Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Боднарчук Андрій Юрійович

УДК 517.55

ДИСЕРТАЦІЯ

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РЯДІВ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

111 «Математика»
11 «Математика та статистика»

Подається на здобуття ступеня доктора філософії.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
_____ А.Ю. БОДНАРЧУК

Науковий керівник:
Скасків Олег Богданович
доктор фізико-математичних
наук, професор

Львів – 2026

АНОТАЦІЯ

Боднарчук А.Ю. Асимптотичні властивості рядів Тейлора-Діріхле. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 "Математика" (галузь знань 11 — Математика та статистика). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2026.

Дисертація складається зі вступу, 3 розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку А. У вступі обґрунтовано актуальність теми досліджень, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, теоретичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача. Також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

Дана дисертація присвячена дослідженню умов, що забезпечують виконання зовні виняткових множин деяких співвідношень теорії Вімана-Валірона для двох типів додатних рядів, що є спрощеними модельними випадками як загальних рядів Тейлора-Діріхле, так і рядів за системою функцій вигляду $\{f(z\lambda_n)\}$. Інтрументом дослідження, зокрема, є оцінки інтегралів відповідних типів, пов'язаних з названими рядами, і ймовірнісний підхід, що базується на нерівностях Маркова чи Б'єнейме-Чебишова, і який в свій час вперше до степеневих рядів застосував P.C. Rosenbloom (1962).

Тематика даного дисертаційного дослідження належить до одного з центральних напрямків розвитку теорії аналітичних функцій та понад 50 років є однією з центральних тем в дослі-

дженнях, що проводилися, зокрема, учасниками Львівського міського семінару з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті імені Івана Франка та близько 25 років учасниками семінару з теорії потенціалу та застосувань у цьому ж університеті. Неповний перелік учасників цих семінарів, які кожен у свій час проводили такі дослідження це: професори А.А. Гольдберг, М.М. Шеремета, О.Б. Скасків, Б.В. Винницький, П.В. Філевич, І.Е. Чижиков, А.І. Бандура, а також О.Е. Єременко, М.М. Хом'як, Ю.М. Галь, С. Херате, О.М. Трусевич, Т.М. Сало, Я.З. Стасюк, О.Г. Орищин, О.М. Тракало, М.Г Півкач, О.В. Зрум, О.Ю. Задорожна, Д.Ю. Зікрач, Л.О. Шаповаловська, І.Є. Овчар, С.І. Панчук, Н.Ю. Стасів, А.О. Куриляк. Серед безумовних здобутків цього періоду відзначимо розробку і адаптацію методу Вімана Валірона до потреб дослідження цілих рядів Діріхле з монотонно зростаючою до нескінченності послідовністю показників (а в подальшому - з довільною послідовністю, зокрема, комплексних, показників). Назвемо ряд прізвищ закордонних математиків, внесик яких в описане коло питань є найбільш значним, це: A. Wiman, G. Valiron, E. Borel, W. Saxer, G. Polya, A.J. Macintyre, H. Wittich, P. Erdös, T. Kövari, W.K. Hayman, W.H.J. Fuchs, K.-G. Grosse-Erdmann, P.C. Fenton, Sh. Strelitz, A. Schumitzky, P. Lévy, J. Gopala Krishna, J. Rossi, M.M. Strumia. Дослідження функціональних рядів (степеневі ряди, ряди Діріхле, інтерполяційні ряди, ряди Тейлора-Діріхле) лежали в основі багатьох публікацій, в яких досліджувалися ті або інші класи аналітичних функцій.

У дисертаційній роботі основними об'єктами дослідження є ряди Тейлора-Діріхле з додатними коефіцієнтами і показника-

ми, також деякі додатні інтеграли, та функціональні ряди за системою функцій $\{f(x\lambda_n)\}$.

У підрозділі 2.2 розділу 2 цієї роботи дано часткову відповідь на одну гіпотезу, яку проф. О.Б. Скасків сформулював на міжнародній конференції "Complex Analysis and Related Topics що відбулася у Львові, 23–28 вересня 2013 року ([26], а також див. нижче Гіпотеза 2.1). Гіпотеза полягає в існуванні такого ряду Тейлора-Діріхле загального вигляду, що нерівність

$$F(x) > (1 + d)\mu(x, F)$$

$(x \in E)$ виконується з деяким додатним d на множині E нескінченної h-міри.

У підрозділі 2.3 розділу 2 одержано нові умови, які забезпечують існування центрального індекса $\nu(x, F)$ для кожної функції F з класу $S(\lambda, \beta, \tau)$ збіжних для всіх $x \geq 0$ додатних рядів Тейлора-Діріхле вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad b_n \geq 0 \ (n \geq 0), \tag{1}$$

де $\tau\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ – неспадна функція, $\lambda = (\lambda_n)$ і $\beta = (\beta_n)$ – невід'ємні послідовності. За допомогою даного твердження про нові умови існування центрального індексу, у цьому розділі за слабших умов, ніж в Теоремі 2 з [29] про асимпототичну рівність суми ряду Тейлора-Діріхле і його максимального члена, доведено її новий і дещо загальніший варіант. Власне, новим місцем у доведенні цього варіанту теореми якраз і є послаблення умов, що гарантують існування центрального індекса $\nu(x, F)$. Замінити всі умови, що гарантують його існування, просто умовою існування, через особливості методу доведення

основної частини теореми, автору не вдалося. Але твердження теореми мабуть є правильним і в цьому загальному випадку. У цьому полягає наша гіпотеза.

У 2.4 підрозділі розділу 2 розглянуто нерівність між абсцисами існування максимального члена ряду Тейлора-Діріхле і відповідного до нього ряду Діріхле. Доведено кілька простих співвідношень між різними абсцисами збіжностей.

У підрозділі 3.1 розділу 3 знайдено певні умови на зростання вздовж точок послідовності (λ_n) правосторонньої похідної логарифма функції f_0 за якою побудовано функціональний ряд

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_0(\beta_n + x),$$

що забезпечують виконання асмптотичного співвідношення типу Бореля між логарифмами суми $F_0(x)$ ряду і максимального члена $\mu_{F_0}(x)$ при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега. Дане твердження в даному частковому випадку є відповіддю на питання М.М. Шеремети, яка в певному сенсі є контроверсією до його загальної гіпотези.

У підрозділі 3.2 розділу 3 розглядається клас рядів із додатних функцій вигляду $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f(x\lambda_k)$, які збігаються для всіх $x \geq 0$. Зазначимо, що ці два щойно згадані ряди розглядаються за одного і того ж припущення про додатність функційf_0, f, і опуклість їхніх логарифмів. При цьому асимптотичні співвідношення, що доводяться, виконуються для обидвох типів рядів також зовні множин скінченної міри Лебега. Якщо результати, отримані в такому випадку для рядів, побудованих за функцією f_0, після перепозначень, інтерпретувати їх для рядів f, побудованих за функцією f, то ми отримаємо, що

відповідне твердження виконуватиметься для цих останніх рядів за слабшої умови логарифмічної опуклості логарифма від функції f. Проте, описання виняткової множини в цьому випадку виглядатиме як скінченність її логарифмічної міри, що є слабшим за скінченність її міри Лебега.

У підрозділі 3.2 розділу 3 також, зокрема, встановлено умову, за якої всі три ряди:

$$F, \quad B^{\pm}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{\pm 1} f(x\lambda_n)$$

є одночасно збіжними на невід'ємному дійсному промені.

Основний результат підрозділу 3.2 міститься в доведеній в ньому теоремі про стійкість (логарифма) максимального члена ряду при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега.

У підрозділі 3.3 розділу 3 також йдеться про аналог вже згадуваного у підрозділі 3.1 співвідношення типу Бореля, але цього разу воно розглядається для деяких додатних інтегралів. Зокрема, у цьому розділі дається позитивна відповідь на припущення О.Б. Скасківа ([6, Conjecture 1]). Власне, доведено, що за умови

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty$$

з $\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 : (\ln f(u))' \leq t\}$, де ν – локально скінченна міра, для кожної функції $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ зображуваної інтегралом вигляду

$$F(x) = \int_0^{+\infty} a(t) f(x+t) \nu(dt)$$

(f додатна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція така, що $f(0) = 1$ і $\ln f(x)$ опукла на інтервалі $[0, +\infty)$) існує множина E скінченної Лебегової міри така, що асимптотичне співвідно-

шення

$$\ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$$

виконується при $x \to +\infty$, $x \notin E$, де $\mu(x, F) = \sup\{a(t)f(x+t) : x \in \operatorname{supp} \nu\}$ і $\operatorname{supp} \nu$ є носієм міри ν.

Також в підрозділі 3.3 розділу 3 доведено результат, який стосується стійкості максимального члена ряду з класу функцій $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\lambda_n + x), \qquad a_n \geq 0 \quad (n \geq 0).$$

В наступних підрозділах розглянуто також співвідношення типу Бореля, а також нерівніть Вімана для рядів Діріхле.

Ключові слова: ряд Діріхле, ряди Тейлора-Діріхле, гаусові випадкові величини, абсциса збіжності, абсциса абсолютної збіжності, абсциса існування максимального члена, аналітична функція, максимум модуля, максимальний член, співвідношення типу Бореля, стійкість максимального члена ряду.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Боднарчук А.Ю., Куриляк М.Р., Скасків О.Б. *Про абсцису існування максимального члена випадкових рядів Діріхле з довільними додатними показниками* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2022. – Т.94. – С. 79–88. (входить до категорії Б наукових фахових видань України) http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.94.079-088
2. Bodnarchuk A.Yu., Gal' Yu.M., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton type theorem for Taylor-Dirichlet series* // Matematychni Studii, V. 61, no. 1 (2024). P. 109-112. (Scopus, Q2) http://doi.org/10.30970/ms.61.1.109-112
3. Skaskiv O.B., Bodnarchuk A. Yu. *On the sum and maximal term of Taylor-Dirichlet type series.* Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Chyslo, 19(73), 2024. P. 41–46. (входить до категорії Б наукових фахових видань України) https://doi.org/10.31471/2304-7399-2024-19(73)-41-46
4. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *Trusevych, O. About Borel type relation for some positive functional series.* Matematychni Studii, 63(1), 98-101. T. 63, No. 1 (2025). P. 98-101. (Scopus, Q2) https://doi.org/10.30970/ms.63.1.98-101
5. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functi-*

ons. Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Chyslo, 20(76), 15-23. 2025, P. 15-23. (входить до категорії Б наукових фахових видань України) https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20(76)-15-23

6. A. Bodnarchuk, T. Salo, O. Skaskiv. Laplace-Stielthjes type integrals: the Borel relation and the h-measure of an exceptional set. Visnyk of the Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 2026. V.98, pp. 192–197. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2026.98.192-197 (входить до категорії Б наукових фахових видань України)

Список публікацій, які додатково відображають результати дисертації

7. Bandura A.I., Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *About Borel type relation for some positive integrals.* Altay Conference Proceedings in Mathematics, **2** (2025), No. 1, pp. 40-47. https://doi.org/10.64700/altay.20
8. Bodnarchuk A.Yu., Kuryliak M.R. *On the sharpness of the Hayman-type analogue of the Wiman inequality for entire Dirichlet series*, Mat. Stud., **66** (2026), no.1, 30–34. (Scopus, Q2) https://doi.org/10.30970/ms.66.1.30-34

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series*. Intern. Conf. Young Mathematicians. IM NASU, June 4-6, 2025, Kyiv, Ukraine

2. Bodnarchuk A.Yu., Dolynyuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. International workshop on modern problems of analysis, optimization, approximation and their applications. June 25-27, 2025. Abstracts. – Rome, 2025. – P. 19-21.
3. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series*. International conference "Complex and hypercomplex analysis and their applications". August 6-10, 2025. Abstracts. – Zhytomyr, 2025. – P. 7-8.
4. Боднарчук А.Ю., Куриляк М.Р., Скасків О.Б. *Про абсциси збіжності випадкових гаусових рядів Діріхле*. Міжнародна конференція присвячена 75-й річниці від дня народження Володимира Маслюченка. 25-27 вересня, 2025. Тези доповідей. – Чернівці, 2025. – С. 17-18.
5. Боднарчук А.Ю., Куриляк М.Р., Скасків О.Б. *Про абсциси збіжності випадкових гаусових рядів Діріхле*. Achievements of 21st Century Scientific Community: Proceedings of the 3rd International Scientific and Practical Internet Conference. Вересень 18-19, 2025. Abstracts. – Dnipro, Ukraine, 2025. – P. 73-74.
6. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. 5 Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Recent Trends in Science»". Травень 14-15, 2026. – Дніпро, Україна. – С. 7-9.
7. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. Conference of Young Mathematicians. The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of

Ukraine June 3-5, 2026, Kyiv, Ukraine

8. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та суміжні питання» з нагоди 70-річчя професора Анатолія Романюка. Червень 17-21, 2026. – Світязь, Волинська область, Україна.

ABSTRACT

Bodnarchuk A.Yu. *Asymptotic properties of Taylor-Dirichlet series.* — Qualification Scientific Work (Manuscript).

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 111 "Mathematics" (field of knowledge 11 — Mathematics and statistics). — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2026.

The thesis consists of an introduction, 3 chapters, conclusions, references and appendix A. The introduction consists of the relevance of research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods. The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

Functional series arise naturally in various branches of mathematics as an effective research tool for the analyst. Initially serving as a tool for computational practice, they evolved over subsequent decades into a fundamental component of mathematical analysis in the broad sense of the term. Writings by many renowned mathematicians suggest that functional analysis emerged from the process of deepening and systematizing theoretical constructs based on functional series—such as power series, trigonometric series, and others. The remarkable properties of polynomials in general, as well as specific sequences of them, underpinned many mathematical achievements prior to the 20th century. In particular, polynomial sequences proved to be effective tools for interpolation problems because they (e.g., Lagrange or Newton interpolation polynomials) yield exact solutions based on a finite set of

nodes. It is logical to attempt to extend this approach to the case of an infinite sequence of nodes. This gives rise to sequences of interpolation polynomials constructed from finite subsets of the initial sequence terms. Consequently, a number of fundamental questions immediately arise: the convergence of polynomial sequences, and the specific classes of functions that can be reconstructed from such sequences (and by which specific types). For instance, even a question that appears simple at first glance, such as reconstructing an infinitely differentiable real-valued function from its values and the values of its derivatives at a single point (which leads to the concept of the Maclaurin or Taylor series), yields highly nontrivial answers when formulated this way. A rigorous justification for the convergence of such series (and specifically for their convergence to the very functions used to construct them) was developed relatively late; nevertheless, these studies significantly influenced the development of analysis as a whole. In particular, the work of Weierstrass and his contemporaries laid the foundation for defining analytic functions via power series (Taylor series), which became a key tool for studying transcendental functions, including elementary ones. Dirichlet series, commonly viewed as a natural generalization of power series, are also widely used to analyze the properties of analytic solutions to differential equations; this is because the general solution to a linear differential equation of finite order with simple (non-multiple) eigenvalues is an exponential polynomial, whereas for an equation of infinite order (under similar assumptions) it is a Dirichlet series. In the case of multiple eigenvalues, Taylor-Dirichlet series arise in a similar manner. The main new results of this work concern the study of the behavior of the Taylor–Dirichlet functional series at infinity wi-

th respect to the behavior of the maximum term of this series. The main new results of the work concern the study of the behavior of Taylor–Dirichlet-type functional series at infinity in relation to the behavior of the series' maximum term. The paper examines asymptotic relations between the aforementioned functional series and its maximum term, of the form

$$F(x) = (1 + o(1))\mu(x, F), \quad x \to +\infty \quad (x \notin E),$$

as well as Borel-type relations

$$F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F), \quad x \to +\infty \quad (x \notin E),$$

where E is a certain (exceptional) set.

Section 2.2 of chapter 2 of this paper provides a partial answer to the hypothesis formulated at the international conference "Complex Analysis and Related Topics," held in Lviv on September 23–28, 2013. This conjecture concerns the relation of the form $F(x) > (1 + d)\mu(x, F)$, $x \to +\infty$, $(x \in E)$ for Taylor–Dirichlet series, where E is some set.

Subsection 2.2 of this work provides a partial answer to a hypothesis formulated by Prof. O.B. Skaskiv at the international conference "Complex Analysis and Related Topics,"held in Lviv on September 23–28, 2013 ([26]; see also Conjecture 2.1 below). The hypothesis concerns the existence of a Taylor-Dirichlet series of a general form such that the inequality $F(x) > (1 + d)\mu(x, F)$ $(x \in E)$ holds for some positive d on a set E of infinite h-measure.

Subsection 2.3 of this work establishes new conditions ensuring the existence of a central index $\nu(x, F)$ for every function F belonging to the class $S(\lambda, \beta, \tau)$ of positive Taylor-Dirichlet series

of the form

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad b_n \geq 0 \ (n \geq 0), \tag{2}$$

convergent for all $x \geq 0$, where $\tau\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ is a non-decreasing function, and $\lambda = (\lambda_n)$ and $\beta = (\beta_n)$ are non-negative sequences. Using the aforementioned statement regarding the new conditions for the existence of the central index, this section presents a proof of a new and somewhat more general version of the theorem concerning the asymptotic equality between the sum of a Taylor-Dirichlet series and its maximum term—doing so under weaker conditions than those found in Theorem 2 of [29]. Specifically, the novel aspect of this proof lies in the relaxation of the conditions guaranteeing the existence of the central index $\nu(x, F)$. The author was unable to replace all the conditions guaranteeing its existence with a simple existence condition, due to the specific nature of the method used to prove the main part of the theorem; nevertheless, the theorem's assertion likely holds true in this general case as well. This is our conjecture.

Subsection 2.4 of Section 2 examines the inequality between the abscissae of existence of the maximal term of a Taylor–Dirichlet series and a certain corresponding Dirichlet series. Several simple relations between various abscissas of convergence are proved.

In Subsection 3.1 of Section 3, specific growth conditions are identified for the right-hand derivative of the logarithm of a function f_0—used to construct the functional series $F_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_0(\beta_n + x)$, that ensure an asymptotic relation of the Borel type holds between the logarithms of the series sum $F_0(x)$ and its maximum term $\mu_{F_0}(x)$ as $x \to +\infty$, outside a set of finite Lebesgue

measure. In this particular case, the result answers a question posed by M.M. Sheremeta and, in a sense, stands in contrast to his general hypothesis.

Subsection 3.2 of Section 3 examines a class of series of positive functions of the form $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f(x\lambda_k)$ that converge for all $x \geq 0$. It should be noted that both series discussed here are considered under the same assumptions regarding the positivity of the functions f_0 and f and the convexity of their logarithms. Furthermore, the asymptotic relations established for both types of series hold outside sets of finite Lebesgue measure. If the results obtained for series constructed using the function f_0 are reinterpreted—following appropriate relabeling—for series constructed using the function f, we find that the corresponding statement holds for the latter series under the weaker condition of logarithmic convexity of the logarithm of f. However, the description of the exceptional set in this case involves the finiteness of its logarithmic measure, a condition weaker than the finiteness of its Lebesgue measure.

Specifically, the subsection 3.2 establishes a condition under which all three series: F and $B^{\pm} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{\pm 1} f(x\lambda_n)$ are convergent simultaneously on the non-negative real semi-axis. The main result of subsection 3.2 is formulated in a theorem regarding the stability of the (logarithm of the) maximum term of the series as $x \to +\infty$, outside a certain set of finite Lebesgue measure.

Section 3.3 of chapter 3 deals with the Borel-type relation already mentioned in section 3.1, but this time it is considered for certain positive integrals. In particular, this section provides a positive answer to Conjecture 1 from [6]. Specifically, it is proven that if $\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty$ with $\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 : (\ln f(u))' \leq t\}$,

where ν is a locally finite measure, for every function $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mapped by an integral of the form $F(x) = \int_0^{+\infty} a(t)f(x+t)\nu(dt)$ (f is a positive function increasing to $+\infty$ on $[0, +\infty)$ such that $f(0) = 1$ and $\ln f(x)$ is a convex function on the interval $[0, +\infty)$) there exists a set E of finite Lebesgue measure such that the asymptotic relation $\ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$ holds as $x \to +\infty$, $x \notin E$, where $\mu(x, F) = \sup\{a(t)f(x+t) : x \in \operatorname{supp} \nu\}$ and $\operatorname{supp} \nu$ is the support of the measure ν.

Subsection 3.3 of Section 3 also discusses an analogue of the Borel-type relation already mentioned in Subsection 3.1, though here it is considered for certain positive integrals. Specifically, this section provides an affirmative answer to a conjecture by O.B. Skaskiv ([6, Conjecture 1]). Indeed, it is proven that under the condition

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty$$

(where $\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 : (\ln f(u))' \leq t\}$ and ν is a locally finite measure), for every function $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ representable as an integral of the form

$$F(x) = \int_0^{+\infty} a(t)f(x+t)\nu(dt)$$

(where f is a positive function increasing to $+\infty$ on $[0, +\infty)$ such that $f(0) = 1$ and $\ln f(x)$ is convex on the interval $[0, +\infty)$), there exists a set E of finite Lebesgue measure such that the asymptotic relation

$$\ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$$

holds as $x \to +\infty$ ($x \notin E$), where $\mu(x, F) = \sup\{a(t)f(x+t) : x \in \operatorname{supp} \nu\}$ and $\operatorname{supp} \nu$ is the support of the measure ν. Subsection 3.3 of Section 3 also establishes a result concerning the stability of

the maximum term of a series belonging to the class of functions $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ of the form $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\lambda_n + x)$, where $a_n \geq 0$ $(n \geq 0)$.

The following subsections also examine Borel-type relations and the Wiman inequality for Dirichlet series.

Keywords: Dirichlet series, Taylor-Dirichlet series, Gaussian random variables, convergence abscissa, absolute convergence abscissa, existence abscissa of the maximum term, analytic function, maximum modulus, maximum term, Borel-type relation, stability of the maximum term of a series.

LIST OF PUBLICATIONS ON THE THESIS TOPIC

Scientific papers in which the main scientific results of the dissertation are published

1. Bodnarchuk A.Yu., Kuryliak M.R., Skaskiv O.B. *On the abscissa of existence of the maximum term of random Dirichlet series with arbitrary positive exponents* // Visnyk of the Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 2022. V.94, pp. 79–88 (is included in Category B of Ukraine's specialized scientific journals) http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.94.079-088
2. Bodnarchuk A.Yu., Gal' Yu.M., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton type theorem for Taylor-Dirichlet series* // Matematychni Studii, V. 61, no. 1 (2024). P. 109-112. (Scopus, Q2) http://doi.org/10.30970/ms.61.1.109-112
3. Skaskiv O.B., Bodnarchuk A. Yu. *On the sum and maximal term of Taylor-Dirichlet type series.* Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Chyslo, 19(73), 2024. P.

41–46. (is included in Category B of Ukraine's specialized scientific journals)
https://doi.org/10.31471/2304-7399-2024-19(73)-41-46

4. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *Trusevych, O. About Borel type relation for some positive functional series.* Matematychni Studii, 63(1), 98-101. T. 63, No. 1 (2025). P. 98-101. (Scopus, Q2)
https://doi.org/10.30970/ms.63.1.98-101
5. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions.* Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Chyslo, 20(76), 15-23. 2025, P. 15-23. (is included in Category B of Ukraine's specialized scientific journals)
https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20(76)-15-23
6. A. Bodnarchuk, T. Salo, O. Skaskiv, Laplace-Stieltjes type integrals: the Borel relation and the h-measure of an exceptional set. Visnyk of the Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 2026. V.98, pp. 192–197. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2026.98.192-197 (is included in Category B of Ukraine's specialized scientific journals)

Publications
Further Reflecting the Results of the Dissertation

7. Bandura A.I., Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *About Borel type relation for some positive integrals.* Altay Conference Proceedings in Mathematics, **2** (2025), No. 1, pp. 40-47.
https://doi.org/10.64700/altay.20

8. Bodnarchuk A.Yu., Kuryliak M.R. *On the sharpness of the Hayman-type analogue of the Wiman inequality for entire Dirichlet series*, Mat. Stud., **66** (2026), no.1, 38–42. (Scopus, Q2) https://doi.org/10.30970/ms.66.1.30-34

List of Publications Confirming the Approbation of Dissertation Materials

1. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series*. International Conference of Young Mathematicians. The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine June 4-6, 2025, Kyiv, Ukraine
2. Bodnarchuk A.Yu., Dolynyuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. International workshop on modern problems of analysis, optimization, approximation and their applications. June 25-27, 2025. Abstracts. – Rome, 2025. – P. 19-21.
3. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series*. International conference "Complex and hypercomplex analysis and their applications". August 6-10, 2025. Abstracts. – Zhytomyr, 2025. – P. 7-8.
4. Bodnarchuk A.Yu., Kyruliak M.R., Skaskiv O.B. *On the abscissas of convergence of random gaussian Dirichlet series*. International conference dedicated to 75th anniversary of the birthday of Volodymyr Masliuchenko. September 25-27, 2025. Abstracts. – Chernivci, 2025. – P. 17-18.
5. Bodnarchuk A.Yu., Kuryliak M.R., Skaskiv O.B. *On the abscissas of convergence of random gaussian Dirichlet series*. Achi-

evements of 21st Century Scientific Community: Proceedings of the 3rd International Scientific and Practical Internet Conference. September 18-19, 2025. Abstracts. – Dnipro, Ukraine, 2025. – P. 73-74.

6. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. 5th International Scientific and Practical Internet Conference «Recent Trends in Science». May 14-15, 2026. – Dnipro, Ukraine. – C. 7-9.
7. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. Conference of Young Mathematicians. The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine June 3-5, 2026, Kyiv, Ukraine
8. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. International Conference "Theory of Function Approximation and Related Topics" in honor of Professor Anatoliy Romanyuk's 70th birthday. June 17–21, 2026. — Svitiaz, Volyn Oblast, Ukraine.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ 2

ABSTRACT 12

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ 24

ВСТУП 27

РОЗДІЛ 1. ВИХІДНІ ПОЛОЖЕННЯ, ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНІ НАПРЯМКИ ДОСЛІДЖЕННЯ 41

1.1 Огляд відомих результатів, які належать до тематики дисертаційного дослідження 41

1.2 Основні напрямки та результати досліджень 53

1.2.1 Про h-міру виняткової множини у теоремі типу Фентона для рядів Тейлора-Діріхле 53

1.2.2 Про суму і максимальний член ряду Тейлора-Діріхле 54

1.2.3 Про абсциси існування максимального члена двох класів функціональних рядів 55

1.2.4 Про співвідношення типу Бореля для деяких додатних функціональних рядів 56

1.2.5 Про стійкість максимального члена функціонального ряду за системою функцій 58

1.2.6 Про співвідношеня типу Бореля для деяких додатних інтегралів . 60

1.2.7 Інтеграли типу Лапласа-Стілт'єса: співвідношення Бореля і h-міра виняткової множини 62

1.2.8 Точність нерівності Шеремети для цілих рядів Діріхле 64

РОЗДІЛ 2. РЯДИ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ 67

2.1 Про h-міру виняткової множини у теоремі типу Фентона для рядів Тейлора-Діріхле 67

2.1.1 Часткова відповідь на гіпотезу з міжнародної конференції 68

2.1.2 Відкриті проблеми і гіпотези 72

2.2 Про суму і максимальний член ряду Тейлора-Діріхле 72

2.2.1 Нові умови існування центрального індекса 74

2.3 Про абсцису існування максимального члена двох класів функціональних рядів 79

2.4 Висновки до розділу 2 86

РОЗДІЛ 3. РЕГУЛЯРНО ЗБІЖНІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ 88
3.1 Про сіппвідношення типу Бореля для деяких додатних функціональних рядів 88
3.1.1 Теорема про співвідношення типу Бореля 90
3.2 Про стійкість максимального члена функціонального ряду за системою функцій 97
3.2.1 Стійкість максимального члена ряду 102
3.3 Про співвідношення типу Бореля для деяких додатних інтегралів .. 106
3.3.1 Головний результат: Співвідношення типу Бореля 111
3.3.2 Наслідок: Стійкість максимального члена 114
3.4 Інтеграли типу Лапласа-Стілт'єса: співвідношення Бореля і h-міра виняткової множини 117
3.5 Точність нерівності Шеремети для цілих рядів Діріхле 123
3.5.1 Нерівність Вімана і ряди Діріхле 125
3.6 Висновки до розділу 3 129

ВИСНОВКИ 130

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 131

ДОДАТОК А 139

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ — множина натуральних чисел;
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — множина дійсних чисел; $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$;
- $\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел;
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — ймовірнісний простір;
- $\mathbf{f} = \big(f_k\big)_{k=0}^{+\infty}$ — послідовність комплекснозначних випадкових величин;
- $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{+\infty}$ — послідовність невід'ємних дійсних попарно різних випадкових величин;
- $\mathcal{D}(\Lambda)$ — клас формальних рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k e^{z\lambda_k};$$

- $\mathcal{TD}(\Lambda, \beta, \tau)$ — клас формальних рядів Тейлора-Діріхле вигляду

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{x\lambda_k + \tau(x)\beta_k}$$

  таких, що абсолютно збіжні;
- $S(\lambda, \beta, \tau)$ – клас збіжних рядів Тейлора-Діріхле вигляду

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{x\lambda_k + \tau(x)\beta_k}$$

- $\mu(x, F) = \max\{|a_k| e^{x\lambda_k + \tau(x)\beta_k} : k \in \mathbb{Z}_+\}$ – максимальний член ряду Тейлора-Діріхле;
- $\nu(x, F) = \max\{k \in \mathbb{Z}_+ : |a_k| e^{x\lambda_k + \tau(x)\beta_k} = \mu(x, F)\}$ – центральний індекс ряду Тейлора-Діріхле;
- $\Pi_x := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z < x\}$ — півплощина комплексної площини $\mathbb{C}$;
- $\sigma(F) = \sigma_a(F) := \sup\{x \colon$ ряд $F(z)$ є збіжний абсолютно в $\Pi_x\}$ — абсциса абсолютної збіжності;
- $\sigma_{\text{зб}}(F) := \sup\{x \colon$ ряд $F(z)$ є збіжний в $\Pi_x\}$ — абсциса збіжності;
- $\sigma_\mu(F) := \sup\{\sigma \colon (\forall x < \sigma)[f_k e^{x\lambda_k} \to 0,\ k \to +\infty)]\}$ — абсциса існування максимального члена ряду $F(z)$.
- $n_\lambda(t) = \sum_{\lambda_k \le t} 1$ — лічильна функція послідовності (λ_k);

- $h := \varliminf\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\ln|a_n|}{\ln n}$;
- $\alpha = \alpha(F) := \varliminf\limits_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n}$;
- $\mathbf{E}(\eta)$ — математичне сподівання випадкової величини η;
- $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}$ — максимум модуля;
- $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n\colon n \geq 0\}$ — максимальний член ряду;
- $\Gamma_f(r) = r(\ln M_f(r))'_+$, де f – трансцендентна функція;
- $L(x, f) = (\ln f(x))'_+$;
- $\mathscr{S}(f, \Lambda)$ клас додатних збіжних для всіх $x \geq 0$ функціональних рядів вигляду
$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f(x\lambda_k);$$
- $\mathscr{S}_+(f_0, \Lambda)$ клас додатних збіжних для всіх $x \geq 0$ функціональних рядів вигляду
$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f_0(x + \lambda_k),$$
таких що $a_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$, де $\Lambda = (\lambda_k)$ деяка послідовність невід'ємних чисел $\lambda_k \geq 0$ $(k \geq 0)$, $\lambda_k \neq \lambda_j$ для $k \neq j$, і f, f_0 додатні функції, такі що $\ln f(x)$ і $\ln f_0(x)$ опуклі на $[0, +\infty)$;
- $\mathscr{S}^*(f, \Lambda)$ – клас формальних рядів вигляду
$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f(x\lambda_k)$$
таких, що $a_n f(x\lambda_n) \to 0$ при $n \to +\infty$ для кожного $x \in \mathbb{R}_+$;
- L – клас додатних неперервних на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ функцій $l(t)$, таких що $l(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$;
- L^+ – підклас L такий, що $l(t) \uparrow +\infty$;
- $\mathscr{W}$ – клас функцій $w \in L^+$ таких, що
$$\int_1^{+\infty} x^{-2} w(x)\, dx < +\infty;$$
- $\mathscr{I}(\nu, f)$ – клас функцій $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ зображуваних інтегралами вигляду
$$F(x) = \int_0^{+\infty} g(t) f(tx)\, \nu(dt),$$

де ν локально скінченна міра на $\mathbb{R}_+$, g додатна ν-вимірна функція, і f додатна зростаюча до $+\infty$ функція на $[0, +\infty)$ така, що $f(0) = 1$ і $\ln f(x)$ є опукла на $[0, +\infty)$;

- $\operatorname{supp} \nu$ – носій міри ν;
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ – σ-алгебра Борелевих множин з $\mathbb{R}_+$.

В окремих підрозділах вводяться також додаткові позначення, які дійсні лише в них.

ВСТУП

Актуальність теми. Функціональні ряди природно виникають у різних розділах математики, як ефективний інструмент дослідження в руках аналітика. Власне, спрочатку як інструмент обчислювальних практик, який в подальші десятиліття перетворився на фундаментальну частину математичного аналізу в загальному рзумінні цього слова. В текстах багатьох знаменитих математиків ми зустрічаємо висловлювання про те, що функціональний аналіз виник на шляху поглиблення і систематизації теоретичних побудов, виконаних за допомогою функціональних рядів,: степеневих рядів, тригонометричних рядів, тощо. В основі багатьох досягнень математики до XX ст. стали чудові властивості як поліномів в цілому, так і багатьох їхніх послідовностей спеціального вигляду. Зокрема, послідовності поліномів виявилися ефективним інструментом в задачах інтерполяції через те, що вони (інтерполяційні поліноми Лагранжа, Ньютона і т.п.) дають точний розв'язок відповідної задачі інтерполяції за скінченною системою вузлів. Логічним виглядає спробувати рухатися таким шляхом у випадку нескінченної послідовності вузлів. При цьому виникають послідовності інтерполяційних поліномів, побудованих за скінченною множинами початкових членів послідовності. Тому, негайно виникає цілий ряд базових питань: питання збіжності послідовностей поліномів, які саме класи функцій можуть бути відновлені за послідовностями інтерполяційних поліномів (і за якими саме). Наприклад, навіть таке просте, на перший погляд, питання як відновлення безмежно диференційовної дійсної функції за її значеннями і значеннями її похі-

дних в одній і тій самій точці, що приводить до поняття ряду Мак-Лорена (Тейлора), має в такій постановці дуже нетривіальні відповіді. Строге обґрунтування збіжності таких рядів, а також збіжності саме до тих функцій, за якими відповідні функціональні ряди побудовано, було розроблено відносно пізно, проте ці дослідження істотно вплинули на розвиток аналізу в цілому. Зокрема, роботи Веєрштраса і його сучасників заклали основу для поняття аналітичної функції через степеневі ряди (ряди Тейлора), які стали інструментом вивчення трансцендентних функцій, зокрема елементарних. Ряди Діріхле, які прийнято розглядати як природне узагальнення степеневих рядів, також активно застосовуються для аналізу властивостей аналітичних розв'язків диференційних рівнянь, адже загальний розв'язок лінійного диференційного рівняння скінченного порядку з простими (некратними) власними числами є експоненційним поліномом, а нескінченного порядку за подібних припущень - ряд Діріхле. У випадку кратних власних чисел подібно виникають ряди Тейлора-Діріхле. Разом з цим обидва ці класи рядів виникають як природний об'єкт дослідження в теорії ймовірностей (твірні функції цілочисельних розподілів, характеристичні функції дискретних розподілів). А в аналітичній теорії диференційних рівнянь нескінченного порядку, поруч з рядами Діріхле, у випадку, коли твірна функція такого рівняння має кратні корені, виникають ряди Тейлора-Діріхле. Тому всі проблеми, що розглядалися в минулому і розглядаються до даного часу в математиці стосовно рядів Діріхле, є безумовно актуальними для рядів Тейлора-Діріхле. Серед основних методів дослідження відзначимо методи теорії Неванлінни, методи теорії цілих і аналітичних функцій обмеженого l-індексу, осо-

бливе місце займає класичний метод Вімана-Валірона, в основі якого лежить застосування властивостей опуклості логарифма максимального члена і неспадання центрального індексу ряду, яким дана функція задається. В подальшом у роботах А. Макінтайра, Й.В. Островського, Т. Кеварі, П. Розенблума, Р. Лондона, Ш. Стреліца, О.Б Скасків було знайдено і розвинуто підходи до отримання такого типу результатів, в основу яких покладено властивість логарифмічної опуклості логарифма максимуму модуля аналітичної функції на концентричних кругах, що є природним вичерпанням комплексної площини або круга. При цьому в цілому ряді питань цілком природно виявляється, що більшість функціональних рядів, що продемонстрували свою універсальність в найрізноманітніших математичних дослідженнях, мають властивість так званої регулярної збіжності. Останніми роками в працях М.М. Шеремети разом з співавторами відроджується давній інтерес до таких рядів, як до самостійного об'єкту дослідження. Зокрема, до регулярно збіжних рядів вигляду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(z\lambda_n)$. Розглянуті в дисертаційній роботі додатні як ряди типу Тейлора-Діріхле чи регулярно збіжні ряди вказаного вигляду, так і залежних від параметра інтегралів, які узагальнюють такі ряди, є вдалим модельним об'єктом для дослідження широкого класу регулярно збіжних функціональних рядів, у певному сенсі, продовджують, як ці щойно згадані дослідження М.М. Шеремети, так і давніші дослідження В.А. Осколкова, Б.В. Винницького, О.Б. Скасківа, Величка С.І., Трусевич О.М., Сало Т.М. Відзначимо, що до описаного класу рядів належать і класичні ряди Тейлора-Діріхле, які, наприклад, природно виникають при дослідженні лінійних однорідних диференційних рівнянь нескінченного по-

рядку, цілі характеристичні функції яких мають нескінченну кількість кратних коренів. У цьому зв'язку нагадаємо також давню відкриту проблему дослідження обмеженості l-індексу цілих розв'язків таких рівнянь. Тому, актуальність проблеми дослідження асимптотичних властивостей таких рядів нікуди не зникала, позаяк, відчувається нестача як результатів, так і результативних методів, що дозволили б істотно просунутися в дослідженні класичних проблем (таких, як щойно сформульована) для цілих функцій, що зображаються рядами з тих чи інших класів функціональних рядів.

Тематика даного дисертаційного дослідження належить до одного з центральних напрямків розвитку теорії аналітичних функцій та понад 50 років є однією з центральних тем в дослідженнях, що проводилися, зокрема, учасниками Львівського міського семінару з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті імені Івана Франка та близько 25 років учасниками семінару з теорії потенціалу та застосувань у цьому ж університеті. Неповний перелік учасників цих семінарів, які кожен у свій час проводили такі дослідження це: професори А.А. Гольдберг, М.М. Шеремета, О.Б. Скасків, Б.В. Винницький, П.В. Філевич, І.Е. Чижиков, А.І. Бандура, а також О.Е. Єременко, М.М. Хом'як, Ю.М. Галь, С. Херате, О.М. Трусевич, Т.М. Сало, Я.З. Стасюк, О.Г. Орищин, О.М. Тракало, М.Г Півкач, О.В. Зрум, О.Ю. Задорожна, Д.Ю. Зікрач, Л.О. Шаповаловська, І.Є. Овчар, С.І. Панчук, Н.Ю. Стасів, А.О. Куриляк. Серед безумовних здобутків цього періоду відзначимо розробку і адаптацію методу Вімана Валірона до потреб дослідження цілих рядів Діріхле з монотонно зростаючою до нескінченності послідовністю показників (а в подальшому

- з довільною послідовністю, зокрема, комплексних, показників). Назвемо ряд прізвищ закордонних математиків, внесик яких в описане коло питань є найбільш значним, це: A. Wiman, G. Valiron, E. Borel, W. Saxer, G. Polya, A.J. Macintyre, H. Wittich, P. Erdös, T. Kövari, W.K. Hayman, W.H.J. Fuchs, K.-G. Grosse-Erdmann, P.C. Fenton, Sh. Strelitz, A. Schumitzky, P. Lévy, J. Gopala Krishna, J. Rossi, M.M. Strumia. Дослідження функціональних рядів (степеневі ряди, ряди Діріхле, інтерполяційні ряди, ряди Тейлора-Діріхле) лежали в основі багатьох публікацій, в яких досліджувалися ті або інші класи аналітичних функцій.

У зв'язку зі сказаним вище не повинно виникати сумнівів в актуальності проведеного у дисертаційній роботі дослідження асимптотичних властивостей як рядів типу Тейлора-Діріхле.

Власне, ряди Тейлора-Діріхле природно виникають як розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами. Такі рівняння часто використовують для моделювання. Зокрема, вони описують механічні коливання (пружина, маятник без зовнішньої сили) та електричні коливання в колах. Також лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами з'являються при дослідженні експоненційного зростання або спадання: у радіоактивному розпаді або при охолодженні тіла (без зовнішнього нагріву). Загалом, математична модель розглядуваних рівнянь стосується процесів, які або затухають, або коливаються, або стабільно змінюються без зовнішнього "поштовху".

В цьому контексті варто згадати ще Ґ. Гарді і М. Ріса, які, мабуть, першими (1909) написали монографію, що стосується теорії загальних рядів Діріхле, а також Е. Хілле та J.F. Ritt,

які незалежно вперше доволі грунтовно досліджували області збіжності рядів Діріхле з комплексними показниками. Ці дослідження пізніше продовжили Mikusinski, Лунц. А зовсім недавно М.Р. Куриляк і О.Б. Скасків опублікували кілька статей, в яких знайшли повне описання областей збіжності рядів Діріхле з довільними комплексними показниками. Відзначимо, що опуклість областей абсолдютної збіжності була відома, ще Е. Хілле (1924). Успішність цього дослідження базувалася на формулі для знаходження абсциси існування максимального члена ряду Діріхле з невід'ємними показниками, доведення якої було отримано в процесі спільного дослідження диссертанта, О.Б.Скасківа і М.Р. Куриляк. Попередником цього результату була встановлена раніше лема (О.Б. Скасків, Н.Ю. Стасів) для рядів Діріхле з додатними показниками, в яких можливі точки скупчення є строго відокремлені від нуля. Не можна не згадати також про існування значної кількості монографій, присвячених як класичним рядам Діріхле, так і загальним рядам Діріхле.

Виконані в останні роки дослідження проф. М.М. Шеремети ([48]– [49], [55]), відновили інтерес до регулярно збіжних рядів вигляду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n f(z\lambda_n),$$

де λ_n – послідовність додатних зростаючих до $+\infty$ чисел, f – ціла трансцендентна функція. Такі і подібні до них ряди розглянуто у цій дисертації. Власне, мова також йде про функціональні ряди вигляду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n f(x+\lambda_n)$, де коефіцієнти $a_n \geq 0$, послідовність $\lambda_n \geq 0$ $(n \geq 0)$, а x – дійсна невід'ємна змінна (див. також [8], [6]).

Як зазвичай було до цього часу в дослідженнях різних авторів про регулярно збіжні ряди, на першому місці постає задача повного опису або характеризації областей збіжності таких рядів, зокрема і для рядів вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{\beta_n} e^{z\lambda_n},$$

де $\beta_n \in \mathbb{Z}_+$ залежно від послідовностей λ_n і β_n. До прикладу, відомо (А. О. Куриляк, М.Р. Куриляк, О.Б. Скасків, 2023), що якщо $\lambda_n = o(\beta_n)$, $n \to +\infty$, то область збіжності ряду F є внутрішністю круга радіуса R, де

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[\beta_n]{|a_n|}.$$

Поза цим кругом ряд розбіжний. Також відомо, що у випадку $\beta_n = o(\lambda_n)$, $n \to +\infty$ область збіжності ряду F є ліва півплощина. Якщо ж $\lambda_n = \beta_n$, то зх огляду на ряди Діріхле, область збіжності ряду F є область, яка має вигляд $\{z\colon |z|\exp\{\mathrm{Re}\ z\} < \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, тобто, опуклої і необмеженої вздовж променів, що парааелельні до дійсної півосі і спрямовані до $-\infty$. Цікавою проблемою є відшукання повного описання області збіжності ряду Тейлора-Діріхле F, коли послідовності λ_n і β_n пов'язані іншими співвідношеннями, наприклад таким: $m_n \le \beta\lambda_n$ $(n \ge n_0)$. В загальному це питання залишилося відкритим. Хоча і зрозуміло, що у цьому випадку області збіжності міститимуться в областях подібного вигляду $\{z\colon |z|^{\max\{1,\beta\}}\exp\{\mathrm{Re}\ z\} < \alpha\}$.

В даній дисертації в контексті рядів Тейлора-Діріхле дано відповідь (часткову) на гіпотезу, яку сформулював у 2013 р. на міжнародній конференції проф. О.Б. Скасків. Знайдено нові

умови на існування центрального індекса ряду Тейлора-Діріхле для кожного $x \geq 0$ як неспадної функції, за допомогою чого дповнено твердження Теореми 2 з [29], доведеної у 1998 р. Розглянуто ряди вигляду $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x\lambda_n)$, які є узагальненням рядів Діріхле. Доведено виконання співвідношення типу Бореля для ряду $F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_0(\beta_n + x)$, $a_n \geq 0$ $(n \geq 0)$ за певних умов поза множиною скінченної Лебегової міри. Також у двох підрозділах присвячено увагу дослідженню проблеми стійкості максимального члена подібних рядів. Наприкінці розглянуто співвідношення типу Бореля для інтеграл, які є узагальненнями, згаданих щойно рядів.

У зв'язку зі сказаним вище не повинно виникати сумнівів в актуальності проведеного у дисертаційній роботі дослідження.

Завершальна робота над дисертаційним дослідженням профінансована Національним фондом досліджень України, проєкт 2025.07/0427, «Новітні комплексно-ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь, зображених кратними випадковими рядами та інтегралами, і їх потенційні застосування».

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі теорії функцій і функціонального аналізу. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Львівського національного університету імені Івана Франка.

Дисертаційна робота є складовою частиною досліджень за

темою НДР “Нові ймовірнісно-аналітичні методи у комплексному аналізі та теорії операторів” (номер держреєстрації 0124 U 002722), а також складовою досліджень НФДУ №2025.07/0427 за темою «Новітні комплексно-ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних розв’язків диференціальних рівнянь, зображених кратними випадковими рядами та інтегралами, і їх потенційні застосування», номер держреєстрації 0126U002547.

Мета й завдання дослідження. *Мета дослідження* — дослідити асимптотичні властивості рядів Тейлора-Діріхле, співвідношення типу Бореля для рядів вигляду $F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_0(x+\beta_n)$, а також дослідити стійкість рядів вигляду $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x\lambda_n)$ та додатних інтегралів вигляду $F(x) = \int_0^{+\infty} a(t) f(t+x)\nu(dt)$.

Об’єкт дослідження: ряди Тейлора-Діріхле, функціональні ряди за системою функцій, які є узагальненням рядів Діріхле, а також деякі додатні інтеграли.

Предмет дослідження: асимптотичні властивості деяких додатних інтегралів і рядів типу Тейлора-Діріхле та функціональних рядів за системою функцій.

Завдання дослідження:

1) відшукати відповідь на гіпотезу, що стосується існування для довільних послідовностей степенів і показників, ряду Тейлора-Діріхле, h-міра виняткової множини для якого у теоремі типу Фентона є нескінченною (гіпотезу сформулював проф. О.Б. Скасківу 2013 р. на міжнародній конференції з комплексного аналізу);
2) знайти нові умови, які забезпечують асимптотичну рівність суми ряду типу Тейлора-Діріхле і його максималь-

ного члена;

3) дослідити умови на виконання співвідношення типу Бореля для деяких типів функціональних рядів за системою функцій $\{f(x\lambda_n)\}$ та $\{f(x+\lambda_n)\}$ і для додатних інтегралів, які є узагальненням таких рядів;
4) дослідити стійкість максимального члена ряду для вказаних у попередньому пункті деяких типів функціональних рядів за системою функцій .

Методи дослідження: Для розв'язання поставлених задач використовуються методи одновимірного математичного аналізу та теорії ймовірностей, а також окремі ідеї і підходи з досліджень, які виконали О.Б. Скасків, О.М. Трусевич і Н.Ю. Стасів, Д.Ю. Зікрач і О.Ю. Тарновецька.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі основні наукові результати отримані в дисертації, і які виносяться на захист, є новими. У дисертаційній роботі вперше:

1) отримано теорема, яка частково підтверджує гіпотезу, що стосується існування для довільних послідовностей степенів і показників (за додаткової умови на співвідношення між "кроками" степенів і показників), ряду Тейлора-Діріхле, h-міра виняткової множини для якого у теоремі типу Фентона є нескінченною;
2) знайдено нові умови , які забезпечують існування центрального індекса ряду і асимптотичну рівність суми ряду типу Тейлора-Діріхле та його максимального члена;
3) описано достатні умови, які потрібні для того, щоб виконувалося співвідношення типу Бореля для деяких типів

функціональних рядів за системою функцій $\{f(x\lambda_n)\}$ та $\{f(x+\lambda_n)\}$ і для додатних інтегралів, які є узагальненням таких рядів;

4) досліджено стійкість максимального члена ряду для вказаних у попередньому пункті деяких типів функціональних рядів за системою функцій.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть бути застосованими у подальших дослідженнях в теорії аналітичних функцій та в інших суміжних розділах математики, в яких виникають такі об'єкти, зокрема, в теорії випадкових аналітичних функцій.

Особистий внесок здобувача. Зі статей, виконаних у співавторстві, у дисертацію включені з повними доведеннями результати, які лише належать авторові дисертації або виконані у співавторстві і внесені до дисертації з дозволу співавторів. Доведення кількох тверджень допоміжного характеру, отриманих співавторами здобувача, а також тих, що додатково віджображають результати дисертації (але не віднесені до основних результатів дисертації), також наводяться для повноти картини у рукописі дисертації з люб'язного дозволу співавторів. У статті [1] (тут і далі нумерація за Списком публікацій автора дисертації) А.Ю. Боднарчуку належить твердження 2, твердження 3 про точну формулу для абсциси існування максимального члена ряду за припипущення лише про нгевід'ємність послідовності попарно різних показників належить всім трьом авторам в однаковій мірі, твердження 9 в однаковій мірі належить О.Б. Скасківу та М.Р. Куриляк, а всі інші твердження

належать М.Р. Куриляк.

У статті [2] А.Ю. Боднарчуку належить доведення теореми 2, О.Б. Скасківу належить постановка задачі (гіпотеза) і разом з Ю.М. Галем верифікація доведення теореми, що увійшла в дисертацію, а також формулювання нової проблеми 2 в прикінцевих пунктах статті.

У статті [3] особистим внеском здобувача є доведення кінцевого варіанту леми 2.1 про існування центрального індексу, та теореми 2.2, ідея доведення і постановка задачі – О.Б. Скасківу.

У статті [4] основна теорема 2 належить здобувачеві, твердження Corollary 1 належить здобувачеві і О.М. Трусевич в однаковій мірі, ідея-постановки задачі – О.Б. Скасківу, яка виникла в процесі аналізу співавторами проблеми проф. М.М. Шеремети (Математичні Студії, 2024).

У статті [5] особистий внесок здобувача: основний результат статті (теорема 2.1), твердження Proposition 2.1 належать здобувачу, постановка задачі – О.Б. Скасківу.

Результати статті [6], що включені у статтю з дозволу співавторів, в однаковій мірі належать А.Ю. Боднарчуку і Т.М. Сало, О.Б. Скасківу.

Результати статей [7, 8], що покликані додатково відображати результати дисертації, включені до дисертації з цією метою з дозволу співавторів, і в однаковій мірі належать всім співавторам кожної з цих двох статей.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на 8-ми міжнародних та вітчизняних наукових конференціях та під час 12-ти виступів на наукових семінарах:

1. International Conference of Young Mathematicians. The Insti-

tute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine June 4-6, 2025, Kyiv, Ukraine. (Київ, 4-6 червня 2025 року, дистанційна форма участі, усна доповідь).

2. International workshop on modern problems of analysis, optimization, approximation and their applications. June 25-27, 2025. (Рим, 25–27 червня 2025 року, дистанційна форма участі, усна доповідь).
3. International conference "Complex and hypercomplex analysis and their applications". August 6-10, 2025. (Житомир, 6–10 серпня 2025 року, очна форма участі, усна доповідь).
4. Міжнародна конференція присвячена 75-й річниці від дня народження Володимира Маслюченка. 25-27 вересня, 2025. (Чернівці, 25–27 вересня 2025 року, заочна форма участі).
5. Achievements of 21st Century Scientific Community: Proceedings of the 3rd International Scientific and Practical Internet Conference. (Дніпро, 18–19 вересня 2025 року, заочна форма участі).
6. 5-та Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Recent Trends in Science»". Травень 14-15, 2026. – Дніпро, Україна. – С. 7-9.
7. Conference of Young Mathematicians. The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine June 3-5, 2026, Kyiv, Ukraine
8. International conference “Theory of approximation and related topics” dedicated to the 70yh anniversary of the birth of Prof. F. Romanyuk (June 17-21, 2026, Svitiaz, Volyn Region, Ukraine).

9. Львівський міський семінар з теорії аналітичних функцій, керівники проф. О.Б. Скасків, проф. І.Е. Чижиков, проф. М.В. Заболоцький, проф. П.В. Філевич, (Львів, 2022–2026 роки, очна форма участі, усні доповіді).
7. Науковий семінар з теорії потенціалу та застосувань у Львівському університеті імені Івана Франка, керівники семінару проф. Скасків О., проф. Куриляк А., проф. Чижиков І. (Львів, 2022–2026 роки, очна форма участі, усні доповіді).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 15 статтях і наукових повідомленнях, з яких 4 статті в українських фахових виданнях зі списку Б), 2 статті у фаховому видання зі списку А), 2 з яких в журналі Matematychni Studii, який входить у науково-метричну базу Scopus, до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank. Крім цього дві публікації, що додатково відображають результати дисертації опубліковано в науковому періодичному виданні з математики іншої держави (Туреччина), яка входить в Організацію економічного співробітництва та розвитку (ОЕСР) та в журналі Matematychni Studii, віднесеному до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank. та 8 у тезах конференцій різного рівня.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, 3 розділів, розбитих на підрозділи, висновків, бібліографії та додатку А. Повний обсяг дисертації становить 144 сторінки. Список використаних джерел містить 59 найменувань та займає 7 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ВИХІДНІ ПОЛОЖЕННЯ, ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНІ НАПРЯМКИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У цьому розділі проведемо огляд результатів, які безпосередньо стосуються результатів дисертації та є причетними до виникнення постановок конкретних задач, що розглядаються у ній. Також наведемо огляд основних результатів дисертаційної роботи.

1.1 Огляд відомих результатів, які належать до тематики дисертаційного дослідження

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ – фіксований ймовірнісний простір, де Ω - простір елементарних подій $\mathcal{A}$ - $\sigma-$алгебра підмножин Ω, а $\mathbb{P}$ - зліченно-адитивна ймовірнісна міра визначена на $\sigma-$алгебрі $\mathcal{A}$, тобто ймовірність. Нехай також $\mathbf{f} = (f_k)_{k=0}^{+\infty}$ - послідовність комплекснозначних випадкових величин, $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{+\infty}$ - послідовність невід'ємних дійсних випадкових величин на цьому ймовірнісному просторі, причому попарно різних, тобто таких, що майже напевно (м.н.) $\lambda_s \neq \lambda_l$, якщо $s \neq l$.

Через $\mathcal{D}$ позначимо клас випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k e^{z\lambda_k},$$

де $z \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega$, таких що кожний ряд $F(z)$ з цього класу задовольняє умову: $(\forall \omega \in \Omega)(\exists x_* = x_*(F) < 0)$:

$$f_k e^{x_* \lambda_k} \to 0 \quad (k \to +\infty) \quad \text{м.н.}$$

Нехай $\Pi_x := \{z \in \mathbb{C} : Re\ z < x\}$ – півплощина комплексної

площини $\mathbb{C}$.

Позначимо абсциси збіжності випадкового ряду Діріхле $F(z)$:

$\sigma_a(F) := \sup\{x : \text{ряд } F(z) \text{ є збіжний абсолютно в } \Pi_x\}$;

$\sigma_{\text{зб}}(F) := \sup\{x : \text{ряд } F(z) \text{ є збіжний в } \Pi_x\}$;

$\sigma_\mu(F) := \sup\{\sigma\colon (\forall x < \sigma)[f_k e^{x\lambda_k} \to 0,\ k \to +\infty)]\}$ - абсциса існування максимального члена ряду $F(z)$.

Максимальний член ряду $F(z)$ позначаємо

$$\mu(x, F) := \sup\{|f_k|e^{x\lambda_k} :\ k \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Відомо (див., наприклад, [16, 21, 35, 45]), що у випадку, коли послідовність показників $\Lambda = (\lambda_k)$, $\lambda_k \equiv \lambda_k$ є монотонно зростаючою до нескінченності послідовністю, тобто, $\lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty$, $0 \le k \uparrow +\infty$ і

$$\tau(\Lambda) := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = 0,$$

то за теоремою Валірона

$$\sigma(F) = \sigma_{\text{зб}}(F) = \alpha_0(F) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{\ln |a_k|}{\lambda_k}$$

для ряду Діріхле з детермінованою послідовністю коефіцієнтів $f_k \equiv a_k$. Зазначимо, що у цьому випадку нескладно перевірити, що $\alpha_0(F) = \sigma_\mu(F)$, тому $\sigma(F) = \sigma_{\text{зб}}(F) = \alpha_0(F) = \sigma_\mu(F)$. У загальному випадку

$$\sigma(F) \le \sigma_{\text{зб}}(F) \le \sigma_\mu(F) \le \sigma(F) + \tau.$$

Існують ряди Діріхле (див., наприклад, [16, 44]), для яких досягаються всі рівності в останній потрійній нерівності. Власне, існують три ряди Діріхле $F_1,\ F_2,\ F_3$ такі, що $\sigma(F_1) = \sigma_\mu(F_1),\ \sigma_{\text{зб}}(F_2) = \sigma_\mu(F_2),\ \sigma_\mu(F_3) = \sigma(F_3) + \tau$.

У праці [44] в теоремі А розглянуто нерівності типу

$$\sigma_a(F) \le \sigma_c(F) \le \beta(F) \le \sigma_a + \tau(\lambda),$$

де $\beta(F) = \sup\{\sigma \in \mathbb{R} : |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = o(1),\ n \to +\infty\}$ вказує на абсцису існування максимального члена ряду Діріхле F ($\sigma_a(F)$ – абсциса абсолютної збіжності ряду F, $\sigma_c(F)$ – абсциса збіжності ряду F, $\tau(\lambda) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}$). Більше цього, у цьому ж джерелі доведено, що для довільних a, b і $c \in [-\infty, +\infty]$ таких що

$$a \le c \le b \le a + \tau(\lambda)$$

існує ряд Діріхле $F \in S(\lambda)$, для якого $\sigma_a(F) = a$, $\sigma_c(F) = c$ і $\beta(F) = b$, де $S(\lambda)$ позначає ряд Діріхле вигляду $F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{s\lambda_n}$, $s = \sigma + it$.

Для ряду Діріхле у згаданій роботі також доведено нерівності

$$\sigma_a(F) \le \frac{\sigma_a(F) + \beta(F)}{2} \le \sigma_a(G) \le \min\left\{\sigma_a\left(F + \frac{\tau(\lambda)}{2}\right), \beta(F)\right\},$$

де $G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 e^{2s\lambda_n}$. Вказано також, що існує послідовність комплексних чисел (a_n) така, що для рядів F та G виконуються нерівності

$$a \le \frac{a+b}{2} \le c \le \min\left\{a + \frac{\tau(\lambda)}{2}, b\right\},$$

де $\sigma_a(F) = a$, $\sigma_a(G) = c$ і $\beta(F) = b$.

У статті [35, с. 98] ряд нерівностей (1.1) доповнено. Там ми знаходимо наступне: для ряду $F \in \mathcal{D}$

$$\sigma(F) \le \sigma_u(F) \le \sigma_b(F) \le \sigma_{\text{зб}}(F) \le \sigma_\mu(F),$$

де $\sigma(F)$ – абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле F, $\sigma_u(F)$

– абсциса рівномірної збіжності ряду F, $\sigma_b(F)$ – абсциса обмеженості ряду F, $\sigma_{\text{зб}}(F)$ – абсциса збіжності ряду F. Символ $\mathcal{D} = \cup_\Lambda \mathcal{D}(\Lambda)$, де $\mathcal{D}(\Lambda)$ – клас формальних випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k e^{z\lambda_k},\ z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega,$$

що при фіксованому $\omega = \omega_0$ є звичайним (детермінованим) рядом Діріхле.

У цій же праці ([35]) автори розмістили наступне твердження: якщо $F \in \mathcal{D}$ і $\tau(\Lambda) = \overline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = 0$ або $\ln k = o(\ln |f_k|)$, $k \to +\infty$, тоді виконується

$$\sigma_{\text{зб}}(F\omega) = \sigma(F) = \sigma_\mu(F) = \alpha_0.$$

Співвідношення між функціональним рядом та його максимальним членом на нескінченності утворює актуальне та важливе питання, яким займаються математики у своїх роботах ([10], [23]- [25], [29] та ін.). У роботі [10] зокрема автори розглядають таке співвідношення щодо цілої функції, представленої регулярно збіжним рядом

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_n(z). \tag{1.1}$$

У згаданій роботі доведено наступне співвідношення: для цілої функції F

$$F(z) = a_\nu \varphi_\nu(z) + O(\mu(\alpha))$$

за умови $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} < +\infty$ при $\alpha \to +\infty$ зовні множини скінченної h-міри рівномірно по G_α, де $\nu = \nu(\alpha)$ – централь-

ний індекс ряду (1.1), $\mu(\alpha)$ – максимальний член ряду (1.1), G_α – елемент сім'ї множин на комплексній площині, $\alpha \geq 0$ – параметр, що неперервно змінюється.

У статті [29] наводиться уточнення результату згаданого попередньо у [10].

У праці [24] доведено співвідношення, що виконується за певних умов, а саме співвідношення

$$\ln M(x, F) \geq (1 + d) \ln \mu(x, F),$$

де $M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, d – стала, $d > 0$, $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$ – цілий ряд Діріхле абсолютно збіжний в $\mathbb{C}$.

Далі, у роботі [25] доводиться теорема про співвідношення

$$F(x + iy) = (1 + o(1))a_{\nu(x,F)} e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x,F)}}$$

для всіх $F \in D(\Lambda, \Phi)$ при $x \to +\infty$ поза множиною скінченної h-міри рівномірно по $y \in \mathbb{R}$. Це співвідношення виконується за умови

$$(\forall b > 0) : \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} h'\left(\varphi(\lambda_k) + \frac{b}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}\right) < +\infty,$$

де $\Phi \in L$, $h \in L^+$ а φ – обернена функція до Φ. У теоремі клас L позначає клас додатних неперервних функцій, які зростають до $+\infty$ на $[0, +\infty)$, а L^+ – підклас L тих функцій, які диференційовні із неспадною похідною. Клас $D(\Lambda, \Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \ln \mu(x, F) \geq x\Phi(x)\ (x \geq x_0)\}$, $\Phi \in L$ і $D(\Lambda)$ – клас цілих (абсолютно збіжних у комплексній площині) рядів Діріхле вигляду $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, причому $\Lambda = (\lambda_n)$ фіксована послідовність така, що $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty\ (1 \leq n \uparrow +\infty)$.

Нехай $\mathcal{TD}(\Lambda,\beta,\tau)$ клас абсолютно збіжних для всіх $x\geq 0$ рядів Тейлора-Діріхле вигляду

$$F(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k e^{x\lambda_k+\tau(x)\beta_k} \tag{1.2}$$

таких, що $a_k\geq 0$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$; тут $\Lambda=(\lambda_k)$ деяка послідовність невід'ємних чисел $\lambda_k\geq 0$ $(k\geq 0)$, і $\beta=\big(\beta_k\big)$ також послідовність невід'ємних чисел, такі що $(\lambda_k,\beta_k)\neq(\lambda_j,\beta_j)$ для всіх $k\neq j$, тобто є різні двовимірні вектори; $\tau\colon[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ неперервно диференційовна неспадна функція. У випадку $\beta_k\equiv 0$, ми одержуємо ряд Діріхле вигляду

$$F_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k e^{x\lambda_k}, \tag{1.3}$$

який збігається для всіх $x\geq 0$, і ми запишемо $F_1\in\mathcal{D}(\Lambda)=\mathcal{TD}(\Lambda,0,\tau)$; $\mathcal{TD}:=\cup_\Lambda\cup_\beta\mathcal{TD}(\Lambda,\beta,\tau)$, $\mathcal{D}:=\cup_\Lambda\mathcal{D}(\Lambda)$. Це зрозуміло, що $\mathcal{D}\subset\mathcal{TD}$.

Для кожного $x\geq 0$ і ряду Тейлора-Діріхле $F\in\mathcal{TD}(\Lambda,\beta)$ вигляду (1.2) позначимо через $\mu(x,F)=\max\{|a_k|e^{\tau(x)\beta_k+x\lambda_k}\colon k\geq 0\}$ максимальний член ряду, а через $\nu(x,F)=\sup\{k\colon |a_k|e^{\tau(x)\beta_k+x\lambda_k}=\mu(x,F)\}$ центральний індекс ряду (1.2), відповідно; для ряду Діріхле $F_1\in\mathcal{D}(\Lambda)$ вигляду (1.3) маємо $\mu(x,F_1)=\max\{|a_k|e^{x\lambda_k}\colon k\geq 0\}$.

Легко бачити, що для кожної функції $F\in\mathcal{TD}(\Lambda,\beta)$ вигляду (1.2) існує $\nu(x,F)=\max\{k\colon |a_k|e^{\tau(x)\beta_k+x\lambda_k}=\mu(x,F)\}$, тобто, зокрема, $|a_{\nu(x,F)}|e^{\tau(x)\beta_{\nu(x,F)}+x\lambda_{\nu(x,F)}}=\mu(x,F)\}$.

У праці [29] автори Скасків О.Б. та Трусевич О.М. розглядають регулярно збіжний функціональний ряд вигляду $F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\varphi_n(z)$, у якому досліджують умови на виконання спів-

відношення між модулем суми і максимальним членом вигляду

$$M(\alpha) \sim \mu(\alpha), \quad \alpha \to +\infty,$$

де $M_F(\alpha) = \sup\{|F(z)| : z \in G_\alpha\}$, $\mu_F(\alpha) = \max_n \sup\{|a_n||\varphi_n(z)| : z \in G_\alpha\}$ – максимальний член ряду.

Зокрема у згаданій роботі знайдено необхідну та достатню умову для виконання співвідношення

$$M(x) = (1 + o(1))\mu(x), \quad x \to +\infty,$$

$x \notin E_1$, $\int_{E_1 \cap [x_0, +\infty)} dx < +\infty$ для збіжного ($x \geq x_0$) ряду $M(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n}$ із $\ln n = o(\lambda_n + \beta_n)$ та $\tau'(x) \geq 1$ ($x \geq x_0$), а саме умову

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} + \beta_{n+1} - \lambda_n - \beta_n} < +\infty$$

(тут $\mu(x) = \max\{b_n e^{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$).

Співвідношення типу Бореля досліджували математики у наступних працях: [27], [40], [41] та ін.

У статті [27] автори для кожної функції вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} \quad a_n \geq 0, \quad \lambda_n \geq 0, \quad \beta_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.4}$$

$\tau(x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ така, що $\tau'(x) \geq 1$ для $x \geq x_0$) знайшли достатні умови для виконання співвідношення

$$\ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, F), \quad x \to +\infty \tag{1.5}$$

поза множиною E нульової лінійної щільності або нижньої нульової лінійної щільності, де $\mu(x, F) = \max\{a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \in$

$\mathbb{Z}_+\}$.

Так, у [27] доведено Твердження 1 у якому йдеться про наступне. Якщо функція $\tau \in L$ (L – клас додатних неспадних до $+\infty$ функцій на $\mathbb{R}_+$), функція $\Phi \in L^+$ (L^+ – клас неперервних зростаючих до $+\infty$ функцій на $\mathbb{R}_+$), $\Phi_1(x) = x\Phi(x)$, $F \in S(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ ($S(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ – підклас класу $S(\lambda, \beta, \tau)$, в який входять функції F, для яких $\ln F(x) \leq \Phi_1(x)$, $x \geq x_0$), а $S(\lambda, \beta, \tau)$ – клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів вигляду (1.4), то співвідношення типу Бореля (1.5) справджується зовні деякої множини E нульової лінійної щільності при умові

$$\ln n_\alpha(t) = o(\psi_1^{-1}(t)) \quad (t \to +\infty), \tag{1.6}$$

де $n_\alpha(t) = \sum_{\lambda_n+\beta\leq t} 1$ – лічильна функція послідовності $\alpha_n = \lambda_n + \beta_n$, а $\psi_1(t) \in L(\Phi)$ ($L(\Phi) = \{\psi_1 \in L^+ : (\forall b > 0) \quad \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_0^{b\Phi(R)} \frac{d\psi^{-1}(x)}{x} = 0\}$).

У цій же роботі доведено Твердження 2, у якому також йдеться про співвідношення (1.5). У цьому твердженні так само $\tau \in L$, $\Phi \in L^+$, $\Phi_1(x) = x\Phi(x)$, для функції $\psi_1 \in L(\Phi)$ виконується (1.6), але $F \in \underline{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ ($\underline{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ – клас функцій $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ таких, що $(\exists x_j \uparrow +\infty)$: $\ln F(x_j) \leq \Phi_1(x_j)$, $(j \geq 1)$). Варто наголосити, що у Твердженні 2 співвідношення (1.5) справджується зовні деякої множини E нульової нижньої лінійної щільності.

У роботі [40] встановлено необхідну і достатню умову для виконання співвідношення типу Бореля, а саме

$$\ln F(\sigma) \sim \ln \mu(\sigma, F)$$

для функціональних рядів вигляду $F(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\sigma\lambda_n)$, які є збіжними для всіх $\sigma \geq 0$. Цією умовою є умова $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} <$

$+\infty$.

У праці [41] автори знайшли необхідну умову, а саме:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n(\lambda_n + \beta_n)} < +\infty$$

за якої справджується співвідношення

$$\ln F(\sigma) \sim \ln \mu(\sigma), \quad \sigma \to +\infty$$

зовні деякої множини для кожної функції вигляду $F(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\{(\sigma\lambda_n + \tau(\sigma)\beta_n)\}$, де $a_n \geq 0$ $(n \geq 0)$, $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$, $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}_+$, $\tau(\sigma)$ – фіксована додатна зростаюча функція, $\mu(\sigma) = \max\{a_n \exp\{(\sigma\lambda_n + \tau(\sigma)\beta_n)\} : n \geq 0\}$.

Стійкість максимального члена функціонального ряду досліджували автори у статтях [15], [28].

У роботі [15] розглядаються цілі кратні ряди Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z,\lambda_n)}, \quad z \in \mathbb{C}^p, \quad p \geq 1$$

з показниками, які задовольняють умову $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, ..., \lambda_{n_p}^{(p)})$, $n = (n_1, ..., n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $0 \leq \lambda_k^{(j)} \leq \lambda_{k+1}^{(j)} \to +\infty$, $(0 \leq k \to +\infty)$. Якщо неспадна функція $w : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ і $\nu_1(t) = \sum_{\|\lambda_n\| \leq t} e^{w(\|\lambda_n\|)}$, $\|a\| = a_1 + ... + a_p$, $(a, b) = a_1 b_1 + ... + a_p b_p$ для $a = (a_1, ..., a_p)$, $b = (b_1, ..., b_p) \in \mathbb{C}^p$, якщо

$$\int_1^{+\infty} t^{-1} d \ln \nu_1(t) < +\infty$$

і F_w – цілий кратний ряд Діріхле, $F_w(z) =$

$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{w(\|\lambda_n\|)+(z,\lambda_n)}$, то

$$\ln\max\left\{|a_n|e^{w(\|\lambda_n\|)+(\sigma,\lambda_n)} : n\in\mathbb{Z}_+^p\right\}\sim\ln\max\left\{|a_n|e^{(\sigma,\lambda_n)} : n\in\mathbb{Z}_+^p\right\}$$

при $|\sigma|\to+\infty$ $(\sigma\in K\setminus E)$ для кожного конуса K в $\mathbb{R}_+^p$ з вершиною в точці O такого, що $\overline{R}\setminus\{O\}\in\mathbb{R}_+^p$, а вимірна множина $E\subset\mathbb{R}_+^p$ така, що $\tau_p(E\cap K)=\int_{E\cap K}\frac{d\sigma_1\ldots d\sigma_p}{|\sigma|^{p-1}}<+\infty$.

У статті [28] автори знайшли необхідні і достатні умови для того, щоб логарифми максимального члена цілого ряду Діріхле $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{z\lambda_n}$ і максимального члена цілого ряду Діріхле $B(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n b_n e^{z\lambda_n}$ були асимптотично еквівалентними при $Re\ z\to+\infty$ зовні деякої множини скінченної міри.

Співвідношення типу Бореля вже згадувалося вище в поточному підрозділі цієї роботи. Додам, що у роботах [30] та [6] подібно авторами було розглянуто питання співвідношення типу Бореля застосоване до експоненціальних рядів у першому випадку і до функціональних рядів дещо іншого вигляду у другому.

Додатний інтеграл, такий як у цьому розділі розглядався у статті [36].

У роботі [8] автори розглянули співвідношення типу Бореля до функціональних рядів вигляду $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n f(\beta_n+x)$, де $a_n\geq 0$, β_n – невід'ємна послідовність така, що $0\leq\beta_n\uparrow+\infty$ $(0\leq n\uparrow+\infty)$, а функція f – диференційовна така, що функція $\ln f(x):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ є опукла, і її правостороння похідна $L(x,f)=(\ln f(x))'_+$ строго зростає до $+\infty$ $(x\geq x_0)$.

Розглянемо інтеграли вигляду

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(t)e^{xt}\nu(dt), \tag{1.7}$$

де ν невід'ємна міра $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ з необмеженим носієм, $a(t)$ довільна невід'ємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}_+$, $S = \operatorname{supp}\nu \cap \{x \in \mathbb{R}_+ : \ f(x) > 0\}$. Через $\mathcal{I}(\nu)$ позначимо клас функцій $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ зображуваних через інтеграли вигляду (1.7). Для $F \in \mathcal{I}(\nu)$ і $x \in \mathbb{R}$ позначимо

$$\mu_*(x, F) = \operatorname{ess\,sup}\{f(u)e^{xu} : u \in S\}.$$

У статті [37] наступна теорема була доведена.

Теорема 1.1 ([37]). *Якщо умова*

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty$$

справджується з $\nu_0(t) = \nu([0, t])$, *тоді для кожної функції* $F \in \mathcal{I}(\nu)$ *існує множина* E *скінченної Лебегової міри така, що асимптотичне співвідношення*

$$\ln F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu_*(x)$$

виконується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

Зауважимо, що умова $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty$ на послідовність показників (λ_k) виконується тоді і лише тоді, коли умова $\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty$ справджується з $\nu_0(t) = n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$ ([37, 39]).

Позначимо через $\mathcal{L}$ клас додатних неперервних функцій $\Phi\colon \mathbb{R}_+ := [0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ таких, що $\Phi(x) \nearrow +\infty$ $(0 \le x \to +\infty)$, а через $\mathcal{L}^+$ клас додатних неперервних диференційовних функцій $h(x)\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ таких, що $\int_0^{+\infty} dh(x) = +\infty$ і $1 \le h'(x) \nearrow +\infty$ $(0 \le x \nearrow +\infty)$. Позначимо через $\mathcal{L}_1$ клас функцій

$\psi \in \mathcal{L}$ таких, що $\int_{x_0}^{+\infty} dt/\psi(t) < +\infty$, $\psi(t) \geq t$ для $t \geq t_0 > 0$, а через $\mathcal{L}_2$ клас функцій $\psi \in \mathcal{L}_1$ таких, що обернена функція ψ^{-1} до функцій ψ зодовольняє умов $\psi^{-1}(uv) \leq u\psi^{-1}(v)$ $(u, v \geq 1)$. Нехай $\Phi \in \mathcal{L}$. Введемо наступний клас рядів Діріхле

$$\mathcal{D}(\lambda, \Phi) = \{F \in \mathcal{D}(\lambda): \ \ln \mu(x, F) \geq x\Phi(x) \ (x \geq x_0)\}.$$

Для вимірної за Лебегом множини $E \subset [0, +\infty)$ назвемо

$$m_h E \equiv \int_E dh(x)$$

її h-міру, при $h(x) \equiv x$ h-міра множини E її мірою Лебега.

У статті [17] наступна теорема була доведена.

Теорема 1.2 ([17]). *Нехай $h \in \mathcal{L}^+$, $\Phi \in \mathcal{L}$. Якщо функція $F \in \mathcal{D}(\lambda, \Phi)$ і число $b > 0$ таке, що*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h'((\lambda_n) + b)}{n\lambda_n} < +\infty, \tag{1.8}$$

тоді асимптотичне співвідношення $\ln M(x, F) \sim \ln \mu(x, F)$ виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної h-міри ($m_h E < +\infty$), де функція φ обернена до функції Φ.

1.2 Основні напрямки та результати досліджень

1.2.1 Про h-міру виняткової множини у теоремі типу Фентона для рядів Тейлора-Діріхле У випадку рядів Тейлора-Діріхле h-міра виняткової множини в асимптотичних співвідношеннях досліджується у підрозділі 2.2 розділу 2 цієї дисертації. Нехай $\tau\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ буде неперервно диференційовна неспадна функція, $\lambda = (\lambda_n)$ і $\beta = (\beta_n)$ будуть такі, що $\lambda_n \geq 0, \beta_n \geq 0$ $(n \geq 0)$, і $S(\lambda, \beta, \tau)$ буде клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів Тейлора-Діріхле вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad b_n \geq 0 \ (n \geq 0).$$

Для $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ та $x \geq 0$ позначимо через

$$\mu(x, F) = \max\{|a_n| e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} \colon n \geq 0\}$$

максимальний член ряду, а через

$$\nu(x, F) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 \colon |a_n| e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} = \mu(x, F)\}$$

центральний індекс у випадку, коли max існує.

Нехай

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty. \tag{1.9}$$

Доведено наступний результат.

Теорема 1.3. *Для кожної зростаючої функції $h(x)\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$, $h'(x) \nearrow +\infty$ $(x \to +\infty)$, кожної послідовності $\lambda = (\lambda_n)$ такої що умова (1.9) виконується і для кожної неспадної послідовності $\beta = (\beta_n)$ такої що $\beta_{n+1} - \beta_n \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n$ $(n \geq 0)$ існує функція $\tau(x)$ така що $\tau'(x) \geq 1$, функція $F \in S(\alpha, \beta, \tau)$,*

множина E *і* $d > 0$ *такі що* h-meas $E = +\infty$ *і*

$$(\forall x \in E): \quad F(x) > (1+d)\mu(x, F).$$

1.2.2 Про суму і максимальний член ряду Тейлора-Діріхле Умови існування центрального індекса ряду Тейлора-Діріхле досліджується у підрозділі 2.3 розділу 2 цієї дисертації. Нехай $S(\lambda, \beta, \tau)$ клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів Тейлора-Діріхле вигляду

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{x\lambda_k + \tau(x)\beta_k}$$

таких, що $a_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$; тут $\Lambda = (\lambda_k)$ деяка послідовність невід'ємних чисел $\lambda_k \geq 0$ $(k \geq 0)$, і $\beta = \big(\beta_k\big)$ також послідовність невід'ємних чисел, такі що $(\lambda_k, \beta_k) \neq (\lambda_j, \beta_j)$ для всіх $k \neq j$, тобто є різні двовимірні вектори; $\tau\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ неперервно диференційовна неспадна функція.

Виконуються наступні результати.

Лема 1.1. *Нехай* $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ *і одна із наступних чотирьох умов виконується:*

- i_1 *функція* $\tau(x)$ *неспадна, послідовність* (β_n) *неспадна і послідовність* (λ_n) *зростаюча;*
- i_2 *функція* $\tau(x)$ *зростаюча, послідовність* (β_n) *також зростаюча і послідовність* (λ_n) *неспадна;*
- ii_1 *функція* $\tau(x)$ *така що* $\tau(x+h) - \tau(x) \leq h$ $(x > 0, h > 0)$, *послідовність* $\alpha = (\lambda_n + \beta_n)$ *зростаюча і послідовність* $\lambda = (\lambda_n)$ *є неспадна;*
- ii_2 *функція* $\tau(x)$ *така що* $\tau(x+h) - \tau(x) \geq h$ $(x > 0, h > 0)$, *послідовність* $\alpha = (\lambda_n + \beta_n)$ *зростаюча і послідовність* $\beta = (\beta_n)$ *неспадна.*

Тоді центральний індекс $\nu(x, F)$ *є неспадною функцією такою, що* $\nu(x, F) < +\infty$ *для кожного* $x \geq 0$.

Нехай

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} + \beta_{n+1} - \lambda_n - \beta_n} < +\infty. \tag{1.10}$$

Теорема 1.4. *Нехай послідовність $(\lambda_n + \beta_n)$ зростаюча, послідовність $\beta = (\beta_n)$ неспадна і додатна диференційовна функція τ така що $\tau(x+h) - \tau(x) \geq h$ $(x > 0, h > 0)$. Якщо умова* (1.10) *виконується, тоді для кожної функції $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ асимптотичне співвідношення*

$$F(x) = (1 + o(1))\mu(x, F)$$

виконується $x \to +\infty$ зовні деякої множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної Лебегової міри ($\int\limits_E dx < +\infty$).

1.2.3 Про абсциси існування максимального члена двох класів функціональних рядів

Нерівність між абсцисами існування максимального члена ряду Діріхле і ряду Тейлора-Діріхле досліджується у підрозділі 2.4 розділу 2 цієї дисертації.

Розглянемо ряд Тейлора-Діріхле вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \tag{1.11}$$

де послідовності $a_n \geq 0$ нескінченно мала, $\lambda_n \geq 0$, $\beta_n \geq 0$ $(n \geq 0)$, функція $\tau(x) \geq 0$ неперервна і зростаюча $[0, +\infty)$.

Розглянемо також ряд Діріхле вигляду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x(\lambda_n + \beta_n)},$$

де послідовності a_n, λ_n і β_n такі ж як і в (1.11).

Назвемо $\sigma_\mu(F) = \sup\{\sigma \in \mathbb{R} : a_n e^{\sigma\lambda_n+\tau(\sigma)\beta_n} \to 0,\ n \to +\infty\}$ абсцисою існування максимального члена ряду F. Також $\sigma_\mu(f) = \sup\{\sigma \in \mathbb{R} : a_n e^{\sigma(\lambda_n+\beta_n)} \to 0,\ n \to +\infty\}$ – абсциса існування максимаотного члена ряду f.

Твердження 1.1. *Якщо $0 < \tau(b) \le a < b$, функція $\tau(x) < x$, $x > 0$, тоді існують невід'ємні послідовності λ_n і β_n такі, що*

$$\sigma_\mu(f) = a,\ \sigma_\mu(F) = b.$$

Наступне твердження доповнює попереднє.

Твердження 1.2. *За умов попереднього твердженняn, якщо $0 < a < \tau(b) < b$ тоді не існує послідовностей λ_n і β_n таких, що*

$$\sigma_\mu(f) = a,\ \sigma_\mu(F) = b,$$

де послідовність a_n довільна і функція $\tau(x) < x$, $x > 0$ довільна.

Якщо упустити умову на довільність послідовності a_n і якщо упустити умову на довільність вибору функції $\tau(x)$, $\tau(x) < x$, $x > 0$, тоді можливо отримати нерівність $0 < a < b$. Наступне твердження стосується цього факту.

Твердження 1.3. *Якщо $0 < a < b$, $a_n = \exp\left(-\frac{a+b}{b}n\right)$, $\lambda_n = \frac{n}{b}$, $\beta_n = \frac{n}{a}$ і $\tau(x) = \frac{a^2}{b\ln(b+1)}\ln(x+1)$, тоді*

$$\sigma_\mu(f) = a,\ \sigma_\mu(F) = b.$$

Зауваження 1.1. *Умова $\tau(x) \le x$ виконується для всіх $x \ge x_0 \ge 0$, коли число a достатньо велике і число b не є достатньо велике, оскільки функція $\tau(x) = \frac{a^2}{b\ln(b+1)}\ln(x+1)$.*

1.2.4 Про співвідношення типу Бореля для деяких додатних функціональних рядів

Співвідношення типу Бореля досліджується у підрозділі 3.1

розділу 3 цієї дисертації. Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ неспадна до $+\infty$ послідовність. Розглядаємо ряди вигляду

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\lambda_n x), \quad a_n \geq 0 \ (n \geq 0), \tag{1.12}$$

та інтеграли вигляду $\int_0^{+\infty} a(t) f(tx) \nu(dt)$, які є узагальненням таких рядів, де f додатна функція на $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, така що функція $y = \ln f(x) \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ опукла функція на $\mathbb{R}_+$, $\mu(x, F) = \max\{a_n f(x\lambda_n) \colon n \geq 0\}$.

Одержано наступні результати.

Теорема 1.5. *Нехай $f_0 \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ диференційовна функція, така що функція $y = \ln f_0(x) \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ є опукла і правостороння похідна*

$$L(x, f_0) := (\ln f_0(x))'_+ \uparrow +\infty \quad (x \geq x_0);$$

(β_n) невід'ємна послідовність, така що $0 \leq \beta_n \uparrow +\infty$ $(0 \leq n \uparrow +\infty)$. Якщо функція F_0 зображена на $(0, +\infty)$ рядом вигляду

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_0(\beta_n + x), \quad a_n \geq 0 \ (n \geq 0),$$

і умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nL(\beta_n, f_0)} < +\infty$$

виконується, то існує множина $E \subset (0, +\infty)$ скінченної Лебегової міри, така що асимптотичне співвідношення

$$\ln F_0(x) = (1 + o(1)) \ln \mu_{F_0}(x)$$

виконується при $x \to +\infty$ $(x \to +\infty, \ x \notin E)$, де

$$\mu_{F_0}(x) = \max\{a_n f_0(\beta_n + x) \colon n \geq 0\}.$$

Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\Gamma_f(\lambda_n)} < +\infty. \tag{1.13}$$

Наслідок 1.1. *Нехай* (λ_n) *неспадна до* $+\infty$ *послідовність і функція* F *зображена регулярно збіжним функціональним рядом вигляду* (1.12)*, де* f *є ціла функція. Якщо умова* (1.13) *виконується, тоді співвідношення*

$$\ln M_F(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_F(r)$$

виконується при $r \to +\infty$ *поза множиною скінченної логарифмічної міри, де*

$$\mu_F(r) = \max\{|a_n| M_f(r\lambda_n) \colon \ \geq 0\}.$$

1.2.5 Про стійкість максимального члена функціонального ряду за системою функцій

Стійкість максимального члена функціонального ряду досліджується у підрозділі 3.2 розділу 3 цієї дисертації. Через L_+ ми позначимо клас додатних неперервних на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ функцій $l(t)$, таких що $l(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$, і через $\mathscr{W}$ ми позначимо клас функцій $w \in L_+$, таких що $\int_1^{+\infty} x^{-2} w(x) dx < +\infty$. Нехай $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f(x\lambda_k)$, де $\Lambda = (\lambda_k)$ деяка послідовність невід'ємних чисел, $a_k \geq 0$ $(k \geq 0)$, і f додатна зростаюча до $+\infty$ функція на $[0, +\infty)$ з $f(0) = 1$ і $\ln f(x)$ опукла функція на цьому ж інтервалі. Нехай $F_w(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{w(\lambda_k)} f(x\lambda_k)$, $\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 : \ln f(u) \leq t\}$, $\nu(G) = \sum_{\lambda_n \in G} e^{w(\lambda_n)}$ для кожної обмеженої множини $G \in \mathbb{R}_+$, де $w \in L_+$. Нехай $\mathscr{S}(f, \Lambda)$ клас додатних збіжних для всіх $x \geq 0$ функціональних рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f(x\lambda_k). \tag{1.14}$$

Нехай $B^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n f(x\lambda_n)$, $B^- = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{-1} f(x\lambda_n)$.

Твердження 1.4. *Якщо послідовність* $\{b_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$ *задовольняє умову*

$$b = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\max\{\ln b_n, -\ln b_n\}}{\ln f(\lambda_n)} < +\infty,$$

тоді $F \in \mathscr{S}(f,\Lambda) \Leftrightarrow B^+ \in \mathscr{S}(f,\Lambda) \Leftrightarrow B^- \in \mathscr{S}(f,\Lambda)$.

Через $\mathscr{S}_*(f,\Lambda)$ ми позначимо клас формальних рядів вигляду (1.14), таких що $a_n f(x\lambda_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ для кожного $x \in \mathbb{R}_+$, тобто,, для кожного $x \in \mathbb{R}_+$ існує максимальний член $\mu(x,F) = \max\{|a_n| f(x\lambda_n) : n \geq 0\} < +\infty$.

Твердження 1.5. *Якщо* $F \in \mathscr{S}_*(f,\Lambda)$ *і умова*

$$h := \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln a_n}{\ln n} > 1$$

або умова

$$\tau_f(\Lambda) := \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln f(\lambda_n)} < +\infty$$

виконується, тоді $F \in \mathscr{S}(f,\Lambda)$.

Ми також пишемо $\mathscr{D}_*(\Lambda) = \mathscr{S}_*(f,\Lambda)$ з $f(x) = e^x$.

Наслідок 1.2. *Нехай* $F \in \mathscr{D}_*(\Lambda)$. *Якщо існує функція* $w \in L$, *така що* $F_w \in \mathscr{D}_*(\Lambda)$, $\ln\nu \in \mathscr{W}$ *(тут* $\nu(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} e^{w(\lambda_n)}$*) і*

$$e^{-w(\lambda_n)} \leq b_n \leq e^{w(\lambda_n)} \ (n \geq k_1),$$

тоді існує множина $E \subset \mathbb{R}_+$ *скінченної Лебегової міри, така що*

$$\ln\mu(x,F) = (1+o(1))\ln\mu(x,B_+) = (1+o(1))\ln\mu(x,B_-)$$

при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

Нехай $B_w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{w(\lambda_n)} f(x\lambda_n)$, $w \in L$.

Теорема 1.6. *Нехай* $F \in \mathscr{S}_*(f,\Lambda)$. *Якщо існує функція* $w \in L_+$, *така що* $B_w \in \mathscr{S}_*(f,\Lambda)$, $\ln\nu_0 \in \mathscr{W}$ *і нерівності*

$$e^{-w(\lambda_n)} \leq b_n \leq e^{w(\lambda_n)} \ (n \geq k_1)$$

виконуються, тоді існує множина $E \subset \mathbb{R}_+$ скінченної Лебегової міри, така що співвідношення

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B_+) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B_-)$$

виконується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

1.2.6 Про співвідношеня типу Бореля для деяких додатних інтегралів

Співвідношення типу Бореля для деяких додатних інтегралів досліджується у підрозділі 3.3 розділу 3 цієї дисертації. Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ додатна неспадна послідовність, тобто,, $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, і $f : \mathbb{R}_+ := (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ додатна Борелева функція. Нехай ν be a Борелева міра на σ-алгебрі $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ Борелевих множин із $\mathbb{R}_+$. Позначимо через $I(\nu, f)$ клас функцій $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ зображуваних для кожного $x \in \mathbb{R}$ інтегралом вигляду

$$F(x) = \int_0^{+\infty} a(t) f(tx) \nu(dt),$$

де $a : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ Борелева функція. У випадку $\nu(dt) = dn_\lambda(t)$, де $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$ лічильна функція послідовності λ, ми отримуємо клас $D(\lambda, f) := I(\nu, f)$ рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\lambda_n x),\ a_n \ge 0 (n \ge 0),$$

де $a_n = a(\lambda_n \ge 0)$ $(n \ge 0)$. Для функцій $a(t) : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(t) : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, міри ν і кожного $x > 0$, ми позначимо

$$\mu_*(x) = \sup\{a(t) f(tx) : t \in \operatorname{supp} \nu\}.$$

Нехай $I_+(\nu, f)$ клас функцій $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ зображуваних через інтеграли вигляду

$$F(x) = \int_0^{+\infty} a(t) f(x+t) \nu(dt),$$

де ν локально скінченна міра на $\mathbb{R}_+$, a додатна ν-вимірна функція. f додатні і зростаючі до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функції, такі що $f(0) = 1$ і $\ln f(x)$ опукла на інтервалі $[0, +\infty)$ функція.

Твердження 1.6. *Якщо умова*

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t) dt < +\infty$$

виконується з $\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 : (\ln f(u))' \leq t\}$, *тоді для кожної функції* $F \in I_+(\nu, f)$ *існує множина* E *скінченної Лебегової міри, така що асимптотичне співвідношення*

$$\ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$$

виконується при $x \to +\infty$, $(x \notin E)$, *де* $\mu(x, F) = \sup\{a(t) f(x+t) : x \in supp\ \nu\}$ *і* $supp\ \nu$ *носій міри* ν.

Нехай L клас додатних неперервних на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ функцій $l(t)$, таких що $l(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$. Через L_+ ми позначимо підклас L, такий що $l(t) \uparrow +\infty$ при $t \to +\infty$, і через $\mathcal{W}$ клас функцій $w \in L_+$, таких що

$$\int_1^{+\infty} x^{-2} w(x) dx < +\infty.$$

Також позначимо через $D_+(\lambda, f)$ клас функцій $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\lambda_n + x),\ a_n \geq 0\ (n \geq 0).$$

Для рядів $F \in D_+(\lambda, f)$ і кожної послідовності b_n, $b_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

$(n \geq 0)$ ми розглянемо

$$B^+(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n f(x + \lambda_n), \quad B^-(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{-1} f(x + \lambda_n).$$

Для функції $w \in L$ ми позначимо

$$B_w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{w(\lambda_n)} f(x\lambda_n).$$

Також ми позначимо $\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 : (\ln f(u))' \leq t\}$, $\nu(G) = \sum_{\lambda_n \in G} e^{w(\lambda_n)}$ для кожної обмеженої множини $G \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 1.7. *Нехай $F \in D_+(\lambda, f)$. Якщо існує функція $w \in L_+$, така що $B_w \in D_+(\lambda, f)$, $\ln \nu_0 \in \mathcal{W}$ і нерівності*

$$e^{-w(\lambda_n)} \leq b_n \leq e^{w(\lambda_n)} \ (n \geq k_1),$$

виконуються, тоді існує множина $E \subset \mathbb{R}_+$ скінченної Лебегової міри, така що співвідношення

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B_+) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B_-)$$

справджується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

1.2.7 Інтеграли типу Лапласа-Стілт'єса: співвідношення Бореля і h-міра виняткової множини

Розглядаємо інтеграли вигляду

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(t) e^{xt} \nu(dt), \tag{1.15}$$

де ν невід'ємна міра $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ з необмеженим носієм, $a(t)$ довільна невід'ємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}_+$, $S = \operatorname{supp} \nu \cap \{x \in \mathbb{R}_+ : \ f(x) > 0\}$. Через $\mathcal{I}(\nu)$ позначимо клас функцій $F \colon \mathbb{R} \to$

$\mathbb{R}_+$ зображуваних через інтеграли вигляду (1.15). Для $F \in \mathcal{I}(\nu)$ і $x \in \mathbb{R}$ позначимо

$$\mu_*(x, F) = \operatorname{ess\,sup}\{f(u)e^{xu} \colon u \in S\}.$$

Зауважимо, що умова $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty$ на послідовність показників (λ_k) виконується тоді і лише тоді, коли умова $\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty$ справджується з $\nu_0(t) = n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$ ([37, 39]).

Позначимо через $\mathcal{L}$ клас додатних неперервних функцій $\Phi \colon \mathbb{R}_+ := [0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ таких, що $\Phi(x) \nearrow +\infty$ $(0 \le x \to +\infty)$, а через $\mathcal{L}^+$ клас додатних неперервних диференційовних функцій $h(x) \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ таких, що $\int_0^{+\infty} dh(x) = +\infty$ і $1 \le h'(x) \nearrow +\infty$ $(0 \le x \nearrow +\infty)$. Позначимо через $\mathcal{L}_1$ клас функцій $\psi \in \mathcal{L}$ таких, що $\int_{x_0}^{+\infty} dt/\psi(t) < +\infty$, $\psi(t) \ge t$ для $t \ge t_0 > 0$, а через $\mathcal{L}_2$ клас функцій $\psi \in \mathcal{L}_1$ таких, що обернена функція ψ^{-1} до функцій ψ зодовольняє умов $\psi^{-1}(uv) \le u\psi^{-1}(v)$ $(u, v \ge 1)$. Нехай $\Phi \in \mathcal{L}$. Введемо наступний клас рядів Діріхле

$$\mathcal{D}(\lambda, \Phi) = \{F \in \mathcal{D}(\lambda) \colon \ \ln \mu(x, F) \ge x\Phi(x)\ (x \ge x_0)\}.$$

Для вимірної за Лебегом множини $E \subset [0, +\infty)$ назвемо

$$m_h E \equiv \int_E dh(x)$$

її h-міру, при $h(x) \equiv x$ h-міра множини E її мірою Лебега.

У статті [17] наступна теорема була доведена.

Теорема 1.8 ([17]). *Нехай $h \in \mathcal{L}^+$, $\Phi \in \mathcal{L}$. Якщо функція $F \in \mathcal{D}(\lambda, \Phi)$ і число $b > 0$ таке, що*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h'((\lambda_n) + b)}{n\lambda_n} < +\infty, \tag{1.16}$$

тоді асимптотичне співвідношення $\ln M(x,F) \sim \ln \mu(x,F)$ *виконується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* E *скінченної* h*-міри* ($m_h E < +\infty$)*, де функція* φ *обернена до функції* Φ.

У цій роботі ми доведемо подібне твердження для функцій з класу $\mathcal{I}(\nu)$. Метод доведення відрізняється від класичного методу Вімана-Валірона, який був використаний у статті [17].

Скажемо, що $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi)$, якщо $F \in \mathcal{I}(\nu)$ і

$$\ln F(x) \geq x\Phi(x) \quad (x \geq x_0).$$

Доводимо наступну теорему.

Теорема 1.9. *Нехай* $h \in \mathcal{L}^+$, $\Phi \in \mathcal{L}$, $\Phi_0(x) = x\Phi(x)$. *Якщо функція* $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi)$ *і існує функція* $\psi \in \mathcal{L}_2$ *така, що умова*

$$h'(\varphi_0(t)) \ln \nu_0(t) = o\Big(\psi^{-1}(t)\Big) \quad (t \to +\infty) \tag{1.17}$$

справджується з $\nu_0(t) = \nu([0,t])$, *тоді асимптотичне співвідношення* (3.47) *виконується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* E *скінченної* h*-міри* ($m_h E < +\infty$)*, де функція* φ_0 *є обернена до функції* Φ_0.

Зауваження 1.2. Відомо, що умова $\int_{x_0}^{+\infty} dx/\psi(x)$ є еквівалентна до умови $\int_{t_0}^{+\infty} t^{-2}\psi^{-1}(t)dt < +\infty$. З іншого боку, для даної неспадної функції $\alpha(t)$ умова $\int_{t_0}^{+\infty} t^{-2}\alpha(t)dt < +\infty$ є еквівалентна до умови, що існує функція $\psi \in \mathcal{L}_1$ така, що $\alpha(t) = o(\psi^{-1}(t))$ $(t \to +\infty)$.

Автори (А.Ю. Боднарчук, Т.М. Сало та О.Б. Скасків) не знають чи можливо вибрати функцію ψ так, щоб умова приналежності до класу $\mathcal{L}_2$ виконувалася.

1.2.8 Точність нерівності Шеремети для цілих рядів Діріхле

Розглядаються цілі ряди Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1.18}$$

де $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \le n \to +\infty)$.

Нехай послідовність (λ_n) задовольняє умову

$$|n(t) - \Delta t^\rho| \le \mathcal{D}\ (t \ge t_0),\ \Delta \in \mathbb{R}_+,\ \mathcal{D} \in \mathbb{R}_+,\ \rho \ge \frac{1}{2}, \tag{1.19}$$

де $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$.

Позначимо через $\mathcal{E}_0$ клас трансцендентних цілих функцій вигляду $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Для кожного $r > 0$ і $f \in \mathcal{E}$ позначимо

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| \colon |z| \le r\},\quad \mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n \colon n \ge 0\},$$

$$\ln_1 x := \ln x,\quad \ln_{k+1} x := \ln \ln_k x,$$

$$\exp_1 x = e^x,\quad \exp_{k+1} x = \exp(\exp_k x),$$

$$u_0(x) = x,\quad u_k(x) = x \prod_{j=1}^{k} \ln_j x,\quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.10 ([58]). *Нехай $k \ge 2$. Для кожної $f \in \mathcal{E}$ і $\delta > 0$ нерівність*

$$M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{1/2} \mu_f(r) u_{k-2}(\ln_2 \mu_f(r)) \cdot \ln_k^{\delta} \mu_f(r) \tag{1.20}$$

виконується для всіх $r \in (1; +\infty) \backslash E$, де E множина скінченної логарифмічної міри ($\int_E d \ln r < +\infty$).

При $k = 1$, нерівність (1.20) збігається з класичною нерівністю Вімана.

Теорема 1.11. *Для кожного $k \in \mathbb{N},\ k \ge 2$, існує ціла функція $f \in \mathcal{E}$ така, що для всіх $r \ge r_0$ ми маємо*

$$M_f(r) \ge \mu_f(r) \ln^{1/2} \mu_f(r) u_{k-2}(\ln_2 \mu_f(r)).$$

Отже, нерівність (1.20) у загальному класі $\mathcal{E}$ є непокращувана.

Проте ця нерівність виглядає значно покращуваною для цілих функцій зображених лакунарними степеневими рядами ([38]) або випадковими степеневими рядами ([19]).

Може бути показано, що результат Шеремети справджується за наступного формулювання.

Теорема 1.12 ([45, 54])**.** *Нехай послідовність* (λ_n) *задовольняє умову* (1.19). *Тоді для кожного ряду Діріхле вигляду* (1.18) *існує множина* E *скінченної міри і для кожного* $k \in \mathbb{N}$ *існує число* σ_k *таке, що для всіх* $\sigma \in [\sigma_k; +\infty)\backslash E$ *ми маємо*

$$M(\sigma, F) \leq \mu(\sigma, F) \cdot \ln^{\rho-\frac{1}{2}} \mu(\sigma, F) \cdot u_{k-1}(\ln_2^{\rho} \mu(\sigma, F)) \ln_{k+1}^{\delta} \mu(\sigma, F). \tag{1.21}$$

Наступна теорема містить твердження про точність нерівності (1.21).

Теорема 1.13. *Якщо послідовність* (λ_n) *задовольняє умову (3.54), тоді для кожного* $\delta > 0$ *існує цілий ряд Діріхле* F *вигляду* (1.18) *і* $\sigma_0 > 0$ *така, що для кожного* $\sigma \geq \sigma_0$

$$M(\sigma, F) \geq \mu(\sigma, F) \ln^{\rho-\frac{1}{2}} \mu(\sigma, F) \cdot u_{k-1}(\ln_2^{\rho} \mu(\sigma, F)).$$

Теореми 1.10 і 1.11 є наслідками теорем 1.12 і 1.13, відповідно.

РОЗДІЛ 2. РЯДИ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

2.1 Про h-міру виняткової множини у теоремі типу Фентона для рядів Тейлора-Діріхле

Співвідношення між функціональним рядом та його максимальним членом на нескінченності утворює актуальне та важливе питання, яким займаються математики у своїх роботах ([10], [23]- [25], [29] та ін.). У роботі [10] зокрема автори розглядають таке співвідношення щодо цілої функції, представленої регулярно збіжним рядом

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_n(z). \tag{2.1}$$

У згаданій роботі доведено наступне співвідношення: для цілої функції F

$$F(z) = a_\nu \varphi_\nu(z) + O(\mu(\alpha))$$

за умови $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} < +\infty$ при $\alpha \to +\infty$ зовні множини скінченної h-міри рівномірно по G_α, де $\nu = \nu(\alpha)$ – центральний індекс ряду (2.1), $\mu(\alpha)$ – максимальний член ряду (2.1), G_α – елемент сім'ї множин на комплексній площині, $\alpha \geq 0$ – параметр, що неперервно змінюється.

У статті [29] наводиться уточнення результату згаданого попередньо у [10].

У праці [24] доведено співвідношення, що виконується за пев-

них умов, а саме співвідношення

$$\ln M(x,F) \geq (1+d)\ln \mu(x,F),$$

де $M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, d – стала, $d > 0$, $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$ – цілий ряд Діріхле абсолютно збіжний в $\mathbb{C}$.

Далі, у роботі [25] доводиться теорема про співвідношення

$$F(x+iy) = (1+o(1))a_{\nu(x,F)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x,F)}}$$

для всіх $F \in D(\Lambda,\Phi)$ при $x \to +\infty$ поза множиною скінченної h-міри рівномірно по $y \in \mathbb{R}$. Це співвідношення виконується за умови

$$(\forall b > 0): \ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} h'\left(\varphi(\lambda_k) + \frac{b}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\right) < +\infty,$$

де $\Phi \in L$, $h \in L^+$ а φ – обернена функція до Φ. У теоремі клас L позначає клас додатних неперервних функцій, які зростають до $+\infty$ на $[0,+\infty)$, а L^+ – підклас L тих функцій, які диференційовні із неспадною похідною. Клас $D(\Lambda,\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \ln \mu(x,F) \geq x\Phi(x)\ (x \geq x_0)\}$, $\Phi \in L$ і $D(\Lambda)$ – клас цілих (абсолютно збіжних у комплексній площині) рядів Діріхле вигляду $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, причому $\Lambda = (\lambda_n)$ фіксована послідовність така, що $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leq n \uparrow +\infty)$.

2.1.1 Часткова відповідь на гіпотезу з міжнародної конференції

Тут ми даємо часткову відповідь на запитання сформульоване на міжнародній конференції "Complex Analysis and Related

Topics" (Львів, вересень 23-28, 2013) ([26]). Нехай $\tau\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ буде неперервно диференційовна неспадна функція, $\lambda = (\lambda_n)$ і $\beta = (\beta_n)$ будуть такі, що $\lambda_n \geq 0, \beta_n \geq 0$ $(n \geq 0)$, і $S(\lambda, \beta, \tau)$ буде клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів Тейлора-Діріхле вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad b_n \geq 0 \ (n \geq 0). \tag{2.2}$$

Для $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ та $x \geq 0$ позначимо через $\mu(x, F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}\colon n \geq 0\}$ максимальний член ряду, а через $\nu(x, F) = \max\{n \in \mathbb{N}_0\colon |a_n|e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n} = \mu(x, F)\}$ центральний індекс у випадку, коли max існує.

Теорема одержана у статті [10] передбачає наступне твердження.

Теорема 2.1 (Величко, Скасків, 1989)**.** *Нехай послідовності $\lambda = (\lambda_n), \beta = (\beta_n)$ зростаючі. Якщо*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty. \tag{2.3}$$

і $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ тоді

$$F(x) = (1 + o(1))\mu(x, F) \tag{2.4}$$

при $x \to +\infty$ зовні деякої множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної Лебегової міри, тобто $\int\limits_E dx < +\infty$.

У [26] розміщена наступна гіпотеза.

Гіпотеза 2.1 ([26])**.** *Для кожної послідовності λ і β, функцій τ, h, $\frac{h(x)}{x} \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, існує функція $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$, множина E і стала $d > 0$ така що $h - \operatorname{meas} E := \int\limits_E dh(x) = +\infty$ і $\forall x \in E$ нерівність $F(x) > (1 + d)\mu(x, F)$ виконується.*

У цій роботі доведено наступне твердження.

Теорема 2.2. *Для кожної зростаючої функції* $h(x)\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$, $h'(x) \nearrow +\infty$ $(x \to +\infty)$, *кожної послідовності* $\lambda = (\lambda_n)$ *такої що умова* (2.3) *виконується і для кожної неспадної послідовності* $\beta = (\beta_n)$ *такої що* $\beta_{n+1} - \beta_n \le \lambda_{n+1} - \lambda_n$ $(n \ge 0)$ *існує функція* $\tau(x)$ *така що* $\tau'(x) \ge 1$, *функція* $F \in S(\alpha, \beta, \tau)$, *множина* E *і* $d > 0$ *такі що* h-meas $E = +\infty$ *і*

$$(\forall x \in E): \quad F(x) > (1+d)\mu(x, F).$$

Доведення. Існує послідовність (c_n) така що $c_n \uparrow +\infty$ і

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = +\infty. \tag{2.5}$$

Визначимо послідовність $(\varkappa_n)$ у такий спосіб, щоб наступні умови виконувалися:

$$\varkappa_0 = 0, \quad h'(\varkappa_n) \ge c_n, \quad \varkappa_n \ge \varkappa_{n-1} + \tfrac{2c}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \ (n \ge 1), \quad c > 0.$$

Це зрозуміло, що такі умови вибору послідовності $(\varkappa_n)$ є не суперечливі. На додачу, оскільки $c_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ і $h'(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, $\varkappa_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$. Розглянемо функцію $\tau(x)$ таку що $\tau'(x) = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\beta_{n+1} - \beta_n}$ для $x \in [\varkappa_n + \frac{c}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}, \varkappa_{n+1}]$ і $\tau'(x) = l_n x + k_n$ для $x \in [\varkappa_n, \varkappa_n + \frac{c}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}]$ таку що

$$l_n \varkappa_n + k_n = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\beta_n - \beta_{n-1}}, \ l_n(\varkappa_n + \frac{c}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}) + k_n = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\beta_{n+1} - \beta_n}.$$

Легко бачити, що $\tau'(x) \ge 1$ для всіх $x \ge \varkappa_1$.

Покладемо

$$\ln \frac{b_n}{b_{n+1}} = \varkappa_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) + \tau(\varkappa_{n+1})(\beta_{n+1} - \beta_n).$$

Тепер це дегко перевірити, що функція F вигляду (2.2) належить до класу $S(\alpha, \beta, \tau)$.

Справді, з умови вибору $\min\{\varkappa_n, \tau(\varkappa_n)\} \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, тому

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln b_n - \ln b_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n + \beta_{n+1} - \beta_n} = +\infty,$$

відтак, за теоремою Чезаро-Штольца,

$$\Delta_n := -\ln b_n/(\lambda_n + \beta_n) \to +\infty \ (n \to +\infty).$$

З умови (2.3), використовуючи нерівність Коші-Буняковського-Шварца, ми одержуємо

$$m^2 = \left(\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1} - \lambda_n}} \sqrt{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \cdot \sum_{n=0}^{m-1} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \leq K\lambda_m \quad (m \geq 1), \ K < +\infty.$$

Зокрема, $(\lambda_n + \beta_n) \geq \lambda_n \geq n$ для всіх достатньо великих $n \geq n_0$. Тому для всіх $x > 0$ ми отримуємо

$$b_n + \exp\{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n\} \leq b_n + \exp\{(\lambda_n + \beta_n) \cdot \max\{x, \tau(x)\}\} =$$
$$= \exp\{-(\Delta_n - \max\{x, \tau(x)\})(\lambda_n + \beta_n)\} \leq e^{-n}$$

при $n \to +\infty$. Отже, функція F вигляду (2.2) належить до класу, тобто $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$.

Далі, нескладно довести, що для всіх $x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}) = I_n$ центральний індекс $\nu(x, F) = n$. Тому для кожного $x \in I_n = [\varkappa_{n+1} - \frac{c}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}, \varkappa_{n+1})$

$$\frac{F(x)}{\mu(x, F)} - 1 \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} e^{x(\lambda_{n+1}-\lambda_n)+\tau(x)(\beta_{n+1}-\beta_n)} =$$

$$= \exp\Big((x - \varkappa_{n+1})(\lambda_{n+1} - \lambda_n) - (\tau(\varkappa_{n+1}) - \tau(x))(\beta_{n+1} - \beta_n)\Big) \geq$$

$$\geq \exp\Big(-c - \frac{c}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \tau'(\theta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n)\Big) = \exp(-2c) > 0$$

бо $\theta_n \in (\varkappa_{n+1} - \frac{c}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}, \varkappa_{n+1})$ і $\tau'(\theta_n) = \tau'(\varkappa_{n+1}) = \frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\beta_{n+1}-\beta_n}$.

Тепер розглянемо h-meas множини $E = \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$. З того, що $h'(\varkappa_n) \geq c_n$ $(n \geq 0)$, згдіно з умовою (2.5) маємо

$$h\text{-meas } E = \int_E dh(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{I_n} dh(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(h(\varkappa_{n+1}) - h\left(\varkappa_{n+1} - \frac{c}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \right) \right) \geq$$

$$\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} h'(\varkappa_n) \geq c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = +\infty.$$

□

Зауваження 2.1. Твердження Теореми 2.2 для класу $S(\lambda) := S(\lambda, 0, 0)$, тобто, для цілих рядів Діріхле, було доведено раніше у статті [24].

2.1.2 Відкриті проблеми і гіпотези

Зауваження 2.2. *Чи твердження гіпотези 1 правильне загалом – автору дисертації наразі залишилося невідомим.*

2.2 Про суму і максимальний член ряду Тейлора-Діріхле

У праці [29] автори Скасків О.Б. та Трусевич О.М. розглядають регулярно збіжний функціональний ряд вигляду $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_n(z)$, у якому досліджують умови на виконання співвідношення між модулем суми і максимальним членом вигляду

$$M(\alpha) \sim \mu(\alpha), \quad \alpha \to +\infty,$$

де $M_F(\alpha) = \sup\{|F(z)| : z \in G_\alpha\}$, $\mu_F(\alpha) = \max_n \sup\{|a_n||\varphi_n(z)| : z \in G_\alpha\}$ – максимальний член ряду.

Зокрема у згаданій роботі знайдено необхідну та достатню умову для виконання співвідношення

$$M(x) = (1 + o(1))\mu(x), \quad x \to +\infty,$$

$x \notin E_1$, $\int_{E_1 \cap [x_0, +\infty)} dx < +\infty$ для збіжного ($x \geq x_0$) ряду $M(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n}$ із $\ln n = o(\lambda_n + \beta_n)$ та $\tau'(x) \geq 1$ ($x \geq x_0$), а саме умову

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} + \beta_{n+1} - \lambda_n - \beta_n} < +\infty$$

(тут $\mu(x) = \max\{b_n e^{x\beta_n + \tau(x)\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$).

Нехай $\mathcal{TD}(\Lambda, \beta, \tau)$ клас абсолютно збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів Тейлора-Діріхле вигляду

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{x\lambda_k + \tau(x)\beta_k} \tag{2.6}$$

таких, що $a_k \geq 0$ ($k \in \mathbb{Z}_+$); тут $\Lambda = (\lambda_k)$ деяка послідовність невід'ємних чисел $\lambda_k \geq 0$ ($k \geq 0$), і $\beta = \big(\beta_k\big)$ також послідовність невід'ємних чисел, такі що $(\lambda_k, \beta_k) \neq (\lambda_j, \beta_j)$ для всіх $k \neq j$, тобто є різні двовимірні вектори; $\tau\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ неперервно диференційовна неспадна функція. У випадку $\beta_k \equiv 0$, ми одержуємо ряд Діріхле вигляду

$$F_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{x\lambda_k}, \tag{2.7}$$

який збігається для всіх $x \geq 0$, і ми запишемо $F_1 \in \mathcal{D}(\Lambda) =$

$\mathcal{TD}(\Lambda, 0, \tau)$; $\mathcal{TD} := \cup_\Lambda \cup_\beta \mathcal{TD}(\Lambda, \beta, \tau)$, $\mathcal{D} := \cup_\Lambda \mathcal{D}(\Lambda)$. Це зрозуміло, що $\mathcal{D} \subset \mathcal{TD}$.

Для кожного $x \geq 0$ і ряду Тейлора-Діріхле $F \in \mathcal{TD}(\Lambda, \beta)$ вигляду (2.6) позначимо через $\mu(x, F) = \max\{|a_k|e^{\tau(x)\beta_k + x\lambda_k} \colon k \geq 0\}$ максимальний член ряду, а через $\nu(x, F) = \sup\{k \colon |a_k|e^{\tau(x)\beta_k + x\lambda_k} = \mu(x, F)\}$ центральний індекс ряду (2.6), відповідно; для ряду Діріхле $F_1 \in \mathcal{D}(\Lambda)$ вигляду (2.7) маємо $\mu(x, F_1) = \max\{|a_k|e^{x\lambda_k} \colon k \geq 0\}$.

Легко бачити, що для кожної функції $F \in \mathcal{TD}(\Lambda, \beta)$ вигляду (2.6) існує $\nu(x, F) = \max\{k \colon |a_k|e^{\tau(x)\beta_k + x\lambda_k} = \mu(x, F)\}$, тобто, зокрема, $|a_{\nu(x,F)}|e^{\tau(x)\beta_{\nu(x,F)} + x\lambda_{\nu(x,F)}} = \mu(x, F)\}$.

2.2.1 Нові умови існування центрального індекса

Наступна лема містить умови на послідовності λ і β які є достатніми для існування центрального індекса $\nu(x, F)$ для кожної функції $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$.

Лема 2.1. *Нехай $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ і одна із наступних чотирьох умов виконується:*

i_1) функція $\tau(x)$ неспадна, послідовність (β_n) неспадна і послідовність (λ_n) зростаюча;

i_2) функція $\tau(x)$ зростаюча, послідовність (β_n) також зростаюча і послідовність (λ_n) неспадна;

ii_1) функція $\tau(x)$ така що $\tau(x + h) - \tau(x) \leq h$ $(x > 0, h > 0)$, послідовність $\alpha = (\lambda_n + \beta_n)$ зростаюча і послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ є неспадна;

ii_2) функція $\tau(x)$ така що $\tau(x + h) - \tau(x) \geq h$ $(x > 0, h > 0)$, послідовність $\alpha = (\lambda_n + \beta_n)$ зростаюча і послідовність $\beta = (\beta_n)$ неспадна.

Тоді центральний індекс $\nu(x, F)$ є неспадною функцією такою, що $\nu(x, F) < +\infty$ для кожного $x \geq 0$.

Доведення леми 2.1. Нижче, де це не спричинить двозначності, замість запису $\mu(x, F)$ і $\nu(x, F)$, використовуватимемо позначення $\mu(x)$ і $\nu(x)$, відповідно. Нехай $F \in S(\lambda, \beta)$, $x > 0$, $h \in (-x, +\infty)$. Оскільки $\ln a_{\nu(x+h)} + x\lambda_{\nu(x+h)} + \tau(x)\beta_{\nu(x+h)} \leq \ln \mu(x, F)$,

$$\begin{aligned}\ln \mu(x+h) &= \ln a_{\nu(x+h)} + (x+h)\lambda_{\nu(x+h)} + \beta_{\nu(x+h)}\tau(x+h) = \\ &= \ln a_{\nu(x+h)} + x\lambda_{\nu(x+h)} + \tau(x)\beta_{\nu(x+h)} + h\lambda_{\nu(x+h)} + \\ &\quad + \beta_{\nu(x+h)}(\tau(x+h) - \tau(x)) \leq \\ &\leq \ln \mu(x) + h\lambda_{\nu(x+h)} + \beta_{\nu(x+h)}(\tau(x+h) - \tau(x)). \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Подібно,

$$\begin{aligned}\ln \mu(x+h) &\geq \ln a_{\nu(x)} + (x+h)\lambda_{\nu(x)} + \beta_{\nu(x)}\tau(x+h) = \\ &= \ln \mu(x) + h\lambda_{\nu(x)} + \beta_{\nu(x)}(\tau(x+h) - \tau(x)). \qquad (2.9)\end{aligned}$$

З нерівностей (2.8), (2.9), ми одержуємо

$$\begin{aligned}h\lambda_{\nu(x)} + \beta_{\nu(x)}(\tau(x+h) - \tau(x)) &\leq \ln \mu(x+h) - \ln \mu(x) \leq \\ &\leq h\lambda_{\nu(x+h)} + \beta_{\nu(x+h)}(\tau(x+h) - \tau(x)) \qquad (2.10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{і } A(h) &:= h(\lambda_{\nu(x+h)} - \lambda_{\nu(x)}) + \\ &+ (\beta_{\nu(x+h)} - \beta_{\nu(x)})(\tau(x+h) - \tau(x)) \geq 0 \qquad (2.11)\end{aligned}$$

для всіх $x > 0$ і $h > -x$. Отже, у випадку i_1), коли функція $\tau(x)$ неспадна, послідовність (β_n) неспадна і послідовність (λ_n) зростаюча, міркуючи від супротивного, ми припускаємо, що $\nu(x) < \nu(x+h)$ для деякого x і $h > 0$. Тоді $\tau(x+h) - \tau(x) \geq 0$, $\lambda_{\nu(x+h)} < \lambda_{\nu(x)}$, $\beta_{\nu(x+h)} \leq \beta_{\nu(x)}$, таким чином $A(h) < 0$ і ми одержуємо суперечність із (2.11).

Подібно, у випадку i_2), якщо функція $\tau(x)$ зростаюча, послідовність (β_n) також зростаюча і послідовність (λ_n) неспадна ми маємо, що центральний індекс $\nu(x) = \nu(x, F)$ є неспадною функцією. Справді, міркуючи від супротивного, припустимо що

$\nu(x) < \nu(x+h)$ для деякого x і $h > 0$, тому $\tau(x+h) - \tau(x) > 0$, $\lambda_{\nu(x+h)} \leq \lambda_{\nu(x)}$, $\beta_{\nu(x+h)} < \beta_{\nu(x)}$, і тому $A(h) < 0$ і ми знову одержали суперечність із (2.11).

ii_1) Якщо $\tau(x+h) - \tau(x) \leq h$ для всіх $x > 0, h > 0$, $\alpha = (\lambda_n + \beta_n)$ зростаюча послідовність, тоді якщо ми припустимо, що існує $x > 0$ і $h > 0$ такі що $\nu(x+h) < \nu(x)$, то у випадку $\beta_{\nu(x+h)} \geq \beta_{\nu(x)}$ з огляду на нерівність $\tau(x+h) - \tau(x) \leq h$ і зростання послідовності $(\lambda_n + \beta_n)$, ми отримаємо $0 \leq A(h) \leq h(\lambda_{\nu(x+h)} + \beta_{\nu(x+h)} - \lambda_{\nu(x)} - \beta_{\nu(x)}) < 0$, що неможливо.

У випадку $\beta_{\nu(x+h)} < \beta_{\nu(x)}$, з огляду на неспадання послідовності (λ_n), ми відразу знову отримуємо суперечність із (2.11).

ii_2) У цьому випадку, справедливість слідує з ii_1) використовуючи твердження ii_1) для функції

$$F_1(x) = F(\tau^{-1}(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\beta_n + \lambda_n \tau^{-1}(x)}.$$

□

У статті [29], доведено наступну теорему.

Теорема 2.3 (Скасків, Трусевич, 1998)**.** *Нехай послідовності $\Lambda = (\lambda_n), \beta = (\beta_n)$ зростаючі, і диференційовна функція τ така що $\tau'(x) \geq 1$ $(x > 0)$. Для кожної функції $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ асимптотичне співвідношення $F(x) = (1 + o(1))\mu(x, F)$ виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної Лебегової міри ($\int\limits_E dx < +\infty$), тоді і лише тоді, коли*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} + \beta_{n+1} - \lambda_n - \beta_n} < +\infty. \tag{2.12}$$

Аналіз доведення статті [29] показує, що умови, послідовності $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ зростаючі, Теореми 2.3 можуть бути замінені на умову ii_2) з Леми 2.1. Ця умова є легша у загальному

випадку.

Доводимо наступну теорему.

Теорема 2.4. *Нехай послідовність* $(\lambda_n + \beta_n)$ *зростаюча, послідовність* $\beta = (\beta_n)$ *неспадна і додатна функція* τ *така що* $\tau(x+h) - \tau(x) \geq h$ $(x > 0, h > 0)$. *Якщо умова* (2.12) *виконується, тоді для кожної функції* $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ *асимптотичне співвідношення*

$$F(x) = (1 + o(1))\mu(x, F) \tag{2.13}$$

виконується $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* $E \subset [0, +\infty)$ *скінченної Лебегової міри* $(\int\limits_E dx < +\infty)$.

Доведення Теореми 2.4 повторює доведення Теореми 2.3 майже дослівно і використовує наступні допоміжні твердження.

Позначимо $\alpha_k = \lambda_k + \beta_k$,

$$\delta_k = \max\{(j-l+1)^{-3/2} \sum_{m=l}^{j} \frac{1}{\alpha_{m+1} - \alpha_m} : 1 \leq l \leq k-1 \leq j < +\infty\}.$$

Лема 2.2 ([32], Леми 1, 3). *Існує послідовність* (c_k) *така що* $0 \leq c_k \uparrow +\infty$ $(k \uparrow +\infty)$, $\varepsilon_k = c_k\delta_k \in (0, 1/2)$ $(k \geq 0)$ *і*

$$\sum_{k \neq \nu} \exp\{-\varepsilon_k |\alpha_k - \alpha_\nu|\} = o(1) \quad (\nu \to +\infty).$$

Лема 2.3 ([29], Лема 2). *Нехай* $\nu(x) \colon [0, +\infty) \to \mathbb{Z}_+$ *буде довільна неспадна функція. Якщо* (ε_k) *неспадна дана послідовність, тоді існує множина* $E \subset (0, +\infty)$ *така що для всіх* $x \in [0, +\infty) \setminus E$ *рівності* $\nu(x \pm \varepsilon_{\nu(x)}) = \nu(x)$ *виконуються і для Лебегової міри множини* E *маємо*

$$\text{meas}\,\big(E \cap [0, R]\big) = \int\limits_{E \cap [0,R]} dx \leq 2(C + \sum_{k=0}^{\nu(R-0)} \varepsilon_k) \quad (R > 0), \tag{2.14}$$

і невід'ємна стала C залежить лише від функції $\nu(x)$.

Доведення Теореми 2.4. Оскільки із ii_2) Леми 2.1 функція $\nu(x,F)$ неспадна, використовуючи Лему 2.3 для функції $\nu(x)=\nu(x,F)$ ми отримаємо рівності $\nu(x\pm\varepsilon_{\nu(x)})=\nu(x)$ для всіх $x\in[0,+\infty)\setminus E$, і множина E задовольняє (3.3).

Далі, як у [29], ми одержимо через означення максимального члена ряду (2.6) та використовуючи рівності $\nu(x\pm\varepsilon_{\nu(x)})=\nu(x)$

$$a_k e^{(x\pm\varepsilon_{\nu(x)})\lambda_k+\tau(x\pm\varepsilon_{\nu(x)})\beta_k}\le\mu(x\pm\varepsilon_{\nu(x)},F)=$$

$$=\mu(x,F)e^{\pm\varepsilon_{\nu(x)}\lambda_{\nu(x)}+(\tau(x\pm\varepsilon_{\nu(x)})-\tau(x))\beta_{\nu(x)}}.$$

Відтак

$$a_k e^{x\lambda_k+\tau(x)\beta_k}\le\mu(x,F)e^{\pm\varepsilon_{\nu(x)}(\lambda_{\nu(x)}-\lambda_k)+(\tau(x\pm\varepsilon_{\nu(x)})-\tau(x))(\beta_{\nu(x)}-\beta_k)}$$

Для $k<\nu(x)$ ми маємо $(\tau(x-\varepsilon_{\nu(x)})-\tau(x))(\beta_{\nu(x)}-\beta_k)\le-\varepsilon_{\nu(x)}|\beta_{\nu(x)}-\beta_k|$, таким чином

$$a_k e^{x\lambda_k+\tau(x)\beta_k}\le\mu(x,F)\exp\{-\varepsilon_{\nu(x)}(\lambda_{\nu(x)}+\beta_{\nu(x,F)}-\lambda_k-\beta_k)\}$$

для всіх $k<\nu(x,F)$. Для $k>\nu(x)$ маємо $(\tau(x+\varepsilon_{\nu(x)})-\tau(x))(\beta_{\nu(x)}-\beta_k)\le\varepsilon_{\nu(x)}(\beta_{\nu(x)}-\beta_k)$, таким чином

$$a_k e^{x\lambda_k+\tau(x)\beta_k}\le\mu(x,F)\exp\{-\varepsilon_{\nu(x)}(\lambda_k+\beta_k-\lambda_{\nu(x)}-\beta_{\nu(x)})\}$$

для всіх $k>\nu(x,F)$. Нарешті, з Леми 2.2 одержуємо

$$F(x)/\mu(x,F)\le1+\sum_{k\ne\nu(x,F)}\exp\{-\varepsilon_{\nu(x,F)}|\lambda_{\nu(x)}+\beta_{\nu(x,F)}-\lambda_k-\beta_k|\}=$$

$$=1+\sum_{k\ne\nu(x,F)}\exp\{-\varepsilon_{\nu(x,F)}|\alpha_{\nu(x)}-\alpha_k|\}=1+o(1)$$

$x \to +\infty$ ($x \notin E$). З Лем 2.2 і 2.3 ми отримуємо

$$\text{meas } E \leq 2C + 2\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k < +\infty.$$

□

2.3 Про абсцису існування максимального члена двох класів функціональних рядів

Поняття абсциси існування максимального члена ряду вже згадувалося у цій дисертації у підрозділі 2.1 розділу 2.

Розглянемо ряд Діріхле вигляду

$$f(z) = f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k e^{z\lambda_k}, \tag{2.15}$$

де $z \in \mathbb{C}$, $\omega \in \Omega$, f_k послідовність комплекснозначних випадкових величин, λ_n послідовність невід'ємних випадкових величин на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

У статті [35] розглядаються такі абсциси збіжності випадкового ряду Діріхле:

$$\sigma_\mu(f) = \sup\{\sigma : (\forall x < \sigma)[f_k e^{\sigma\lambda_k} \to 0 \ (k \to +\infty)]\};$$

$$\sigma_{\text{зб}}(f) = \sup\{x : \text{ряд (2.15) зб. у півплощині}\{z : Rez \leq x\}\};$$

$$\sigma(f) = \sup\{x : \text{ряд (2.15) абс. зб. у півпл.}\{z : Rez \leq x\}\}$$

та інші.

У цій же статті автори у вигляді наслідку наводять таке твердження ([35, Твердження 10], з точністю до позначень)

Твердження 2.1 ([35]). *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо $\omega \in \Omega$ таке, що $\tau(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = 0$ або $\ln k = o(\ln |f_k|)$ $(k \to +\infty)$, то виконуються рівності*

$$\sigma_{зб}(f) = \sigma(f) = \sigma_\mu(f) = \alpha_0.$$

У попередньому твердженні $\alpha_0 := \underline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k|}{\lambda_k}$ і $\mathcal{D}$ – клас випадкових рядів Діріхле вигляду (2.15) таких, що $(\forall\omega \in \Omega)(\exists x_* = x_*(f) < 0) : f_n e^{x_*\lambda_n} \to 0$, $n \to +\infty$ м.н.

Розглянемо ряд Тейлора-Діріхле $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n},$$

де $a_n \geq 0$, $\lambda_n \geq 0$, $\beta_n \geq 0$, τ неперервна зростаюча функція на $\mathbb{R}_+$.

Нехай ряд Діріхле $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ вигляду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n}$$

має такі ж послідовності a_n та λ_n як ряд Тейлора-Діріхле вище.

Згідно з [4] абсциса існування максимального члена ряду Діріхле обчислюється за формулою

$$\sigma_f(\mu, \lambda) = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{-\ln a_n}{\lambda_n}. \tag{2.16}$$

Нехай $\tau_2(x) := \max\{x, \tau(x)\}$, $\tau_1(x) := \min\{x, \tau(x)\}$. Тоді

$$\tau_1(x)(\lambda_n + \beta_n) \leq x\lambda_n + \tau(x)\beta_n \leq \tau_2(x)(\lambda_n + \beta_n).$$

Звідси, за формулою (2.16) негайно отримуємо

$$\tau_2\left(\sigma_f(\mu,\lambda+\beta)\right)\le\sigma_F(\mu,\lambda,\beta)\le\tau_1\left(\sigma_f(\mu,\lambda+\beta)\right).$$

Нехай (f_n) – фіксована послідовність комплекснозначних випадкових величин, $\Lambda=(\lambda_n)$ – послідовність невід'ємних чисел таких, що $\lambda_k\neq\lambda_j$, $k\neq j$.

У статті [4] автори довели формулу, яка знаходить абсцису існування максимального члена ряду Діріхле.

Твердження 2.2 ([4]). *Якщо $f\in\mathcal{D}$ тоді*

$$\sigma_\mu(f)=\varliminf_{n\to+\infty}\frac{-\ln|f_n|}{\lambda_n}.$$

Тут

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_ne^{z\lambda_n},\tag{2.17}$$

$z\in\mathbb{C}$, це клас рядів Діріхле вигляду (2.17) таких, що $(\exists x_*=x_*(f)<0):f_ne^{x_*\lambda_n}\to0$, $n\to+\infty$ і $\sigma_\mu(f):=\sup\{\sigma\ge0:(\forall x<\sigma)[f_ne^{x\lambda_n}\to0,\ n\to+\infty]\}$ – абсциса існування максимального члена ряду (2.17) у Твердженні 2.2.

Розглянемо ряд Тейлора-Діріхле вигляду

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n},\tag{2.18}$$

де послідовності $a_n\ge0$ нескінченно мала, $\lambda_n\ge0$, $\beta_n\ge0$ $(n\ge0)$, функція $\tau(x)\ge0$ неперервна і зростаюча $[0,+\infty)$.

Розглянемо також ряд Діріхле вигляду

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{x(\lambda_n+\beta_n)},\tag{2.19}$$

де послідовності a_n, λ_n і β_n такі ж як і в (2.18).

Назвемо $\sigma_\mu(F) = \sup\{\sigma \in \mathbb{R} : a_n e^{\sigma\lambda_n+\tau(\sigma)\beta_n} \to 0,\ n \to +\infty\}$ абсцисою існування максимального члена ряду F. Також $\sigma_\mu(f) = \sup\{\sigma \in \mathbb{R} : a_n e^{\sigma(\lambda_n+\beta_n)} \to 0,\ n \to +\infty\}$ – абсциса існування максимального члена ряду f.

Для абсциси існування максимального члена ряду F та f має місце нерівність

$$\sigma_\mu(F) \geq \sigma_\mu(f)$$

на множині $\mathbb{R}_+$ ($\tau(x) \leq x$, $x \geq 0$).

Знайдемо відповідь на таке запитання (О.Б. Скасків, 2024): Чи для довільних додатних чисел a та b таких, що $a < b$ існують послідовності λ_n і β_n такі, що $\sigma_\mu(f) = a$ і $\sigma_\mu(F) = b$?

Два наступні твердження стосуються цього запитання .

Виявляється, що число a не може бути вибраним довільно малим.

Твердження 2.3. *Якщо $0 < \tau(b) \leq a < b$, функція $\tau(x) < x$, $x > 0$, тоді існують невід'ємні послідовності λ_n і β_n такі, що*

$$\sigma_\mu(f) = a,\ \sigma_\mu(F) = b.$$

Доведення. Нехай послідовність a_n нескінченно мала. Покладемо

$$\lambda_n = -\theta \ln|a_n|,\ \beta_n = -C \ln|a_n|,$$

де $C = \frac{1}{a} - \theta$, $\theta = \frac{1}{a}\frac{a-\tau(b)}{b-\tau(b)}$. Тут $\lambda_n = 1$, $n \leq N$ і $\beta_n = 1$, $n \leq N$, де $a_n \leq 1$ для всіх $n \geq N$. Зауважимо, що для $a \geq \tau(b)$ ми маємо, що $\theta \geq 0$. Натомість $C > 0$.

Відтак для ряду f ми маємо

$$\sigma_\mu(f) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{-\theta \ln|a_n| - C \ln|a_n|} =$$

$$= \frac{1}{\theta + \frac{1}{a} - \theta} = a.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ довільне. Тоді для ряду F ми отримуємо

$$a_n e^{(b+\varepsilon)\lambda_n + \tau(b+\varepsilon)\beta_n} = a_n^{1-\theta(b+\varepsilon)-C\tau(b+\varepsilon)}.$$

Показник попереднього виразу рівний

$$1 - \theta b - \theta\varepsilon - C\tau(b+\varepsilon) <$$

$$< 1 - \theta b - \theta\varepsilon - C\tau(b) \leq -\theta\varepsilon, \tag{2.20}$$

тому що, коли покласти C, стає

$$\theta b + C\tau(b) = 1.$$

Справді, (див. θ, C),

$$\frac{b}{a}\frac{a-\tau(b)}{b-\tau(b)} + \frac{\tau(b)}{a}\frac{b-a}{b-\tau(b)} =$$

$$= \frac{ab - b\tau(b) + b\tau(b) - a\tau(b)}{a(b-\tau(b))} = 1.$$

З огляду на (2.20) ми маємо, що $\sigma_\mu(F) \leq b$.

З іншого боку, для довільного додатного ε ми отримуємо

$$a_n e^{(b-\varepsilon)\lambda_n + \tau(b-\varepsilon)\beta_n} = a_n^{1-\theta(b-\varepsilon)-C\tau(b-\varepsilon)}.$$

У показнику ми маємо

$$1 - \theta b + \theta\varepsilon - C\tau(b-\varepsilon) >$$

$$> 1 - \theta b + \theta\varepsilon - C\tau(b) = \theta\varepsilon \geq 0.$$

З цього випливає, що $\sigma_\mu(F) \geq b$. Отже, $\sigma_\mu(F) = b$.

□

Наступне твердження доповнює попереднє.

Твердження 2.4. *За умов попереднього твердженняn, якщо* $0 < a < \tau(b) < b$ *тоді не існує послідовностей* λ_n *і* β_n *таких, що*

$$\sigma_\mu(f) = a,\ \sigma_\mu(F) = b,$$

де послідовність a_n *довільна і функція* $\tau(x) < x$, $x > 0$ *довільна.*

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що існують послідовності $\lambda_n \geq 0$ і $\beta_n \geq 0$ такі, що $\sigma_\mu(f) = a$ і $\sigma_\mu(F) = b$ для довільних a_n і $\tau(x)$. І припустимо, що $0 < a < \tau(b) < b$.

Нехай a_n довільна нескінченно мала послідовність. Розглянемо
$a = \tau(b) - \varepsilon > 0$, де $\varepsilon > 0$ фіксоване і достатньо мале.

Покладемо $\tau(x) = qx$, де $q = 1 - \dfrac{\varepsilon/4}{\tau(b) - \varepsilon/2}$, $q \in (0,1)$. Очевидно, $\tau(x) < x$, $x > 0$.

Тепер доведемо, що абсциса існування максимального члена ряду F не b.

Для $x = pb$, де $p = \dfrac{\tau(b) - \varepsilon/2}{b}$, $p \in (0,1)$ ми маємо, що

$$a_n \exp\left(pb\lambda_n + \tau(pb)\beta_n\right) =$$

$$a_n \exp\left(\left(\tau(b) - \varepsilon/2\right)\lambda_n + q\left(\tau(b) - \varepsilon/2\right)\beta_n\right) =$$

$$= a_n \exp\left(\left(\tau(b) - \varepsilon/2\right)\lambda_n + \left(\tau(b) - 3\varepsilon/4\right)\beta_n\right) \geq$$

$$\geq a_n \exp\left(\left(\tau(b) - 3\varepsilon/4\right)\lambda_n + \left(\tau(b) - 3\varepsilon/4\right)\beta_n\right) =$$

$$= f(a + \varepsilon/4) \nrightarrow 0, \quad n \to +\infty$$

згідно з припущенням, що $\sigma_\mu(f) = a$.

Отже, $\sigma_\mu(F) \leq pb < b$. Це суперечність. □

Якщо упустити умову на довільність послідовності a_n і якщо упустити умову на довільність вибору функції $\tau(x)$, $\tau(x) < x$,

$x > 0$, тоді можливо отримати нерівність $0 < a < b$. Наступне твердження стосується цього факту.

Твердження 2.5. *Якщо* $0 < a < b$, $a_n = \exp\left(-\frac{a+b}{b}n\right)$, $\lambda_n = \frac{n}{b}$, $\beta_n = \frac{n}{a}$ *і* $\tau(x) = \frac{a^2}{b\ln(b+1)}\ln(x+1)$, *тоді*

$$\sigma_\mu(f) = a,\ \sigma_\mu(F) = b.$$

Доведення. Обчислимо абсцису існування максимального члена ряду f:

$$\sigma_\mu(f) = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n + \beta_n} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\frac{a+b}{b}n}{\frac{n}{b} + \frac{n}{a}} = a.$$

Тепер знайдемо відповідну абсцису для ряду F. Нехай $\varepsilon > 0$ довільне мале. Тоді

$$a_n e^{(b+\varepsilon)\lambda_n + \tau(b+\varepsilon)\beta_n} = \left(\frac{e^{\frac{b+\varepsilon}{b}} e^{\frac{a^2\ln(b+\varepsilon+1)}{ba\ln(b+1)}}}{e^{\frac{a+b}{b}}}\right)^n \to +\infty,\ n \to +\infty.$$

Справді, для показника цього виразу виконуються нерівності

$$\frac{b+\varepsilon}{b} + \frac{a\ln(b+\varepsilon+1)}{b\ln(b+1)} - \frac{a+b}{b} >$$

$$> 1 + \frac{\varepsilon}{b} + \frac{a}{b} - \frac{a}{b} - 1 = \frac{\varepsilon}{b} > 0.$$

Отже,

$$\sigma_\mu(F) \le b. \tag{2.21}$$

З іншого боку,

$$a_n e^{(b-\varepsilon)\lambda_n + \tau(b-\varepsilon)\beta_n} = \left(\frac{e^{\frac{b-\varepsilon}{b}} e^{\frac{a^2\ln(b-\varepsilon+1)}{ba\ln(b+1)}}}{e^{\frac{a+b}{b}}}\right)^n \to 0,\ n \to +\infty.$$

Справді,

$$\frac{b-\varepsilon}{b}+\frac{a\ln(b-\varepsilon+1)}{b\ln(b+1)}-\frac{a+b}{b}<$$

$$<1-\frac{\varepsilon}{b}+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}-1=-\frac{\varepsilon}{b}<0.$$

Отже, $\sigma_\mu(F)\geq b$. Згідно з (2.21), ми отримуємо, що $\sigma_\mu(F)=b$. □

Зауваження 2.3. *Умова $\tau(x)\leq x$ виконується для всіх $x\geq x_0\geq 0$, коли число a достатньо велике і число b не є достатньо велике, оскільки функція $\tau(x)=\frac{a^2}{b\ln(b+1)}\ln(x+1)$.*

2.4 Висновки до розділу 2

Розділ 2 присвячено розгляду рядів Тейлора-Діріхле.

Зокрема, у цьому розділі досліджується гіпотеза висунута на науковій конференції "Complex Analysis and Related Topics"(Львів, вересень 23-28, 2013) і наводиться часткова відповідь на неї. Гіпотеза стосується виконання нерівності $F(x)>(1+d)\mu(x,F)$ на множині нескінченної h-міри, де F – ряд Тейлора-Діріхле.

Також знайдено нові умови, які гарантують існування центрального індекса для ряду Тейлора-Діріхле. Разом з цим доведено теорему (див. Теорема 2.4., розділ 2, підрозділ 2.2), подібну до теореми з [29], але з дещо слабшими умовами.

Розглянуто абсцису існування максимального члена ряду Діріхле і таку ж для ряду Тейлора-Діріхле. Власне, за послідовності показників λ_n та β_n здійснено порівняння згаданих абсцис для таких двох рядів: $f=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{x(\lambda_n+\beta_n)}$ та

$F = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}$ в контексті нерівності $\sigma_\mu(f) < \sigma_\mu(F)$ за певної умови на функцію τ.

Результати другого розділу опубліковані у статтях [2] та [7], а також на конференціях і на науковому семінарі.

РОЗДІЛ 3. РЕГУЛЯРНО ЗБІЖНІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

3.1 Про сіппвідношення типу Бореля для деяких додатних функціональних рядів

Співвідношення типу Бореля досліджували математики у наступних працях: [27], [40], [41] та ін.

У статті [27] автори для кожної функції вигляду

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}\quad a_n\geq 0,\quad \lambda_n\geq 0,\quad \beta_n\geq 0,\quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{3.1}$$

$\tau(x):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ така, що $\tau'(x)\geq 1$ для $x\geq x_0$) знайшли достатні умови для виконання співвідношення

$$\ln F(x)\leq (1+o(1))\ln\mu(x,F),\quad x\to+\infty \tag{3.2}$$

поза множиною E нульової лінійної щільності або нижньої нульової лінійної щільності, де $\mu(x,F)=\max\{a_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}:n\in\mathbb{Z}_+\}$.

Так, у [27] доведено Твердження 1 у якому йдеться про наступне. Якщо функція $\tau\in L$ (L – клас додатних неспадних до $+\infty$ функцій на $\mathbb{R}_+$), функція $\Phi\in L^+$ (L^+ – клас неперервних зростаючих до $+\infty$ функцій на $\mathbb{R}_+$), $\Phi_1(x)=x\Phi(x)$, $F\in S(\lambda,\beta,\tau,\Phi_1)$ ($S(\lambda,\beta,\tau,\Phi_1)$ – підклас класу $S(\lambda,\beta,\tau)$, в який входять функції F, для яких $\ln F(x)\leq\Phi_1(x)$, $x\geq x_0$), а $S(\lambda,\beta,\tau)$ – клас збіжних для всіх $x\geq 0$ рядів вигляду (3.1), то співвідношення типу Бореля (3.2) справджується зовні деякої множини E нульової лінійної щільності при умові

$$\ln n_\alpha(t)=o(\psi_1^{-1}(t))\quad (t\to+\infty), \tag{3.3}$$

де $n_\alpha(t) = \sum_{\lambda_n+\beta\le t} 1$ – лічильна функція послідовності $\alpha_n = \lambda_n + \beta_n$, а $\psi_1(t) \in L(\Phi)$ $(L(\Phi) = \{\psi_1 \in L^+ : (\forall b > 0) \quad \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_0^{b\Phi(R)} \frac{d\psi^{-1}(x)}{x} = 0\})$.

У цій же роботі доведено Твердження 2, у якому також йдеться про співвідношення (3.2). У цьому твердженні так само $\tau \in L$, $\Phi \in L^+$, $\Phi_1(x) = x\Phi(x)$, для функції $\psi_1 \in L(\Phi)$ виконується (3.3), але $F \in \underline{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ ($\underline{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ – клас функцій $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ таких, що $(\exists x_j \uparrow +\infty)$: $\ln F(x_j) \le \Phi_1(x_j)$, $(j \ge 1)$). Варто наголосити, що у Твердженні 2 співвідношення (3.2) справджується зовні деякої множини E нульової нижньої лінійної щільності.

У роботі [40] встановлено необхідну і достатню умову для виконання співвідношення типу Бореля, а саме

$$\ln F(\sigma) \sim \ln \mu(\sigma, F)$$

для функціональних рядів вигляду

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\sigma\lambda_n),$$

які є збіжними для всіх $\sigma \ge 0$. Цією умовою є умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty.$$

У праці [41] автори знайшли необхідну умову, а саме:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n(\lambda_n + \beta_n)} < +\infty$$

за якої справджується співвідношення

$$\ln F(\sigma) \sim \ln \mu(\sigma), \quad \sigma \to +\infty$$

зовні деякої множини для кожної функції вигляду

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\{(\sigma\lambda_n + \tau(\sigma)\beta_n)\},$$

де $a_n \geq 0$ $(n \geq 0)$, $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$, $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}_+$, $\tau(\sigma)$ – фіксована додатна зростаюча функція,

$$\mu(\sigma) = \max\{a_n \exp\{(\sigma\lambda_n + \tau(\sigma)\beta_n)\} : n \geq 0\}.$$

У цьому розділі ми розглянемо функціональні ряди вигляду

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n f(\lambda_n x), \quad a_n \geq 0 \quad (n \geq 0),$$

які відрізняються від рядів Тейлора-Діріхле, проте є узагальненням рядів Діріхле.

3.1.1 Теорема про співвідношення типу Бореля

Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ неспадна до $+\infty$ послідовність. У [36, 40] одержано умови за яких для ряду вигляду

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\lambda_n x), \quad a_n \geq 0 \ (n \geq 0), \tag{3.4}$$

так само як і для інтегралів вигляду $\int_0^{+\infty} a(t) f(tx) \nu(dt)$, які є

узагальненням таких рядів, співвідношення типу Бореля

$$\ln F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu_F(x) \tag{3.5}$$

виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної Лебегової міри, де f додатна функція на $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, така що функція $y = \ln f(x)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ опукла функція на $\mathbb{R}_+$, $\mu(x, F) = \max\{a_n f(x\lambda_n)\colon n \geq 0\}$. У [33] співвідношення типу Бореля було розглянуто для більш загальних додатних інтегралів вигляду $\int_0^{+\infty} a(t) f(tx + \beta(t)\tau(x))\nu(dt)$, які, зокрема, є узагальненням рядів типу Тейлора-Діріхле. Зокрема, у статті [40] наступна теорема була доведена.

Теорема 3.1 ([40]). *Нехай $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ диференційовна функція така, що функція $\ln f(x)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ опукла і невід'ємна послідовність (λ_n) така що $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ $(0 \leq n \uparrow +\infty)$. Якщо функція F задана на $(0, +\infty)$ рядом вигляду* (3.13) *і умова*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln f(\lambda_n)} < +\infty \tag{3.6}$$

виконується, тоді існує множина $E \subset (0, +\infty)$ скінченної міри Лебега, така що асимптотичне співвідношення (3.5) *виконується при $x \to +\infty$ $(x \to +\infty,\ x \notin E)$.*

У статті [46], був розглянутий регулярно збіжний ряд вигляду $G(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n g(z\beta_n)$, такий що $\mathfrak{M}_G(r) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |b_n| M_g(r\beta_n) < +\infty$ для всіх $r > 0$, де $g(z)$ деяка ціла функція, (β_n) дана невід'ємна послідовність така що $\beta_n \uparrow +\infty$ $(n \uparrow +\infty)$, і $M_g(r) = \max\{|g(z)|\colon |z| = r\}$. Якщо ми тепер позначимо $F(x) = \mathfrak{M}_G(x)$, $f(x) = M_g(x)$, $\lambda_n = \beta_n$, то одержимо ряд вигляду (3.13), де функція $\ln f(x)$ логарифмічно опукла, тобто $h(x) := \ln f(e^x)$ опукла функція на $\mathbb{R}$.

У випадку функції $f(x) = e^x$ ми отримаємо цілий ряд Діріхле

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{x\lambda_n}.$$

Тоді, з огляду на умову,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln f(\lambda_n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty,$$

з Теореми 3.1 слідує твердження теореми з [34], одержаної для цілих рядів Діріхле. Зауважте, що у випадку коли функція $\ln f(x)$ не є опукла, ми не можемо застосувати твердження Теореми 3.1. Наступна гіпотеза із статті [46] є частково пов'язана з цією умовою. Позначимо $\Gamma_f(x) = x(\ln f(x))'$

Гіпотеза 3.1 ([46], М.М. Шеремета)**.** *Якщо*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\Gamma_f(\lambda_n)} < +\infty, \tag{3.7}$$

тоді для кожної функції F вигляду (3.13) *асимптотичне співвідношення* (3.5) *виконується при $x \to +\infty$ поза деякою виняткової множиною E такою що*

$$\int_E \Gamma_f(x) \frac{dx}{x} < +\infty.$$

Для кожної трансцендентної функції f ми отримаємо $\Gamma_f(r) = r(\ln M_f(r))'_+ \nearrow +\infty$ $(r \to +\infty)$. Тому, з умови $\int_E \Gamma_f(x)\frac{dx}{x} < +\infty$ випливає що $\int_E \frac{dx}{x} < +\infty$, тобто, множина E має скінченну Лебегову міру.

Якщо ми виберемо $\ln f(t) = (\ln t)^{1+\varrho}$, $\varrho > 0$, тоді $\Gamma_f(r) = (1 + \varrho)(\ln t)^{\varrho}$, тому умова (3.6) буде слабша, ніж умова (3.7). Однак тут є один нюанс. За умов гіпотези Шеремети функція

$\ln f(x)$ має бути логарифмічно опукла. А у твердженні Теореми 3.1, функція $\ln f(x)$ є опукла.

Доведемо наступне твердження.

Теорема 3.2. *Нехай* $f_0\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *диференційовна функція, така що функція* $y = \ln f_0(x)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *є опукла і правостороння похідна* $L(x, f_0) := (\ln f_0(x))'_+ \uparrow +\infty$ $(x \geq x_0)$*;* (β_n) *невід'ємна послідовність, така що* $0 \leq \beta_n \uparrow +\infty$ $(0 \leq n \uparrow +\infty)$*. Якщо функція* F_0 *зображена на* $(0, +\infty)$ *рядом вигляду*

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_0(\beta_n + x), \quad a_n \geq 0 \ (n \geq 0), \tag{3.8}$$

і умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nL(\beta_n, f_0)} < +\infty \tag{3.9}$$

виконується, то існує множина $E \subset (0, +\infty)$ *скінченної Лебегової міри, така що асимптотичне співвідношення*

$$\ln F_0(x) = (1 + o(1)) \ln \mu_{F_0}(x)$$

виконується при $x \to +\infty$ $(x \to +\infty,\ x \notin E)$*, де*

$$\mu_{F_0}(x) = \max\{a_n f_0(\beta_n + x)\colon n \geq 0\}.$$

Доведення. Без зменшення загальності можемо припустити, що $f_0(0) = 1$. Міркування подібні як у статтях [33, 36, 37, 40]. Легко побачити, що

$$F_0(x) = \int_0^{+\infty} a(t) f_0(t + x) dn_\beta(t),$$

де $n_\beta(t) = \sum_{\beta_n \leq t} 1$, $a(t)$ – деяка невід'ємна dn_β-вимірна функція, така що $a(\beta_n) = a_n$ $(n \geq 0)$ і $a(t) = 0$ для всіх $t \notin \{\beta_n\colon n \geq 0\}$.

Для фіксованого $x > 0$ покладемо

$$G := G_x = \Big\{ t > 0 \colon (\ln f_0(u))' \Big|_{u=x+t} \le 2g_0'(x) \Big\},$$

де $g_0(x) := \ln F_0(x)$. Тому

$$\int_{\mathbb{R}_+ \setminus G} a(t) f_0(t+x) dn_\beta(t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+ \setminus G} a(t) f_0'(t+x) \Big((\ln f_0(u))' \Big|_{u=t+x} \Big)^{-1} dn_\beta(t) \le$$

$$\le \frac{1}{2g_0'(x)} \int_{\mathbb{R}_+ \setminus G} a(t) f_0'(t+x) dn_\beta(t) \le$$

$$\le \frac{1}{2g_0'(x)} \int_{\mathbb{R}_+} a(t) f_0'(t+x) dn_\beta(t) = \frac{F_0(x)}{2}.$$

Отже,

$$F_0(x) = \int\limits_G a(t) f_0(t+x) dn_\beta(t) + \int_{\mathbb{R}_+ \setminus G} a(t) f_0(t+x) dn_\beta(t) \le$$

$$\le \int\limits_G a(t) f(t+x) dn_\beta(t) + \frac{F_0(x)}{2},$$

тобто

$$F_0(x) \le 2 \int\limits_G a(t) f_0(t+x) dn_\beta(t) \le 2\mu_0(x, F) \nu_0(2g_0'(x)), \quad (3.10)$$

де $\nu_0(t) := \sum\limits_{L(\beta_n, f_0) \le t} 1.$

Тепер нам потрібно наступне твердження ([37]): для даної неспадної функції $\nu_0(t) \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ умова

$$(\exists t_0 > 0) \colon \quad \int_{t_0}^{+\infty} \frac{d \ln \nu_0(t)}{t} < +\infty, \quad (3.11)$$

еквівалента тій умові, що існує неперервна функція $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ така що $\psi(t) \uparrow +\infty$ $(t_0 \le t \to +\infty)$ і

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty, \qquad \ln \nu_0(t) = o(\psi^{-1}(t)) \quad (t \to +\infty). \quad (3.12)$$

Легко бачити, що умова (3.11) слідує з умови (3.9).

Для функції $\psi_0(t) = \psi(t)/2$ позначимо множину

$$E := \{x > x_0\colon g_0'(x) \ge \psi_0(g_0(x))\}.$$

Оскільки,

$$\begin{aligned} meas(E \cap [x_0, +\infty)) = \int_E dx \le \int_E \frac{g_0'(x)}{\psi_0(g_0(x))} dx \le \\ \le \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi_0(t)} < +\infty, \end{aligned} \quad (3.13)$$

множина E має скінченну міру Лебега. Тому, з нерівності (3.10) і співвідношення (3.12) ми одержуємо

$$\ln F_0(x) \le \ln 2 + \ln \mu(x, F_0) + \ln \nu_0(2g_0'(x)) \le$$

$$\le \ln 2 + \ln \mu(x, F_0) + \ln \nu_0(\psi(g_0(x))) = \ln \mu(x, F_0) + o(g_0(x))$$

при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

□

З Теореми 3.2 ми негайно одержуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.1. *Нехай (λ_n) неспадна до $+\infty$ послідовність і функція F зображена регулярно збіжним функціональним рядом вигляду* (3.13)*, де f є ціла функція. Якщо умова* (3.7) *виконується, тоді співвідношення*

$$\ln M_F(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_F(r)$$

виконується при $r \to +\infty$ поза множиною скінченної логари-

фмічної міри, де

$$\mu_F(r) = \max\{|a_n| M_f(r\lambda_n) \colon \geq 0\}.$$

Доведення. Позначимо $f_0(x) = M_f(e^x)$, $F_0(x) = M_F(e^x)$, $\beta_n = \ln \lambda_n$, і розглянемо ряд вигляду (3.8). Тоді

$$\mu_F(e^x) \leq M_F(e^x) \leq F_0(x),$$

$$L(x, f_0) = (\ln f_0(x))'_+ = \left.\frac{d \ln M_f(r)}{d \ln r}\right|_{r=e^x} = \Gamma_f(e^x).$$

Залишається застосувати твердження Теореми 3.2. □

3.2 Про стійкість максимального члена функціонального ряду за системою функцій

Стійкість максимального члена функціонального ряду досліджували автори у статтях [15], [28].

У роботі [15] розглядаються цілі кратні ряди Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z,\lambda_n)}, \quad z \in \mathbb{C}^p, \quad p \geq 1$$

з показниками, які задовольняють умову $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, ..., \lambda_{n_p}^{(p)})$, $n = (n_1, ..., n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $0 \leq \lambda_k^{(j)} \leq \lambda_{k+1}^{(j)} \to +\infty$, $(0 \leq k \to +\infty)$. Якщо неспадна функція $w : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ і $\nu_1(t) = \sum_{\|\lambda_n\| \leq t} e^{w(\|\lambda_n\|)}$, $\|a\| = a_1 + ... + a_p$, $(a, b) = a_1 b_1 + ... + a_p b_p$ для $a = (a_1, ..., a_p)$, $b = (b_1, ..., b_p) \in \mathbb{C}^p$, якщо

$$\int_1^{+\infty} t^{-1} d \ln \nu_1(t) < +\infty$$

і F_w – цілий кратний ряд Діріхле, $F_w(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{w(\|\lambda_n\|)+(z,\lambda_n)}$, то

$$\ln \max \left\{ |a_n| e^{w(\|\lambda_n\|)+(\sigma,\lambda_n)} : n \in \mathbb{Z}_+^p \right\} \sim$$

$$\sim \ln \max \left\{ |a_n| e^{(\sigma,\lambda_n)} : n \in \mathbb{Z}_+^p \right\}$$

при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \setminus E)$ для кожного конуса K в $\mathbb{R}_+^p$ з вершиною в точці O такого, що $\overline{R} \setminus \{O\} \in \mathbb{R}_+^p$, а вимірна множина $E \subset \mathbb{R}_+^p$ така, що

$$\tau_p(E \cap K) = \int_{E \cap K} \frac{d\sigma_1 ... d\sigma_p}{|\sigma|^{p-1}} < +\infty.$$

У статті [28] автори знайшли необхідні і достатні умови для

того, щоб логарифми максимального члена цілого ряду Діріхле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$ і максимального члена цілого ряду Діріхле $B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n e^{z\lambda_n}$ були асимптотично еквівалентними при $Re\ z \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри.

Нехай $\mathscr{S}(f, \Lambda)$ клас додатних збіжних для всіх $x \geq 0$ функціональних рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f(x\lambda_k). \tag{3.14}$$

Нехай $\mathscr{S}_+(f_0, \Lambda)$ клас додатних збіжних для всіх $x \geq 0$ функціональних рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f_0(x + \lambda_k), \tag{3.15}$$

таких що $a_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$, де $\Lambda = (\lambda_k)$ деяка послідовність невід'ємних чисел $\lambda_k \geq 0$ $(k \geq 0)$, $\lambda_k \neq \lambda_j$ для $k \neq j$, і f, f_0 додатні функції, такі що $\ln f(x)$ і $\ln f_0(x)$ опуклі на $[0, +\infty)$.

У випадку $f(x) \equiv e^x$ ми одержуємо ряд Діріхле

$$F_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{x\lambda_k}, \tag{3.16}$$

що збігається для всіх $x \geq 0$.

Нехай L клас додатних неперервних на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ функцій $l(t)$, таких що $l(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Через L^+ ми позначимо підклас L такий, що $l(t) \uparrow +\infty$, а через $\mathscr{W}$ клас функцій $w \in L^+$ таких, що

$$\int_1^{+\infty} x^{-2} w(x)\, dx < +\infty.$$

Для ряду $F \in \mathscr{S}(f, \Lambda)$ і довільної послідовності (b_n), $b_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, ми розглядаємо

$$B^+(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n f(x\lambda_n),$$

$$B^-(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{-1} f(x\lambda_n).$$

Твердження 3.1. *Якщо послідовність* $\{b_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ *задовольняє умову*

$$b = \lim_{n \to +\infty} \frac{\max\{\ln b_n, -\ln b_n\}}{\ln f(\lambda_n)} < +\infty, \tag{3.17}$$

тоді

$$F \in \mathscr{S}(f, \Lambda) \Longleftrightarrow B^+ \in \mathscr{S}(f, \Lambda) \Longleftrightarrow B^- \in \mathscr{S}(f, \Lambda).$$

Доведення. З умови (3.17)

$$\max\{\ln b_n, -\ln b_n\} \leq b^* \ln f(\lambda_n) \qquad (n \geq 1) \tag{3.18}$$

для деякого $b^* < +\infty$. Якщо $F \in S(f, \Lambda)$, тоді з опуклості $\ln f(x)$ ми отримуємо

$$\frac{\ln f(2x\lambda_n) - \ln f(x\lambda_n)}{x\lambda_n} \geq \frac{\ln f(x\lambda_n)}{x\lambda_n} \geq \frac{\ln f(\lambda_n)}{\lambda_n} \tag{3.19}$$

для всіх $x \geq 1$. Отже, для довільного фіксованого $b^* < +\infty$ отримуємо

$$b^* \ln f(\lambda_n) + \ln f(x\lambda_n) \leq \ln f(2x\lambda_n) \qquad (x \geq b^*). \tag{3.20}$$

Комбінуючи нерівності (3.18) і (3.20) ми одержуємо

$$b_n a_n f(x\lambda_n) \leq a_n f(2x\lambda_n),$$

Отже, $F \in \mathscr{S}(f,\Lambda) \Rightarrow B^+ \in \mathscr{S}(f,\Lambda)$.

Доведемо імплікацію навпаки $B^+ \in \mathscr{S}(f,\Lambda) \Rightarrow F \in \mathscr{S}(f,\Lambda)$. Використовуючи нерівності (3.18) і (3.20), ми отримуємо

$$a_n f(x\lambda_n) \le b_n a_n \exp\{\ln f(x\lambda_n) + b_* \ln f(\lambda_n)\} \le$$

$$\le b_n a_n f(2x\lambda_n) \quad (x \ge b_*),$$

і знову, за умовою (3.18), ми маємо $B^+ \in \mathscr{S}(f,\Lambda) \Rightarrow F \in \mathscr{S}(f,\Lambda)$.

Із доведених імплікацій, ми легко одержуємо, що

$$B^+ \in \mathscr{S}(f,\Lambda) \Longleftrightarrow B^- \in \mathscr{S}(f,\Lambda).$$

□

Через $\mathscr{S}^*(f,\Lambda)$ ми позначимо клас формальних рядів вигляду (3.14) таких, що $a_n f(x\lambda_n) \to 0$ при $n \to +\infty$ для кожного $x \in \mathbb{R}_+$. Тоді

$$\mu(x,F) = \max\{a_n f(x\lambda_n) : n \ge 0\} < +\infty.$$

Твердження 3.2. *Якщо $F \in \mathscr{S}^*(f,\Lambda)$ і умова*

$$h := \lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln a_n}{\ln n} > 1 \tag{3.21}$$

або умова

$$\tau_f(\Lambda) := \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln f(\lambda_n)} < +\infty \tag{3.22}$$

виконується, тоді $F \in \mathscr{S}(f,\Lambda)$.

Доведення. Достатньо довести збіжність ряду (3.14) для всіх достатньо великих x. Спершу, припустимо, що виконується умова (3.22). З умов $F \in \mathscr{S}^*(f,\Lambda)$ і (3.22) випливає, що для

даного x нерівності

$$a_n f(2x\lambda_n) \le 1, \qquad \ln n < \tau \ln f(\lambda_n)$$

з деяким $\tau \in (\tau_f(\Lambda), +\infty)$ справджуються для всіх $n \ge n_0$. Тому, для $x \ge 2\tau$ з нерівностей (3.19) отримуємо

$$\begin{aligned} a_n f(x\lambda_n) &= a_n f(2x\lambda_n) \exp\{-\big(\ln f(2x\lambda_n) - \ln f(x\lambda_n)\big)\} \\ &\le \exp\{-\ln f(x\lambda_n)\} \le \exp\{-x \ln f(\lambda_n)\} \le \exp\{-2\ln n\}. \end{aligned}$$

Відтак, ряд (3.14) є збіжний для всіх $x \ge 2\tau$.

Припустимо тепер, що умова (3.21) виконується. Подібно до нерівностей (3.19) ми маємо

$$\frac{\ln f(Kx\lambda_n) - \ln f(x\lambda_n)}{(K-1)x\lambda_n} \ge \frac{\ln f(x\lambda_n)}{x\lambda_n}, \qquad K > 1,$$

отже,

$$\ln f(Kx\lambda_n) \ge K \ln f(x\lambda_n).$$

З умов $F \in \mathscr{S}^*(f, \Lambda)$ і нерівності (3.19) випливає, що для даного x

$$\ln a_n + x \ln f(\lambda_n) \to -\infty \qquad (n \to +\infty).$$

Відтак, з умови (3.21),

$$\ln a_n \le -h^* \ln n$$

для довільного $h^* \in (1, h)$ і для всіх достатньо великих $n \ge n_0$, ми отримуємо

$$\ln a_n + \ln f(x\lambda_n) \le \left(1 - \frac{1}{K}\right) \ln a_n \le -\left(1 - \frac{1}{K}\right) h^* \ln n.$$

Виберемо $K > 1$ таким, що

$$h_1 := \left(1 - \frac{1}{K}\right) h^* > 1.$$

Тоді

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n f(x\lambda_n) \le \sum_{n=n_0}^{+\infty} n^{-h_1} < +\infty,$$

тобто $F \in \mathscr{S}(f, \Lambda)$. □

3.2.1 Стійкість максимального члена ряду

Ми називаємо ряд вигляду (3.14) (максимальний член ряду) *стійким* якщо співвідношення

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B^+) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B^-)$$

виконуються при $x \to +\infty$ зовні деякої множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної Лебегової міри, тобто,

$$\operatorname{meas} E := \int_E dx < +\infty.$$

Для функції $w \in L$ позначимо

$$B_w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{w(\lambda_n)} f(x\lambda_n).$$

З Теореми 2 і Теореми 3 у [15], доведених для цілих кратних рядів Діріхле, випливає наступне твердження.

Теорема А ([15], Теорема 2)**.** *Нехай* $w \in L$, $B_w \in D^*(\Lambda)$ *і умова*

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty$$

справджується, де

$$\nu_0(t) = \int_0^t e^{w(x)}\, dn(x), \qquad n(x) = \sum_{\lambda_n \le x} 1.$$

Тоді співвідношення

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B_w)$$

виконується при $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* $E \subset [0, +\infty)$ *з* $\operatorname{meas} E < +\infty$.

З Теореми А слідує наступний наслідок.

Наслідок 3.2. *Нехай* $F \in \mathscr{D}^*(\Lambda)$. *Якщо існує функція* $w \in L$, *така що* $F_w \in \mathscr{D}^*(\Lambda)$, $\ln \nu \in \mathscr{W}$ *(де* $\nu(t) = \sum_{\lambda_n \le t} e^{w(\lambda_n)}$*) і*

$$e^{-w(\lambda_n)} \le b_n \le e^{w(\lambda_n)} \qquad (n \ge k_1), \tag{3.23}$$

тоді існує множина $E \subset \mathbb{R}_+$ *скінченної Лебегової міри, така що*

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B^+) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B^-)$$

при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

Інші версії цього твердження були доведені раніше у статті [42].

Позначимо

$$\nu_0(t) = \nu\{u \ge 0 : \ln f(u) \le t\}, \qquad \nu(G) = \sum_{\lambda_n \in G} e^{w(\lambda_n)}$$

для кожної обмеженої множини $G \subset \mathbb{R}_+$.

У цьому повідомленні ми спершу доведемо наступну теорему.

Теорема 3.3. *Нехай* $F \in \mathscr{S}^*(f, \Lambda)$. *Якщо існує функція* $w \in L^+$ *така, що* $B_w \in \mathscr{S}^*(f, \Lambda)$, $\ln \nu_0 \in \mathscr{W}$ *і нерівності*

$$e^{-w(\lambda_n)} \le b_n \le e^{w(\lambda_n)}$$

виконуються, тоді існує множина $E \subset \mathbb{R}_+$ *скінченної міри*

Лебега така, що співвідношення

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B^+) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B^-)$$

справджується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

Нам потрібне наступне твердження з [33, Наслідок 1]. Ми розглядаємо клас $\mathscr{I}(\nu, f)$ функцій $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ зображуваних інтегралами вигляду

$$F(x) = \int_0^{+\infty} g(t) f(tx)\, \nu(dt),$$

де ν локально скінченна міра на $\mathbb{R}_+$, g додатна ν-вимірна функція, і f додатна зростаюча до $+\infty$ функція на $[0, +\infty)$ така, що $f(0) = 1$ і $\ln f(x)$ є опукла на $[0, +\infty)$.

Лема 3.1 ([33])**.** *Якщо умова*

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty$$

справджується з

$$\nu_0(t) = \nu\big(\{u \geq 0 : \ln f(u) \leq t\}\big),$$

тоді для кожної функції $F \in \mathscr{I}(\nu, f)$ *існує множина* E *скінченної міри Лебега така, що асимптотичне співвідношення*

$$\ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, F) \tag{3.24}$$

виконується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$, *де*

$$\mu(x, F) = \sup\{g(t) f(tx) : t \in \operatorname{supp} \nu\}$$

і $\operatorname{supp} \nu$ *є носій міри* ν.

Доведення Теореми 6.1. Зазначимо, що зі співвідношення

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B_w)$$

при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної Лебегової міри, випливають нерівності (3.23).

Нехай $a(t)$ і $b(t)$ – вимірні невід'ємні функції на $\mathbb{R}_+$ такі, що

$$a(\lambda_n) = a_n, \qquad b(\lambda_n) = e^{w(\lambda_n)},$$

і

$$\mu(x, F) = \sup\{a(t)f(tx) : t \in \mathbb{R}_+\},$$
$$\mu(x, B_w) = \sup\{a(t)b(t)f(tx) : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Достатньо покласти $a(t) = 0$ для $t \notin \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}_+$ ми отримуємо

$$\begin{aligned} \mu(x, F) \le \mu(x, B_w) \le B_w(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b(\lambda_n) f(x\lambda_n) = \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} a(t) f(tx)\, \nu(dt), \end{aligned} \tag{3.25}$$

де міра ν визначена як

$$\nu(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} b(\lambda_n)\delta_{\lambda_n}(G)$$

для кожної обмеженої множини $G \subset \mathbb{R}_+$ і $\delta_\lambda(G) = 1$, якщо $\lambda \in G$, $\delta_\lambda(G) = 0$ в іншому випадку.

З умови $\ln \nu_0 \in \mathscr{W}$ ми негайно отримуємо, що умови Леми 3.1 виконуються. Застосовуючи Лему 3.1 до інтеграла у (3.25), при $x \to +\infty$ ($x \notin E$), ми одержуємо

$$\ln \mu(x, F) \le \ln \mu(x, B_w) \le (1 + o(1)) \ln \mu^*(x),$$

де

$$\mu^*(x) = \max\{a(t)f(tx) : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Згідно з вибором функції $a(t)$ ми маємо $\mu^*(x) = \mu(x, F)$, що доводить бажане співвідношення. □

3.3 Про співвідношення типу Бореля для деяких додатних інтегралів

Співвідношення типу Бореля вже згадувалося у підрозділі 3.1 розділу 3 цієї роботи. Додам, що у роботах [30] та [6] подібно авторами було розглянуто питання співвідношення типу Бореля застосоване до експоненціальних рядів у першому випадку і до функціональних рядів дещо іншого вигляду у другому.

Додатний інтеграл, такий як у цьому розділі розглядався у статті [36].

У роботі [8] автори розглянули співвідношення типу Бореля до функціональних рядів вигляду $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\beta_n + x)$, де $a_n \geq 0$, β_n – невід'ємна послідовність така, що $0 \leq \beta_n \uparrow +\infty$ $(0 \leq n \uparrow +\infty)$, а функція f – диференційовна така, що функція $\ln f(x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ є опукла, і її правостороння похідна $L(x, f) = (\ln f(x))'_+$ строго зростає до $+\infty$ $(x \geq x_0)$.

Скрізь надалі ми вважатимемо, що $\lambda = (\lambda_n)$ є додатна неспадна послідовність, тобто, $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, і $f\colon \mathbb{R}_+ := (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ додатна Борелева функція. На додачу, нехай ν Борелева міра на σ-алгебрі $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ Борелевих множин з $\mathbb{R}_+$. Ми також позначимо через $I(\nu, f)$ клас функцій $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ зображуваних для кожного $x \in \mathbb{R}$ інтегралом вигляду

$$F(x) = \int_0^{+\infty} a(t) f(tx) \nu(dt), \tag{3.26}$$

де $a\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ Борелева функція. У випадку $\nu(dt) = dn_\lambda(t)$, де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ лічильна функція послідовності λ, ми

отримуємо клас $D(\lambda, f) := I(\nu, f)$ рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f(\lambda_n x), \quad a_n \geq 0 \ (n \geq 0), \tag{3.27}$$

де $a_n = a(\lambda_n) \geq 0$ $(n \geq 0)$. Для функцій $a(t)\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(t)\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, міри ν і кожного $x > 0$ ми позначимо

$$\mu_*(x) = \sup\{a(t)f(tx)\colon t \in \operatorname{supp} \nu\}.$$

Зауваження: $\operatorname{supp} dn_\lambda = \{\lambda_n\colon n \geq 0\}$. Тому,

$$\mu_*(x) = \sup\{a_n f(t\lambda_n)\colon n \geq 0\} := \mu(x, F)$$

максимальний член ряду (3.27).

У статтях [36, 40], були одержані умови за яких, співвідношення типу Бореля

$$\ln F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu_*(x) \tag{3.28}$$

справджується при $x \to +\infty$ для рядів вигляду (3.27) зовні деякої множини скінченної Лебегової міри, де f додатна функція на $\mathbb{R}_+$, така, що допоміжна функція $y = \ln f(x)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ є опукла на $\mathbb{R}_+$.

Зокрема, у статті [36] наступна теорема була доведена.

Теорема 3.4 ([36]). *Якщо умова*

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty \tag{3.29}$$

виконується з $\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 : \ln f(u) \leq t\}$, *тоді для кожної функції* $F \in I(\nu, f)$ *існує множина* E *скінченної Лебегової міри, така що асимптотичне співвідношення* (3.28) *виконується при* $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

У випадку $\nu(dt) = dn_\lambda(t)$, умова (3.29) є еквівалентна (див. результати для додатних інтегралівsee [33] і для рядів Діріхле [34, 36, 37]) до умови

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln f(\lambda_n)} < +\infty. \tag{3.30}$$

Тому, з Теореми 3.4 ми отримуємо

Теорема 3.5 ([40]). *Нехай $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ диференційовна функція, така що функція $\ln f(x)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ є опукла функція і невід'ємна послідовність (λ_n) є така, що $0 \le \lambda_n \uparrow +\infty$ $(0 \le n \uparrow +\infty)$. Якщо функція F зображена на $(0, +\infty)$ рядом вигляду (3.27) і умова (3.30) справджується, тоді існує множина $E \subset (0, +\infty)$ скінченної Лебегової міри така, що асимптотичне співвідношення (3.28) виконується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.*

У [33], подібний результат про співвідношення типу Бореля (3.28) було одержано для більш загальних додатних інтегралів вигляду

$$F(x) = \int_0^{+\infty} a(t) f(tx + \beta(t)\tau(x))\nu(dt), \tag{3.31}$$

які є, зокрема, узагальненням рядів типу Тейлора-Діріхле. Тут $a(t)$, $\beta(t)$ є додатні Борелеві функції, а функція f така ж як і вище.

Теорема 3.6 ([33]). *Нехай F функція має вигляд (3.31). Якщо функція $\tau(x)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ диференційовна на $[x_0, +\infty)$, така що $\tau'(x) \ge 1$ $(x \ge x_0)$ і умова (3.29) виконується при*

$$\nu_0(t) = \nu\big(\{u \ge 0\colon \ln f(u + \beta(u)) \le t\}\big),$$

тоді для кожної функції F вигляду (3.31) існує множина E скінченної Лебегової міри, така що асимптотичне співвідношення (3.28) виконується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

У статті [46] (див. також [12,13]) було розглянуто ругулярно збіжні ряди вигляду

$$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n g(z\beta_n), \tag{3.32}$$

такі, що $\mathfrak{M}_G(r) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |b_n| M_g(r\beta_n) < +\infty$ для всіх $r > 0$, де $g(z)$ деяка ціла функція, (β_n) є дана невід'ємна послідовність, така що $\beta_n \uparrow +\infty$ $(n \uparrow +\infty)$, і $M_g(r) = \max\{|g(z)| \colon |z| = r\}$. Якщо ми тепер позначимо $F(x) = \mathfrak{M}_G(x)$, $f(x) = M_g(x)$, $\lambda_n = \beta_n$, то отримаємо ряд вигляду (3.27), де функція $\ln f(x)$ є логарифмічно опукла, тобто, функція $h(x) := \ln f(e^x)$ є опукла на $\mathbb{R}$. Зростання та деякі властивості подібних рядів були також вивчені у [14,47,50], композиція Адамара таких рядів була розглянута у [51], обмеженість $\ell - \mathfrak{M}$-індекса для них нещодавно була обстежена у [52,53].

Для функції $f(x) = e^x$ ми одержимо цілий ряд Діріхле $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{x\lambda_n}$. Тоді, за умови

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/\big(n \ln f(\lambda_n)\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/\big(n\lambda_n\big) < +\infty,$$

з Теореми 3.5 випливає твердження теореми у [34] для цілих рядів Діріхле. Зауважимо, що у випадку, коли функція $\ln f(x)$ не є опукла, ми не можемо застосувати твердження Теореми 3.1. Наступна гіпотеза зі статті [46] є частково відповідна до цієї обставини.

Позначимо $\Gamma_f(x) = x(\ln f(x))'_+$.

Гіпотеза 3.2 ([46]). *Якщо*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\Gamma_f(\lambda_n)} < +\infty, \tag{3.33}$$

тоді асимптотичне співвідношення (3.28) *справджується при* $x \to +\infty$ *поза деякою винятковою множиною* E *такою, що* $\int_E \Gamma_f(x)\frac{dx}{x} < +\infty$ *для кожної функції* F *вигляду* (3.27).

Для кожної трансцендентної функції f ми отримуємо $\Gamma_f(r) = r(\ln M_f(r))'_+ \nearrow +\infty$ $(r \to +\infty)$. Тому, з умови $\int_E \Gamma_f(x)\frac{dx}{x} < +\infty$ випливає, що $\int_E \frac{dx}{x} < +\infty$, тобто, множина E має скінченну логарифмічну міру (це було некоректно записано у [8], що множина E має скінченну міру Лебега).

Зауважимо, що у різних випадках умова (3.30) може бути або слабша за умову (3.33), або сильніша. Справді, якщо ми виюеремо ([8]) $\ln f(t) = (\ln t)^{1+\varrho}$, $\varrho > 0$, тоді $\Gamma_f(r) = (1+\varrho)(\ln t)^{\varrho}$ і умова (3.30) є слабша за умову (3.33). Проте, у випадку $\Gamma_f(r)/r \nearrow +\infty$ $(r_0 \le r \to +\infty)$, ми маємо

$$\ln f(x) - \ln f(r_0) = \int_{r_0}^{r} \frac{\Gamma_f(t)}{t} dt \le \Gamma_f(r) \quad (r \to +\infty).$$

Отож умова (3.30) є, в загальному, сильніша, ніж умова (3.33). Однак, тут є нюанс. За умови гіпотези Шеремети функція $\ln f(x)$ має бути логарифмічно опукла. А за твердженням теореми 3.5, функція $\ln f(x)$ є опукла. Слід зазначити, що умова $\Gamma_f(r)/r \nearrow +\infty$ $(r_0 \le r \to +\infty)$ означає, що у Теоремі 3.5 функція $\ln f(x)$ є опукла. Тепер сформулюємо наступну гіпотезу.

Гіпотеза 3.3. *Твердження Гіпотези 3.2 ([46]) виконується у випадку, якщо функція* f *така, що функція* $\ln f(x)$ *є опукла.*

Подібну гіпотезу ми формулювали також про співвідношення Бореля для класу $I(\nu, f)$.

Гіпотеза 3.4. *Якщо умова* (3.29) *справджується з* $\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 : \ln f(u) \leq t\}$ *і функція* f *є така, що функція* $\ln f(x)$ *опукла, тоді для кожної функції* $F \in I(\nu, f)$ *існує множина* E, *така що* $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\Gamma_f(x)}{x} dx < +\infty$ *і асимптотичне співвідношення* (3.28) *виконується при* $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

3.3.1 Головний результат: Співвідношення типу Бореля

Нехай $I_+(\nu, f)$ клас функцій $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ зображуваних інтегралами вигляду

$$F(x) = \int_0^{+\infty} a(t) f(x+t) \nu(dt),$$

де ν локально скінченна міра на $\mathbb{R}_+$, a додатня ν-вимірна функція, f додатна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція така, що $f(0) = 1$ і $\ln f(x)$ опукла на інтервалі $[0, +\infty)$ функція.

Наступне твердження є аналогом до Теореми 3.3 для інтегралів з класу $I_+(\nu, f)$ і дає позитивну відповідь на Гіпотезу 1 з [6].

Твердження 3.3. *Якщо умова*

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty \tag{3.34}$$

справджується з $\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 : (\ln f(u))' \leq t\}$, *тоді для кожної функції* $F \in I_+(\nu, f)$ *існує множина* E *скінченної Лебегової міри така, що асимптотичне співвідношення*

$$\ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$$

виконується при $x \to +\infty$, $(x \notin E)$, *де* $\mu(x, F) = \sup\{a(t) f(x+t) : x \in supp\ \nu\}$ *і* $supp\ \nu$ *є носієм міри* ν.

Доведення. Позначимо $g(x) = \ln F(x)$. У поточному доведенні, ми міркуємо подібно до доведення Теореми 3.3 у [8]. Ми припускаємо, що $f'(x)$ позначає правосторонню похідну.

Оскільки $g_0(x) := \ln f(x)$ опукла функція на $\mathbb{R}_+$, $(\ln f(t))' \le (\ln f(u))'\big|_{u=x+t}$ і $f'(x+t) > 0$ для фіксованого $x > 0$ і для кожного $t > 0$. Тоді для фіксованого $x > 0$

$$G := G_x = \left\{ t > 0 \colon (\ln f(u))'\Big|_{u=x+t} \le 2g'(x) \right\} \subset$$

$$\subset \{ t > 0 \colon (\ln f(t))' \le 2g'(x) \} := G_0,$$

де $g(x) := \ln F(x)$. Відтак,

$$\nu(G) \le \nu(G_0) = \nu_0(2g'(x)).$$

Для $x > 0$ і $t \notin G_x$ ми маємо $(\ln f(u))'\Big|_{u=x+t} > 2g'(x)$, тобто,

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus G} a(t) f(t+x)\nu(dt) = \int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus G} a(t) \frac{f'(t+x)}{(\ln f(u))'\big|_{u=t+x}} \nu(dt) \le$$

$$\le \frac{1}{2g'(x)} \int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus G} a(t) f'(t+x)\nu(dt) \le$$

$$\le \frac{F(x)}{2F'(x)} \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(t) f'(t+x)\nu(dt) = \frac{F(x)}{2},$$

тому що $F'(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(t) f'(t+x)\nu(dt)$. Отже,

$$F(x) = \int\limits_{G} a(t) f(t+x)\nu(dt) + \int_{\mathbb{R}_+\setminus G} a(t) f(t+x)\nu(dt) \le$$

$$\le \int\limits_{G} a(t) f(t+x)\nu(dt) + \frac{F(x)}{2}.$$

Звідси,

$$F(x) \le 2\int\limits_G a(t)f(t+x)\nu(dt) \le 2\mu(x,F)\nu(G) \le \\ \le 2\mu(x,F)\nu_0(2g'(x)), \tag{3.35}$$

$x \ge x_0$, де $\nu_0(t) := \nu\{u \ge 0\colon (\ln f(u))' \le t\}$.

Тепер ми потребуємо наступну лему ([33, 37]).

Лема 3.2. *Для даної неспадної функції* $\nu_0(t)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *умова*

$$(\exists t_0 > 0)\colon \quad \int_{t_0}^{+\infty} \frac{d\ln\nu_0(t)}{t} < +\infty, \tag{3.36}$$

еквівалентна до кожної із двох наступних умов: i) умова (3.34)*; ii) існує неперервна функція* $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *така, що* $\psi(t) \uparrow +\infty$ $(t_0 \le t \to +\infty)$ *і*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty, \qquad \ln\nu_0(t) = o(\psi^{-1}(t)) \quad (t \to +\infty). \tag{3.37}$$

Для функції $\psi_0(t) = \psi(t)/2$ позначимо множину

$$E := \{x > x_0\colon g'(x) \ge \psi_0(g(x))\}.$$

Стандартно тепер одержуємо наступну оцінку міри Лебега множини E

$$\text{meas}\,(E \cap [x_0, +\infty)) = \int_E dx \le \int_E \frac{g'(x)}{\psi_0(g(x))}dx \le \\ \le \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi_0(t)} < +\infty,$$

тобто, множина E має скінченну міру Лебега. Тому, з нерівності (3.35) і співвідношення (3.37) ми нарешті отримуємо

$$\ln F(x) \le \ln 2 + \ln\mu(x,F) + \ln\nu_0(2g'(x)) \le$$

$$\leq \ln 2 + \ln \mu(x, F) + \ln \nu_0(\psi(g(x))) = \ln \mu(x, F) + o(g(x))$$

при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$. Отже, $\ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$ as $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

□

3.3.2 Наслідок: Стійкість максимального члена

Розглянувши Твердження 3.3 і Лему 3.2, ми одержуємо наступні наслідки.

Наслідок 3.3 ([8], Теорема 2)**.** *Нехай $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ диференційовна функція така, що функція $y = \ln f(x)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ опукла функція і правостороння похідна $L(x, f) := (\ln f(x))'_+ \uparrow +\infty$ $(x \geq x_0)$; (λ_n) невід'ємна послідовність така, що $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ $(0 \leq n \uparrow +\infty)$. Якщо функція F зображена на $(0, +\infty)$ рядом вигляду*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f(\lambda_n + x), \quad a_n \geq 0 \quad (n \geq 0), \tag{3.38}$$

і умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nL(\lambda_n, f)} < +\infty \tag{3.39}$$

справджується, тоді існує множина $E \subset (0, +\infty)$ скінченної Лебегової міри, така що асимптотичне співвідношення $\ln F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu_F(x)$ виконується при $x \to +\infty$ $(x \to +\infty,\ x \notin E)$, де

$$\mu_F(x) = \max\{a_n f(\lambda_n + x)\colon n \geq 0\}.$$

Отже, для рядів вигляду (3.32) ми отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.4 ([8], Наслідок 1)**.** *Нехай* (β_n) *неспадна до* $+\infty$ *послідовність і функція* G *зображена регулярно збіжним функціональним рядом вигляду* (3.32)*, де* g *ціла функція. Якщо умова* (3.33) *справджується, тоді співвідношення* $\ln M_G(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_G(r)$ *виконується при* $r \to +\infty$ *поза множиною скінченної логарифмічної міри, де* $\mu_G(r) = \max\{|b_n| M_g(r\beta_n) \colon n \geq 0\}$.

Нехай L позначає клас додатних неперервних на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ функцій $l(t)$, таких що $l(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$. Через L_+ ми позначимо підклас L, такий що $l(t) \uparrow +\infty$ при $t \to +\infty$, а через $\mathcal{W}$ клас функцій $w \in L_+$, таких що

$$\int_1^{+\infty} x^{-2} w(x) dx < +\infty.$$

Позначимо через $D_+(\lambda, f)$ клас функцій $F \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ вигляду (3.38).

Для ряду $F \in D_+(\lambda, f)$ і довільної послідовності (b_n), $b_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ $(n \geq 0)$ ми розглянемо

$$B^+(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n f(x + \lambda_n), \quad B^-(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{-1} f(x + \lambda_n).$$

Ми кажемо, що ряд вигляду (3.38) (максимальний член ряду) **є стійкий**, якщо співвідношення

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B^+) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B^-)$$

виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної міри Лебега, тобто, $\operatorname{meas} E := \int_E dx < +\infty$.

Для функції $w \in L$ позначимо

$$B_w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{w(\lambda_n)} f(x\lambda_n).$$

Також позначимо

$$\nu_0(t) = \nu\{u \geq 0 \colon (\ln f(u))' \leq t\}, \quad \nu(G) = \sum_{\lambda_n \in G} e^{w(\lambda_n)}$$

для кожної обмеженої множини $G \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 3.7. *Нехай $F \in D_+(\lambda, f)$. Якщо існує функція $w \in L_+$, така що $B_w \in D_+(\lambda, f)$, $\ln \nu_0 \in \mathcal{W}$ і нерівності*

$$e^{-w(\lambda_n)} \leq b_n \leq e^{w(\lambda_n)} \quad (n \geq k_1),$$

виконуються, тоді існує множина $E \subset \mathbb{R}_+$ скінченної міри Лебега така, що співвідношення

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B_+) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B_-) \quad (3.40)$$

справджується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

Доведення Теореми 2.2. Зазначимо що співвідношення (3.40) буде слідувати з того факту, що

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, B_w) \quad (3.41)$$

при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної міри Лебега. Доведемо співвідношення (3.41).

Нехай $a(t), b(t)$ вимірні невід'ємні функції на $\mathbb{R}_+$, такі що $a(\lambda_n) = a_n$, $b(\lambda_n) = e^{w(\lambda_n)}$ і

$$\mu(x, F) = \sup\{a(t) f(t + x) : \ t \in \mathbb{R}_+\},$$

$$\mu(x, B_w) = \sup\{a(t) b(t) f(t + x) : \ t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Достатньо покласти $a(t) = 0$ для $t \notin \{\lambda_n \colon n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ ми отримаємо

$$\mu(x, F) \leq \mu(x, B_w) \leq B_w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b(\lambda_n) f(x + \lambda_n) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(t) f(t+x) \nu(dt), \tag{3.42}$$

де міра ν така, що $\nu(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} b(\lambda_n)\delta_{\lambda_n}(G)$ для кожної обмеженої множини $G \subset \mathbb{R}_+$ і $\delta_\lambda(G) = 1$ для $\lambda \in G$ і $\delta_\lambda(G) = 0$ для $\lambda \notin G$. Оскільки G обмежена і $\lambda_n \to +\infty$, це означає, що скінченне число λ_n належить множині G, тобто, для всіх $n \geq n_0(G)$ одержуємо, що $\delta_{\lambda_n}(G) = 0$. З огляду на це, ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} b(\lambda_n)\delta_{\lambda_n}(G)$ скорочується до скінченної суми $\sum_{n=0}^{n_0} b(\lambda_n)\delta_{\lambda_n}(G)$. Це призводить до σ-адитивності міри ν.

З умови $\ln \nu_0 \in \mathcal{W}$ ми негайно отримуємо, що умова (3.34) Твердження 3.3 є виконана через заміну $w(x) = \ln \nu_0(x)$ у (3.34). Застосовуючи Твердження 3.3 до інтеграла у (3.42), при $x \to +\infty$ ($x \notin E$), (тут множина E є така як у Твердженні 3.3) ми отримуємо

$$\ln \mu(x, F) \leq \ln \mu(x, B_w) \leq (1 + o(1)) \ln \mu_*(x),$$

де $\mu_*(x) = \max\{a(t)f(x+t) \colon t \in \mathbb{R}_+\}$. Функцію $a(t)$ ми можемо вибрати так, щоб виконувалась рівність $\mu_*(x) = \mu(x, F)$, тоді, остаточно отримуємо співвідношення (3.41). □

3.4 Інтеграли типу Лапласа-Стілт'єса: співвідношення Бореля і h-міра виняткової множини

Для кожної цілої функції, яка не є сталою, і має вигляд $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ скінченного порядку $\rho_f < +\infty$, і $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n \colon n \geq 0\}$ і $M_f(r) = \max\{|f(z)| \colon |z| = r\}$ добре відомо, що (див. [9, 11], [22, Part IV, Ch. 1, § 3, Problem 54]) співвід-

ношення (Бореля)

$$\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r)$$

справджується при $r \to +\infty$ ($r \in [0, +\infty) \setminus E$), де $\varepsilon > 0$ довільне дане і множина E має скінченну логарифмічну міру, тобто $\ln - \mathrm{meas}\ E := \int_{E \cap [1, +\infty)} d \ln r < +\infty$. Твердження про аналоги цього співвідношення Бореля були неодноразово доведені для цілого ряду Діріхле. У [34] доведено, що для того, щоб для кожного цілого ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \exp\{z\lambda_n\},\ \ 0 = \lambda_0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \uparrow +\infty\ (1 \leq n \uparrow +\infty),$$

співвідношення типу Бореля

$$\ln M(x, F) \sim \ln \mu(x, F) \tag{3.43}$$

виконувалося при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега, необхідно і достатньо, щоб наступна умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty, \tag{3.44}$$

виконувалася; тут

$$M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| \colon y \in \mathbb{R}\},$$
$$\mu(x, F) = \max\{|F_n| e^{x\lambda_n} \colon n \geq 0\}.$$

Подібні результати були також одержані для інтегралів вигляду

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(t) e^{xt} \nu(dt), \tag{3.45}$$

де ν невід'ємна міра $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ з необмеженим носієм, $a(t)$ довільна невід'ємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}_+$, $S = \operatorname{supp} \nu \cap \{x \in$

$\mathbb{R}_+\colon\ f(x) > 0\}$. Через $\mathcal{I}(\nu)$ позначимо клас функцій $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ зображуваних через інтеграли вигляду (3.45). Для $F \in \mathcal{I}(\nu)$ і $x \in \mathbb{R}$ позначимо

$$\mu_*(x, F) = \operatorname{ess\,sup}\{f(u)e^{xu}\colon u \in S\}.$$

Зокрема, у статті [37] наступна теорема була доведена.

Теорема 3.8 ([37]). *Якщо умова*

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu_0(t)\, dt < +\infty \tag{3.46}$$

справджується з $\nu_0(t) = \nu([0, t])$, *тоді для кожної функції* $F \in \mathcal{I}(\nu)$ *існує множина* E *скінченної Лебегової міри така, що асимптотичне співвідношення*

$$\ln F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu_*(x) \tag{3.47}$$

виконується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

Зауважимо, що умова (3.44) на послідовність показників (λ_k) виконується тоді і лише тоді, коли умова (3.46) справджується з $\nu_0(t) = n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$ ([37, 39]).

Позначимо через $\mathcal{L}$ клас додатних неперервних функцій $\Phi\colon \mathbb{R}_+ := [0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ таких, що $\Phi(x) \nearrow +\infty$ $(0 \le x \to +\infty)$, а через $\mathcal{L}^+$ клас додатних неперервних диференційовних функцій $h(x)\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ таких, що $\int_0^{+\infty} dh(x) = +\infty$ і $1 \le h'(x) \nearrow +\infty$ $(0 \le x \nearrow +\infty)$. Позначимо через $\mathcal{L}_1$ клас функцій $\psi \in \mathcal{L}$ таких, що $\int_{x_0}^{+\infty} dt/\psi(t) < +\infty$, $\psi(t) \ge t$ для $t \ge t_0 > 0$, а через $\mathcal{L}_2$ клас функцій $\psi \in \mathcal{L}_1$ таких, що обернена функція ψ^{-1} до функцій ψ зодовольняє умов $\psi^{-1}(uv) \le u\psi^{-1}(v)$ $(u, v \ge 1)$. Нехай $\Phi \in \mathcal{L}$. Введемо наступний клас рядів Діріхле

$$\mathcal{D}(\lambda, \Phi) = \{F \in \mathcal{D}(\lambda)\colon\ \ln \mu(x, F) \ge x\Phi(x)\ (x \ge x_0)\}.$$

Для вимірної за Лебегом множини $E \subset [0, +\infty)$ назвемо

$$m_h E \equiv \int_E dh(x)$$

її h-міру, при $h(x) \equiv x$ h-міра множини E її мірою Лебега.

У статті [17] доведено наступну теорему.

Теорема 3.9 ([17]). *Нехай $h \in \mathcal{L}^+$, $\Phi \in \mathcal{L}$. Якщо функція $F \in \mathcal{D}(\lambda, \Phi)$ і число $b > 0$ таке, що*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h'((\lambda_n) + b)}{n\lambda_n} < +\infty, \tag{3.48}$$

тоді асимптотичне співвідношення (3.43) *виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної h-міри ($m_h E < +\infty$), де функція φ обернена до функції* Φ.

У цій роботі ми доведемо подібне твердження для функцій з класу $\mathcal{I}(\nu)$. Метод доведення відрізняється від класичного методу Вімана-Валірона, який був використаний у статті [17].

Скажемо, що $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi)$, якщо $F \in \mathcal{I}(\nu)$ і

$$\ln F(x) \geq x\Phi(x) \quad (x \geq x_0).$$

Доводимо наступну теорему.

Теорема 3.10. *Нехай $h \in \mathcal{L}^+$, $\Phi \in \mathcal{L}$, $\Phi_0(x) = x\Phi(x)$. Якщо функція $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi)$ і існує функція $\psi \in \mathcal{L}_2$ така, що умова*

$$h'(\varphi_0(t)) \ln \nu_0(t) = o\Big(\psi^{-1}(t)\Big) \quad (t \to +\infty) \tag{3.49}$$

справджується з $\nu_0(t) = \nu([0, t])$, тоді асимптотичне співвідношення (3.47) *виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної h-міри ($m_h E < +\infty$), де функція φ_0 є обернена до функції* Φ_0.

Доведення Теореми 3.10. Нам потрібна наступна лема.

Лема 3.3 ([37], Лема 1)**.** *Нехай* $h \in \mathcal{L}_+$, $\psi \in \mathcal{L}_1$, *і* $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *диференційовна невід'ємна і неспадна функція. Тоді* h*-міра множини*

$$E = \{x \geq 0\colon g'(x) \geq h'(x)\psi(g(x))\}$$

є скінченна.

У наступному доведенні ми міркуємо подібно як у доведенні відповідної теореми у [37] (див. також [39]). Припустимо, що $F'(x)$ позначає правосторонню похідну. Позначимо $g(x) = \ln F(x)$. Нехай

$$P_x(dt) = \frac{a(t)e^{xt}}{F(x)}\nu(dt)$$

є ймовірнісна міра. Тоді для математичного сподівання випадкової величини $\xi = t$ ми отримуємо

$$\mathbf{M}\xi = \int_0^{+\infty} \xi P_x(dt) = \int_0^{+\infty} a(t)e^{xt}\frac{t}{F(x)}\nu(dt) = g'(x).$$

Отже, за нерівністю Маркова $P_x\{\xi \geq a\} \leq M\xi/a$ для $a = cM\xi = cg'(x)$ ми одержуємо

$$\int_{t \geq cg'(x)} a(t)e^{tx}\nu(dt) = \int_{\xi \geq cg'(x)} a(t)e^{tx}\nu(dt) = P_x\{\xi \geq a\} \leq \frac{1}{c}.$$

Нехай для фіксованого $x > 0$

$$G := G_x = \Big\{t > 0\colon t \leq 2g'(x)\Big\}.$$

Як у статті [37] ми маємо

$$F(x) \leq 2\int\limits_G a(t)e^{xt}\nu(dt) \tag{3.50}$$

для всіх $x \geq x_0$. Справді,

$$\int_{\mathbb{R}_+\setminus G} a(t)e^{xt}d\nu(t) \leq \frac{1}{2g'(x)} \int_{\mathbb{R}_+\setminus G} a(t)e^{xt}t \cdot d\nu(t) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2g'(x)} \int_{\mathbb{R}_+} a(t)f'(xt) \cdot td\nu(t) = \frac{F(x)}{2}.$$

Тому

$$F(x) = \int\limits_G a(t)e^{xt}\nu(dt) + \int_{\mathbb{R}_+\setminus G} a(t)e^{xt}d\nu(t) \leq$$
$$\leq \int\limits_G a(t)e^{xt}\nu(dt) + \frac{F(x)}{2},$$

і нерівність (3.50) справджується. Тоді, з нерівності (3.50) маємо

$$F(x) \leq 2 \int\limits_{G_1} a(t)f(xt)\nu(dt) \leq 2\mu(x, F) \cdot \nu_0(2g'(x)) \quad (x \geq x_0). \tag{3.51}$$

Звідси, за Лемою 3.3 з $1/2\psi(t)$ замість $\psi(t)$ для всіх $x \notin E$ ми маємо, що $g'(x) \leq 1/2h'(x)\psi(g(x))$ і

$$F(x) \leq 2\mu_*(x, F)\nu_0(h'(x)\psi(g(x))), \tag{3.52}$$

більше цього,

$$m_h(x) = \int_E dh(x) \leq \int_E \frac{g'(x)}{\psi(g(x))}dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} < +\infty.$$

Зауважимо, що $g(x) \geq \Phi_0(x)$, $h'(x) \geq 1$ $(x \geq x_0)$, $\psi(t) \geq t$ $(t \geq t_0)$, відтак, $h'(x)\psi(g(x)) \geq g(x)$ і

$$\varphi_0\Big(h'(x)\psi(g(x))\Big) \geq \varphi_0(g(x)) \geq \varphi_0(\Phi_0(x)) = x.$$

Нарешті, залишається використати умову (3.49) з функцією $\psi \in \mathcal{L}_2$

$$\ln \nu_0(h'(x)\psi(g(x))) =$$
$$= o\Big(\psi^{-1}\Big(h'(x)\psi(g(x))\Big)/h'\Big(h'(x)\psi(g(x))\Big)\Big) \leq$$
$$\leq o\Big(\psi^{-1}\Big(h'(x)\psi(g(x))\Big)/h'(x)\Big) \leq$$
$$\leq o\Big(\psi^{-1}\Big(\psi(g(x))\Big)\Big) = o(g(x))$$

при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$. Тому,

$$\ln F(x) \leq \ln \mu_*(x, F) + \ln 2 + o(\ln F(x))$$

при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$ і твердження Теореми 3.10 з цього слідує. □

Зауваження 3.1. Легко перевірити, що умова $\int_{x_0}^{+\infty} dx/\psi(x)$ є еквівалентна до умови $\int_{t_0}^{+\infty} t^{-2}\psi^{-1}(t)dt < +\infty$. З іншого боку, для даної неспадної функції $\alpha(t)$ умова $\int_{t_0}^{+\infty} t^{-2}\alpha(t)dt < +\infty$ є еквівалентна до умови, що існує функція $\psi \in \mathcal{L}_1$ така, що $\alpha(t) = o(\psi^{-1}(t))$ $(t \to +\infty)$.

Авторам (А.Ю. Боднарчук, Т.М. Сало та О.Б. Скасків) в даний момент невідомо чи є можливим вибір функції ψ такий, що умова приналежності до класу $\mathcal{L}_2$ виконується.

3.5 Точність нерівності Шеремети для цілих рядів Діріхле

Ми доводимо точність аналога нерівності типу Вімана для цілих рядів Діріхле, встановленого М. М. Шереметою. Розгля-

немо цілі ряди Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{3.53}$$

де $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \le n \to +\infty)$.

Теорема 3.11 ([45, 54]). *Нехай послідовність* (λ_n) *задовольняє умову*

$$|n(t) - \Delta t^{\rho}| \le \mathcal{D}\ (t \ge t_0),\ \Delta \in \mathbb{R}_+,\ \mathcal{D} \in \mathbb{R}_+,\ \rho \ge \frac{1}{2}, \tag{3.54}$$

де $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$. *Тоді для кожного цілого ряду Діріхле вигляду* (3.53) *існує множина* E *скінченної міри, і для кожного* $k \in \mathbb{N}$ *існує число* σ_k *таке, що для всіх* $\sigma \in [\sigma_k; +\infty)\backslash E$ *виконується нерівність*

$$M(\sigma, F) \le \mu(\sigma, F) \cdot \ln^{\rho - \frac{1}{2}} \mu(\sigma, F) \cdot u_{k-1}(\ln_2^{\rho} \mu(\sigma, F)) \ln_{k+1}^{\delta} \mu(\sigma, F). \tag{3.55}$$

Позначимо через $\mathcal{E}_0$ клас трансцендентних цілих функцій вигляду $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Для кожного $r > 0$ і $f \in \mathcal{E}$ позначимо

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| \colon |z| \le r\},\quad \mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n \colon n \ge 0\},$$
$$\ln_1 x := \ln x,\quad \ln_{k+1} x := \ln \ln_k x,$$
$$\exp_1 x = e^x,\quad \exp_{k+1} x = \exp(\exp_k x),$$
$$u_0(x) = x,\quad u_k(x) = x \prod_{j=1}^{k} \ln_j x,\quad k \in \mathbb{N}.$$

У [58] В. К. Хейман довів таку нерівність Вімана.

Теорема 3.12 ([58]). *Нехай* $k \ge 2$. *Для кожної* $f \in \mathcal{E}$ *і* $\delta > 0$

нерівність

$$M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{1/2} \mu_f(r) u_{k-2}(\ln_2 \mu_f(r)) \cdot \ln_k^{\delta} \mu_f(r) \qquad (3.56)$$

виконується для всіх $r \in (1; +\infty)\backslash E$, *де* E *множина скінченної логарифмічної міри* ($\int_E d \ln r < +\infty$).

При $k = 1$, нерівність (3.56) збігається з класичною нерівністю Вімана. Питання точності нерівності (3.56) було розглянуто у [43, 59]. З теореми 4 сформульованої у [43] ми можемо отримати наступне твердження.

Теорема 3.13. *Для кожного* $k \in \mathbb{N},\ k \ge 2$, *існує ціла функція* $f \in \mathcal{E}$ *така, що для всіх* $r \ge r_0$ *ми маємо*

$$M_f(r) \ge \mu_f(r) \ln^{1/2} \mu_f(r) u_{k-2}(\ln_2 \mu_f(r)). \qquad (3.57)$$

Отже, нерівність (3.56) у загальному класі $\mathcal{E}$ є непокращувана.

Проте ця нерівність виглядає значно покращуваною для цілих функцій зображених лакунарними степеневими рядами ([38]) або випадковими степеневими рядами ([19]).

3.5.1 Нерівність Вімана і ряди Діріхле

Аналоги нерівності (3.56) для рядів Діріхле вигляду (3.53) були доведені в [31, 57]. А саме, за умови

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge h > 0 \ (n \ge 0)$$

в статті [57] було доведено, що для всіх $\delta > 0$

$$M(\sigma, F) \le \mu(\sigma, F) \ln^{\frac{1}{2}+\delta} \mu(\sigma, F)$$

справджується для кожного $\sigma \in [0; +\infty)\backslash E$, де E множина скінченної міри ($\int_E dr < +\infty$).

Для таких рядів було доведено ([45, 54]) таке твердження. Може бути показано, що результат Шеремети справджується за наступного формулювання.

Теорема 3.14 ([45,54]). *Нехай послідовність* (λ_n) *задовольняє умову* (3.54). *Тоді для кожного ряду Діріхле вигляду* (3.53) *існує множина* E *скінченної міри і для кожного* $k \in \mathbb{N}$ *існує число* σ_k *таке, що для всіх* $\sigma \in [\sigma_k; +\infty)\backslash E$ *ми маємо*

$$M(\sigma, F) \leq \mu(\sigma, F) \cdot \ln^{\rho-\frac{1}{2}} \mu(\sigma, F) \cdot u_{k-1}(\ln_2^{\rho} \mu(\sigma, F)) \ln_{k+1}^{\delta} \mu(\sigma, F). \tag{3.58}$$

Аналоги теореми 3.13 для рядів Діріхле є невідомі. У зв'язку з цим, природно виникає питання: одержати аналоги (3.57) для цілих рядів Діріхле з точними степенями $\ln_k \mu(F, \sigma), k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема містить твердження про точність нерівності (3.58).

Теорема 3.15. *Якщо послідовність* (λ_n) *задовольняє умову (3.54), тоді для кожного* $\delta > 0$ *існує цілий ряд Діріхле* F *вигляду* (3.53) *і* $\sigma_0 > 0$ *така, що для кожного* $\sigma \geq \sigma_0$

$$M(\sigma, F) \geq \mu(\sigma, F) \ln^{\rho-\frac{1}{2}} \mu(\sigma, F) \cdot u_{k-1}(\ln_2^{\rho} \mu(\sigma, F)).$$

Доведення. Без зменшення загальності, ми припускаємо, $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$. Позначимо $n_0 = \min\{n\colon \lambda_n \geq \exp_{k+4}(1)\}$. Для $\beta > 0$ виберемо $a_n = \exp\{-\beta\lambda_n \ln_{k+4} \lambda_n\}$ для $n \geq n_0$ і $a_n = 0$, для $n < 0$, та розглядаємо ряд Діріхле F вигляду (3.53). Позначимо

$$h(x) = -\beta x \ln_{k+4} x + \sigma x, \quad x > \exp_{k+4}(1).$$

Оскільки $h(x)$ є опукла функція на інтервалі $[\exp_{k+4}(1), +\infty)$, існує єдина точка максимуму $x(\sigma)$ функції $h(x)$ на $[\exp_{k+4}(1), +\infty)$. Отже, для достатньо великого σ,

ми маємо $x(\sigma) \in (\exp_{k+4}(1), +\infty)$, $x(\sigma) \to +\infty$ $(\sigma \to +\infty)$ і

$$h'(x(\sigma)) = -\beta\Big(\ln_{k+4} x + \frac{1}{u_{k+2}(\ln x)}\Big)\Big|_{x(\sigma)} + \sigma = 0.$$

Тому,

$$\ln_{k+4} x(\sigma) = \frac{\sigma}{\beta} - \frac{1}{u_{k+2}(\ln x(\sigma))},\ \ln \mu(\sigma, F) \leq$$
$$\leq \frac{\beta x(\sigma)}{u_{k+2}(\ln x(\sigma))}\ (\sigma \to +\infty). \tag{3.59}$$

Позначимо

$t_\pm = x(\sigma) \pm \big(u_{k+3}(x(\sigma)) \ln^\delta_{k+3} x(\sigma)\big)^{1/2} \pm 1$, $I(\sigma) = (t_-, t_+)$.

Зауважимо також, що

$$\big(u_{k+3}(x) \ln^\delta_{k+3} x\big)^{1/2} = o(x), \quad h''(x) \sim -\beta/u_{k+3}(x) \quad (x \to +\infty).$$

Для кожного $x \in I(\sigma)$ існує $\eta \in I(\sigma)$ така, що

$$h(x) = h(x(\sigma)) + \frac{h''(\eta)}{2}(x - x(\sigma))^2 \geq$$
$$h(x(\sigma)) - \Big(\frac{\beta}{2} + o(1)\Big) \ln^\delta_{k+3} x(\sigma) \quad (\sigma \to +\infty).$$

Нехай $n_1(I)$ позначає кількість точок послідовності (λ_n) на інтервалі I. Тоді, при $\sigma \to +\infty$ ми маємо

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) \geq \sum_{n \in I(\sigma)} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} \geq$$
$$\mu(\sigma, F) n_1(I(\sigma)) \exp\Big\{\Big(-\frac{\beta}{2} + o(1)\Big) \ln^\delta_{k+3} x(\sigma)\Big\}. \tag{3.60}$$

З того, що $t_+ - t_- = 2\big(u_{k+3}(x(\sigma)) \ln^\delta_{k+3} x(\sigma)\big)^{1/2} + 2$,

$$n_1(I(\sigma)) \geq \Delta(t_+^\varrho - t_-^\varrho) - 2\mathcal{D} \geq$$
$$\Delta\varrho(t_+ - t_-)\big(x(\sigma) + o(x(\sigma))\big)^{\varrho - 1} - 2\mathcal{D} =$$

$$= 2\Delta\varrho(1+o(1))\big(u_{k+3}(x(\sigma))\ln^{\delta}_{k+3}x(\sigma)\big)^{1/2}x(\sigma)^{\varrho-1} \geq$$
$$\geq \Delta\rho x^{\rho}(\sigma)\frac{\sqrt{u_{k+3}(x(\sigma))\ln^{\delta}_{k+3}x(\sigma)}}{x(\sigma)} =$$
$$\Delta\rho x^{\rho-\frac{1}{2}}(\sigma)u_{k+2}(\ln^{1/2}x(\sigma))\ln^{\delta/2}_{k+3}x(\sigma)$$

при $\sigma \to +\infty$. Використовуючи (3.59), ми отримуємо

$$\beta x(\sigma) \geq \ln\mu(\sigma,F)u_{k+2}(\ln x(\sigma)),$$
$$\ln\beta + \ln x(\sigma) \geq \ln_2\mu(\sigma,F) + 2\ln_2 x(\sigma),$$
$$\ln x(\sigma) - 2\ln_2 x(\sigma) + \ln\beta \geq \ln_2\mu(\sigma,F),$$
$$\ln x(\sigma) \geq (1+o(1))\ln_2\mu(\sigma,F, \quad \sigma\to+\infty.$$

Тоді, для деякого $C_1 > 0$ ми отримуємо

$$n_1(I(\sigma)) \geq$$
$$C_1\ln^{\rho-1/2}\mu(\sigma,F)\cdot u_{k+2}(\ln^{\rho-1/2}x(\sigma))\cdot u_{k+2}(\ln^{1/2}x(\sigma))\cdot\ln^{\delta/2}_{k+3}x(\sigma) =$$
$$= C_1\ln^{\rho-1/2}\mu(\sigma,F)\cdot u_{k+2}(\ln^{\rho}x(\sigma))\cdot\ln^{\delta/2}_{k+3}x(\sigma) \geq$$
$$\geq \ln^{\rho-\frac{1}{2}}\mu(\sigma,F)\cdot u_{k+2}(\ln^{\rho}_2\mu(\sigma,F))\cdot\ln^{\delta}_{k+4}\mu(\sigma,F) \quad (\sigma\to+\infty).$$

Використовуючи $\exp\{(-\frac{\delta}{2}+o(1))\ln^{\delta}_{k+3}y\} \geq \ln^{-\delta}_{k+2}y,\ y\to+\infty$, і вибираючи у нерівності (3.60) $\beta \leq \delta$, ми маємо

$$\mathfrak{M}(\sigma,F) \geq \mu(\sigma,F)\ln^{\rho-\frac{1}{2}}\mu(\sigma,F)\cdot u_{k+2}(\ln^{\rho}_2\mu(\sigma,F))\cdot\ln^{\delta}_{k+4}\mu(\sigma,F)\times$$
$$\times\exp\left\{\left(-\frac{\delta}{2}+o(1)\right)\ln^{\delta}_{k+3}\mu(\sigma,F)\right\} \geq$$
$$\geq \mu(\sigma,F)\ln^{\rho-\frac{1}{2}}\mu(\sigma,F)u_k(\ln^{\rho}_2\mu(\sigma,F))\ln^{-\delta}_{k+2}\mu(\sigma,F) \geq$$
$$\geq \mu(\sigma,F)\ln^{\rho-\frac{1}{2}}\mu(\sigma,F)\cdot u_{k-1}(\ln^{\rho}_2\mu(\sigma,F)), \quad \sigma\to+\infty.$$

□

Теореми 3.12 і 3.13 є наслідками теорем 3.14 і 3.15, відповідно.

3.6 Висновки до розділу 3

У розділі 3 розглядаються регулярно збіжні функціональні ряди. Основними напрямками, які досліджуються у цьому розділі є співвідношення типу Бореля, стійкість максимального члена функціонального ряду за системою функцій та аналог нерівності Вімана.

У підрозділах третього розділу зокрема розглянуто ряди Діріхле вигляду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n}$, ряди вигляду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x\lambda_n)$, які є узагальненням рядів Діріхле. Також досліджуються ряди вигляду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x+\lambda_n)$. Серед об'єктів дослідження в цьому розділі ще виступають додатні інтеграли вигляду $\int_0^{+\infty} a(t)f(tx)\nu(dt)$, $\int_0^{+\infty} a(t)f(t+x)\nu(dt)$ та $\int_0^{+\infty} a(t)e^{xt}\nu(dt)$.

Доведено, що за певних умов для функціонального ряду вигляду $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x+\lambda_n)$ справджується співвідношення $\ln F(x) = (1+o(1)) \ln \mu(x, F)$ при $x \to +\infty$ поза множиною скінченної Лебегової міри. Аналогічне співвідношення виконується для додатного інтеграла вигляду $F(x) = \int_0^{+\infty} a(t)e^{xt}\nu(dt)$, але з $\mu_*(x, F) = ess\sup\{f(u)e^{xu} : u \in S]\}$, $S = supp\nu \cap \{x \in \mathbb{R}_+ : f(x) > 0\}$.

Подібне співвідношення виконується, але у вигляду нерівності, і для додатних інтегралів вигляду $\int_0^{+\infty} a(t)f(x+t)\nu(dt)$.

Для ряду вигляду $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x\lambda_n)$ доведено справедливість стійкості максимального члена ряду.

Подібне співвідношення щодо стійкості максимального члена ряду доведено і для рядів вигляду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x+\lambda_n)$ у підрозділі 3.3.

У підрозділі 3.5 доведено точність нерівності типу Вімана для рядів Діріхле вигляду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n}$.

Результати розділу 3 опубліковано у статтях [1, 3, 5, 6, 8].

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена дослідженню асимптотичних властивостей рядів Тейлора-Діріхле. У ній також досліджуються абсциси збіжності рядів Діріхле з довільними додатними показниками та такі ж для гаусових рядів Діріхле з детермінованими невід'ємними показниками. У дисертації розглянуто співвідношення типу Бореля для деякого типу функціональних рядів та для деякого типу додатних інтегралів. Досліджено стійкість максимального члена функціонального ряду, який є узагальненням ряду Діріхле та таку ж для функціонального ряду вигляду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x+\lambda_n)$. Зокрема у підрозділі 3.2 розділу 3 доведено умови, за присутності яких необхідної умови збіжності ряду вистачає, щоб отримати достатню умову збіжності розглядуваного ряду, а саме: деякого узагальнення ряду Діріхле.

У підрозділі 2.2 розділу 2 дано часткову відповідь на гіпотезу, висунуту у 2013 році на міжнародній конференції "Complex Analysis and Related Topics яка відбувалася у Львові 23-28 вересня.

У роботі знайдено нові умови, які забезпечують існування центрального індекса для рядів Тейлора-Діріхле. Також, на основі згаданого результату, доведено теорему, яка містить слабші умови у загальному випадку, ніж її попередній аналог – Теорема 2 з [29].

У підрозділі 2.4 розділу 2 йдеться про нерівність між абсцисою існування максимального члена ряду Діріхле і аналогічну абсцису ряду Тейлора-Діріхле.

У підрозділі 3.1 розділу 3 досліджено, що для деякого додатного функціонального ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_0(\beta_n + x)$, $a_n \geq 0$ $(n \geq 0)$

за умови на зростання правосторонньої похідної від логарифма функції f_0, яка фігурує в означенні згаданого функціонального ряду та за інших умов виконується співвідношення типу Бореля.

У підрозділах 3.2 і 3.3 розділу 3 цієї дисертації відповідно розглянуто стійкість максимального слена функціонального ряду, який є узагальненням ряду Діріхле і для рядів вигляду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\lambda_n + x)$, $a_n \geq 0$ $(n \geq 0)$, доведено твердження про одночасну триналежність або неналежність трьох функціональних рядів ($\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x\lambda_n)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n f(x\lambda_n)$ і $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{-1} f(x\lambda_n)$) до класу $\mathscr{S}(f, \Lambda)$ збіжних для всіх $x \geq 0$ функціональних рядів, а також досліджено співвідношення типу Бореля для деяких додатних інтегралів.

У підрозділах 2.2 і 3.2 розділів 2 і 3 відповідно присутні висунуті гіпотези, які задають відкриті питання для подальших досліджень.

У підрозділі 3.4 розділу 3 розглянуто співвідношення типу Бореля для інтегралів вигляду $\int_{\mathbb{R}_+} a(t) e^{xt} \nu(dt)$.

Основні результати дисертації є новими і мають завершений характер. Вони можуть стати основою для подальших досліджень рядів Діріхле, Тейлора-Діріхле або інших функціональних рядів, які були розглянуті у цій дисертації. Не виключена можливість застосування отриманих результатів у інших розділах математики.

Достовірність результатів дисертації підтверджується чіткими і детальними доведеннями, а також тим, що вони є опубліковані у фахових журналах і апробовані на ряді міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях і спеціалізованих наукових семінарах.

БІБЛІОҐРАФІЯ

1. Bandura A.I., Bodnarchuk A,Yu., Skaskiv O.B. *About Borel type relation for some positive integrals*, Altay Conference Proceedings in Mathematics, 2, 2025, №1, 40-47.
2. Bodnarchuk A.Yu., Gal' Yu.M., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series*, Matematychni Studii, V. 61, №1, 2024, 109-112.
3. Bodnarchuk A.Yu., Salo T.M., Skaskiv O.B. *Laplace-Stielthjes type integrals: the Borel relation and the h-measure of an exceptional set*, Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math., 2026, Issue 98, P. 192-197.
4. Боднарчук А.Ю., Куриляк М.Р., Скасків О.Б. *Про абсцису існування максимального члена випадкових рядів Діріхле з довільними додатними показниками*, Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат., 2022, випуск 94, 79-88.
5. Bodnarchuk A.Yu., Kuryliak M.R. *On the sharpness of the Hayman-type analogue of the Wiman inequality for entire Dirichlet series*, Matematychni Studii, V. 66, №1, 2026, 38-42.
6. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*, Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Number, **20 (76)** (2025), 15–23. https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20(76)-15-23
7. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the sum and maximal term of Taylor-Dirichlet type series*, Precarpatian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society, Number, №19(73), 41-46.
8. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B., Trusevych O.M. *About Borel type relation for some positive functi-*

onal series, Mat. Stud., **63** (1) (2025), 98–101. https://doi.org/10.30970/ms.63.1.98-101.

9. Valiron G. *Sur le maximum du module des fonctions entieres* C.r. Acad. Sci. – 1918. – V.166. – P. 605–608.
10. Velychko S.D., Skaskiv O.B. *Asymptotic properties of one class of functional series*, Visn. Lviv. Un-tu, Ser. Mekh.-Math., **32** (1989), 50–51. (Ukrainian)
11. Wiman A. Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten Gliebe der zugehörigen Taylorischen Reiche,Acta Math. – 1914. – V.37. – P. 305–326.
12. Vinnitskii B.V. *Representation of analytic functions by series* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n f(\lambda_n z)$, Ukr. Math. J. **31** (11) (1979), 501–506. https://doi.org/10.1007/BF01092529
13. Vinnitskii B.V. *Completeness of the system* $f(\lambda_n z)$, Ukr. Math. J., **36** (9) (1984), 493–495. https://doi.org/10.1007/BF01086778
14. Vinnitskii B.V. *Effective expansion of analytic functions in series in generalized systems of exponents*, Ukr. Math. J., **41** (3) (1989), 269–273. https://doi.org/10.1007/BF01060309
15. Dolynyuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of entire multiple Dirichlet series*, Mat. Stud., 43 (2015), no. 2, 171–179.
16. Задорожна О.Ю., Скасків О.Б. *Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілт'єса* // Буковинський матем. журн. – 2013. – Т.1, № 3-4. – С. 43–48.
17. Kuryliak A.O., Salo T.M. *Borel type asymptotic relation for entire Dirichlet series and h-measure of an exceptional sets* Mat. Stud. – 2026. – V.65, no.1. – P. 15–21. https://doi.org/10.30970/ms.65.1.15-21

18. Kuryliak A.O., Ovchar I.E., Skaskiv O.B. *Wiman's inequality for Laplace integrals*, Int. Journal of Math. Analysis, **8** (2014), no.8, 381–385. doi:10.12988/ijma.2014.4232
19. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Bandura A.I. *Arbitrary random variables and Wiman's inequality for entire functions*, Axioms, **2024**, **13** (11), art. ID 793. doi:10.3390/axioms13110739
20. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Panchuk S.I.*Bitlyan-Gol'dberg type inequality for entire functions and diagonal maximal term*, Mat. Stud., **54** (2) (2020), 135–145. doi:10.30970/ms.54.2.135-145
21. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. *On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random pairwise independent exponents* // ArXiv:1703.03280v1[math.CV] 12 Mar 2017. – 12 p.
22. Pólya G., Szegő G. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* – Berlin: Springer, V.2, 1925.
23. Salo T.M., Skaskiv O.B. *Minimum modulus of lacunary power series and h-measure of exceptional sets*, Ufa Math. J., **9** (2017), № 4, 135–144.
24. Salo T.M., Skaskiv O.B., Trakalo O.M. *On the best possible description of exceptional set in Wiman-Valiron theory for entire functions*, Mat. Stud. **16** (2001), №2, 131-140. http://matstud.org.ua/texts/2001/162/131140.pdf
25. Salo T.M., Skaskiv O.B. *The minimum modulus of gap power series and h-measure of exceptional sets*, arXiv:1512.05557v2 [math.CV], 17 Dec. 2015, 13 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.1512.05557
26. Salo T.M., Skaskiv O.B., Trusevych O.M. *About exceptional sets in Fenton's type theorem*, Complex Analysis and Related

Topics: Abstracts, Internationale conf. (Lviv, September 23-28, 2013), Lviv, 2013, 67–68.

27. Скасків О.Б., Тарновецька О.Ю., Трусевич О.М. *Про співвідношення Бореля для рядів типу Тейлора-Діріхле*, Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2017. – №1 (37).
28. Скасків О.Б., Тракало О.М. *Про стійкість максимального члена цілого ряду Діріхле*. Укр. мат. журн., 2005, т.57, №4, 571-576.
29. Skaskiv O.B., Trusevych O.M. *Maximal term and the sum of a regularly convergent functional series*, Visn. Lviv. Un-tu, Ser. Mekh.-Math., **49** (1998), 75–79. (Ukrainian)
30. Skaskiv O.B., Trusevych O.M. *Relations of Borel type for generalizations of exponential series*, Ukr. Math. J., **53** (11) (2001), 1926-1931.
31. Skaskiv O.B. *On the classical Wiman inequality for entire Dirichlet series*, Visn. Lviv Univ., ser. mech.-mat., **54** (1999), 180–182. https://mathvisnyk.lnu.edu.ua/VLUsMath-54/VisnM-54-180.pdf
32. Skaskiv O.B. *On the minimum of the absolute value of the sum for a Dirichlet series with bounded sequence of exponents*, Math Notes, **56** (1994), 1177–1184. https://doi.org/10.1007/BF02274666
33. Skaskiv O.B., Tarnovecka O.Yu., Zikrach D.Yu., *Asymptotic estimates of some positive integrals outside an exceptional sets,* Internat. J. Pure and Appl. Math. (IJPAM), **118** (2018), № 2, 157–164. https://doi.org/10.12732/ijpam.v118i2.2
34. Skaskiv O.B. *Behavior of the maximal term of a Dirichlet series that defines an entire function*, Math. Notes, **37** (1985), № 1, 686–693. https://doi.org/10.1007/BF01652509

35. Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **84** (2017), 96-112.
36. Skaskiv O.B. *Rate of convergence of positive series*, Ukr. Math. J., **56** (12) (2004), 1665–1674. https://doi.org/10.1007/s11253-005-0162-2
37. Skaskiv O.B. *On certain relations between the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series*, Math. Notes, **66** (2) (1999), 223–232. https://doi.org/10.1007/BF02674881
38. Skaskiv O.B. *Random gap power series and Wiman's inequality*, Mat. Stud., **30** (1) (2008), 101–106. (in Ukrainian) doi:10.30970/ms.30.1.101–106
39. Skaskiv O.B., Bandura A.I. *Asymptotic estimates of positive integrals and entire functions.* – Lviv–Ivano-Frankivsk, – LNU-INFTUNG, Goliney, 2015, 108 p. (in Ukrainian)
40. Skaskiv O.B., Trusevych O.M. *Relations of Borel type for generalizations of exponential series*, Ukr. Math. J., **53** (11) (2001), 1926–1931. https://doi.org/10.1023/A:1015219417195
41. Скасків О.Б., Трусевич О.М. *Про теорему типу Бореля для рядів, подібних до рядів Тейлора-Дріхле*, Математичні студії, Т. 13, №1, (2000), 79-82.
42. Skaskiv O.B., Trakalo O.M. *On the stability of the maximum term of the entire Dirichlet series*, Ukr. Mat. Zh., 57 (2005), no. 4, 571–576; English transl.: Ukr. Math. J., 57 (2005), 686–693.
43. Suleimanov N.M. *Estimates of Wiman–Valiron type for power series with finite radius of convergence, and their sharpness*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **253** (4) (1980), 822-–824.

44. Filevych P.V. *On the relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series* // Mat. Stud. – 2003. – V.20, № 1. – P. 33–39.
45. Шеремета М.М. *Цілі ряди Діріхле.* – Київ: ІСДО, 1993.
46. Sheremeta M.M., Gal' Yu.M. *On some properties of the maximal term of series in systems of functions*, Mat. Stud., **62** (1) (2024), 46–53. https://doi.org/10.30970/ms.62.1.46-53
47. Sheremeta M.M. *On regularly converging series of systems of functions in a disk*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., **94** (2022), 89–97. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.94.098-108
48. Шеремета М.М. *Про обмеженість l-$\mathfrak{M}$-індексу цілих функцій, зображених рядами за системою функцій*, Укр. мат. журн. (2024), т. 76, №4, 599-606, DOI: 10.3842/umzh.v76i4.7866
49. Sheremeta M.M. *On bornological spaces of series in systems of functions*, Sarajevo journal of mathematics, Vol. 20(33), №2, (2024), 249-254.
50. Sheremeta M.M. *Spaces of series in system of functions*, Mat. Stud., **59** (2023), no. 1, 46–59. https://doi.org/10.30970/ms.59.1.46-59
51. Sheremeta M.M. *Hadamard composition of series in systems of functions*, Bukovyn. Mat. Zh., **11** (2023), no. 1, 39–51.
52. Sheremeta M.M. *On boundedness of the $l-\mathfrak{m}$-index of entire functions represented by series in a system of functions*, Ukr. Math. J., **76** (2024), 669–679. https://doi.org/10.1007/s11253-024-02346-3
53. Sheremeta M.M. *To the boundedness of the $\ell - M$-index of functions analytic in the unit disk and represented by series*

in systems of functions, Open J. Math. Anal., **9** (2) (2025), 19–25. https://doi.org/10.30538/psrp-oma2025.0162

54. Sheremeta M.M. *Wiman-Valiron's method for entire functions, represented by Dirichlet series*, Soviet Math. Dokl., **19** (1978), 726-–730.
55. Sheremeta M.M., Holovata O.M., Mulyava O.M. *On the Asymptotic Properties of Functions of Finite Order, Analytic in a Disk, Represented by Series in Systems of Functions*, Axioms (2026), 15(5), 335, https://doi.org/10.3390/axioms15050335
56. Sunyer-Balaguer F. *Generalizacion del metodo de Wiman-Valiron a una classe de series de Dirichlet* Publ. semin. mat. Fac. cient. Zaragoza. – 1962. – V.3. – P. 43–47.
57. Sunier F. i Balaguer, *Generalización del método de Wiman-Valiron a una classe de series de Dirichlet*, Publ. Semin. Mat. Fac. Cienc. Zaragoza, **3** (1962), 41–47.
58. Hayman W.K. *The local growth of power series: a survey of the Wiman-Valiron method*, Canad. Math. Bull. **17** (1974), no.3, 317–358. doi:10.4153/CMB-1974-064-0
59. Shcherba A.I. *About the question of bound of maximum of entire function by maximal term of power series*, VINITI, №8520–88, Dep., 1988.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Боднарчук А.Ю., Куриляк М.Р., Скасків О.Б. *Про абсцису існування максимального члена випадкових рядів Діріхле з довільними додатними показниками.* Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2022. Вип. 94. С. 79–88. (входить до категорії Б наукових фахових видань України)
   http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.94.079-088
   (Особисті внески співавторів: А.Ю. Боднарчуку належить твердження 2, твердження 3 належить всім трьом авторам в однаковій мірі, твердження 9 в однаковій мірі належить О.Б. Скасківу та М.Р. Куриляк, а всі інші твердження належать М.Р. Куриляк.)
2. Bodnarchuk A.Yu., Gal' Yu.M., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton type theorem for Taylor-Dirichlet series.* Matematychni Stydii, **61** (1) (2024). P. 109-112. (Scopus, Q2)
   http://doi.org/10.30970/ms.61.1.109-112
   (Особисті внески співавторів: А.Ю. Боднарчуку належить доведення теореми 2, О.Б. Скасківу належить постановка задачі, а також формулювання нової проблеми 2 в прикінцевих пунктах статті. Ю.М. Галеві разом з О.Б. Скасківим належить верифікація доведення теореми, що увійшла в дисертацію.)

3. Skaskiv O.B., Bodnarchuk A. Yu. *On the sum and maximal term of Taylor-Dirichlet type series.* Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Chyslo, 19(73) (2024), P. 41–46. (входить до категорії Б наукових фахових видань України)
   https://doi.org/10.31471/2304-7399-2024-19(73)-41-46
   (Особисті внески співавторів: особистим внеском Боднарчука А.Ю. є доведення кінцевого варіанту леми 2.1 про існування центрального індексу, та теореми 2.2, ідея доведення і постановка задачі належить Скасківу О.Б.)
4. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B., Trusevych O.M. *About Borel type relation for some positive functional series.* Matematychni Studii, **63** (1), 98-101. **63** (1) (2025), P. 98-101. (Scopus, Q2)
   https://doi.org/10.30970/ms.63.1.98-101
   (Особисті внески співавторів: основна теорема 2 належить Боднарчуку А.Ю., твердження Наслідку 1 належить Боднарчуку А.Ю. і О.М. Трусевич в однаковій мірі, ідея постановки задачі – Скасківу О.Б., яка виникла в процесі аналізу співавторами проблеми проф. М.М. Шеремети (Математичні Студії, 2024).)
5. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions.* Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Chyslo, 20(76), 15-23. 2025, P. 15-23. (входить до категорії Б наукових фахових видань України)
   https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20(76)-15-23
   (Особисті внески співавторів: основний результат статті (теорема 2.1), твердження Proposition 2.1 належать здо-

бувачу, постановка задачі– О.Б. Скасківу.)

6. Боднарчук А.Ю., Сало Т.М., Скасків О.Б. *Інтеграли типу Лапласа-Стілт'єса: співвідношення Бореля і h-міра виняткової множини.* Вісник Львів. ун-ту, серія мех-мат, 2026, випуск 98, с. 192-197. (входить до категорії Б наукових фахових видань України) p://dx.doi.org/10.30970/vmm.2026.98.192-197
(Особисті внески співавторів: результати статті, що включені у статтю з дозволу співавторів, в однаковій мірі належать А.Ю. Боднарчуку і Т.М. Сало, О.Б. Скасківу.)

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

8. Bandura A.I., Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *About Borel type relation for some positive integrals.* Altay Conference Proceedings in Mathematics, 2 (2025), No. 1, pp. 40-47. https://doi.org/10.64700/altay.20
9. Bodnarchuk A.Yu., Kuryliak M.R. *On the sharpness of the Hayman-type analogue of the Wiman inequality for entire Dirichlet series*, Matematychni Studii, V. 66, №1, 2026, 38-42.
10. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series.* International Conference of Young Mathematicians. The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine June 4-6, 2025, Kyiv, Ukraine
11. Bodnarchuk A.Yu., Dolynyuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions.* International workshop on modern problems of analysis, optimization, approximation and their applications. June 25-27, 2025. Abstracts. – Rome, 2025. – P. 19-21.

12. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B. *On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series*. International conference "Complex and hypercomplex analysis and their applications". August 6-10, 2025. Abstracts. – Zhytomyr, 2025. – P. 7-8.
13. Боднарчук А.Ю., Куриляк М.Р., Скасків О.Б. *Про абсциси збіжності випадкових гаусових рядів Діріхле*. Міжнародна конференція присвячена 75-й річниці від дня народження Володимира Маслюченка. 25-27 вересня, 2025. Тези доповідей. – Чернівці, 2025. – С. 17-18.
14. Боднарчук А.Ю., Куриляк М.Р., Скасків О.Б. *Про абсциси збіжності випадкових гаусових рядів Діріхле*. Achievements of 21st Century Scientific Community: Proceedings of the 3rd International Scientific and Practical Internet Conference. Вересень 18-19, 2025. Abstracts. – Dnipro, Ukraine, 2025. – P. 73-74.
15. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. 5 Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Recent Trends in Science»". Травень 14-15, 2026. – Дніпро, Україна. – С. 7-9.
16. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. Conference of Young Mathematicians. The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine June 3-5, 2026, Kyiv, Ukraine
17. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B. *On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions*. Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та суміжні питання» з нагоди 70-річчя профе-

сора Анатолія Романюка. Червень 17-21, 2026. – Світязь, Волинська область, Україна.

Відомості про апробацію результатів дисертації

1. International Conference of Young Mathematicians. The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine June 4-6, 2025, Kyiv, Ukraine. (Київ, 4-6 червня 2025 року, дистанційна форма участі, усна доповідь).
2. International workshop on modern problems of analysis, optimization, approximation and their applications. June 25-27, 2025. (Рим, 25–27 червня 2025 року, дистанційна форма участі, усна доповідь).
3. International conference "Complex and hypercomplex analysis and their applications". August 6-10, 2025. (Житомир, 6–10 серпня 2025 року, очна форма участі, усна доповідь).
4. Міжнародна конференція присвячена 75-й річниці від дня народження Володимира Маслюченка. 25-27 вересня, 2025. (Чернівці, 25–27 вересня 2025 року, заочна форма участі).
5. Achievements of 21st Century Scientific Community: Proceedings of the 3rd International Scientific and Practical Internet Conference. (Дніпро, 18–19 вересня 2025 року, заочна форма участі).
6. 5 Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Recent Trends in Science»"(Дніпро, Україна, травень 14-15, 2026 року, заочна форма участі).
7. Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, Україна, червень 3-5, 2026 року, дистанційна форма участі, усна доповідь).

8. Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та суміжні питання» з нагоди 70-річчя професора Анатолія Романюка (Світязь, Волинська область, Україна, червень 17-21, 2026 року, дистанційна форма участі, усна доповідь).
9. Львівський міський семінар з теорії аналітичних функцій, керівники проф. О.Б. Скасків, проф. І.Е. Чижиков, проф. М.В. Заболоцький, проф. П.В. Філевич, (Львів, 2022–2026 роки, очна форма участі, усні доповіді).
10. Львівський міський семінар з теорії потенціалу та застосувань, керівники семінару проф. Скасків О., проф. Куриляк А., проф. Чижиков І. (Львів, 2022–2026 роки, очна форма участі, усні доповіді).