АНОТАЦІЯ

Боднарчук А.Ю. Асимптотичні властивості рядів Тейлора-Діріхле. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 "Математика" (галузь знань 11 — Математика та статистика). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2026.

Дисертація складається зі вступу, 3 розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку А. У вступі обґрунтовано актуальність теми досліджень, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, теоретичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача. Також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

Дана дисертація присвячена дослідженню умов, що забезпечують виконання зовні виняткових множин деяких співвідношень теорії Вімана-Валірона для двох типів додатних рядів, що є спрощеними модельними випадками як загальних рядів Тейлора-Діріхле, так і рядів за системою функцій вигляду $\{f(z\lambda_n)\}$. Інтрументом дослідження, зокрема, є оцінки інтегралів відповідних типів, пов'язаних з названими рядами, і ймовірнісний підхід, що базується на нерівностях Маркова чи Б'єнейме-Чебишова, і який в свій час вперше до степеневих рядів застосував P.C. Rosenbloom (1962).

Тематика даного дисертаційного дослідження належить до одного з центральних напрямків розвитку теорії аналітичних функцій та понад 50 років є однією з центральних тем в дослі-

дженнях, що проводилися, зокрема, учасниками Львівського міського семінару з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті імені Івана Франка та близько 25 років учасниками семінару з теорії потенціалу та застосувань у цьому ж університеті. Неповний перелік учасників цих семінарів, які кожен у свій час проводили такі дослідження це: професори А.А. Гольдберг, М.М. Шеремета, О.Б. Скасків, Б.В. Винницький, П.В. Філевич, І.Е. Чижиков, А.І. Бандура, а також О.Е. Єременко, М.М. Хом'як, Ю.М. Галь, С. Херате, О.М. Трусевич, Т.М. Сало, Я.З. Стасюк, О.Г. Орищин, О.М. Тракало, М.Г Півкач, О.В. Зрум, О.Ю. Задорожна, Д.Ю. Зікрач, Л.О. Шаповаловська, І.Є. Овчар, С.І. Панчук, Н.Ю. Стасів, А.О. Куриляк. Серед безумовних здобутків цього періоду відзначимо розробку і адаптацію методу Вімана Валірона до потреб дослідження цілих рядів Діріхле з монотонно зростаючою до нескінченності послідовністю показників (а в подальшому - з довільною послідовністю, зокрема, комплексних, показників). Назвемо ряд прізвищ закордонних математиків, внесик яких в описане коло питань є найбільш значним, це: A. Wiman, G. Valiron, E. Borel, W. Saxer, G. Polya, A.J. Macintyre, H. Wittich, P. Erdös, T. Kövari, W.K. Hayman, W.H.J. Fuchs, K.-G. Grosse-Erdmann, P.C. Fenton, Sh. Strelitz, A. Schumitzky, P. Lévy, J. Gopala Krishna, J. Rossi, M.M. Strumia. Дослідження функціональних рядів (степеневі ряди, ряди Діріхле, інтерполяційні ряди, ряди Тейлора-Діріхле) лежали в основі багатьох публікацій, в яких досліджувалися ті або інші класи аналітичних функцій.

У дисертаційній роботі основними об'єктами дослідження є ряди Тейлора-Діріхле з додатними коефіцієнтами і показника-

ми, також деякі додатні інтеграли, та функціональні ряди за системою функцій $\{f(x\lambda_n)\}$.

У підрозділі 2.2 розділу 2 цієї роботи дано часткову відповідь на одну гіпотезу, яку проф. О.Б. Скасків сформулював на міжнародній конференції "Complex Analysis and Related Topics що відбулася у Львові, 23–28 вересня 2013 року ([26], а також див. нижче Гіпотеза 2.1). Гіпотеза полягає в існуванні такого ряду Тейлора-Діріхле загального вигляду, що нерівність

$$F(x) > (1 + d)\mu(x, F)$$

$(x \in E)$ виконується з деяким додатним d на множині E нескінченної h-міри.

У підрозділі 2.3 розділу 2 одержано нові умови, які забезпечують існування центрального індекса $\nu(x, F)$ для кожної функції F з класу $S(\lambda, \beta, \tau)$ збіжних для всіх $x \geq 0$ додатних рядів Тейлора-Діріхле вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad b_n \geq 0 \ (n \geq 0), \tag{1}$$

де $\tau\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ – неспадна функція, $\lambda = (\lambda_n)$ і $\beta = (\beta_n)$ – невід'ємні послідовності. За допомогою даного твердження про нові умови існування центрального індексу, у цьому розділі за слабших умов, ніж в Теоремі 2 з [29] про асимпототичну рівність суми ряду Тейлора-Діріхле і його максимального члена, доведено її новий і дещо загальніший варіант. Власне, новим місцем у доведенні цього варіанту теореми якраз і є послаблення умов, що гарантують існування центрального індекса $\nu(x, F)$. Замінити всі умови, що гарантують його існування, просто умовою існування, через особливості методу доведення

основної частини теореми, автору не вдалося. Але твердження теореми мабуть є правильним і в цьому загальному випадку. У цьому полягає наша гіпотеза.

У 2.4 підрозділі розділу 2 розглянуто нерівність між абсцисами існування максимального члена ряду Тейлора-Діріхле і відповідного до нього ряду Діріхле. Доведено кілька простих співвідношень між різними абсцисами збіжностей.

У підрозділі 3.1 розділу 3 знайдено певні умови на зростання вздовж точок послідовності (λ_n) правосторонньої похідної логарифма функції f_0 за якою побудовано функціональний ряд

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_0(\beta_n + x),$$

що забезпечують виконання асмптотичного співвідношення типу Бореля між логарифмами суми $F_0(x)$ ряду і максимального члена $\mu_{F_0}(x)$ при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега. Дане твердження в даному частковому випадку є відповіддю на питання М.М. Шеремети, яка в певному сенсі є контроверсією до його загальної гіпотези.

У підрозділі 3.2 розділу 3 розглядається клас рядів із додатних функцій вигляду $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f(x\lambda_k)$, які збігаються для всіх $x \geq 0$. Зазначимо, що ці два щойно згадані ряди розглядаються за одного і того ж припущення про додатність функційf_0, f, і опуклість їхніх логарифмів. При цьому асимптотичні співвідношення, що доводяться, виконуються для обидвох типів рядів також зовні множин скінченної міри Лебега. Якщо результати, отримані в такому випадку для рядів, побудованих за функцією f_0, після перепозначень, інтерпретувати їх для рядів f, побудованих за функцією f, то ми отримаємо, що

відповідне твердження виконуватиметься для цих останніх рядів за слабшої умови логарифмічної опуклості логарифма від функції f. Проте, описання виняткової множини в цьому випадку виглядатиме як скінченність її логарифмічної міри, що є слабшим за скінченність її міри Лебега.

У підрозділі 3.2 розділу 3 також, зокрема, встановлено умову, за якої всі три ряди:

$$F, \quad B^{\pm}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{\pm 1} f(x\lambda_n)$$

є одночасно збіжними на невід'ємному дійсному промені.

Основний результат підрозділу 3.2 міститься в доведеній в ньому теоремі про стійкість (логарифма) максимального члена ряду при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега.

У підрозділі 3.3 розділу 3 також йдеться про аналог вже згадуваного у підрозділі 3.1 співвідношення типу Бореля, але цього разу воно розглядається для деяких додатних інтегралів. Зокрема, у цьому розділі дається позитивна відповідь на припущення О.Б. Скасківа ([6, Conjecture 1]). Власне, доведено, що за умови

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty$$

з $\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 : (\ln f(u))' \leq t\}$, де ν – локально скінченна міра, для кожної функції $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ зображуваної інтегралом вигляду

$$F(x) = \int_0^{+\infty} a(t) f(x+t) \nu(dt)$$

(f додатна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція така, що $f(0) = 1$ і $\ln f(x)$ опукла на інтервалі $[0, +\infty)$) існує множина E скінченної Лебегової міри така, що асимптотичне співвідно-

шення

$$\ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$$

виконується при $x \to +\infty$, $x \notin E$, де $\mu(x, F) = \sup\{a(t)f(x+t) : x \in \operatorname{supp} \nu\}$ і $\operatorname{supp} \nu$ є носієм міри ν.

Також в підрозділі 3.3 розділу 3 доведено результат, який стосується стійкості максимального члена ряду з класу функцій $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\lambda_n + x), \qquad a_n \geq 0 \quad (n \geq 0).$$

В наступних підрозділах розглянуто також співвідношення типу Бореля, а також нерівніть Вімана для рядів Діріхле.

Ключові слова: ряд Діріхле, ряди Тейлора-Діріхле, гаусові випадкові величини, абсциса збіжності, абсциса абсолютної збіжності, абсциса існування максимального члена, аналітична функція, максимум модуля, максимальний член, співвідношення типу Бореля, стійкість максимального члена ряду.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Боднарчук А.Ю., Куриляк М.Р., Скасків О.Б. *Про абсцису існування максимального члена випадкових рядів Діріхле з довільними додатними показниками* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2022. – Т.94. – С. 79–88. (входить до категорії Б наукових фахових видань України) http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.94.079-088
2. Bodnarchuk A.Yu., Gal' Yu.M., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton type theorem for Taylor-Dirichlet series* // Matematychni Studii, V. 61, no. 1 (2024). P. 109-112. (Scopus, Q2) http://doi.org/10.30970/ms.61.1.109-112
3. Skaskiv O.B., Bodnarchuk A. Yu. *On the sum and maximal term of Taylor-Dirichlet type series.* Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Chyslo, 19(73), 2024. P. 41–46. (входить до категорії Б наукових фахових видань України) https://doi.org/10.31471/2304-7399-2024-19(73)-41-46
4. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *Trusevych, O. About Borel type relation for some positive functional series.* Matematychni Studii, 63(1), 98-101. T. 63, No. 1 (2025). P. 98-101. (Scopus, Q2) https://doi.org/10.30970/ms.63.1.98-101
5. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functi-*

ons. Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Chyslo, 20(76), 15-23. 2025, P. 15-23. (входить до категорії Б наукових фахових видань України) https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20(76)-15-23

6. A. Bodnarchuk, T. Salo, O. Skaskiv. Laplace-Stielthjes type integrals: the Borel relation and the h-measure of an exceptional set. Visnyk of the Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 2026. V.98, pp. 192–197. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2026.98.192-197 (входить до категорії Б наукових фахових видань України)

Список публікацій, які додатково відображають результати дисертації

7. Bandura A.I., Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *About Borel type relation for some positive integrals.* Altay Conference Proceedings in Mathematics, **2** (2025), No. 1, pp. 40-47. https://doi.org/10.64700/altay.20
8. Bodnarchuk A.Yu., Kuryliak M.R. *On the sharpness of the Hayman-type analogue of the Wiman inequality for entire Dirichlet series*, Mat. Stud., **66** (2026), no.1, 30–34. (Scopus, Q2) https://doi.org/10.30970/ms.66.1.30-34

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series*. Intern. Conf. Young Mathematicians. IM NASU, June 4-6, 2025, Kyiv, Ukraine

2. Bodnarchuk A.Yu., Dolynyuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. International workshop on modern problems of analysis, optimization, approximation and their applications. June 25-27, 2025. Abstracts. – Rome, 2025. – P. 19-21.
3. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series*. International conference "Complex and hypercomplex analysis and their applications". August 6-10, 2025. Abstracts. – Zhytomyr, 2025. – P. 7-8.
4. Боднарчук А.Ю., Куриляк М.Р., Скасків О.Б. *Про абсциси збіжності випадкових гаусових рядів Діріхле*. Міжнародна конференція присвячена 75-й річниці від дня народження Володимира Маслюченка. 25-27 вересня, 2025. Тези доповідей. – Чернівці, 2025. – С. 17-18.
5. Боднарчук А.Ю., Куриляк М.Р., Скасків О.Б. *Про абсциси збіжності випадкових гаусових рядів Діріхле*. Achievements of 21st Century Scientific Community: Proceedings of the 3rd International Scientific and Practical Internet Conference. Вересень 18-19, 2025. Abstracts. – Dnipro, Ukraine, 2025. – P. 73-74.
6. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. 5 Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Recent Trends in Science»". Травень 14-15, 2026. – Дніпро, Україна. – С. 7-9.
7. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. Conference of Young Mathematicians. The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of

Ukraine June 3-5, 2026, Kyiv, Ukraine

8. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та суміжні питання» з нагоди 70-річчя професора Анатолія Романюка. Червень 17-21, 2026. – Світязь, Волинська область, Україна.

ABSTRACT

Bodnarchuk A.Yu. *Asymptotic properties of Taylor-Dirichlet series.* — Qualification Scientific Work (Manuscript).

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 111 "Mathematics" (field of knowledge 11 — Mathematics and statistics). — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2026.

The thesis consists of an introduction, 3 chapters, conclusions, references and appendix A. The introduction consists of the relevance of research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods. The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

Functional series arise naturally in various branches of mathematics as an effective research tool for the analyst. Initially serving as a tool for computational practice, they evolved over subsequent decades into a fundamental component of mathematical analysis in the broad sense of the term. Writings by many renowned mathematicians suggest that functional analysis emerged from the process of deepening and systematizing theoretical constructs based on functional series—such as power series, trigonometric series, and others. The remarkable properties of polynomials in general, as well as specific sequences of them, underpinned many mathematical achievements prior to the 20th century. In particular, polynomial sequences proved to be effective tools for interpolation problems because they (e.g., Lagrange or Newton interpolation polynomials) yield exact solutions based on a finite set of

nodes. It is logical to attempt to extend this approach to the case of an infinite sequence of nodes. This gives rise to sequences of interpolation polynomials constructed from finite subsets of the initial sequence terms. Consequently, a number of fundamental questions immediately arise: the convergence of polynomial sequences, and the specific classes of functions that can be reconstructed from such sequences (and by which specific types). For instance, even a question that appears simple at first glance, such as reconstructing an infinitely differentiable real-valued function from its values and the values of its derivatives at a single point (which leads to the concept of the Maclaurin or Taylor series), yields highly nontrivial answers when formulated this way. A rigorous justification for the convergence of such series (and specifically for their convergence to the very functions used to construct them) was developed relatively late; nevertheless, these studies significantly influenced the development of analysis as a whole. In particular, the work of Weierstrass and his contemporaries laid the foundation for defining analytic functions via power series (Taylor series), which became a key tool for studying transcendental functions, including elementary ones. Dirichlet series, commonly viewed as a natural generalization of power series, are also widely used to analyze the properties of analytic solutions to differential equations; this is because the general solution to a linear differential equation of finite order with simple (non-multiple) eigenvalues is an exponential polynomial, whereas for an equation of infinite order (under similar assumptions) it is a Dirichlet series. In the case of multiple eigenvalues, Taylor-Dirichlet series arise in a similar manner. The main new results of this work concern the study of the behavior of the Taylor–Dirichlet functional series at infinity wi-

th respect to the behavior of the maximum term of this series. The main new results of the work concern the study of the behavior of Taylor–Dirichlet-type functional series at infinity in relation to the behavior of the series' maximum term. The paper examines asymptotic relations between the aforementioned functional series and its maximum term, of the form

$$F(x) = (1 + o(1))\mu(x, F), \quad x \to +\infty \quad (x \notin E),$$

as well as Borel-type relations

$$F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F), \quad x \to +\infty \quad (x \notin E),$$

where E is a certain (exceptional) set.

Section 2.2 of chapter 2 of this paper provides a partial answer to the hypothesis formulated at the international conference "Complex Analysis and Related Topics," held in Lviv on September 23–28, 2013. This conjecture concerns the relation of the form $F(x) > (1 + d)\mu(x, F)$, $x \to +\infty$, $(x \in E)$ for Taylor–Dirichlet series, where E is some set.

Subsection 2.2 of this work provides a partial answer to a hypothesis formulated by Prof. O.B. Skaskiv at the international conference "Complex Analysis and Related Topics,"held in Lviv on September 23–28, 2013 ([26]; see also Conjecture 2.1 below). The hypothesis concerns the existence of a Taylor-Dirichlet series of a general form such that the inequality $F(x) > (1 + d)\mu(x, F)$ $(x \in E)$ holds for some positive d on a set E of infinite h-measure.

Subsection 2.3 of this work establishes new conditions ensuring the existence of a central index $\nu(x, F)$ for every function F belonging to the class $S(\lambda, \beta, \tau)$ of positive Taylor-Dirichlet series

of the form

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad b_n \geq 0 \ (n \geq 0), \tag{2}$$

convergent for all $x \geq 0$, where $\tau\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ is a non-decreasing function, and $\lambda = (\lambda_n)$ and $\beta = (\beta_n)$ are non-negative sequences. Using the aforementioned statement regarding the new conditions for the existence of the central index, this section presents a proof of a new and somewhat more general version of the theorem concerning the asymptotic equality between the sum of a Taylor-Dirichlet series and its maximum term—doing so under weaker conditions than those found in Theorem 2 of [29]. Specifically, the novel aspect of this proof lies in the relaxation of the conditions guaranteeing the existence of the central index $\nu(x, F)$. The author was unable to replace all the conditions guaranteeing its existence with a simple existence condition, due to the specific nature of the method used to prove the main part of the theorem; nevertheless, the theorem's assertion likely holds true in this general case as well. This is our conjecture.

Subsection 2.4 of Section 2 examines the inequality between the abscissae of existence of the maximal term of a Taylor–Dirichlet series and a certain corresponding Dirichlet series. Several simple relations between various abscissas of convergence are proved.

In Subsection 3.1 of Section 3, specific growth conditions are identified for the right-hand derivative of the logarithm of a function f_0—used to construct the functional series $F_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_0(\beta_n + x)$, that ensure an asymptotic relation of the Borel type holds between the logarithms of the series sum $F_0(x)$ and its maximum term $\mu_{F_0}(x)$ as $x \to +\infty$, outside a set of finite Lebesgue

measure. In this particular case, the result answers a question posed by M.M. Sheremeta and, in a sense, stands in contrast to his general hypothesis.

Subsection 3.2 of Section 3 examines a class of series of positive functions of the form $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f(x\lambda_k)$ that converge for all $x \geq 0$. It should be noted that both series discussed here are considered under the same assumptions regarding the positivity of the functions f_0 and f and the convexity of their logarithms. Furthermore, the asymptotic relations established for both types of series hold outside sets of finite Lebesgue measure. If the results obtained for series constructed using the function f_0 are reinterpreted—following appropriate relabeling—for series constructed using the function f, we find that the corresponding statement holds for the latter series under the weaker condition of logarithmic convexity of the logarithm of f. However, the description of the exceptional set in this case involves the finiteness of its logarithmic measure, a condition weaker than the finiteness of its Lebesgue measure.

Specifically, the subsection 3.2 establishes a condition under which all three series: F and $B^{\pm} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{\pm 1} f(x\lambda_n)$ are convergent simultaneously on the non-negative real semi-axis. The main result of subsection 3.2 is formulated in a theorem regarding the stability of the (logarithm of the) maximum term of the series as $x \to +\infty$, outside a certain set of finite Lebesgue measure.

Section 3.3 of chapter 3 deals with the Borel-type relation already mentioned in section 3.1, but this time it is considered for certain positive integrals. In particular, this section provides a positive answer to Conjecture 1 from [6]. Specifically, it is proven that if $\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty$ with $\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 : (\ln f(u))' \leq t\}$,

where ν is a locally finite measure, for every function $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mapped by an integral of the form $F(x) = \int_0^{+\infty} a(t)f(x+t)\nu(dt)$ (f is a positive function increasing to $+\infty$ on $[0, +\infty)$ such that $f(0) = 1$ and $\ln f(x)$ is a convex function on the interval $[0, +\infty)$) there exists a set E of finite Lebesgue measure such that the asymptotic relation $\ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$ holds as $x \to +\infty$, $x \notin E$, where $\mu(x, F) = \sup\{a(t)f(x+t) : x \in \operatorname{supp} \nu\}$ and $\operatorname{supp} \nu$ is the support of the measure ν.

Subsection 3.3 of Section 3 also discusses an analogue of the Borel-type relation already mentioned in Subsection 3.1, though here it is considered for certain positive integrals. Specifically, this section provides an affirmative answer to a conjecture by O.B. Skaskiv ([6, Conjecture 1]). Indeed, it is proven that under the condition

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty$$

(where $\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 : (\ln f(u))' \leq t\}$ and ν is a locally finite measure), for every function $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ representable as an integral of the form

$$F(x) = \int_0^{+\infty} a(t)f(x+t)\nu(dt)$$

(where f is a positive function increasing to $+\infty$ on $[0, +\infty)$ such that $f(0) = 1$ and $\ln f(x)$ is convex on the interval $[0, +\infty)$), there exists a set E of finite Lebesgue measure such that the asymptotic relation

$$\ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$$

holds as $x \to +\infty$ ($x \notin E$), where $\mu(x, F) = \sup\{a(t)f(x+t) : x \in \operatorname{supp} \nu\}$ and $\operatorname{supp} \nu$ is the support of the measure ν. Subsection 3.3 of Section 3 also establishes a result concerning the stability of

the maximum term of a series belonging to the class of functions $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ of the form $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\lambda_n + x)$, where $a_n \geq 0$ $(n \geq 0)$.

The following subsections also examine Borel-type relations and the Wiman inequality for Dirichlet series.

Keywords: Dirichlet series, Taylor-Dirichlet series, Gaussian random variables, convergence abscissa, absolute convergence abscissa, existence abscissa of the maximum term, analytic function, maximum modulus, maximum term, Borel-type relation, stability of the maximum term of a series.

LIST OF PUBLICATIONS ON THE THESIS TOPIC

Scientific papers in which the main scientific results of the dissertation are published

1. Bodnarchuk A.Yu., Kuryliak M.R., Skaskiv O.B. *On the abscissa of existence of the maximum term of random Dirichlet series with arbitrary positive exponents* // Visnyk of the Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 2022. V.94, pp. 79–88 (is included in Category B of Ukraine's specialized scientific journals) http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.94.079-088
2. Bodnarchuk A.Yu., Gal' Yu.M., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton type theorem for Taylor-Dirichlet series* // Matematychni Studii, V. 61, no. 1 (2024). P. 109-112. (Scopus, Q2) http://doi.org/10.30970/ms.61.1.109-112
3. Skaskiv O.B., Bodnarchuk A. Yu. *On the sum and maximal term of Taylor-Dirichlet type series.* Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Chyslo, 19(73), 2024. P.

41–46. (is included in Category B of Ukraine's specialized scientific journals)
https://doi.org/10.31471/2304-7399-2024-19(73)-41-46

4. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *Trusevych, O. About Borel type relation for some positive functional series.* Matematychni Studii, 63(1), 98-101. T. 63, No. 1 (2025). P. 98-101. (Scopus, Q2)
https://doi.org/10.30970/ms.63.1.98-101
5. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions.* Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Chyslo, 20(76), 15-23. 2025, P. 15-23. (is included in Category B of Ukraine's specialized scientific journals)
https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20(76)-15-23
6. A. Bodnarchuk, T. Salo, O. Skaskiv, Laplace-Stieltjes type integrals: the Borel relation and the h-measure of an exceptional set. Visnyk of the Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 2026. V.98, pp. 192–197. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2026.98.192-197 (is included in Category B of Ukraine's specialized scientific journals)

Publications
Further Reflecting the Results of the Dissertation

7. Bandura A.I., Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *About Borel type relation for some positive integrals.* Altay Conference Proceedings in Mathematics, **2** (2025), No. 1, pp. 40-47.
https://doi.org/10.64700/altay.20

8. Bodnarchuk A.Yu., Kuryliak M.R. *On the sharpness of the Hayman-type analogue of the Wiman inequality for entire Dirichlet series*, Mat. Stud., **66** (2026), no.1, 38–42. (Scopus, Q2) https://doi.org/10.30970/ms.66.1.30-34

List of Publications Confirming the Approbation of Dissertation Materials

1. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series*. International Conference of Young Mathematicians. The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine June 4-6, 2025, Kyiv, Ukraine
2. Bodnarchuk A.Yu., Dolynyuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. International workshop on modern problems of analysis, optimization, approximation and their applications. June 25-27, 2025. Abstracts. – Rome, 2025. – P. 19-21.
3. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series*. International conference "Complex and hypercomplex analysis and their applications". August 6-10, 2025. Abstracts. – Zhytomyr, 2025. – P. 7-8.
4. Bodnarchuk A.Yu., Kyruliak M.R., Skaskiv O.B. *On the abscissas of convergence of random gaussian Dirichlet series*. International conference dedicated to 75th anniversary of the birthday of Volodymyr Masliuchenko. September 25-27, 2025. Abstracts. – Chernivci, 2025. – P. 17-18.
5. Bodnarchuk A.Yu., Kuryliak M.R., Skaskiv O.B. *On the abscissas of convergence of random gaussian Dirichlet series*. Achi-

evements of 21st Century Scientific Community: Proceedings of the 3rd International Scientific and Practical Internet Conference. September 18-19, 2025. Abstracts. – Dnipro, Ukraine, 2025. – P. 73-74.

6. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. 5th International Scientific and Practical Internet Conference «Recent Trends in Science». May 14-15, 2026. – Dnipro, Ukraine. – C. 7-9.
7. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. Conference of Young Mathematicians. The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine June 3-5, 2026, Kyiv, Ukraine
8. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. International Conference "Theory of Function Approximation and Related Topics" in honor of Professor Anatoliy Romanyuk's 70th birthday. June 17–21, 2026. — Svitiaz, Volyn Oblast, Ukraine.