

До спеціалізованої вченої ради ДФ 35.051.126
у Львівському національному
університету імені Івана Франка
79000, м. Львів, вул. Університетська, 1

ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, професора,
завідувача кафедри алгебри та системного аналізу Державного закладу
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»

Жучка Юрія Володимировича

на дисертаційну роботу **Мокрицького Тараса Володимировича**
«Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих
просторів», представлену на здобуття ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 «Математика та статистика»
за спеціальністю 111 «Математика»

Напівгрупи перетворень займають досить важливе місце у загальній алгебрі. Як відомо, з одного боку множина всіх перетворень будь-якої алгебраїчної системи, що зберігають задані в ній операції та відношення, утворює напівгрупу відносно операції композиції, а з іншого – будь-яку напівгрупу можна ізоморфно вкласти у напівгрупу перетворень деякої множини. У багатьох випадках саме через перетворення здійснюються зв'язки напівгруп з іншими математичними об'єктами. На сьогодні теорія напівгруп складає окремий потужний розділ загальної алгебри та має застосування у різних галузях науки. Особлива увага в сучасній алгебрі приділяється напівгрупам перетворень, які зберігають визначену на множині структуру, наприклад, відношення, операцію, топологію тощо. Одним з прикладів таких напівгруп перетворень є напівгрупа порядкових часткових ізоморфізмів головних фільтрів множини натуральних чисел зі звичайним лінійним відношенням порядку, яка насправді є точним зображенням біциклічного моноїду. Актуальними у цьому напрямку є задачі дослідження певних природних узагальнень біциклічного моноїду. У своїй дисертації Тарас Мокрицький визначає два змістовних узагальнення біциклічного моноїда та досліджує будову й структурні властивості таких узагальнених напівгруп, а також вивчає топологізацію однієї з них.

Дисертація містить анотацію, вступ, чотири розділи, висновки, список використаних джерел із 107 найменувань, а також додаток, в якому представлено публікації автора та його участь у наукових конференціях. Загальний обсяг роботи становить 120 сторінок. Зміст дисертації відповідає поставленим цілям дослідження.

У вступі обґрунтовано актуальність обраної теми, сформульовано мету та завдання дослідження, вказано предмет і об'єкт роботи. Зазначено використані методи дослідження, наукову новизну і практичне значення отриманих

результатів. Визначено особистий внесок здобувача, наведено інформацію про публікації та апробацію основних результатів дисертації та її зв'язок з кафедральною науково-дослідницькою темою.

У першому розділі описано мотивацію дисертаційного дослідження, наведено історичний опис розвитку теорії напівгруп та її зв'язків з топологічною алгеброю, сформульовано необхідні означення та твердження, які використовуються впродовж всієї дисертації.

У другому розділі вивчається будова напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$, де $n \geq 2$ – натуральне число, всіх порядкових ізоморфізмів головних фільтрів n -го степеня множини натуральних чисел з природним продовженням звичайного лінійного відношення порядку з \mathbb{N} на множину \mathbb{N}^n . Доведено, що ця напівгрупа є біпростою, E -унітарною та F -інверсною, знайдено всі її максимальні підгрупи та групу одиниць. Описано відношення Гріна, природний частовий порядок і напівгратку ідемпотентів на моноїді $IPF(\mathbb{N}^n)$. Причому показано, що всі неединичні конгруенції на досліджуваній напівгрупі є груповими, і описано будову мінімальної групової конгруенції. Доведено, що напівгрупа $IPF(\mathbb{N}^n)$ ізоморфна напівпрямому добутку прямого n -го степеня біциклічного моноїда з групою підстановок S_n , а її фактор-напівгрупа по мінімальній груповій конгруенції ізоморфна напівпрямому добутку прямого n -го степеня адитивної групи цілих чисел з групою підстановок n -елементної множини.

У третьому розділі досліджується топологізація напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$. Встановлено, що кожна гаусдорфова трансляційно-неперервна топологія на вказаній напівгрупі є дискретною, а кожна недискретна гаусдорфова локально компактна трансляційно-неперервна топологія τ на цій напівгрупі разом із приєднаним нулем збігається з одноточковою компактифікацією Александра зліченного дискретного простору. Крім того, досліджено можливість занурення напівгрупи $IPF(\mathbb{N}^n)$ у простори близькі до компактних.

Четвертий розділ присвячений дослідженню будови напівгрупи $IPF({}^k\mathbb{N})$, де k – нескінченний кардинал, всіх порядкових ізоморфізмів головних фільтрів заданої підмножини множини ${}^k\mathbb{N}$, а також з'ясуванню того факту, наскільки близькі властивості цієї напівгрупи до властивостей біциклічного моноїда. Подібно як у розділі 2, для моноїда $IPF({}^k\mathbb{N})$ описано групу одиниць і всі максимальні підгрупи, відношення Гріна, природний частковий порядок і напівгратку ідемпотентів на ньому. Доведено, що ця напівгрупа є біпростою, E -унітарною та F -інверсною, а всі неединичні конгруенції на ній є груповими; описано мінімальну групову конгруенцію. Встановлено, що напівгрупа $IPF({}^k\mathbb{N})$ може бути точно представлена як напівпрямий добуток прямого k кодобутку біциклічного моноїда з групою бієкцій S_k кардинала k , а фактор-напівгрупа заданої напівгрупи по мінімальній груповій конгруенції – як напівпрямий добуток прямого k кодобутку адитивної групи цілих чисел з групою підстановок S_k .

Дисертація Мокрицького Т.В. є цілісною роботою, яка має теоретичний характер. Особистий внесок дисертанта в публікаціях, виконаних у співавторстві, визначений у вступі роботи. Виклад матеріалу дисертації є чітким, логічним та послідовним. Результати роботи, які представлено на захист, є новими, науково обґрунтованими і строго доведеними. Для доведення цих результатів автор спирається на загальні методи теорії напівгруп, топології та комбінаторного аналізу.

Список публікацій автора за тематикою дисертації налічує 6 найменувань. Основні результати опубліковано в трьох статтях (дві – одноосібно), які входять до переліку фахових видань, затверджених МОН України, одна з яких – у виданні, включеному до міжнародної наукометричної бази Scopus (квартиль Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank). Деякі з отриманих результатів роботи були анонсовані в 3-х тезах доповідей міжнародних наукових конференцій.

Дисертація досить добре оформлена, відповідно до вимог Міністерства освіти і науки України, які висуваються до такого роду наукових робіт, та має чітку структуру. Випадків порушення академічної доброчесності у дисертаційній роботі Тараса Мокрицького не виявлено.

Разом з тим, представлена дисертаційна робота не є вільною від недоліків, у тексті зустрічаються певні неточності та описки. Наприклад,

1. на с. 21 у рядках 3, 4 та 15, 16 зверху для біциклічної напівгрупи використовуються два різних позначення, а саме: $C(p, q)$ та \mathbb{W} ; було б зручніше використовувати одне з позначень в межах цього пункту;
2. на с. 31, рядки 10, 11 зверху, де введено поняття головного фільтру та головного ідеалу частково впорядкованої множини, варто було б відмітити і інші терміни для цих понять – верхній та нижній конуси;
3. на с. 40 у рядках 7, 8, 16 зверху замість «відритим», «відритими» та «відритою» потрібно писати «відкритим», «відкритими» та «відкритою» відповідно;
4. на с. 46 у Лемі 2.1.2 у визначенні проекції на i -ту координату фігурні дужки з позначенням $-$ -го місця можна було не писати, оскільки на i -му місці знаходиться елемент з тим самим індексом;
5. на с. 85, у рядку 9 зверху слід писати «обернене» замість «оберненне», а на с. 98, у рядку 2 знизу потрібно писати «для довільного» замість «довільного».

Проте ці недоліки та інші технічні неточності, які інколи зустрічаються у тексті дисертації, не мають принципового значення та не знижують загальної позитивної оцінки роботи.

Відзначимо, що результати дисертаційної роботи були представлені на таких математичних конференціях та наукових семінарах:

- Міжнародна конференція з функціонального аналізу, присвячена 125-річчю Стефана Банаха, м. Львів, 2017 р.;

- Міжнародна конференція «Банахові простори та їх застосування», присвячена 70-річчю А.М. Плічка, , м. Львів, 2019 р.;
- Міжнародна алгебраїчна конференція «At the End of the Year 2021», м.Київ, 2021 р.;
- Науковий семінар імені проф. М. Комарницького «Теорія полігонів і спектральні простори» у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2021 р., 2022 р.;
- Науковий семінар «Топологічна алгебра» у Львівському національному університеті імені Івана Франка, м. Львів, 2017 р., 2019 р., 2021 р.

Слід відмітити, що окрім Львівського національного університету імені Івана Франка, де була виконана дисертація, результати роботи можуть бути використані в дослідженнях, що здійснюються науковими колективами Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Інституту математики національної академії наук України, Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, Волинського національного університету імені Лесі Українки, Луганського національного університету імені Тараса Шевченка, Вінницького національного технічного університету, а також інших навчальних закладів України, дослідження яких певним чином пов'язані з алгебраїчною теорією напівгруп.

Враховуючи вищезазначене, вважаю, що дисертація Мокрицького Т.В. «Напівгрупи часткових порядкових ізоморфізмів частково впорядкованих просторів» є завершеним науковим дослідженням, містить нові змістовні результати з актуальних напрямків сучасної теорії напівгруп та відповідає всім необхідним вимогам наказу МОН України №40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» та «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022 р., а її автор, Тарас Володимирович Мокрицький, заслуговує присудження йому ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика».

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук,
 професор, завідувач кафедри
 алгебри та системного аналізу
 Державного закладу «Луганський
 національний університет
 імені Тараса Шевченка»

Юрій ЖУЧОК