В И С Н О В О К

про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів
“Асимптотичні властивості рядів Тейлора-Діріхле”
здобувача ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 “Математика та статистика”
за спеціальністю 111 “Математика”
Боднарчука Андрія Юрійовича

1. Актуальність теми дисертації

Функціональні ряди, як добре відомо, природно виникають у різних розділах математики, як ефективний інструмент дослідження в руках аналітика. В основі багатьох досягнень математики до XIX ст. стали чудові властивості як поліномів в цілому, так і багатьох їхніх послідовностей спеціального вигляду. Ряди Діріхле, які прийнято розглядати як природне узагальнення степеневих рядів, як і степеневі ряди, активно застосовуються для аналізу властивостей аналітичних розв’язків диференційних рівнянь. Разом з цим обидва ці класи рядів виникають як природний об'єкт дослідження в теорії ймовірностей (твірні функції цілочисельних розподілів, характеристичні функції дискретних розподілів). А в аналітичній теорії диференційних рівнянь нескінченного порядку, поруч з рядами Діріхле, у випадку, коли твірна функція такого рівняння має кратні корені, виникають ряди Тейлора-Діріхле. Серед основних методів дослідження відзначимо методи теорії Неванлінни, методи теорії цілих і аналітичних функцій обмеженого l-індексу, особливе місце займає класичний метод Вімана-Валірона, в основі якого лежить застосування властивостей опуклості логарифма максимального члена і неспадання центрального індексу ряду, яким дана функція задається. Останніми роками в працях М.М. Шеремети разом з співавторами відроджується давній інтерес до таких рядів, як до самостійного об'єкту дослідження. Зокрема, до регулярно збіжних рядів вигляду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\lambda_n)$. Відзначимо, що до описаного класу рядів належать і класичні ряди Тейлора-Діріхле, які, наприклад, природно виникають при дослідженні лінійних однорідних диференційних рівнянь нескінченного порядку, цілі характеристичні функції яких мають нескінченну кількість кратних коренів. У цьому зв'язку нагадаємо також давню відкриту проблему дослідження обмеженості l-індексу цілих розв'язків таких рівнянь.

Тому, актуальність проблеми дослідження асимптотичних властивостей таких рядів нікуди не зникала, позаяк, відчувається нестача як результатів, так і результативних методів, що дозволили б істотно просунутися в дослідженні класичних проблем (таких, як щойно сформульована) для цілих функцій, що зображуються рядами з тих чи інших класів функціональних рядів.

Серед закордонних аналітиків важко, мабуть відшукати таких, що не приділяли уваги цим питанням. Вкажемо лише на деякі прізвища, вклад яких виявився найбільш вагомим: A. Wiman, G. Valiron, E. Borel, W. Saxer, G. Polya, A.J. Macintyre, H. Wittich, P. Erdös, T. Kövari, W.K. Hayman, W.H.J. Fuchs, K.-G. Grosse-Erdmann, P.C. Fenton, Sh. Strelitz, A. Schumitzky, P. Lévy, J. Gopala Krishna, J. Rossi, M.M. Strumia.

Варто наголосити на тому, що в основі дослідження лежали властивості функціональних рядів (степеневі ряди, ряди Діріхле, ряди Тейлора-Діріхле), якими зображалися відповідні цілі чи аналітичні функції. Не можна не згадати також дослідження, які виконали в свій час Харківські математики Й.В. Островський (певний аналог методу Вімана-Валірона для цілих функцій від багатьох змінних та його застосування до характеристичних функцій ймовірнісних законів) та В.В. Зимогляд (застосування отриманих результатів до аналітичної теорії диф. рівнянь). У модельному випадку рядів типу Тейлора-Діріхле вигляду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{m_n} e^{z\lambda_n}$ лише недавно О.Б. Скасківим разом з деякими своїми учнями, було отримано істотні просування в дослідженні таких рядів.

У зв'язку зі сказаним вище не повинно виникати сумнівів в актуальності проведеного у дисертаційній роботі дослідження асимптотичних властивостей як рядів типу Тейлора-Діріхле.

Тему дисертації “Асимптотичні властивості рядів Тейлора-Діріхле” затверджено Вченою радою Львівського національного університету імені Івана Франка, протокол № 39/12 від 16 грудня 2022 року.

2. ***Зв’язок теми дисертації з державними програмами, науковими напрямами університету та кафедри.***

Дисертаційну роботу виконано відповідно до плану наукових досліджень кафедри теорії функцій та функціонального аналізу механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації є складовою частиною досліджень за темою НДР “Нові ймовірнісно-аналітичні методи у комплексному аналізі та теорії операторів” (номер держреєстрації 0124U002722, науковий керівник проф. О.Б. Скасків), яку виконували в межах робочого часу викладачі, а також аспіранти.

3. ***Особистий внесок здобувача в отриманні наукових результатів.***

Дисертаційна робота є самостійним науковим дослідженням. Наведені в роботі основні наукові результати отримані автором самостійно.

Зі статей, виконаних у співавторстві, у дисертацію включені з повними доведеннями результати, які належать лише авторові дисертації або виконані у співавторстві і внесені до дисертації з дозволу співавторів. Доведення кількох

тверджень допоміжного характеру, отриманих співавторами здобувача, а також тих, що додатково відображають результати дисертації (але не віднесені до основних результатів дисертації), також наводяться для повноти картини у рукописі дисертації з люб'язного дозволу співавторів. Детально особисті внески співавторів розписано нижче.

4. ***Достовірність та обґрунтованість отриманих результатів та запропонованих автором вирішень, висновків, рекомендацій.***

Дисертаційна робота містить повні та строгі доведення всіх наукових результатів.

Матеріали дисертації апробовано на восьми міжнародних і українських наукових конференціях, а також на наукових семінарах: міському з теорії аналітичних функцій та з теорії потенціалу і застосувань у Львівському національному університеті імені Івана Франка.

Результати, наведені в дисертації, опубліковано в шести наукових статтях у рецензованих наукових журналах, що входять до переліку наукових фахових видань України, в тому числі у двох статтях у науковому виданні (Matematychni Studii), віднесеному до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank.

5. ***Ступінь новизни основних результатів дисертації порівняно з відомими дослідженнями аналогічного характеру.***

У дисертаційній роботі вперше отримані наступні нові наукові результати:

- за додаткової умови на співвідношення між ``кроками'' степенів і показників отримано підтвердження гіпотези (О.Б. Скасків, 2013), що стосується існування для довільних послідовностей степенів і показників (за цієї додаткової умови), ряду Тейлора-Діріхле, h-міра виняткової множини для якого у теоремі типу Фентона є нескінченною;
- знайдено нові умови , які забезпечують існування центрального індекса ряду і асимптотичну рівність суми ряду типу Тейлора-Діріхле та його максимального члена;
- описано достатні умови, що гарантують виконання асимптотичного співвідношення типу Бореля для деяких типів функціональних рядів за системою функцій $f(x\lambda_n)$ та $f(x+\lambda_n)$ і для додатних інтегралів, які є узагальненням таких рядів; ці результати віддзеркалюють інший погляд і є відмінними від твердження з гіпотези М.М. Шеремети (2024);
- досліджено стійкість максимального члена ряду для вказаних у попередньому пункті деяких типів функціональних рядів за системою функцій.

6. *Перелік наукових праць, які відображають основні результати дисертації*

6.1. Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Боднарчук А.Ю., Куриляк М.Р., Скасків О.Б.: Про абсцису існування максимального члена випадкових рядів Діріхле з довільними додатними показниками, Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2022. Випуск 94. С. 79--88.\\ http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.94.079-088

(Особисті внески співавторів: твердження 2 належить здобувачеві, твердження 3 належить всім авторам в однаковій мірі, постановка задачі – О.Б. Скасківу, твердження 9 в однаковій мірі належить О.Б. Скасківу та М.Р. Куриляк, а всі інші твердження належать М.Р. Куриляк)

2. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B.: On the sum and maximal term of Taylor-Dirichlet type series, Precarpathian Bul. Shevchenko Sci. Soc., 19 (73) (2024), 41--46. https://doi.org/10.31471/2304-7399-2024-19(73)-41-46

(Особисті внески співавторів: кінцеве доведення леми 2.1, та теорема 2.2, ідея доведення і постановка задачі – О.Б. Скасківу)

3. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B.: On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions, Precarpathian Bul. Shevchenko Sci. Soc., 20 (76) (2025), 15--23
   https://doi.org/10.31471/2304-7399-2024-19(73)-41-46

(Особисті внески співавторів: основний результат статті (теорема 2.1), твердження Proposition 2.1 належить Боднарчуку А.Ю.,, постановка задачі – О.Б. Скасківу.)

4. Боднарчук А.Ю., Сало Т.М., Скасків О.Б.: Інтеграли типу Лапласа-Стілт'єса: співвідношення Бореля і h-міра виняткової множини. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех-мат. 2026. Вип. 98. С. 192--197.
http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2026.98.192-197

(Особисті внески співавторів: основний результат статті в однаковій мірі належить всім авторам статті)

6.2. Публікації у наукових періодичних виданнях, що індексуються у наукометричних базах Scopus та/або Web of Scince Core Collection:

5. Bodnarchuk A.Yu., Gal' Yu.M., Skaskiv O.B.: On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series, Mat. Stud. 61 (2024), no. 1, 109--112. (Scopus, Q2) http://doi.org/10.30970/ms.61.1.109-112

(Особисті внески співавторів: А.Ю. Боднарчуку належить доведення теореми 2, О.Б. Скасківу належить постановка задачі , а також формулювання нової проблеми 2 в прикінцевих пунктах статті, Ю.М.Галеві разом з О.Б. Скасківим належить верифікація доведення теореми, що увійшла в дисертацію)

6. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B., Trusevych O.M.: About Borel type relation for some positive functional series, Mat. Stud. {\bf63} (2025), no.1, 98--101. (Scopus, Q2) https://doi.org/10.30970/ms.63.1.98-101

(Особисті внески співавторів: теорема 2 належить А.Ю. Боднарчуку, твердження Corollary 1 належить А.Ю. Боднарчуку і О.М. Трусевич в однаковій мірі, ідея постановки задачі – О.Б. Скасківу)

6.3. Статті, що додатково відображають результати дисертації:

7. Bandura A.I., Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B.: About Borel type relation for some positive integrals, Altay Conference Proceedings in Mathematics. 2 (2025), no. 1, 40--47 https://doi.org/10.64700/altay.20

(Особисті внески співавторів: стаття в однаковій мірі належить всім трьом авторам, постановки задачі – О.Б. Скасківу)

8. Bodnarchuk A.Yu., Kuryliak M.R. On the sharpness of the Hayman-type analogue of the Wiman inequality for entire Dirichlet series, Mat. Stud., 66 (2026), no.1, 30--34. (Scopus, Q2) {https://doi.org/10.30970/ms.66.1.30-34}

(Особисті внески співавторів: результати статті в однаковій мірі належить обидвом авторам і наведені в дисертації з повними доведеннями з дозволу співавторки.)

7. *Апробація основних результатів дослідження на конференціях, симпозіумах, семінарах тощо.*

Результати дисертації апробовано на 8 наукових конференціях різного рівня, а також на 12 засіданнях наукових семінарів, а отже, належно апробовані.

1. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B.: On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series}. International Conference of Young Mathematicians. The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. June 4-6, 2025, Kyiv, Ukraine
2. Bodnarchuk A.Yu., Dolynyuk M.M., Skaskiv O.B.: On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions. International workshop on modern problems of analysis, optimization, approximation and their applications. June 25-27, 2025. Abstracts. -- Rome, 2025. -- P. 19-21.
3. Bodnarchuk A.Yu., Skaskiv O.B.: On the h-measure of an exceptional set in Fenton-type theorem for Taylor-Dirichlet series. International conference "Complex and hypercomplex analysis and their applications". August 6-10, 2025. Abstracts. -- Zhytomyr, 2025. -- P. 7-8.
4. Bodnarchuk A.Yu., Kyruliak M.R., Skaskiv O.B.: On the abscissas of convergence of random gaussian Dirichlet series. International conference dedicated to 75th anniversary of the birthday of Volodymyr Masliuchenko. September 25-27, 2025. Abstracts. -- Chernivci, 2025. -- P. 17-18.

5. Bodnarchuk A.Yu., Kuryliak M.R., Skaskiv O.B.: On the abscissas of convergence of random gaussian Dirichlet series. Achievements of 21st Century Scientific Community: Proceedings of the 3rd International Scientific and Practical Internet Conference. September 18-19, 2025. Abstracts. -- Dnipro, Ukraine, 2025. -- P. 73-74.

6. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B.: On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions. 5th International Scientific and Practical Internet Conference «Recent Trends in Science». May 14-15, 2026. -- Dnipro, Ukraine. -- С. 7-9.

7. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B.: On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions. Conference of Young Mathematicians. The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine June 3-5, 2026, Kyiv, Ukraine

8. Bodnarchuk A.Yu., Dolyniuk M.M., Skaskiv O.B.: On the stability of the maximum term of functional series in a system of functions. International Conference “Theory of Function Approximation and Related Topics” in honor of Professor Anatoliy Romanyuk’s 70th birthday. June 17–21, 2026. — Svitiaz, Volyn Oblast, Ukraine.

8. Наукове значення виконаного дослідження із зазначенням можливих наукових галузей та розділів програм навчальних курсів, де можуть бути застосовані отримані результати

Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у теорії аналітичних функцій. Також отримані у роботі результати можуть бути використані при підготовці навчальних дисциплін із теорії функціональних рядів, узагальнених рядів Діріхле, регулярно збіжних функціональних рядів.

9. Практична цінність результатів дослідження із зазначенням конкретного підприємства або галузі, де вони можуть бути застосовані

Отримані результати можуть бути використані в математичних дослідженнях в таких наукових установах та закладах вищої освіти як Інститут математики НАН України, Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара тощо, які є осередками науково-дослідницької діяльності в теорії аналітичних функцій.

10. Оцінка структури дисертації, її мови та стилю викладення.

Дисертація за структурою, мовою та стилем викладення відповідає вимогам МОН України.

Дисертацію заслухано та обговорено на науковому семінарі кафедри теорії функцій і функціонального аналізу механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка 22 вересня 2022 року. (протокол № 2 від 22 вересня 2026 року).

У ході обговорення дисертації суттєвих зауважень, які стосуються суті роботи, не було висунуто.

Дисертація Боднарчука Андрія Юрійовича "Асимптотичні властивості рядів Тейлора-Діріхле" є завершеною науковою працею в рамках поставлених задач. Основні результати опубліковано в шести наукових статтях у журналах з переліку наукових фахових видань України, з них 2 – у науковому виданні, віднесеному до другого квартиля (Scopus, Q2) відповідно до класифікації Scimago. Дві публікації, що додатково відображають результати дисертації, опубліковано в науковому періодичному виданні з математики іншої держави (Туреччина), яка входить в Організацію економічного співробітництва та розвитку (ОЕСР), та в журналі Matematychni Studii, віднесеному до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank.

На основі сказаного вище можна зробити такі висновки щодо поданої дисертаційної роботи:

1. За актуальністю обраної теми, обсягом, достовірністю та рівнем апробації отриманих результатів, науковою новизною, обґрунтованістю висновків, практичною цінністю дисертаційна робота Боднарчука Андрія Юрійовича «Асимптотичні властивості і розподіл значень випадкових аналітичних функцій» відповідає вимогам наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» та п. 6 Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 року № 44 (із змінами, внесеними згідно з постановами Кабінету Міністрів України від 21.03.2022 року № 341, від 19.05.2023 року № 502 та від 03.05.2024 № 507).

2. Дисертація відповідає спеціальності 111 «Математика» (галузь знань 11 «Математика та статистика»).

3. Наукові праці Боднарчука Андрія Юрійовича, опубліковані за результатами дисертаційної роботи, за кількістю та якістю відповідають пп. 8-9 Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 року №44 (зі змінами).

4. Дисертація "Асимптотичні властивості рядів Тейлора-Діріхле" Боднарчука Андрія Юрійовича рекомендується для подання до розгляду та захисту у спеціалізованій вченій раді.

Головуючий на засіданні наукового семінару,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри теорії функцій
і функціонального аналізу
Львівського національного університету
імені Івана Франка, доцент Юрій ТРУХАН

28 вересня 2026

Підпис доцента Юрія ТРУХАНА засвідчую,
Вчений секретар
Львівського національного
університету імені Івана Франка Ольга ГРАБОВЕЦЬКА