

До разової спеціалізованої ради ДФ 35.051.126
Львівського національного університету
імені Івана Франка
м. Львів, вул. Університетська, 1

РЕЦЕНЗІЯ

на дисертацію

Мокрицького Тараса Володимировича

«Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів», подану на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Актуальність тематики дослідження

Біциклічна напівгрупа, введена Є. Ляпіним у 1946 році, стала об'єктом, який відіграє ключову роль у теорії напівгруп. На її основі побудовано ряд базових конструкцій та теорем в теорії напівгруп, зокрема конструкції Брука та Брука-Рейлі занурення напівгруп у прості, теорема Андерсена про цілком прості напівгрупи, теорема Рейлі-Уорне про структуру біпростих регулярних ω -напівгруп та інші.

Біциклічний моноїд має багато цікавих точних зображень напівгрупами часткових перетворень. Одним з них є напівгрупа порядкових ізоморфізмів головних фільтрів множини натуральних чисел зі звичайним лінійним порядком. Тому природно виникає задача описання структури напівгрупи порядкових ізоморфізмів головних фільтрів скінченного степеня та к кодобутку множини натуральних чисел, для довільного нескінченного кардинала κ . Природно виникає запитання: які алгебричні властивості, та топологічні властивості, як напівтопологічної напівгрупи, біциклічного моноїда успадковуються вище переліченими напівгрупами.

У дисертаційній роботі Тараса Мокрицького досліджується структура і топологізація напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів скінченного степеня натуральних чисел та структура напівгрупи $IPF(\kappa\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів κ кодобутку натуральних чисел, для довільного нескінченного кардинала κ . Ці напівгрупи визначаються як напівгрупи близькі до зображення біциклічного моноїда напівгрупою порядкових часткових ізоморфізмів головних фільтрів множини натуральних чисел зі звичайним лінійним порядком. Тому дисертаційні дослідження частково виконують задачу опису структури напівгруп часткових бієктивних перетворень, які мають властивості близькі до зображень біциклічного моноїда,

а отже є продовженням досліджень наукового керівника здобувача – Олега Гутіка. Так, зокрема, Олегом Гутіком і його учнями описано напівгрупи часткових коскінченних монотонних бієкцій, майже часткових коскінченних монотонних бієкцій та часткових коскінченних ізометрій множини натуральних чисел та її скінченних добутоків.

Здобувач Т. Мокрицький у дисертаційній роботі «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» також досліджує топологізацію напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів скінченного степеня множини натуральних чисел, зокрема перевіряє існування на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ гаусдорфової трансляційно-неперервної недискретної топології, досліджує вкладення моноїда $IPF(\mathbb{N}^n)$ у близькі до компактних топологічні напівгрупи та досліджує топологічну будову гаусдорфової локально компактно напівтопологічної напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем.

Обрана для дослідження тематика виявилася дуже вдалим вибором, оскільки вона відіграє ключову роль і має велике значення у теорії напівгруп. Вважаю, що важливість та актуальність цього дослідження не викликають жодних сумнівів, адже воно сприяє кращому розумінню основних концепцій і методів у цій області математики.

Структура, зміст та основні результати дисертаційної роботи

Загальний обсяг дисертації становить 120 сторінок і складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 107 найменувань та додатка, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі наведено загальні відомості про дисертацію, а саме: обґрунтовано актуальність теми, вказано мету, завдання, предмет та об'єкт досліджень, а також наведено відомості про наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

У першому розділі проведений огляд літератури за темою дисертації, зокрема, наведено історичну довідку, мотивацію досліджень, а також сформульовано означення та допоміжні твердження з алгебри та загальної топології.

У другому розділі вивчаються алгебричні властивості і структура напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$. Основні результати розділу такі: напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна напівпрямому добутку $S_n \times \mathbb{B}^n$ прямого n -го степеня біциклічного моноїда групою підстановок S_n ; фактор-напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)/c_{mg}$ по мінімальній груповій конгруенції c_{mg} ізоморфна напівпрямому добутку $S_n \times \mathbb{Z}_+^n$ прямого n -го степеня адитивної групи цілих чисел групою підстановок S_n .

Третій розділ присвячений дослідженню топологізації напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$. Основні результати підрозділі 3.1 такі: кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ є дискретною; якщо напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)$ є щільною підмножиною деякої гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи S і виконується умова $I = S \setminus IPF(\mathbb{N}^n) \neq \emptyset$, то I є двобічним ідеалом в напівгрупі S ; якщо для деякого натурального числа $n \geq 2$ деяка гаусдорфова топологічна напівгрупа S містить напівгрупу $IPF(\mathbb{N}^n)$ як щільну піднапівгрупу, то квадрат $S \times S$ не є слабо компактним простором. Основний результат підрозділу 3.2 такий: кожна недискретна гаусдорфова локально компактна трансляційно-неперервна топологія τ на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем збігається з одноточковою компактифікацією Александрова зліченного дискретного простору.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню напівгрупи $IPF({}^k\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів κ кодобутку натуральних чисел, для довільного нескінченного кардинала κ . Основні результати розділу такі: напівгрупа $IPF({}^k\mathbb{N})$ ізоморфна напівпрямому добутку $S_\kappa \times {}^k\mathbb{B}$ прямого κ кодобутку біциклічного моноїда групою підстановок S_κ ; фактор-напівгрупа $IPF({}^k\mathbb{N})/c_{mg}$ по мінімальній груповій конгруенції c_{mg} ізоморфна напівпрямому добутку $S_\kappa \times {}^k\mathbb{Z}_+$ прямого κ кодобутку адитивної групи цілих чисел групою підстановок S_κ .

Ступінь обґрунтованості результатів, їхня наукова новизна

Основні результати дисертаційної роботи Тараса Мокрицького «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» такі:

- Описано алгебричну структуру напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$ і доведено, що вона ізоморфна напівпрямому добутку $S_\kappa \times \mathbb{B}^n$.
- Кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ є дискретною.
- Описано вкладення моноїда $IPF(\mathbb{N}^n)$ у простори близькі до компактних.
- Кожна недискретна гаусдорфова локально компактна трансляційно-неперервна топологія τ на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем збігається з одноточковою компактифікацією Александрова зліченного дискретного простору.
- Для довільного кардинала κ описано алгебричну структуру напівгрупи $IPF({}^k\mathbb{N})$ і доведено, що вона ізоморфна напівпрямому добутку $S_\kappa \times {}^k\mathbb{B}$.

Усі отримані результати нові та мають строгі доведення.

Зв'язок дисертаційної роботи з державними чи галузевими науковими програмами

Дисертаційна робота Т. В. Мокрицького «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри геометрії і топології (з 2020 року кафедри алгебри, топології та основ математики) механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми «Топологія та її застосування у фрактальній геометрії та математичній економіці» (номер державної реєстрації 0116U001537).

Практичне значення наукових результатів

Отримані у рамках виконання дисертаційної роботи результати носять теоретичний характер і можуть бути використані у подальших дослідженнях у топологічній алгебрі та теорії напівгруп.

Особистий внесок здобувача

Результати досліджень, які наведені у дисертаційній роботі, належать автору і є його науковим доробком. У спільних з науковим керівником публікаціях О. В. Гутіку належать постановка задач, вибір методів досліджень і обговорення отриманих результатів.

Повнота викладу матеріалів у роботах, які опубліковані здобувачем

Основні наукові результати, отримані під час виконання дисертаційного дослідження Тараса Мокрицького опубліковано в:

- 3 наукових статтях, з яких 2 у журналах, що віднесені до переліку фахових видань України, та 1 публікація у науковому виданні, віднесеному до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank;
- 3 збірниках матеріалів доповідей міжнародних наукових конференцій.

Це дає право стверджувати, що представлена дисертаційна робота є самостійним, завершеним науковим дослідженням, результати якого мають важливе значення для розвитку теорії напівгруп та топологічної алгебри.

Відомості про дотримання академічної доброчесності

Ознайомившись із науковими публікаціями та дисертацією «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» здобувача Т. В. Мокрицького, відзначаю відсутність порушень академічної доброчесності.

Зауваження до дисертації

Хоча дисертаційне дослідження загалом виконане на достатньо високому рівні, можна вказати декілька зауважень:

1. Стор. 4¹: замість “показано” слід писати “доведено”.
2. Стор. 4¹¹: “з порядком” замінити на “зі стандартним порядком на”.
3. Стор. 4⁹: замість “встановленні” слід писати “у встановленні”.
4. Стор. 6³: замість “групою” слід писати “і групою”.
5. Стор. 6⁴: “показано” замінити на “доведено”.
6. Стор. 7¹³: слово “конгрєнція” замінити на “конгруєнція”.
7. Стор. 17⁹: замість “показав” слід писати “довів”.
8. Стор. 21¹³: “к кодобутку” замінити на “добутку”.

Висновок щодо відповідності дисертації нормам

На мою думку, дисертація здобувача Т. В. Мокрицького на тему «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів», подана на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика», є завершеним дослідженням, яке присвячене вивченню алгебричних властивостей напівгруп $IPF(\mathbb{N}^n)$ і $IPF({}^k\mathbb{N})$, а також топологізації напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$. Робота містить важливі та актуальні досліджень, всі доведення є зрозумілими і логічними. Як у самій дисертації, так і в публікаціях відсутні порушення правил академічної доброчесності.

Вважаю, що за новизною, актуальністю, обсягом та практичним значенням дисертація «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022 року, та наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» (з наступними змінами), а її автор, Мокрицький Тарас Володимирович, заслуговує присудження йому ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук,
доцент, декан механіко-математичного
факультету Львівського національного
університету імені Івана Франка

Ігор ГУРАН