щодо поданої дисертаційної роботи:

1. За актуальністю обраної теми, обсягом, достовірністю та рівнем апробації отриманих результатів, науковою новизною, обґрунтованістю висновків, практичною цінністю дисертаційна робота «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» відповідає вимогам наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» та п. 6 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 року № 44.

2. Дисертація відповідає спеціальності 111 «Математика» (галузь знань 11 «Математика та статистика»).

3. Наукові праці Мокрицького Тараса Володимировича, опубліковані за результатами дисертаційної роботи, за кількістю та якістю відповідають пп. 8-9 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 року № 44.

4. Дисертація «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» Мокрицького Тараса Володимировича рекомендується для подання до розгляду та захисту у спеціалізованій вченій раді.

Головуючий на засіданні наукового семінару,
завідувач кафедри алгебри, топології та
основ математики
д-р фіз.-мат. наук, професор Тарас БАНАХ

13 вересня 2023 року

Підпис професора Тараса БАНАХА засвідчую.

Вчений секретар
Львівського національного
університету імені Івана Франка,
доцент Ольга ГРАБОВЕЦЬКА