

До разової спеціалізованої ради ДФ 35.051.126
Львівського національного університету
імені Івана Франка
м. Львів, вул. Університетська, 1

РЕЦЕНЗІЯ

на дисертацію

Мокрицького Тараса Володимировича

«Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково

впорядкованих просторів»,

подану на здобуття ступеня доктора філософії

в галузі знань 11 «Математика та статистика»

за спеціальністю 111 «Математика»

Актуальність тематики дослідження

Ідеологія використання алгебричних методів в геометрії була закладена Феліксом Кляйном у 1872 році в його габілітаційній лекції в Ерлангенському університеті, яка увійшла в історію науки під назвою «Ерлангенська програма». Одна з двох основних задач Ерлангенської програми полягає в описанні будови алгебр перетворень геометрій, які зберігають їхню структуру. Алгебрична теорія напівгруп, завдяки її застосуванню у вигляді напівгруп перетворень чи напівгруп часткових перетворень, знайшла широке використання не тільки в функціональному аналізі, теорії операторів, топології та диференціальній геометрії, але й у таких областях, як теорія кодів, шифрування, математична економіка та біологія.

Однією з основних задач в теорії напівгруп перетворень є описання структури напівгруп повних чи часткових перетворень деяких математичних структур, за умови, що ці перетворення зберігають структуру. Біциклічний моноїд, який, як відомо, відіграє важливу роль в теорії напівгруп, має багато точних зображень напівгрупами часткових перетворень. Одним з таких зображень є напівгрупа порядкових ізоморфізмів між головними фільтрами множини натуральних чисел \mathbb{N} зі звичайним лінійним порядком. Тому природно виникає задача описання напівгрупи порядкових ізоморфізмів між головними фільтрами скінченного степеня та k кодобутку множини \mathbb{N} з частковим порядком добутку, для довільного нескінченного кардинала k .

У дисертаційній роботі «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» Тарас Мокрицький досліджує узагальнення біциклічного моноїда. Замість перетворення натуральних чисел розглядаються перетворення степеня натуральних чисел – визначаються такі напівгрупи:

- напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів скінченного степеня множини натуральних чисел відносно порядку добутку для довільного натурального числа $n \geq 2$;

- напівгрупа $IPF({}^k\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів к-кодобутку множини натуральних чисел відносно порядку добутку для довільного нескінченного кардинала k .

Досліджується структура та алгебричні властивості цих напівгруп, а також топологізація напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$.

Структура, зміст та основні результати дисертаційної роботи

Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 107 найменувань та додатка, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг роботи становить 120 сторінок.

У вступі подано огляд дисертації, в якому підкреслено актуальність теми, визначено мету, завдання, предмет та об'єкт дослідження, а також описано наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

У першому розділі представлено огляд літератури за темою дисертації, наведено історичну довідку та мотивацію досліджень, а також сформульовано означення та допоміжні твердження з алгебри та загальної топології, які використовують в тексті дисертації.

Другий розділ дисертації присвячений вивченню алгебричних властивостей напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів скінченного степеня натуральних чисел. В цьому розділі доведено, що ця напівгрупа є біпростою, E-унітарною та F-інверсною, описано групу одиниць і всі максимальні підгрупи напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$, описано відношення Гріна, природний частовий порядок і напівґратку ідемпотентів на моноїді $IPF(\mathbb{N}^n)$. Також, доведено, що всі неединичні конгруенції на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ є груповими, і описано мінімальну групову конгруенцію на ній. Доведено, що напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна напівпрямому добутку $S_n \times \mathbb{B}^n$ прямого n -го степеня біциклічного моноїда групою підстановок S_n , а фактор-напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)/\mathfrak{c}_{mg}$ по мінімальній груповій конгруенції \mathfrak{c}_{mg} ізоморфна напівпрямому добутку $S_n \times \mathbb{Z}_+^n$ прямого n -го степеня адитивної групи цілих чисел групою підстановок S_n .

Третій розділ присвячений дослідженню топологізації напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$. У цьому розділі доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ є дискретною та доведено, що кожна недискретна гаусдорфова локально компактна трансляційно-неперервна топологія τ на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем збігається з одноточковою компактифікацією Александра зліченного дискретного простору. Також в цьому розділі досліджується вкладення моноїда $IPF(\mathbb{N}^n)$ у простори близькі до компактних.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню напівгрупи $IPF({}^k\mathbb{N})$ порядкових ізоморфізмів головних фільтрів k кодобутку множини натуральних чисел відносно порядку добутку для довільного нескінченного кардинала k . Показано, що ця напівгрупа має властивості, аналогічні до властивостей біциклічної напівгрупи, а також отримано структурні теореми, які описують цю напівгрупу: доведено, що напівгрупа $IPF({}^k\mathbb{N})$ ізоморфна напівпрямому добутку $S_k \times {}^k\mathbb{B}$ прямого k кодобутку біциклічного моноїда групою підстановок S_k , а фактор-напівгрупа $IPF({}^k\mathbb{N})/c_{mg}$ по мінімальній груповій конгруенції c_{mg} ізоморфна напівпрямому добутку $S_k \times {}^k\mathbb{Z}_+$ прямого k кодобутку адитивної групи цілих чисел групою підстановок S_k .

Ступінь обґрунтованості результатів, їхня наукова новизна

У дисертаційній роботі Тараса Мокрицького «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» автором отримано такі результати:

- описано алгебричну структуру напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$ і доведено, що вона ізоморфна напівпрямому добутку $S_k \times \mathbb{B}^n$;
- доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ є дискретною;
- описано вкладення моноїда $IPF(\mathbb{N}^n)$ у простори близькі до компактних;
- доведено, що кожна недискретна гаусдорфова локально компактна трансляційно-неперервна топологія τ на напівгрупі $IPF(\mathbb{N}^n)$ з приєднаним нулем збігається з одноточковою компактифікацією Александра зліченного дискретного простору;
- для довільного кардинала k описано алгебричну структуру напівгрупи $IPF({}^k\mathbb{N})$ і доведено, що вона ізоморфна напівпрямому добутку $S_k \times {}^k\mathbb{B}$.

Усі отримані результати нові та мають строгі доведення.

Зв'язок дисертаційної роботи з державними чи галузевими науковими програмами

Дисертаційна робота Мокрицького Т. В. «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри геометрії і топології (з 2020 року кафедри алгебри, топології та основ математики) механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми «Топологія та її застосування у фрактальній геометрії та математичній економіці» (номер державної реєстрації 0116U001537).

Практичне значення наукових результатів

Отримані результати дисертаційної роботи носять теоретичний характер і можуть бути використані у дослідженнях в топологічній алгебрі та теорії напівгруп.

Особистий внесок здобувача

Наведені у дисертаційній роботі результати досліджень належать автору і є його науковим доробком. У спільних з науковим керівником публікаціях О. В. Гутіку належать постановка задач, вибір методів досліджень і обговорення отриманих результатів.

Повнота викладу матеріалів у роботах, які опубліковані здобувачем

Основні наукові результати, отримані під час виконання дисертаційного дослідження Тараса Мокрицького опубліковано в:

- трьох наукових статтях, з яких дві у журналах, що віднесені до переліку фахових видань України, та одна публікація у науковому виданні, віднесеному до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank;
- трьох збірниках матеріалів доповідей міжнародних наукових конференцій.

На основі цього, можна стверджувати, що представлена дисертаційна робота є самостійним, завершеним науковим дослідженням, результати якого мають важливе значення для розвитку теорії напівгруп та топологічної алгебри.

Відомості про дотримання академічної доброчесності

Ознайомившись із науковими публікаціями та дисертацією «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» здобувача Т. В. Мокрицького, відзначаю відсутність порушень академічної доброчесності.

Зауваження до дисертації

Хоча дисертаційне дослідження загалом виконане на високому рівні, можна вказати декілька зауважень:

1. на стор. 17 слова «відображення», «часткове відображення», «перетворення» варто писати в лапках;
2. на стор. 23 використовується неправильний знак для відкриваючих лапок;
3. на стор. 29, 45, 51 замість тире написано коротку риску;
4. на стор. 43 перед словом «отриманих» та після переліку посилань на праці слід ставити коми;
5. на стор. 43 зайвим є сполучник «або» після четвертого пункту переліку умов Твердження 1.2.16;
6. на стор. 69 зайвим є сполучник «або» після четвертого пункту переліку умов у Наслідку 3.1.3 та 3.1.4;
7. стор. 110 відсутня кома після прізвища другого автора;
8. на стор. 117 у п. 94 перше слово у реченні слід писати з великої букви.

Вказані зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку виконаної дисертації Мокрицького Т. В.

Висновок щодо відповідності дисертації нормам

Вважаю, що дисертація Тараса Мокрицького на тему «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів», подана на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика», є завершеним дослідженням, присвяченим дослідженню алгебричних властивостей напівгруп $IPF(\mathbb{N}^n)$ та $IPF(\mathbb{K}\mathbb{N})$ і топологізації напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$. Робота містить актуальні наукові результати досліджень, всі доведення є зрозумілими, викладені послідовно і логічно. Ні в самій дисертації, ні в публікаціях не виявлено порушень правил академічної доброчесності.

Вважаю, що за новизною, актуальністю, обсягом та практичним значенням дисертація «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої

ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022 року, та наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» (з наступними змінами), а її автор, Мокрицький Тарас Володимирович, заслуговує присудження йому ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри алгебри, топології та
основ математики Львівського національного
університету імені Івана Франка

Іванна МЕЛЬНИК